ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 511.325

На правах рукописи

Нозиров Опокхон Окилхонович

Средние значения функций Чебышёва и их приложения

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Душанбе – 2020

Работа выполнена в Таджикском национальном университете

Научный руководитель: **Рахмонов Зарулло Хусенович**
академик НАН Таджикистана,
доктор физико-математических наук,
профессор, директор Института
математики им. А. Джураева

Официальные оппоненты: **Аллаков Исмаил**,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры алгебры и геометрии
Термезского государственного университета
Мирзорахимов Шерали Хусенбоевич,
кандидат физико–математических наук,
доцент кафедры математического анализа
и дифференциальных уравнений
Бохтарского государственного
университета им. Н. Хусрава

Ведущая организация: Таджикский государственный педагогический
университет им. С.Айни

Защита состоится 09 апреля 2021 г. в 10:00 часов на заседании диссертационного совета 6D КОА-037 при Институте математики имени А. Джураева Национальной Академии наук Таджикистана по адресу: 734063, г. Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Института математики имени А. Джураева Национальной Академии наук Таджикистана, а также на сайте http://www.mitas.tj

Автореферат разослан “___” _______ 2021 г.

Ученый секретарь диссертационного совета 6D КОА-037,
кандидат физико-математических наук, доцент Каримов О.Х.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Функцией Чебышёва называется сумма

$$\psi(y,\chi)=\sum_{n\le y}\Lambda(n)\chi(n),$$

где $\chi(n)$ — характер Дирихле по модулю q, $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта.

При решении ряда проблем теории простых чисел возникает вопрос о поведении средних значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле, то есть оценка сверху для суммы

$$t(x;q)=\sum_{\chi \bmod q}\max_{y\le x}|\psi(y,\chi)|.$$

В круг таких проблем входят: оценка тригонометрических сумм с простыми числами, в том числе линейные тригонометрические суммы с простыми числами, распределение чисел Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях.

В данной диссертации мы изучаем эти проблемы, используя поведение $t(x;q)$ — средних значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле по модулю q. Напомним коротко о методах исследования этих величин и тех приложениях, которые получаются из оценок $t(x;q)$.

В 1937 г. И.М.Виноградов[1] создал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, основу которого составляют решето, и метод сглаживания двойных сумм. С помощью этого метода он впервые получил нетривиальную оценку тригонометрических сумм с простыми числами и, в частности, оценку линейной тригонометрической суммы с простыми числами вида

$$S(\alpha,x)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)e(\alpha n).$$

Получение оценки для $S(\alpha,x)$, в соединении с теоремами о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях, позволила И.М. Виноградову решить тернарную проблему Гольдбаха о представлении нечётного N в виде

$$N=p_1+p_2+p_3.$$

[1] Виноградов И.М. Избранные труды // М:Изд-во АН СССР, 1952.

Среднее значение функции Чебышёва впервые исследовал Ю.В.Линник[2] для вывода нетривиальной оценки линейной тригонометрической суммы с простыми числами $S(\alpha, x)$. Он с помощью плотностных теорем для нулей L-рядов Дирихле и идей Г.Харди и Д.Литтлвуда[3], применявшихся ранее в проблеме Гольдбаха, дал новый вариант нетривиальной оценки $S(\alpha, x)$. Тем самым Ю.В.Линником было дано новое доказательство теоремы И.М.Виноградова о трёх простых числах (проблема Гольдбаха).

Н.Г.Чудаков[4] также предложил подобный метод исследования линейных тригонометрических сумм с простыми числами с помощью оценки средних значений функций Чебышёва, получение которой, в свою очередь основывается на распределении нулей L-рядов Дирихле в критической полосе.

А.А.Карацуба[5] разработал метод решения мультипликативных тернарных задач и в соединении с методом И.М.Виноградова — оценок сумм с простыми числами, оценил самый простой случай величины $t(x;q)$. Следствием этой оценки является теорема о распределении чисел вида $p(p'+a)$ в коротких арифметических прогрессиях.

Г.Монтгомери[6], пользуясь своей плотностей теоремой, показал, что

$$t(x;q) \ll (x + x^{\frac{5}{7}}q^{\frac{5}{7}} + x^{\frac{1}{2}}q)\mathscr{L}^{17}, \qquad \mathscr{L} = \ln xq. \tag{1}$$

Этот результат уточнил Р.Вон[7]. Он с помощью представления

$$\frac{L'}{L} = \left(\frac{L'}{L} + F\right)(1 - FG) + (L' + LF)G - F,$$

где F и G – соответственно частные суммы для рядов Дирихле – $\frac{L'}{L}$ и $\frac{1}{L}$, доказал, что

$$t(x;q) \ll x\mathscr{L}^3 + x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}^{\frac{7}{2}}. \tag{2}$$

[2] Линник Ю.В. Избранные труды // Ленинград. Наука, 1980

[3] Hardy G.H., Littlwood I.E. Some problems of partitio numerorum III. On the expression of number as a sum of primes // Acta Math, 1923, v. 44, pp. 1–70.

[4] Чудаков Н.Г. On Goldbach-Vinogradov's theorem // Acta Math (2).1947. T. 48(3). C. 515 – 545.

[5] Карацуба А.А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // Докл. АН СССР, 1970, Т. 192, –№ 4, С. 724 – 727.

[6] Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел // Москва, 1974.

[7] Vaughan R.O. Mean value theorems in prime number theory // J.London Math. Soc. (2), 10(1975), 153 – 162.

В 1989 году З.Х.Рахмонов в работе[8] показал, что

$$t(x;q) \ll (x + x^{\frac{5}{6}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}q)x^{\delta}. \tag{3}$$

Это оценка сильнее (1) и слабее (2), но доказательство, в отличие от (1) и (2), проводится элементарно и опирается на метод А.А.Карацубы решения мультипликативных тернарных задач[5].

Из оценок (1), (2) и (3) для $t(x;q)$ видно, что из трёх слагаемых, присутствующих в этих оценках, два крайних равны между собой с точностью конечной степени логарифма и их нельзя вообще улучшить относительно степеней x и q. Поэтому дальнейшим продвижением в оценке $t(x;q)$ может быть только улучшение второго слагаемого. В 1993 – 1995 гг. З.Х.Рахмонов[9,10,11] создал новый метод исследования средних значений арифметических функций типа функции Чебышёва по всем характерам Дирихле. Применение этого метода позволило ему получить наилучшие результаты в следующих проблемах:

- оценки средних значений функций Чебышёва (в том числе с линейным и квадратичным экспоненциальным весом в коротких интервалах) по всем характерам Дирихле данного модуля;

- оценки средних значений функций Чебышёва по всем примитивным характерам Дирихле, модуль которых не превосходит заданной величины,

и, в частности, для $t(x;q)$ — среднего значения функции Чебышёва всем характерам Дирихле данного модуля[9,10] доказал, что

$$t(x;q) \ll \left(x + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}q\right)\mathscr{L}^{34}. \tag{4}$$

Первая глава диссертации посвящена уточнению последней оценки.

---

[8] Рахмонов З.Х. Распределение чисел Харди Литтвлуда в арифметических прогрессиях // Известия АН СССР. Серия математическая. 1989. Т. 52, –№ 1, С. 211 – 224.

[9] Рахмонов З.Х. Средние значения функции Чебышёва // Докл. АН России. 1993, Т. 331(3), С. 281–282.

[10] Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения // Известия РАН. Серия математическая. 1993. Т 57, –№ 4, С. 55 – 71.

[11] Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Труды МИРАН, 1994, Т. 207, С. 286 – 296.

Как мы уже отметили, И.М.Виноградов в 1937 г. создал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, и в частности, он[1] обнаружил, что суммы по простым числам могут быть составлены путём только сложения и вычитания из сравнительно небольшого числа других сумм, хорошие оценки которых могут быть получены с помощью метода оценок двойных сумм, не имеющих какого-либо отношения к теории L-рядов Дирихле. В частности, такой суммой оказалась линейная тригонометрическая сумма с простыми числами $S(\alpha, x)$, где α — вещественное число и при условии

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}, \qquad (a, q) = 1,$$

была найдена оценка:

$$S(\alpha, x) \ll (xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}})x^{\varepsilon}, \tag{5}$$

доказательство которой проводится элементарным методом.

Впервые сумму $S(\alpha, x)$ аналитическим методом оценил Ю.В.Линник[2] и дал новый вариант нетривиальной оценки линейной тригонометрической суммы с простыми числами в следующей формулировке: *пусть* α*- вещественное число,* $N \geq N_0 > 0$*,* $\alpha = \frac{a}{q} + \lambda$*, где* $(a, q) = 1$*,* $1 < q \leq \tau = (\ln x)^{1000}$*,* $\tau^{1000}x^{-1} \leq |\lambda| \leq (q\tau)^{-1}$*, тогда справедлива оценка:*

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) \exp\left(-\frac{n}{N}\right) e(\alpha n)\right| < N(\ln N)^{-1000}.$$

Г.Монтгомери[6], пользуясь своей оценкой средних значений функций Чебышёва (1), доказал, что

$$S\left(\frac{a}{q}, x\right) \ll \left(xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{7}}q^{\frac{3}{14}} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right)\mathscr{L}^{17}. \tag{6}$$

Он также доказал, что если $\eta \leq x^{\frac{1}{4}}$, $\eta \leq q \leq x\eta^{-1}$, $|\alpha - a/q| \leq 2\eta(qx)^{-1}$, $(a, q) = 1$, то

$$S(\alpha, x) \ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{17}. \tag{7}$$

Р.Вон[7], применяя свою оценку для средних значений функций Чебышёва (2), уточнил результат Г.Монтгомери. Он доказал, если $|\alpha - a/q| \leq q^{-2}$,

$(a,q)=1$, то имеет место оценка

$$S(\alpha,x)\ll(xq^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{7}{8}}q^{-\frac{1}{8}}+x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{1}{8}}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}})\mathscr{L}^4, \tag{8}$$

и, если $\eta\le x^{\frac{1}{3}}$, $\eta\le a\le x\eta^{-1}$, $|\alpha-a/q|\le 2\eta(qx)^{-1}$, $(a,q)=1$, то

$$S(\alpha,x)\ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^4. \tag{9}$$

Отметим, что оценки (6), (7), (8) и (9), полученные аналитическим методом, слабее оценки (5), полученной И.М.Виноградовым элементарным методом.

З.Х.Рахмонов[9,10], воспользовавшись своей оценкой средних значений функций Чебышёва (4), вывел оценку, в которой множитель x^ε в (5) заменяется на конечную степень логарифма, то есть если $|\alpha-a/q|\le q^{-2}$, $(a,q)=1$, тогда

$$S(\alpha,x)\ll(xq^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}})\mathscr{L}^{35}. \tag{10}$$

и если $1\le\eta\le x^{\frac{2}{5}}$, $\eta\le q<x\eta^{-1}$, $|\alpha-a/q|\le 2\eta(qx)^{-1}$, $(a,q)=1$, то справедлива оценка

$$S(\alpha,x)\ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{35}. \tag{11}$$

Во второй главе уточняются степени логарифмов в (10) и (11).

Харди и Литтлвуд[12] сформулировали гипотезу о том, что все достаточно большие натуральные числа n разлагаются на сумму простого и степени натурального числа в виде

$$n=p+m^k,\qquad k\ge 2$$

Такие числа мы назовем числами Харди-Литтлвуда. Г.Бабаев[13] опроверг эту гипотезу, а именно построил бесконечную последовательность натуральных чисел, не являющихся числом Харди - Литтлвуда. Отсюда, в частности, следует, что существуют l, $1\le l\le q$, для которых выполняется неравенство

$$H_k(q,l)>q,\qquad k\ge 2,$$

[12] Hardy G.H., Wright E.M. An introduction to theory of numbers // Oxford at the clarendon press. 1954.

[13] Бабаев Г.Б. Замечание к работе Дэвенпорта и Хейлброна // УМН. 1958. Т. 13, Т. 84, В. 6, С. 63-64.

где $H_k(q,l)$ — наименьшее число Харди-Литтлвуда вида $p+m^k$, лежащее в арифметической прогрессии $qt+l$, $t=0,1,2,\ldots$, q – целое. Поэтому, естественно, можно рассматривать следующие две задачи.

1. Оценить сверху величину $H_k(q,l)$ как можно лучше.
2. Получить асимптотический закон распределения чисел Харди - Литтлвуда, лежащих в очень коротких арифметических прогрессиях.

В случае q – простое число и $k\geq 2$, эти две задачи исследовались в работах[8,9,10], и было доказано: *пусть q – простое, $x\geq 2$, $(l,q)=2$, тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{\substack{n\leq x,\, m\leq x^k\\ n+m^k\equiv l \pmod q}}\Lambda(n)-\frac{x^{\frac{k+1}{k}}}{\varphi(q)}\ll x\exp\left(-c\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\right)+\left(xq^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{4}{5}}q+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}}\right)\mathscr{L}^{35}. \quad (12)$$

Из этой формулы в частности, следует, что

$$H_2(q,l)\ll q^{\frac{3}{2}}\ln^{35}q. \quad (13)$$

Во третьей главе при $k=2$ этот результат уточняется и обобщается на случай, когда разность прогрессии является степенью простого числа.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета на 2016-2020 гг. по теме «Короткие тригонометрические суммы и их приложения».

Цель и задачи исследования. Целью работы является исследование поведения средних значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле и его приложения оценке тригонометрических сумм с простыми числами и распределение чисел Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях.

В соответствие с поставленной целью выделяются следующие задачи:

1. получение более точной оценки сумм значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля;
2. получение новой оценки линейной тригонометрической суммы с простыми числами;

3. уточнение остаточного члена асимптотической формулы для количества чисел Харди-Литтлвуда, лежащих в коротких арифметических прогрессиях и обобщение этой формулы на случай, когда разность прогрессии является степенью простого числа.

Объекты исследования. Объектами исследования являются суммы значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля, линейные тригонометрические суммы с простыми числами и количество натуральных представимых в виде суммы простого и квадрата натурально числа, лежащего в арифметических прогрессиях с растущей разностью.

Методы исследования. В основе исследований лежат современные методы аналитической теории чисел, а именно:

- метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградова;
- метод комплексного интегрирования;
- методы L-рядов Дирихле, основанные на среднем значении степеней L-рядов Дирихле в критической прямой;
- методы, основанные на современных теоремах о средних значениях рядов Дирихле;
- метод исследования средних значений арифметических функций типа функции Чебышёва по всем характерам Дирихле.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

1. получена более точная оценка сумм значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля;
2. найдена новая оценка линейной тригонометрической суммы с простыми числами;
3. уточнен остаточный член асимптотической формулы для количества чисел Харди-Литтлвуда, лежащих в коротких арифметических прогрессиях и эта формула обобщена на случай, когда разность прогрессии является степенью простого числа.

Положения, выносимые на защиту:

1. лемма об оценке среднего значения интеграла от модуля произведения кусков рядов Дирихле, если это произведение можно представить в виде произведения двух сумм, близких по порядку;

2. лемма об оценке среднего значения интеграла от модуля произведения кусков рядов Дирихле, если произведение длин первых двух сплошных сумм достаточно большая;

3. лемма об оценке среднего значения интеграла от модуля произведения кусков рядов Дирихле, если длина первой сплошной суммы достаточно большая;

4. теорема о новой оценке для сумм значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля;

5. теорема о новой оценке линейной тригонометрической суммы с простыми числами;

6. теорема об уточнении остаточного члена в асимптотической формуле для количества чисел Харди-Литтлвуда, лежащих в коротких арифметических прогрессиях и обобщении этой формулы на случай, когда разность прогрессии является степенью простого числа;

7. оценка сверху наименьшего числа Харди-Литтлвуда, лежащего в короткой арифметической прогрессии, разность которой является степенью простого числа;

Личный вклад автора. Задачи исследования были сформулированы научным руководителем работы, который оказывал консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, отраженные в разделе «Научная новизна», получены лично автором.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел и алгебраической теории чисел.

Степень достоверности проведенных исследований. Достоверность научных результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- международная научная конференция «Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел», посвящённая 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан, Курган-Тюбе, 27-28 октября 2017 г.

- республиканская научно-практическая конференция «Актуальные вопросы дифференциальных уравнений, математического анализа, алгебры и теории чисел и их приложения». Российско-Таджикский(Славянский) университет, Душанбе, 17 мая 2019г.

- международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённая столетию со дня рождения профессора Н.И.Фельдмана и девятностолетию со дня рождения профессоров А.И.Виноградова, А.В.Малышева и Б.Ф.Скубенко, Тула, 23-28 сентября 2019г.

- международная научная конференция, посвященная 70-летию профессора Джангибекова Гулходжи, Душанбе, 30-31 января 2020г.

- семинары отдела алгебры, теории чисел и топологии (2016 – 2020 гг.) и общеинститутский семинар (2016 – 2020 гг.) в Институте математики им. А. Джураева НАН Таджикистана;

- семинар кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 13 научных работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из списка обозначений, введения, трёх глав, заключения, списка цитированной литературы из 59 наименований, занимает 70 страниц машинописного текста и набрана на редакторе LaTeX.

Краткое содержание диссертации

Введение к диссертации содержит обзор результатов, относящихся к теме диссертации.

Первая глава состоит из четырёх параграфов, посвящена оценке $t(x,q)$ — средних значений функций Чебышёва по всем характерам по модулю q. В первом параграфе приводится краткая история исследований по оценке суммы $t(x,q)$ и формулируется основной результат главы теорема 1.1. Во втором параграфе приведены известные леммы, которые применяются в последующих параграфах.

Куски рядов Дирихле $L(s,\chi)$ и $L^{-1}(s,\chi)$ соответствующие целым положительным числам N_j, U_j и M_j определяются следующим образом

$$
\begin{aligned}
S_j(s,\chi) &= \sum_{U_j<n\leq 2N_j}\frac{\chi(n)}{n^s}, \qquad N_j\leq U_j<2N_j;\\
G_j(s,\chi) &= \sum_{M_j<m\leq 2M_j}\frac{\mu(m)\chi(m)}{m^s},
\end{aligned}
$$

а для натурального числа k выражение вида

$$
W_k(s,\chi)=\prod_{j=1}^{k}G_j(s,\chi)S_j(s,\chi),
$$

назовём произведением кусков рядов Дирихле $L(s,\chi)$ и $L^{-1}(s,\chi)$ и введем функцию

$$
t_k(q;M,N)=\sum_{\chi}{}^{''}\int_{-T}^{T}|W_k(0,5+it,\chi)|\,\frac{dt}{1+|t|},
$$

которая называется средним значением интеграла от модулей произведения кусков рядов Дирихле $L(s,\chi)$ и $L^{-1}(s,\chi)$ по всем примитивным характерам по модулю d, $d|q$. В третьем параграфе доказываются леммы 1.7, 1.10, 1.11, являющиеся основными утверждениями, позволившими получить новую оценку $t(x;q)$, в которых соответственно получены оценки суммы $t_k(q;M,N)$, то есть оценки среднего значения интеграла от модулей произведения кусков рядов Дирихле $L(s,\chi)$ и $L^{-1}(s,\chi)$, если:

- произведение $W_k(0,5+it,\chi)$ можно представить в виде произведения двух сумм, близких по порядку;
- величина Y_1Y_2, то есть произведение длин первых двух сплошных сумм $S_1(s,\chi)$ и $S_2(s,\chi)$, достаточно большая;
- длина Y_1 сплошной суммы $S_1(s,\chi)$ достаточно большая.

Лемма 1.7. *Пусть $T\geq 2$, $M_1\ldots M_kN_1\ldots N_k=Y$, $k_1\leq k$, $k_2\leq k$, $k_1+k_2=r$, $2^rM_{j_1}\ldots M_{j_{k_1}}N_{i_1}\ldots N_{i_{k_2}}=X$. Тогда справедлива оценка:*

$$t_k(q;M,N)\ll (Y^{\frac{1}{2}}+X^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}+Y^{\frac{1}{2}}X^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}+q\mathscr{L}^2)\mathscr{L}^{r^2+2k^2-2rk-1}.$$

Лемма 1.10. *Пусть $M_1\ldots M_kN_1\ldots N_k=Y$, $Y\leq y$, $y\leq x$, $N_1\geq N_2\geq\ldots\geq N_k$ $T\geq N_1^{\frac{1}{2}}$, $q\leq T$. Тогда справедлива оценка:*

$$t_k(q;M,N)\ll\left(\left(\frac{Yq}{N_1N_2}\right)^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{(2(k-1)^2+4)}.$$

Лемма 1.11. *Пусть $M_1\ldots M_kN_1\ldots N_k=Y$, $Y\leq y$, $y\leq x$, $N_1\geq N_2\geq\ldots\geq N_k$ $T\geq N_1^{\frac{1}{2}}$, $q\leq T$. Тогда справедлива оценка:*

$$t_k(q;M,N)\ll\left(\left(\frac{Yq}{N_1}\right)^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{(2(k-0,5)^2+1)}.$$

В третьем параграфе также доказывается лемма 1.9 о приближении суммы $|S(0.5+it,\chi)|$, $|t|\leq T$, $T\leq T_0$ интегралом от модуля функции Дирихле $L(0.5+i(u+t),\chi)$ по интервалу $|u|\leq T_0$.

В четвёртом параграфе доказывается основной результат первой главы — новая оценка сумм значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля:

Теорема 1.1. *При $x\geq 2$ и $q\geq 1$ имеет место оценка:*

$$t(x;q)\ll x\mathscr{L}^{28}+x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{31}+x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}^{32}.$$

Полученная в этой теореме оценка является уточнением оценки (4), доказанной З.Х.Рахмоновым в 1993 г., доказательство которой проводится методом исследования средних значений арифметических функций типа функции Чебышёва по всем характерам Дирихле и формально его можно разделить на следующие два этапа:

1. воспользовавшись аналитическим вариантом метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградова (лемма 1.6) оценка $t(x;q)$ сводится к оценкам сумм $t_k(q;M,N)$ в виде
$$t(x,q) \ll x^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^9 \sum_{k=1}^{4} \max_{y\le x} t_k(q;M,N) + x + \varphi(q)\mathscr{L}^2.$$
2. оценка суммы $t_4(q;M,N)$ является самой сложной, для проведения которой рассматривается 7 возможных случаев величины произведения $M_1M_2M_3M_4$ и показывается, что в каждом случае можно применить одну из лемм 1.7, 1.10, 1.11.

Вторая глава также состоит из четырёх параграфов, посвящена оценке линейной тригонометрической суммы с простыми числами. В первом параграфе приводится краткая история исследований по оценке линейных тригонометрических сумм и формулируются основные результаты главы, а во втором параграфе приведены известные леммы, которые применяются в последующих параграфах.

В третьем параграфе, воспользовавшись доказанной в первой главе теоремой 1.1 об оценке средних значений функций Чебышёва, доказана оценка линейной тригонометрической суммы с простыми числами $S(\alpha,x)$ в случае, когда α является рациональным числом:

Теорема 2.1. *Пусть* $(a,q)=1$. *Тогда справедлива оценка:*
$$S\left(\frac{a}{q},x\right) \ll xq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{29} + x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{32} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}.$$

В четвёртом параграфе, пользуясь теоремой 2.1, теоремой Дирихле о приближении вещественных чисел рациональными числами и формулой частичного суммирования для линейной тригонометрической суммы с простыми числами $S(\alpha, x)$ при произвольном вещественной числе α получены оценки:

Следствие 2.1.1. *Пусть* $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$, $(a, q) = 1$, *тогда имеет место оценка:*

$$S(\alpha, x) \ll xq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33} + x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{32} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}.$$

Следствие 2.1.2. *Пусть* $\eta \le x^{\frac{2}{5}}$, $\eta \le q \le x\eta^{-1}$, $|\alpha - aq^{-1}| \le 2\eta(qx)^{-1}$, $(a, q) = 1$, *тогда справедлива оценка:*

$$S(\alpha, x) \ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}.$$

Эти оценки соответственно являются уточнением оценок (10) и (11).

Третья глава состоит из трёх параграфов и посвящена распределению чисел Харди и Литтлвуда в коротких арифметических прогрессиях. В первом параграфе приводится краткая история исследований по числам Харди-Литтлвуда и формулируются основные результаты главы, а во втором параграфе приведены известные леммы, которые применяются в последующих параграфах, а также доказывается лемма о сведении неполной суммы значений характеров от многочлена к полной смешанной сумме.

В третьем параграфе доказывается основной результат третьей главы асимптотическая формула для количества чисел Харди-Литтлвуда в коротких арифметических прогрессиях:

Теорема 3.1. *Пусть* $x \ge x_0$, $q = p^{\alpha}$, p *— нечётное простое число,* $p \ge \mathscr{L}^{58}$, α *— фиксированное натуральное число,* $(l, p) = 1$, $\rho(p, l)$ *— число решений сравнения* $n^2 \equiv l \pmod p$,

$$H_2(x; q, l) = \sum_{\substack{n \le x,\ m^2 \le x \\ n + m^2 \equiv l \pmod q}} \Lambda(n).$$

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$H_2(x; q, l) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\varphi(q)} \left(1 + O\left(\mathscr{L}^{-1} + \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{x}}\mathscr{L}^{29} + \frac{q}{x^{\frac{7}{10}}}\mathscr{L}^{32} + \frac{q^{1.5}}{x}\mathscr{L}^{33}\right)\right),$$

где постоянная под знаком O *зависит от* α.

Отметим, что эта формула становится нетривиальной, если

$$q \ll x^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}^{-\frac{68}{3}}.$$

Следствие 3.1.1. *Пусть* $q = p^{\alpha}$, p *– простое число,* α *– фиксированное натуральное число,* $(l, p) = 1$. *Тогда*

$$H_2(q, l) \ll q^{\frac{3}{2}} (\ln q)^{34}.$$

Полученная асимптотическая формула в теореме 3.1 и оценка сверху для $H_2(q, l)$ при $k = 2$ являются соответственно уточнением и обобщением формул (12) и (13) на случай, когда q – разность прогрессии является степенью простого числа.

Основные результаты и выводы

Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

1. найдена оценка среднего значения интеграла от модулей произведения кусков рядов Дирихле, если произведения кусков рядов Дирихле можно представить в виде произведения двух сумм, близких по порядку, [2-A, 5-A, 13-A];

2. найдена оценка среднего значения интеграла от модулей произведения кусков рядов Дирихле, если произведение длин первых двух сплошных сумм, достаточно большое, [2-A, 5-A, 13-A];

3. найдена оценка среднего значения интеграла от модулей произведения кусков рядов Дирихле, если длина первой сплошной суммы достаточно большая, [2-A, 5-A, 13-A];

4. получена более точная оценка сумм значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля, [2-A, 5-A, 12-A, 13-A];

5. найдена новая оценка линейной тригонометрической суммы с простыми числами, [4-A];

6. уточнён остаточный член в асимптотической формуле для количества чисел Харди-Литтлвуда, лежащих в коротких арифметических

прогрессиях и эта формула обобщена на случай, когда разность прогрессии является степенью простого числа,[1-А, 3-А, 6-А, 7-А, 8-А, 9-А, 10-А, 11-А];

7. найдена оценка сверху наименьшего числа Харди-Литтлвуда, лежащего в короткой арифметической прогрессии, разность которой является степенью простого числа, [1-А, 3-А, 6-А, 7-А, 8-А, 9-А, 10-А, 11-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов: Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применение в аналитической теории чисел и алгебраической теории чисел. Материалы диссертации могут использоваться при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

Публикации автора по теме диссертации

В рецензируемых изданиях из списка ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Минобрнауки РФ:

[1 – А]. Нозиров О.О. Распределение чисел Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа [Текст] / З.Х. Рахмонов, О.О. Нозиров // ДАН РТ., 2017, Т. 60, –№ 11 – 12, С. 549 – 554.

[2 – А]. Нозиров О.О. О среднем значении функций Чебышёва [Текст] / О.О. Нозиров // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2019, Т. 62, –№ 11 – 12, С. 613–618.

[3 – А]. Нозиров О.О. Наименьшее число Харди-Литтлвуда арифметической прогрессии с разностью, равной степени простого числа [Текст] / З.Х. Рахмонов, О.О. Нозиров // Доклады НАН Таджикистна, 2020, Т. 62, –№ 9 – 10, С. 631 – 639.

[4 – А]. Нозиров О.О. Оценки линейных тригонометрических сумм с простыми числами на основе средних значений функций Чебышёва [Текст] / О.О. Нозиров // Доклады НАН Таджикистна 2020 с. Т. 62, –№ 11 – 12, С. 747 – 755.

[5 – A]. Нозиров О.О. Об оценке сумм значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле по заданного модуля [Текст] / О.О. Нозиров // Вестник Таджикский национальный университет, 2020, –№ 4, С. 233 – 240.

В других изданиях

[6 – A]. Нозиров О.О. Наименьшее число Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа [Текст] / З.Х. Рахмонов, О.О. Нозиров // Материалы международной научной конференции «Дифференсиальные уравнения, математический анализ и теория чисел», посвящённой 25 – летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан, Курган-Тюбе, 27 – 28 октября, 2017г, С. 98 – 102.

[7 – A]. Нозиров О.О. Наименьшее число Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа [Текст] / О.О. Нозиров // Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции, материалы международной научной конференции, посвящённой 90 – летию академика АН Республики Таджикистан, лауреата государственной премии имени Абуали Ибн Сино Михайлова Леонида Григорьевича. Душанбе, 27 – 28 февраля 2018г, С. 115 – 119.

[8 – A]. Нозиров О.О. Числа Харди-Литтлвуда в арифметических проггрессиях с разностью, равной степени простого числа [Текст] / О.О. Нозиров // Современные проблемы алгебры и теории чисел, материалы научно-теоретической конференции, посвящённой 90 – летию со дня рождения профессора Бабаева Г.Б. Душанбе, 14 – 15 декабря 2018г, С. 68 – 71.

[9 – A]. Нозиров О.О. Наименьшее число Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа [Текст] / О.О. Нозиров // Актуальные вопросы дифференциальных уравнений, математического анализа, алгебры и теории чисел и их приложения. Российско-Таджикский(Славянский) университет, материалы Республиканского научно-практической конференции. Душанбе, 17 мая 2019г, С. 216 – 218.

[10 – A]. Нозиров О.О. Распределение чисел Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа [Текст] / О.О. Нозиров // Математический анализ и его приложения, материалы Республиканской научной конференции, посвящённой 80 – летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова Таджикистан, Душанбе, 10 – 11 июня 2019г, С. 179 – 181.

[11 – A]. Нозиров О.О. Числа Харди-Литтлвуд в арифметических прогрессиях [Текст] / З.Х. Рахмонов, О.О. Нозиров // Алгебра , теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения профессора Н.И.Фельдмана и девяностолетнею со дня рождения профессоров А.И.Виноградова, А.В.Малышева и Б.Ф.Скубенко. Тула, 23 – 28 сентября 2019г, С. 26 – 30.

[12 – A]. Нозиров О.О. Новая оценка сумм значений функций Чебышёва [Текст] / О.О. Нозиров // Материалы международной научной конференции, посвящённой 70-летию профессора Джангибекова Гулходжа. Душанбе, 30 – 31 января 2020г, С. 207 – 210.

[13 – A]. Нозиров О.О. Об оценке сумм значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле по заданного модуля [Текст] / О.О. Нозиров // Материалы Международной научной онлайн конференции «Современные проблемы математики: проблемы и их пути решения». г. Термез. Узбекистан. 21-23 октября 2020 г. С. 32 – 34.

ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК 511.325

Бо ҳуқуқи дастхат

Нозиров Опоқхон Оқилхонович

Қимати миёнаи функсияҳои Чебишёв ва татбиқи он

Автореферати

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
номзади илмҳои физика-математика аз рӯи ихтисоси
01.01.06 – Мантиқи математикӣ, алгебра ва назарияи ададҳо

Душанбе – 2020

Кор дар Донишгоҳи миллии Тоҷикистон таълиф шудааст

Роҳбари илмӣ: **Раҳмонов Зарулло Ҳусенович**
академики АМИ Тоҷикистон,
доктори илмҳои физикаю математика,
профессор, директори Институти
математикаи ба номи А. Ҷӯраев

Муқарризони расмӣ: **Аллаков Исмаил**
доктори илмҳои физикаю математика,
профессори кафедраи алгебра ва геометрияи
Донишгоҳи давлатии Термез

Мирзораҳимов Шералӣ Ҳусейнбоевич
номзади илмҳои физикаю математика,
дотсенти кафедраи таҳлили
математикӣ ва муодилаҳои дифференсиалии
Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Н. Хусрав

Муассисаи пешбар: Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон
ба номи С. Айнӣ

Ҳимояи диссертатсия санаи 9-уми апрели соли 2021 соати 10:00 дар ҷаласаи Шӯрои диссертатсионии 6D.КОА-037 дар назди Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон аз рӯи нишонаи: 734063, ш. Душанбе, к. Айнӣ, 299/4, баргузор мегардад.

Бо матни пурраи диссертатсия дар китобхонаи Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон ва сомонаи http://www.mitas.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат санаи “___” ________ соли 2021 аз рӯи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шӯрои диссертатсионии 6D.КОА-037,
номзади илмҳои физикаю-математика, дотсент Каримов О.Х.

Тавсифи умумии диссертатсия

Муҳимияти мавзӯъ. Функсияи Чебышёв гуфта, суммаи

$$\psi(y,\chi)=\sum_{n\le y}\Lambda(n)\chi(n)$$

– ро меноманд, ки дар инҷо $\chi(n)$ — характери Дирихле аз рӯи модули q, $\Lambda(n)$ — функсияи Манголдт.

Ҳангоми тадқиқи муаммоҳои назарияи ададҳои содда масъалаи қиматҳои миёнаи функсияҳои Чебишёв аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихле, аниқтараш баҳо аз боло барои суммаи зерин ба миён меояд.

$$t(x;q)=\sum_{\chi \bmod q}\max_{y\le x}|\psi(y,\chi)|,$$

Ба ин доира муаммоҳои зерин дохил мешаванд: баҳои суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои содда аз он ҷумла суммаи тригонометрии хаттӣ бо ададҳои содда ва тақсимшавии ададҳои Харди-Литтлвуд дар прогрессияҳои арифметикӣ.

Дар диссертатсия ин муаммоҳоро бо истифодаи рафтори $t(x;q)$ — қиматҳои миёнаи функсияҳои Чебишёв аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихле аз рӯи модули q меомӯзем. Мухтасар оиди методҳои тадқиқи ин бузургиҳо ва татбиқҳое, ки аз баҳои $t(x;q)$ бармеоянд, истода мегузарем.

Соли 1937 И.М.Виноградов[1] методи баҳодиҳии суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои соддаи асосаш ғалбер ва усули суфтакунии суммаи дукаратаро сохт. Бо ёрии ин метод ӯ бори аввал баҳои ғайритривиалии суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои содда, аз он ҷумла баҳои суммаи тригонометрии хаттӣ бо ададҳои соддаи намуди зеринро

$$S(\alpha,x)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)e(\alpha n).$$

ба даст овард.

Баҳои гирифташуда барои $S(\alpha,x)$ бо якҷоягии теорема дар бораи тақсимшавии ададҳои содда дар прогрессияҳои арифметикӣ ба И.М.Виноградов имкон дод, то муаммои тернарии Голдбахро оиди тасвири адади тоқи N дар намуди

$$N=p_1+p_2+p_3.$$

[1] Виноградов И.М. Избранные труды // М:Изд-во АН СССР, 1952.

ҳал намояд.

Қимати миёнаи функсияи Чебишёвро бори аввал Ю.В.Линник[2] барои гирифтани баҳои ғайритривиалии суммаҳои тригонометрии хаттӣ бо ададҳои соддаи $S(\alpha, x)$ тадқиқ кард. Вай бо ёрии теоремаи зиччӣ барои нулҳои L-қатори Дирихле ва идеяи Г. Харди ва Д. Литтлвуд[3], ки дар муаммои Голдбах истифода шуда буд, баҳои ғайритривиалии нави $S(\alpha, x)$-ро дод. Ҳамин тавр Ю.В.Линник исботи нави теоремаи И.М. Виноградовро оиди се адади содда (муаммои Голдбах) дод.

Соли 1947 Н.Г. Чудаков[4] низ чунин усули тадқиқоти суммаҳои тригонометрии хаттиро бо ададҳои содда бо ёрии баҳои қиматҳои миёнаи функсияҳои Чебишёв, ки дар навбати худ ба тақсимшавии нулҳои L-қатори Дирихле дар хатҳои критикӣ асос карда шудааст, пешниҳод намуд.

А.А. Каратсуба[5] методи ҳалли масъалаҳои тернарии мултипликативиро бо ҳамбастагии методи И.М.Виноградов — баҳоҳои суммаҳо бо ададҳои содда коркард карда, барои ҳолати оддитарин бузургии $t(x;q)$ — ро баҳо дод. Натиҷаи ин баҳо, теорема оиди тақсимшавии ададҳои намуди $p(p'+a)$ дар прогрессияҳои арифметикии кӯтоҳ мебошад.

Соли 1974 Г. Монтгомери[6], бо истифода аз теоремаи зичии худ нишон дод, ки

$$t(x;q) \ll (x + x^{\frac{5}{7}}q^{\frac{5}{7}} + x^{\frac{1}{2}}q)\mathscr{L}^{17}, \qquad \mathscr{L} = \ln xq. \tag{14}$$

Ин баҳоро Р. Вон[7] беҳтар намуд. Ӯ бо ёрии баробарии

$$\frac{L'}{L} = \left(\frac{L'}{L} + F\right)(1 - FG) + (L' + LF)G - F,$$

F ва G мувофиқан суммаҳои хусусӣ барои қаторҳои Дирихле – $\frac{L'}{L}$ ва $\frac{1}{L}$, исбот намуд, ки

$$t(x;q) \ll x\mathscr{L}^3 + x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}^{\frac{7}{2}}. \tag{15}$$

[2]Линник Ю.В. Избранные труды // Ленинград. Наука, 1980

[3]Hardy G.H., Littlwood I.E. Some problems of partitio numerorum III. On the expression of number as a sum of primes // Acta Math, 1923, v. 44, pp. 1–70.

[4]Чудаков Н.Г. On Goldbach-Vinogradov‘s theorem // Acta Math (2).1947. T. 48(3). C. 515 – 545.

[5]Карацуба А.А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // Докл. АН СССР, 1970, T. 192, –№ 4, C. 724 – 727.

[6]Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел // Москва, 1974.

[7]Vaughan R.O. Mean value theorems in prime number theory // J.London Math. Soc. (2), 10(1975), 153 – 162.

Соли 1989 З.Ҳ. Раҳмонов дар кори[8] нишон дод, ки

$$t(x;q) \ll (x + x^{\frac{5}{6}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}q)x^{\delta}. \tag{16}$$

Ин баҳо аз (14) беҳтар ва аз (15) сусттар буда, вале исботи он нисбат ба (14) ва (15) оддӣ гузаронида шуда ва ба усули ҳалли масъалаҳои тернарии мултипликативии А.А. Каратсуба[5] такя мекунад.

Аз баҳоҳои (14), (15) ва (16) барои $t(x;q)$ маълум аст, ки аз се ҷамъшавандаҳои дар ин баҳо иштироккунанда, ду ҷамъшавандаи канории он то саҳеҳии дараҷаи охирноки логарифм баробар буда, онҳоро нисбат ба дараҷаҳои x ва q умуман беҳтар намудан номумкин аст. Бинобар ин дастовардҳои минбаъда барои баҳои $t(x;q)$ метавонад танҳо беҳтар намудани ҷамъшавандаи дуюм бошад. Дар солҳои 1993 – 1995 З.Ҳ. Раҳмонов[9,10,11] усули нави тадқиқи қиматҳои миёнаи функсияҳои арифметикии намуди функсияи Чебишёвро аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихле сохт. Татбиқи ин метод ба ӯ имконият дод, ки дар муаммоҳои зерин натиҷаҳои беҳтаринро ба даст орад:

- баҳои қиматҳои миёнаи функсияҳои Чебышёв (аз он ҷумла бо вазни экспоненсиалии хаттӣ ва квадратӣ дар интервали кӯтоҳ) аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихлеи модули додашуда;
- баҳои қиматҳои миёнаи функсияҳои Чебышёв аз рӯи ҳамаи характерҳои примитивии Дирихле, ки модулашон аз бузургии додашуда зиёд намебошанд,

ва дар ҳолати хусусӣ, барои $t(x;q)$ — қимати миёнаи функсияи Чебишёви ҳамаи характерҳои Дирихле аз рӯи модули додашуда[9,10] исбот намуд, ки

$$t(x;q) \ll \left(x + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}q\right)\mathscr{L}^{34}. \tag{17}$$

Боби якуми диссертатсия ба беҳтаркунии баҳои охирон бахшида шудааст.

---

[8] Рахмонов З.Х. Распределение чисел Харди Литтвлуда в арифметических прогрессиях // Известия АН СССР. Серия математическая. 1989. Т. 52, –№ 1, С. 211 – 224.

[9] Рахмонов З.Х. Средние значения функции Чебышева // Докл. АН России. 1993, Т. 331(3), С. 281–282.

[10] Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения // Известия РАН. Серия математическая. 1993. Т 57, –№ 4, С. 55 – 71.

[11] Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Труды МИРАН, 1994, Т. 207, С. 286 – 296.

Чи хеле, ки мо қайд кардем, соли 1937 И.М. Виноградов усули баҳодиҳии суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои соддаро сохт ва дар ҳолати хусусӣ ӯ[1] нишон дод, ки суммаҳо ба ададҳои содда метавонад танҳо бо воситаи ҷамъ ва тарҳ намудани миқдори на он қадар калони дигар суммаҳо, баҳои хубро бо ёрии методи баҳодиҳии суммаҳои дукарата, ки бо назарияи L-қаторҳои Дирихле ягон алоқмандӣ надорад, ба даст овард. Дар ҳолати хусусӣ, чунин сумма $S(\alpha, x)$ — суммаи тригонометрии хаттӣ бо ададҳои содда шуда метавонад, ки дар инҷо α — адади ҳақиқӣ буда, ҳангоми шарти

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{q^2}, \qquad (a, q) = 1,$$

баҳои зерин ёфта шудааст:

$$S(\alpha, x) \ll (xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}})x^{\varepsilon}, \tag{18}$$

ки исботаш ба тарзи элементарӣ гузаронида мешавад.

Суммаи $S(\alpha, x)$ – ро бори аввал Ю.В. Линник[2] бо усули аналитикӣ баҳо дод ва варианти нави баҳои ғайритривиалии суммаи тригонометрии хаттиро бо ададҳои содда дар шакли зерин баён кард: *бигзор* α*- адади ҳақиқӣ,* $N \ge N_0 > 0$*,* $\alpha = \frac{a}{q} + \lambda$*, ки дар инҷо* $(a, q) = 1$*,* $1 < q \le \tau = (\ln x)^{1000}$*,* $\tau^{1000}x^{-1} \le |\lambda| \le (q\tau)^{-1}$*, он гоҳ баҳои зерин дуруст аст:*

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) \exp\left(-\frac{n}{N}\right) e(\alpha n)\right| < N(\ln N)^{-1000}.$$

Г. Монтгомери[6], бо истифода аз баҳои худ оиди қимати миёнаи функсияи Чебишёв (14), исбот намуд, ки

$$S\left(\frac{a}{q}, x\right) \ll \left(xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{7}}q^{\frac{3}{14}} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right)\mathscr{L}^{17}. \tag{19}$$

Ӯ ҳамчунин исбот намуд, ки агар $\eta \le x^{\frac{1}{4}}$, $\eta \le q \le x\eta^{-1}$, $|\alpha - a/q| \le 2\eta(qx)^{-1}$, $(a, q) = 1$ бошад, он гоҳ

$$S(\alpha, x) \ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{17}. \tag{20}$$

Р. Вон[7] барои қимати миёнаи функсияи Чебишёв (15) баҳои худро татбиқ намуда, натиҷаи Г.Монтгомериро беҳтар намуд. Ӯ исбот кард, ки агар

$|\alpha - a/q| \le q^{-2}$, $(a,q)=1$ бошад, он гоҳ баҳои зерин ҷой дорад

$$S(\alpha,x) \ll (xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{7}{8}}q^{-\frac{1}{8}} + x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{1}{8}} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}})\mathscr{L}^4, \tag{21}$$

ва агар $\eta \le x^{\frac{1}{3}}$, $\eta \le a \le x\eta^{-1}$, $|\alpha - a/q| \le 2\eta(qx)^{-1}$, $(a,q)=1$ бошад, пас

$$S(\alpha,x) \ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^4. \tag{22}$$

Қайд мекунем, ки баҳоҳои (19), (20), (21) ва (22), ки бо усули аналитикӣ гирифта шудаанд, аз баҳои (18), ки онро И.М.Виноградов бо методи элементарӣ ба даст оварда буд, сусттар мебошанд.

З.Ҳ. Раҳмонов[9,10] бо истифода аз баҳои худ оиди қимати миёнаи функсияи Чебишёв (17) баҳоеро ҳосил кард, ки дар он зарбшавандаи x^{ε} дар (18) ба дараҷаи охирноки логарифм иваз карда шудааст, яъне агар $|\alpha - a/q| \le q^{-2}$, $(a,q)=1$ бошад, он гоҳ

$$S(\alpha,x) \ll (xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}})\mathscr{L}^{35}. \tag{23}$$

ва агар $1 \le \eta \le x^{\frac{2}{5}}$, $\eta \le q < x\eta^{-1}$, $|\alpha - a/q| \le 2\eta(qx)^{-1}$, $(a,q)=1$ бошад, пас баҳои зерин дуруст аст

$$S(\alpha,x) \ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{35}. \tag{24}$$

Дар боби дуюм дараҷаи логарифмҳо дар (23) ва (24) беҳтар карда шудааст.

Харди ва Литтлвуд[12] гипотезаеро пешниҳод карданд, ки дар он ҳамаи ададҳои кифоя калони натуралии n ба суммаи адади содда ва дараҷаи адади натуралӣ дар намуди

$$n = p + m^k, \qquad k \ge 2$$

ҷудо карда мешавад.

Чунин ададҳоро мо ададҳои Харди-Литтлвуд меномем. Г. Бобоев[13] ин гипотезаро рад кард, яъне беохир пайдарпайии ададҳои натуралиро нишон дод, ки адади Харди - Литтлвуд намебошанд. Аз инҷо дар ҳолати

[12] Hardy G.H., Wright E.M. An introduction to theory of numbers // Oxford at the clarendon press. 1954.

[13] Бабаев Г.Б. Замечание к работе Дэвенпорта и Хейлброна // УМН. 1958. Т. 13, Т. 84, В. 6, С. 63-64.

хусусӣ мебарояд, ки чунин адади l, $1 \le l \le q$ мавҷуд аст, ки барои он нобаробарии

$$H_k(q,l) > q, \qquad k \ge 2,$$

иҷро мешавад, ки дар инҷо $H_k(q,l)$ — хурдтарин адади Харди - Литтлвуди намуди $p + m^k$ мебошад, ки дар прогрессияи арифметиекии $qt + l$, $t = 0, 1, 2, \ldots,$ q – бутун, мехобад. Бинобар ин табиатан ду масъалаи зеринро дида баромадан мумкин аст.

1. Ҳарчи беҳтар баҳодиҳии бузургии $H_k(q,l)$ аз боло .
2. Ҳосил намудани қонуни асимптотикии тақсимшавии ададҳои Харди - Литтлвуд, ки дар прогрессияи арифметикии хеле кӯтоҳ мехобанд.

Ҳангоми q – адади содда ва $k \ge 2$ будан, ин ду масъала дар корҳои[8, 9, 10] тадқиқ ва тасдиқоти зерин исбот карда шудааст: *бигзор q – адади содда, $x \ge 2$, $(l,q) = 2$ бошад, он гоҳ формулаи асимптотикии зерин ҷой дорад:*

$$\sum_{\substack{n \le x,\, m \le x^k \\ n + m^k \equiv l \pmod q}} \Lambda(n) - \frac{x^{\frac{k+1}{k}}}{\varphi(q)} \ll x \exp\left(-c\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\right) + \left(xq^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}}q + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}}\right)\mathscr{L}^{35}. \quad (25)$$

Аз ин формула дар ҳолати хусусӣ бармеояд, ки

$$H_2(q,l) \ll q^{\frac{3}{2}} \ln^{35} q. \quad (26)$$

Дар боби сеюм ҳангоми $k = 2$ будан ин натиҷа беҳтар карда шуда, дар ҳолате, ки фарқи прогрессия дараҷаи адади содда аст, умумӣ карда мешавад.

Алоқаи кор бо барномаҳои илмӣ (лоиҳаҳо), мавзӯҳо. Рисолаи мазкур дар доираи амаликунии нақшаи кории дурнамои илмӣ-тадқиқотии кафедраи алгебра ва назарияи ададҳои Донишгоҳи миллии Тоҷикистон барои солҳои 2016-2020 дар мавзӯи «Суммаҳои тригонометрии кӯтоҳ ва тадбиқи он» иҷро карда шудааст.

Мақсад ва вазифаҳои кор. Мақсади рисолаи илмӣ аз тадқиқи қиматҳои миёнаи функсияҳои Чебишёв аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихле ва татбиқи баҳои суммаи тригонометрӣ бо ададҳои содда ва тақсимшавии адади Харди-Литтлвуд дар прогрессияи арифметикӣ иборат аст.

Дар асоси мақсади гузошташуда, масъалаҳои зерин ҷудо карда шудаанд:

1. гирифтани баҳои беҳтар барои суммаи қиматҳои функсияҳои Чебишёв аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихле аз рӯи модули додашуда;

2. гирифтани баҳои нави суммаҳои тригонометрии хаттӣ бо ададҳои содда;

3. беҳтаркунии аъзои боқимондаи формулаи асимптотикӣ барои миқдори ададҳои Харди-Литтлвуд, ки дар прогрессияи арифметикии кӯтоҳ мехобанд ва умумӣ кардани ин формула дар ҳолати фарқи прогрессия дараҷаи адади содда будан.

Объектҳои тадқиқот. Объектҳои тадқиқот аз суммаи қиматҳои функсияҳои Чебишёв аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихле аз рӯи модули додашуда, суммаи тригонометрии хаттӣ бо ададҳои содда ва миқдори ададҳои натуралие, ки дар намуди ҳосили ҷамъи адади содда ва квадрати адади натуралӣ тасвир кардашуда, дар прогрессияҳои арифметикии фарқашон афзоянда мехобанд.

Усулҳои тадқиқот. Асоси тадқиқот усулҳои муосири назарияи аналитикии ададҳо мебошад, аз ҷумла

- усули И.М. Виноградов барои баҳодиҳии суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои содда;

- усули интегронии комплексӣ;

- усули L-қаторҳои Дирихле, ки ба қимати миёнаи дараҷаҳои L-қаторҳои Дирихле дар хати рости критикӣ асос карда шудааст;

- усуле, ки ба теоремаҳои муосир оиди қимати миёнаи қаторҳои Дирихле асос карда шудааст;

- усули тадқиқи қимати миёнаи функсияҳои арифметикии намуди функсияи Чебишёв аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихле,

мебошад.

Навоварии илмӣ. Ҳамаи натиҷаҳои бадастовардашуда нав буда, онҳо бо исботҳои муфассал асоснок карда шуда, қисматҳои зеринро дарбар мегиранд:

1. баҳои аниқтари суммаҳои қиматҳои функсияҳои Чебишёв аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихле аз рӯи модули додашуда гирифта шудааст;

2. баҳои нави суммаи тригонометрии хаттӣ бо адаҳои содда ба даст оварда шудааст;

3. аъзои боқимондаи формулаи асимптотикӣ барои миқдори ададҳои Харди-Литтлвуд, ки дар прогрессияи арифметикии кӯтоҳ мехобанд беҳтар ва ин формула ҳангоми фарқи прогрессия дараҷаи ададиi содда будан умумӣ карда шудааст.

Мӯҳтавои ҳимояшавандаи рисола:

1. лемма оиди баҳои қиматҳои миёнаи интеграл аз модули ҳосили зарби қисмҳои қаторҳои Дирихле, агар ин ҳосили зарбро дар намуди ҳосили зарби ду суммаи тартибашон наздик тасвир кардан мумкин бошад;

2. лемма оиди баҳои қиматҳои миёнаи интеграл аз модули ҳосили зарби қисмҳои қаторҳои Дирихле, агар ҳосили зарби дарозии ду суммаи аввалаи яклухт кифоя калон бошад;

3. лемма оиди баҳои қиматҳои миёнаи интеграл аз модули ҳосили зарби қисмҳои қаторҳои Дирихле, агар дарозии суммаи аввали яклухт кифоя калон бошад;

4. теорема оиди баҳои нав барои суммаҳои қиматҳои функсияҳои Чебишёв аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихле аз рӯи модули додашуда;

5. теорема оиди баҳои нави суммаҳои тригонометрии хаттӣ бо ададҳои содда;

6. теорема оиди беҳтаркунии аъзои боқимондаи формулаи асимптотикӣ барои миқдори ададҳои Харди-Литтлвуд, ки дар прогрессияи арифметикии кӯтоҳ мехобанд ва умумӣ кардани ин формула дар ҳолати фарқи прогрессия дараҷаи ададиi содда будан.;

7. баҳо аз боло барои хурдтарин ададиi Харди-Литтлвуд, ки дар прогрессияи арифметикии кӯтоҳ мехобад ва фарқаш дараҷаи ададиi содда мебошад;

Саҳми шахсии муаллиф. Масъалаҳои тадқиқот аз ҷониби роҳбари илмӣ, ки кӯмаки машваратӣ расонидааст, гузошта шудаанд. Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ, ки дар қисмати «Навгонии илмӣ» дарҷ гардидаанд, ба муаллиф тааллуқ дорад.

Арзиши назариявӣ ва амалии кор. Кори диссертатсионӣ характери назариявӣ дорад. Натиҷаҳо ва усулҳои ба дастории онро мутахассисони соҳаҳои назарияи аналитикии ададҳо ва назарияи алгебравии ададҳо метавонанд истифода баранд.

Эътимоднокӣ ва асоснокии натиҷаҳои илмии тадқиқот. Эътимоднокии натиҷаҳои кори диссертатсионӣ бо исботҳои қатъии математикии ҳамаи тасдиқотҳо, ки дар диссертатсия оварда шудааст, таъмин карда шуда, аз тарафи тадқиқотҳои муаллифони дигар асоснок карда мешаванд.

Тасвиби кор. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар конференсияҳо ва семинарҳои зерин маърӯза карда шудаанд:

- конференсияи илмии байналмилалии «Муодилаҳои диффенренсиалӣ, таҳлили математикӣ ва назарияи ададҳо» бахшида ба 25-солагии XVI Шӯрои Олии Ҷумҳурии Тоҷикистон (ш. Қурғонтеппа, 27-28-уми октябри соли 2017);

- конференсияи илмӣ-амалии ҷумҳуриявии «Масъалаҳои мубрами муодилаҳои дифференсиалӣ, таҳлили математикӣ, алгебра ва назарияи ададҳо ва татбиқи онҳо». Донишгоҳи русӣ-тоҷикии (Славянӣ) (ш. Душанбе, 17 майи соли 2019);

- конференсияи байналмиллалии «Алгебра, назарияи ададҳо ва геометрияи дискретӣ: масъалаҳои муосир, татбиқ ва мушкилотҳои таърих», бахшида ба садсолагии мавлуди профессор Н.И.Фельдман ва навадсолагии мавлуди профессорон А.И.Виноградов, А.В.Малышев ва Б.Ф.Скубенко. (Тула, 23-28 сентябри соли 2019);

- конференсияи илмии байналмиллалӣ бахшида ба 70-солагии профессор Ҷангибеков Гулхоҷа. (ш. Душанбе, 30-31 январи соли 2020);

- семинари шӯъбаи алгебра, назарияи ададҳо ва топология (солҳои 2016 – 2020) ва семинарҳои умумиинститутӣ (солҳои 2016 – 2020) дар Институти математикаи ба номи А.Ҷураеви АМИ Тоҷикистон;

- семинари кафедраи «Алгебра ва назарияи ададҳо» дар Донишгоҳи миллии Тоҷикистон.

Интишорот. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар сенздаҳ мақолаҳои илмии номгӯи онҳо дар охири автореферат овардашуда нашр шудаанд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз ишораҳо, муқаддима, се боб, хулоса ва феҳристи адабиёти истифодашуда, ки 59 номгӯйро дарбар мегирад, иборат буда, ҳаҷми умумии он 70 саҳифаи чопиро ташкил карда, дар барномаи LaTeX ҳуруфчинӣ шудааст.

Мӯҳтавои асосии диссертатсия

Сарсухан аз шарҳи натиҷаҳои ба кори диссертатсионӣ тааллуқдошта иборат аст.

Боби аввал аз чор параграф иборат буда, ба баҳои $t(x,q)$ — қиматҳои миёнаи функсияҳои Чебишёв аз рӯи ҳамаи характерҳо аз рӯи модули q бахшида шудааст. Дар параграфи якум таърихи кӯтоҳи тадқиқи баҳои суммаи $t(x,q)$ овардашуда натиҷаҳои асосии боб дар теоремаи 1.1. ҷамъбаст гардидааст. Дар параграфи дуюм леммаҳои маълум оварда шудаанд, ки дар параграфҳои оянда истифода мешаванд.

Қисмҳои қаторҳои Дирихле $L(s,\chi)$ ва $L^{-1}(s,\chi)$, ки ба ададҳои бутуни мусбати N_j, U_j ва M_j мувафиқат мекунанд, дар намуди зерин муайян карда мешавад:

$$S_j(s,\chi) = \sum_{U_j<n\le 2N_j} \frac{\chi(n)}{n^s}, \qquad N_j \le U_j < 2N_j;$$

$$G_j(s,\chi) = \sum_{M_j<m\le 2M_j} \frac{\mu(m)\chi(m)}{m^s},$$

ва барои адади натуралии k ифодаи намуди

$$W_k(s,\chi) = \prod_{j=1}^{k} G_j(s,\chi)S_j(s,\chi)$$

— ро зарби қисмҳои қаторҳои Дирихле $L(s,\chi)$ ва $L^{-1}(s,\chi)$ меномем ва функсияи зеринро дохил мекунем

$$t_k(q;M,N) = \sum_{\chi}{}'' \int_{-T}^{T} |W_k(0,5+it,\chi)| \frac{dt}{1+|t|},$$

ки қиматҳои миёнаи интеграл аз модули ҳосили зарби қисмҳои қаторҳои Дирихле $L(s,\chi)$ ва $L^{-1}(s,\chi)$ аз рӯи ҳамаи характерҳои примитивӣ аз рӯи модули d, $d|q$ номида мешавад. Дар параграфи сеюм леммаҳои 1.7, 1.10, 1.11 исбот карда мешаванд, ки тасдиқотҳои асосӣ буда, барои ба даст овардани баҳои нави $t(x;q)$, ки дар онҳо мувофиқан баҳои суммаҳои $t_k(q;M,N)$, яъне баҳои қиматҳои миёнаи интеграл аз модулҳои ҳосили зарби қисмҳои қаторҳои Дирихле $L(s,\chi)$ и $L^{-1}(s,\chi)$ гирифта шудааст, агар:

- ҳосили зарби $W_k(0,5+it,\chi)$ – ро дар намуди ҳосили зарби ду суммаи тартибашон наздик тасаввур кардан мумкин бошад;
- бузургии Y_1Y_2, яъне ҳосили зарби дарозии ду суммаи аввалаи яклухти $S_1(s,\chi)$ ва $S_2(s,\chi)$ кифоя калон бошад;
- дарозии Y_1 суммаи яклухти $S_1(s,\chi)$ кифоя калон бошад.

Лемма 1.7. *Бигзор* $T\geq 2$, $M_1\dots M_kN_1\dots N_k=Y$, $k_1\leq k$, $k_2\leq k$, $k_1+k_2=r$, $2^rM_{j_1}\dots M_{j_{k_1}}N_{i_1}\dots N_{i_{k_2}}=X$. *Он гоҳ баҳои зерин ҷой дорад:*

$$t_k(q;M,N)\ll(Y^{\frac12}+X^{\frac12}q^{\frac12}\mathscr{L}+Y^{\frac12}X^{-\frac12}q^{\frac12}\mathscr{L}+q\mathscr{L}^2)\mathscr{L}^{r^2+2k^2-2rk-1}.$$

Лемма 1.10. *Бигзор* $M_1\dots M_kN_1\dots N_k=Y$, $Y\leq y$, $y\leq x$, $N_1\geq N_2\geq\dots\geq N_k$ $T\geq N_1^{\frac12}$, $q\leq T$. *Он гоҳ баҳои зерин ҷой дорад:*

$$t_k(q;M,N)\ll\left(\left(\frac{Yq}{N_1N_2}\right)^{\frac12}+q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{(2(k-1)^2+4)}.$$

Лемма 1.11. *Бигзор* $M_1\dots M_kN_1\dots N_k=Y$, $Y\leq y$, $y\leq x$, $N_1\geq N_2\geq\dots\geq N_k$ $T\geq N_1^{\frac12}$, $q\leq T$. *Он гоҳ баҳои зерин ҷой дорад:*

$$t_k(q;M,N)\ll\left(\left(\frac{Yq}{N_1}\right)^{\frac12}+q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{(2(k-0,5)^2+1)}.$$

Инчунин дар параграфи сеюм леммаи 1.9 оиди наздиккунии суммаи $|S(0.5+it,\chi)|$, $|t|\leq T$, $T\leq T_0$ бо интеграл аз модули функсияи Дирихле $L(0.5+i(u+t),\chi)$ дар интервали $|u|\leq T_0$ исбот карда мешавад.

Дар параграфи чаҳорум натиҷаи асосии боби якум — оиди баҳои нави қиматҳои функсияҳои Чебишёв аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихле аз рӯи модули додашуда, исбот карда мешавад:

Теорема 1.1. *Ҳангоми $x \geq 2$ ва $q \geq 1$ будан, баҳои зерин ҷой дорад:*

$$t(x;q) \ll x\mathscr{L}^{28} + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{31} + x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}^{32}.$$

Баҳои дар ин теорема гирифташуда беҳтаркунии баҳои (17), ки онро соли 1993 З.Ҳ. Раҳмонов бо усули тадқиқи қиматҳои миёнаи функсияҳои арифметикии намуди функсияи Чебишёв аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихле исбот намудааст ва онро расман ба ду марҳилаи зерин ҷудо кард:

1. бо истифода аз варианти аналитикии усули баҳои суммаи тригонометрӣ бо ададҳои соддаи И.М.Виноградов (лемма 1.6) баҳои $t(x;q)$ ба намуди баҳои $t_k(q;M,N)$ дар намуди
$$t(x,q) \ll x^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^9 \sum_{k=1}^{4} \max_{y\leq x} t_k(q;M,N) + x + \varphi(q)\mathscr{L}^2$$
оварда мешавад;

2. баҳодиҳии суммаи $t_4(q;M,N)$ душвортар буда, барои ба даст овардани он 7 ҳолати имконпазири бузургии ҳосили зарби $M_1M_2M_3M_4$ дида баромада, нишон дода мешавад, ки дар ҳар як ҳолат яке аз леммаҳои 1.7, 1.10, 1.11 татбиқ карда мешавад.

Боби дуюм низ аз чаҳор параграф иборат буда, ба баҳои суммаи тригонометрии хаттӣ бо ададҳои содда бахшида шудааст. Дар параграфи якум таърихи кӯтоҳи тадқиқот оиди баҳои суммаҳои тригонометрии хаттӣ баён гардида натиҷаҳои асосии боб оварда шудаанд, дар параграфи дуюм бошад, леммаҳои маълуме ки дар параграфҳои оянда истифода мешаванд, оварда шудаанд.

Дар параграфи сеюм бо истифода аз теоремаи 1.1. оиди баҳои қиматҳои миёнаи функсияҳои Чебишёв, ки дар боби якум исбот шудааст, баҳои суммаҳои тригонометрии хаттӣ бо ададҳои соддаи $S(\alpha,x)$ ҳангоми α адади ратсионалӣ будан, исбот карда шудааст.

Теорема 2.1. *Бигзор* $(a,q)=1$ *бошад. Он гоҳ баҳои зерин ҷой дорад:*

$$S\left(\frac{a}{q},x\right)\ll xq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{29}+x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{32}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}.$$

Дар параграфи чаҳорум бо истифодаи теоремаи 2.1, теоремаи Дирихле оиди наздиккунии ададҳои ҳақиқӣ ба ададҳои ратсионалӣ ва формулаи суммиронии қисм ба қисм барои суммаҳои тригонометрии хаттӣ бо ададҳои соддаи $S(\alpha,x)$ ҳангоми α адади ҳақиқии ихтиёрӣ будан баҳоҳои зерин гирифта шудааст:

Натиҷаи 2.1.1. *Бигзор* $\left|\alpha-\dfrac{a}{q}\right|<\dfrac{1}{q^2}$, $(a,q)=1$, *он гоҳ баҳои зерин ҷой дорад:*

$$S(\alpha,x)\ll xq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}+x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{32}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}.$$

Натиҷаи 2.1.2. *Бигзор* $\eta\le x^{\frac{2}{5}}$, $\eta\le q\le x\eta^{-1}$, $|\alpha-aq^{-1}|\le 2\eta(qx)^{-1}$, $(a,q)=1$, *он гоҳ баҳои зерин ҷой дорад:*

$$S(\alpha,x)\ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}.$$

Ин баҳоҳо мувофиқан баҳоҳои (23) ва (24) – ро беҳтар мекунад.

Боби сеюм аз се параграф иборат буда, ба тақсимшавии ададҳои Харди-Литтлвуд дар прогрессияҳои арифметикии кӯтоҳ бахшида шудааст. Дар параграфи якум таърихи кӯтоҳи тадқиқот оиди ададҳои Харди-Литтлвуд баён гардида, натиҷаҳои асосии боб оварда шудааст. Дар параграфи дуюм леммаҳои маълуме, ки дар параграфҳои оянда истифода мешаванд, оварда шуда, инчунин лемма оиди овардани суммаи нопурраи қиматҳои характерҳо аз бисёраъзогӣ ба суммаи пурраи омехта исбот карда шудааст.

Дар параграфи сеюм натиҷаи асосии боби се, формулаи асимптотикӣ барои миқдори ададҳои Харди-Литтлвуд дар прогрессияҳои арифметикии кӯтоҳ исбот карда мешавад.

Теорема 3.1. *Бигзор* $x\ge x_0$, $q=p^{\alpha}$, p *— адади соддаи тоқ,* $p\ge\mathscr{L}^{58}$, α *— адади натуралии фиксиронидашуда,* $(l,p)=1$, $\rho(p,l)$ *— миқдори ҳалҳои муқоисаи* $n^2\equiv l\,(\mathrm{mod}\ p)$,

$$H_2(x;q,l)=\sum_{\substack{n\le x,\ m^2\le x\\ n+m^2\equiv l(\mathrm{mod}\ q)}}\Lambda(n).$$

Онгоҳ формулаи асимптотикии зерин ҷой дорад

$$H_2(x;q,l) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\varphi(q)}\left(1 + O\left(\mathscr{L}^{-1} + \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{x}}\mathscr{L}^{29} + \frac{q}{x^{\frac{7}{10}}}\mathscr{L}^{32} + \frac{q^{1.5}}{x}\mathscr{L}^{33}\right)\right),$$

ки доимии дар зери аломати O буда аз α вобаста аст.

Қайд мекунем, ки ин формула ғайритривиалӣ мешавад, агар

$$q \ll x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{\frac{-68}{3}}.$$

Натиҷаи 3.1.1. *Бигзор $q = p^{\alpha}$, p – адади содда, α – адади натуралии фиксиронидашуда, $(l,p) = 1$. Он гоҳ*

$$H_2(q,l) \ll q^{\frac{3}{2}}(\ln q)^{34}.$$

Формулаи асимптотикии ҳосилшуда дар теоремаи 3.1 ва баҳои аз боло барои $H_2(q,l)$ ҳангоми $k = 2$ ба даст омада, мувофиқан беҳтаркунӣ ва умумикунии формулаҳои (25) ва (26) дар ҳолате, ки q – фарқи прогрессия дараҷаи адади содда будан, мебошад.

Натиҷаҳои асосӣ ва хулосаҳо

Ҳамаи натиҷаҳои асосии диссертатсия нав буда, онҳо муфассал исбот карда шудаанд ва аз қисмҳои зерин иборатанд:

1. баҳои қиматҳои миёнаи интеграл аз модули ҳосили зарби қисмҳои қаторҳои Дирихле, агар ин ҳосили зарбро дар намуди ҳосилизарби ду суммаи тартибашон наздик тасвир кардан мумкин бошад ёфта шудааст, [2-М, 5-М, 13-М];

2. баҳои қиматҳои миёнаи интеграл аз модули ҳосили зарби қисмҳои қаторҳои Дирихле, агар ҳосили зарби дарозии ду суммаи аввалаи яклухт кифоя калон бошад ёфта шудааст, [2-М, 5-М, 13-М];

3. баҳои қиматҳои миёнаи интеграл аз модули ҳосили зарби қисмҳои қаторҳои Дирихле, агар дарозии суммаи аввали яклухт кифоя калон бошад ёфта шудааст, [2-М, 5-М, 13-М];

4. баҳои нав барои суммаҳои қиматҳои функсияҳои Чебишёв аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихле аз рӯи модули додашуда гирифта шудааст, [2-М, 5-М, 12-М, 13-М];

5. баҳои нави суммаҳои тригонометрии хаттӣ бо ададҳои содда гирифта шудааст, [4-М];
6. аъзои боқимондаи формулаи асимптотикӣ барои миқдори ададҳои Харди-Литтлвуд, ки дар прогрессияи арифметикии кӯтоҳ мехобанд беҳтар ва ин формула дар ҳолати фарқи прогрессия дараҷаи адади содда будан умумӣ карда шудааст, [1-М, 3-М, 6-М, 7-М, 8-М, 9-М, 10-М, 11-М];
7. баҳо аз боло барои хурдтарин адади Харди-Литтлвуд, ки дар прогрессияи арифметикии кӯтоҳ мехобад ва фарқаш дараҷаи адади содда мебошад ёфта шудааст, [1-М, 3-М, 6-М, 7-М, 8-М, 9-М, 10-М, 11-М].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо:

Натиҷаҳои дар диссертатсия ба даст овардашуда хусусияти назариявӣ доранд. Онҳо метавонанд дар назарияи аналитикии ададҳо ва назарияи алгебравии ададҳо татбиқи худро ёбанд. Маводҳои диссертатсияро метавон ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ ва магисторни донишгоҳҳои олӣ аз рӯи ихтисоси «Математика» истифода бурд.

Интишороти муаллиф аз рӯи мавзӯи диссертатсия

Дар маҷаллаҳои тақризшаванда аз рӯйхати КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон:

[1 – М]. Нозиров О.О. Распределение чисел Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа [Текст] / З.Х. Рахмонов, О.О. Нозиров // ДАН РТ., 2017, Т. 60, –№ 11 – 12, С. 549 – 554.

[2 – М]. Нозиров О.О. О среднем значении функций Чебышёва [Текст] / О.О. Нозиров // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2019, Т. 62, –№ 11 – 12, С. 613–618.

[3 – М]. Нозиров О.О. Наименьшее число Харди-Литтлвуда арифметической прогрессии с разностью, равной степени простого числа [Текст] / З.Х. Рахмонов, О.О. Нозиров // Доклады НАН Таджикистна, 2020, Т. 62, –№ 9 – 10, С. 631 – 639.

[4 – M]. Нозиров О.О. Оценки линейных тригонометрических сумм с простыми числами на основе средних значений функций Чебышёва [Текст] / О.О. Нозиров // Доклады НАН Таджикистна 2020 с. Т. 62, –№ 11 – 12, С. 747 – 755.

[5 – M]. Нозиров О.О. Об оценке сумм значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле по заданного модуля [Текст] / О.О. Нозиров // Вестник Таджикский национальный университет, 2020, –№ 4, С. 233 – 240.

Дар маҷаллаҳои дигар

[6 – M]. Нозиров О.О. Наименьшее число Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа [Текст] / З.Х. Рахмонов, О.О. Нозиров // Материалы международной научной конференции «Дифференсиальные уравнения, математический анализ и теория чисел», посвящённой 25 – летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан, Курган-Тюбе, 27 – 28 октября, 2017г, С. 98 – 102.

[7 – M]. Нозиров О.О. Наименьшее число Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа [Текст] / О.О. Нозиров // Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции, материалы международной научной конференции, посвящённой 90 – летию академика АН Республики Таджикистан, лауреата государственной премии имени Абуали Ибн Сино Михайлова Леонида Григорьевича. Душанбе, 27 – 28 февраля 2018г, С. 115 – 119.

[8 – M]. Нозиров О.О. Числа Харди-Литтлвуда в арифметических проггрессиях с разностью, равной степени простого числа [Текст] / О.О. Нозиров // Современные проблемы алгебры и теории чисел, материалы научно-теоретической конференции, посвящённой 90 – летию со дня рождения профессора Бабаева Г.Б. Душанбе, 14 – 15 декабря 2018г, С. 68 – 71.

[9 – M]. Нозиров О.О. Наименьшее число Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа [Текст]

/ О.О. Нозиров // Актуальные вопросы дифференциальных уравнений, математического анализа, алгебры и теории чисел и их приложения. Российско-Таджикский(Славянский) университет, материалы Республиканского научно-практической конференции. Душанбе, 17 мая 2019г, С. 216 – 218.

[10 – M]. Нозиров О.О. Распределение чисел Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа [Текст] / О.О. Нозиров // Математический анализ и его приложения, материалы Республиканской научной конференции, посвящённой 80 – летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова Таджикистан, Душанбе, 10 – 11 июня 2019г, С. 179 – 181.

[11 – M]. Нозиров О.О. Числа Харди-Литтлвуд в арифметических прогрессиях [Текст] / З.Х. Рахмонов, О.О. Нозиров // Алгебра , теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения профессора Н.И.Фельдмана и девяностолетнею со дня рождения профессоров А.И.Виноградова, А.В.Малышева и Б.Ф.Скубенко. Тула, 23 – 28 сентября 2019г, С. 26 – 30.

[12 – M]. Нозиров О.О. Новая оценка сумм значений функций Чебышёва [Текст] / О.О. Нозиров // Материалы международной научной конференции, посвящённой 70-летию профессора Джангибекова Гулходжа. Душанбе, 30 – 31 января 2020г, С. 207 – 210.

[13 – M]. Нозиров О.О. Об оценке сумм значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле по заданного модуля [Текст] / О.О. Нозиров // Материалы Международной научной онлайн конференции «Современные проблемы математики: проблемы и их пути решения». г. Термез. Узбекистан. 21-23 октября 2020 г. С. 32 – 34.

Аннотация
диссертации Нозирова Опокхона Окилхоновича на тему «Средние значения функций Чебышёва и их приложения» на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Ключевые слова: функция Чебышёва, тригонометрические суммы с простыми числами, короткая сумма характеров, числа Харди-Литтлвуда и характер Дирихле.

Объекты исследования. Объектами исследования являются суммы значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля, линейная тригонометрические суммы с простыми числами и количество натуральных представимых в виде суммы простого и квадрата натурально числа, лежащего в арифметических прогрессиях с растущей разностью.

Цель и задачи исследования. Целью работы является исследование поведения средних значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле и его приложения оценке тригонометрических сумм с простыми числами и распределение чисел Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях.

В соответствие с поставленной выделяются следующие задачи:

1. получение более точной оценки сумм значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля;
2. получение новой оценки линейной тригонометрической суммы с простыми числами;
3. уточнение остаточного члена асимптотической формулы для количества чисел Харди-Литтлвуда, лежащих в коротких арифметических прогрессиях и обобщение этой формулы на случай, когда разность прогрессии является степенью простого числа.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

1. получена более точная оценка сумм значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля;

2. найдена новая оценка линейной тригонометрической суммы с простыми числами;
3. уточнен остаточный член асимптотической формулы для количества чисел Харди-Литтлвуда, лежащих в коротких арифметических прогрессиях и эта формула обобщена на случай, когда разность прогрессии является степенью простого числа.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел и алгебраической теории чисел.

Аннотатсия

ба диссертатсияи Нозиров Опоқхон Оқилхонович дар мавзӯи «Қимати миёнаи функсияҳои Чебишёв ва татбиқи он» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯйи ихтисоси 01.01.06 – Мантиқи математикӣ, алгебра ва назарияи ададҳо

Вожаҳои калидӣ: функсияи Чебишёв, суммаи тригонометрӣ бо ададҳои содда, суммаи кутоҳи характерҳо, адади Харди-Литтлвуд ва характери Дирихле.

Объектҳои тадқиқот. Объектҳои тадқиқот аз суммаи қиматҳои функсияҳои Чебишёв аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихле аз рӯи модули додашуда, суммаи тригонометрии хаттӣ бо ададҳои содда ва миқдори ададҳои натуралие, ки дар намуди ҳосили ҷамъи адади содда ва квадрати адади натуралӣ тасвир кардашуда, дар прогрессияҳои арифметикии фарқашон афзоянда мехобанд.

Мақсад ва вазифаҳои кор. Мақсади рисолаи илмӣ аз тадқиқи қиматҳои миёнаи функсияҳои Чебишёв аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихле ва татбиқи баҳои суммаи тригонометрӣ бо ададҳои содда ва тақсимшавии адади Харди-Литтлвуд дар прогрессияи арифметикӣ иборат аст.

Дар асоси мақсади гузошташуда, масъалаҳои зерин ҷудо карда шудаанд:

1. гирифтани баҳои беҳтар барои суммаи қиматҳои функсияҳои Чебишёв аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихле аз рӯи модули додашуда;

2. гирифтани баҳои нави суммаҳои тригонометрии хаттӣ бо ададҳои содда;
3. беҳтаркунии аъзои боқимондаи формулаи асимптотикӣ барои миқдори ададҳои Харди-Литтлвуд, ки дар прогрессияи арифметикии кӯтоҳ мехобанд ва умумӣ кардани ин формула дар ҳолати фарқи прогрессия дараҷаи адади содда будан.

Навоварии илмӣ. Ҳамаи натиҷаҳои бадастовардашуда нав буда, онҳо бо исботҳои муфассал асоснок карда шуда, қисматҳои зеринро дарбар мегиранд:

1. баҳои аниқтари суммаҳои қиматҳои функсияҳои Чебишёв аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихле аз рӯи модули додашуда гирифта шудааст;

2. баҳои нави суммаи тригонометрии хаттӣ бо адаҳои содда ба даст оварда шудааст;

3. аъзои боқимондаи формулаи асимптотикӣ барои миқдори ададҳои Харди-Литтлвуд, ки дар прогрессияи арифметикии кӯтоҳ мехобанд беҳтар ва ин формула ҳангоми фарқи прогрессия дараҷаи адади содда будан умумӣ карда шудааст.

Арзиши назариявӣ ва амалии кор. Кори диссертатсионӣ характери назариявӣ дорад. Натиҷаҳо ва усулҳои ба дастории онро мутахассисони соҳаҳои назарияи аналитикии ададҳо ва назарияи алгебравии ададҳо метавонанд истифода баранд.

Summary
of the thesis of Nozirov Opoqkhon Oqilkhonovich on the topic “The average values of the Chebyshev functions and their applications” for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.06 – Mathematical logic, algebra and number theory

Keywords: Chebyshev function, trigonometric sums with primes, short sum of characters, Hardy-Littlewood numbers and Dirichlet character.
Research objects: The objects of research are the sums of the values of the Chebyshev functions over all Dirichlet characters of a given modulus, linear trigonometric sums with primes and the number of natural numbers representable as the sum of a prime and a square of a natural number lying in arithmetic progressions with increasing difference.

Purpose of the study: The aim of this work is to study the behavior of the mean values of Chebyshev functions over all Dirichlet characters and its applications to the estimation of trigonometric sums with primes and the distribution of Hardy-Littlewood numbers in arithmetic progressions.

In accordance with the set, the following tasks are distinguished:

1. obtaining a more accurate estimate of the sums of the values precisely of the Chebyshev functions over all Dirichlet characters of a given modulus;

2. obtaining a new estimate for a linear trigonometric sum with prime numbers;

3. the refinement of the remainder of the asymptotic formula for the number Hardy-Littlewood numbers lying in short arithmetic progressions and generalization of this formula for the case when the difference of the progression is a prime power.

Scientific novelty. All the results obtained are new, they are substantiated by detailed evidence and are as follows:

1. The more accurate estimate is obtained for the sums of the values precisely of the Chebyshev functions over all Dirichlet characters of a given modulus;

2. The new estimate is found for a linear trigonometric sum with primes;

3. The remainder of the asymptotic formula for the number of Hardy-Littlewood numbers lying in short arithmetic progressions is refined, and this formula is generalized to the case when the difference of the progression is a prime power.

Theoretical and practical value. The dissertation work is the theoretical one. Its results and methods of obtaining them can be used by specialists in the field of analytical number theory and algebraic number theory.