Таджикский национальный университет

УДК 511.325

На правах рукописи

НОЗИРОВ ОПОКХОН ОКИЛХОНОВИЧ

СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЧЕБЫШЁВА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел

Научный руководитель: доктор физико—математических наук,
академик НАН Таджикистана, профессор
Рахмонов Зарулло Хусенович

Душанбе — 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Обозначения

$x\,,\ y$ – достаточно большие положительные вещественные числа;

q натуральное число, $q > q_0\,,\ \mathscr{L} = \ln xq$;

$s = \sigma + it$ — комплексное число;

$\varepsilon\,,\ \delta$–положительные сколь угодно малые постоянные;

α — вещественное число, $e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha} = \cos 2\pi\alpha + i \sin 2\pi\alpha$;

χ — характер Дирихле $\mod q$, χ_q — примитивный характер $\mod q$;

$\sum''$ — суммирования по всем примитивным характерам $\chi \mod d$, $d|q$;

$\varphi(q)$ — функция Эйлера; $\mu(n)$ — функция Мёбиуса;

$\Lambda(n)$ — функция Мангольдта;

$\tau_r(n)$ — число решений диофантово уравнения $n_1 \dots n_r = n$; $\tau(n) = \tau_2(n)$;

$\psi(y,\chi) = \sum\limits_{n\le y} \Lambda(n)\chi(n)$ — функция Чебышёва;

$L(s,\chi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\chi(n)}{n^s}$ — функция Дирихле, соответствующая характеру χ;

$t(x;q) = \sum\limits_{\chi \bmod q} \max|\psi(y,\chi)|$;

$S_j(s,\chi) = \sum\limits_{U_j < n \le 2N_j} \dfrac{\chi(n)}{n^s}$, N_j и U_j – целые числа, $N_j \le U_j < 2N_j$;

$G_j(s,\chi) = \sum\limits_{M_j < m \le 2M_j} \dfrac{\mu(m)\chi(m)}{m^s}$; M_j – целое число;

$W_k(s,\chi) = \prod\limits_{j=1}^{k} G_j(s,\chi) S_j(s,\chi)$;

$t_k(q; M, N) = \sum\limits_{\chi}{}'' \int\limits_{-T}^{T} |W_k(0,5 + it,\chi)| \dfrac{dt}{1+|t|}$.

При ссылках теоремы, леммы и формулы нумеруются двумя индексами: номер главы, номер утверждения.

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Функцией Чебышёва называется сумма

$$\psi(y,\chi) = \sum_{n\le y} \Lambda(n)\chi(n),$$

$\chi(n)$ — характер Дирихле по модулю q, $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта.

При решении ряда проблем теории простых чисел возникает вопрос о поведении средних значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле, то есть оценка сверху для суммы

$$t(x;q) = \sum_{\chi \bmod q} \max_{y\le x} |\psi(y,\chi)|.$$

В круг таких проблем входят: оценка тригонометрических сумм с простыми числами, в том числе линейные короткие тригонометрические суммы с простыми числами, распределение чисел Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях.

В данной диссертации мы изучаем эти проблемы, используя поведение $t(x;q)$ — средних значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле по модулю q. Напомним коротко о методах исследования этих величин и тех приложениях, которые получаются из оценок $t(x;q)$.

И.М.Виноградов [1]–[13] в 1937 г. создал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, основу которого составляют решето, и метод сглаживания двойных сумм. С помощью этого метода он впервые получил нетривиальную оценку тригонометрических сумм с простыми числами (см.также [14]–[23])

и, в частности, оценку линейной тригонометрической суммы с простыми числами вида

$$S(\alpha, x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) e(\alpha n).$$

Получение оценки для $S(\alpha, x)$, в соединении с теоремами о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях, позволила И.М. Виноградову решить тернарную проблему Гольдбаха о представлении нечётного N в виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3.$$

Среднее значение функции Чебышёва впервые исследовал Ю.В.Линник [24]–[27] для вывода нетривиальной оценки линейной тригонометрической суммы с простыми числами $S(\alpha, x)$. Он с помощью плотностных теорем для нулей L-рядов Дирихле и идей Г.Харди и Д.Литтлвуда [28], применявшихся ранее в проблеме Гольдбаха, дал новый вариант нетривиальной оценки $S(\alpha, x)$. Тем самым Ю.В.Линником было дано новое доказательство теоремы И.М.Виноградова о трёх простых числах (проблема Гольдбаха).

Н.Г.Чудаков [29, 30] также предложил подобный метод исследования линейных тригонометрических сумм с простыми числами с помощью оценки средних значений функций Чебышева, получение которой, в свою очередь основывается на распределении нулей L-рядов Дирихле в критической полосе.

А.А.Карацуба [31] разработал метод решения мультипликативных тернарных задач и в соединении с методом И.М.Виноградова — оценок сумм с простыми числами, оценил самый простой случай величины $t(x; q)$. Следствием этой оценки является теорема о распределении чисел вида $p(p' + a)$ в коротких арифметических прогрессиях.

Г. Монтгомери [32], пользуясь своей плотностей теоремой, показал, что

$$t(x;q) \ll (x + x^{\frac{5}{7}}q^{\frac{5}{7}} + x^{\frac{1}{2}}q)\mathscr{L}^{17}, \qquad \mathscr{L} = \log xq. \tag{1}$$

Этот результат уточнил Р. Вон [33]. Он с помощью представления

$$\frac{L'}{L} = \left(\frac{L'}{L} + F\right)(1 - FG) + (L' + LF)G - F,$$

где F и G – соответственно частные суммы для рядов Дирихле – $\frac{L'}{L}$ и $\frac{1}{L}$, доказал, что

$$t(x;q) \ll x\mathscr{L}^3 + x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}^{\frac{7}{2}}. \tag{2}$$

В 1989 году З.Х.Рахмонов в работе [34] показал, что

$$t(x;q) \ll (x + x^{\frac{5}{6}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}q)x^{\delta}. \tag{3}$$

Это оценка сильнее (1) и слабее (2), но доказательство, в отличие от (1) и (2), проводится элементарно и опирается на метод А.А.Карацубы решения мультипликативных тернарных задач [31].

Из оценок (1), (2) и (3) для $t(x;q)$ видно, что из трёх слагаемых, присутствующих в этих оценках, два крайних равны между собой с точностью конечной степени логарифма и их нельзя вообще улучшить относительно степеней x и q. Поэтому дальнейшим продвижением в оценке $t(x;q)$ может быть только улучшение второго слагаемого. В 1993 – 1995 гг. З.Х.Рахмонов ([35, 36, 37]) создал новый метод исследования средних значений арифметических функций типа функции Чебышёва по всем характерам Дирихле. Применение этого метода позволило ему получить наилучшие результаты в следующих проблемах:

- оценки средних значений функций Чебышёва (в том числе с линейным и квадратичным экспоненциальным весом в коротких интервалах) по всем характерам Дирихле данного модуля;

- оценки средних значений функций Чебышёва по всем примитивным характерам Дирихле, модуль которых не превосходит заданной величины,

и, в частности, для $t(x;q)$ — среднего значения функции Чебышёва всем характерам Дирихле данного модуля [35, 36] доказал, что

$$t(x;q) \ll \left(x + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}q\right)\mathscr{L}^{34}. \tag{4}$$

Первая глава диссертации посвящена уточнению последней оценки.

Как мы уже отметили, И.М.Виноградов в 1937 г. создал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, и в частности он [1] обнаружил, что суммы по простым числам могут быть составлены путём только сложения и вычитания из сравнительно небольшого числа других сумм, хорошие оценки которых могут быть получены с помощью метода оценок двойных сумм, не имеющих какого-либо отношения к теории L-рядов Дирихле. В частности, такой суммой оказалась линейная тригонометрическая сумма с простыми числами $S(\alpha,x)$, где α — вещественное число и при условии

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q) = 1,$$

была найдена оценка:

$$S(\alpha,x) \ll (xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}})x^{\varepsilon}, \tag{5}$$

доказательство которой проводится элементарным методом.

Впервые сумму $S(\alpha,x)$ аналитическим методом оценил Ю.В.Линник [24, 27] и дал новый вариант нетривиальной оценки линейной тригонометрической суммы с простыми числами в следующей формулировке: *пусть α - вещественное число, $N \ge N_0 > 0$, $\alpha = \frac{a}{q} + \lambda$, где $(a,q) = 1$, $1 < q \le \tau = (\ln x)^{1000}$,*

$\tau^{1000}x^{-1} \le |\lambda| \le (q\tau)^{-1}$, *тогда справедлива оценка:*

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) \exp\left(-\frac{n}{N}\right) e(\alpha n)\right| < N(\ln N)^{-1000}.$$

Г.Монтгомери [32], пользуясь своей оценкой средних значений функций Чебышева (1), доказал, что

$$S\left(\frac{a}{q}, x\right) \ll \left(xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{7}}q^{\frac{3}{14}} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right)\mathscr{L}^{17}. \tag{6}$$

Он также доказал, что если $\eta \le x^{\frac{1}{4}}$, $\eta \le q \le x\eta^{-1}$, $|\alpha - a/q| \le 2\eta(qx)^{-1}$, $(a,q) = 1$, то

$$S(\alpha, x) \ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{17}. \tag{7}$$

Р.Вон [33], применяя свою оценку для средних значений функций Чебышева (2), уточнил результат Г.Монтгомери. Он доказал, если $|\alpha - a/q| \le q^{-2}$, $(a,q) = 1$, то имеет место оценка

$$S(\alpha, x) \ll (xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{7}{8}}q^{-\frac{1}{8}} + x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{1}{8}} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}})\mathscr{L}^{4}, \tag{8}$$

и, если $\eta \le x^{\frac{1}{3}}$, $\eta \le a \le x\eta^{-1}$, $|\alpha - a/q| \le 2\eta(qx)^{-1}$, $(a,q) = 1$, то

$$S(\alpha, x) \ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{4}. \tag{9}$$

Отметим, что оценки (6), (7), (8) и (9), полученные аналитическим методом, слабее оценки (5), полученной И.М.Виноградовым элементарным методом.

З.Х.Рахмонов [35, 36], воспользовавшись своей оценкой средних значений функций Чебышёва (4) вывел оценку, в которой множитель x^{ε} в (2.1) заменяется на конечную степень логарифма, то есть если $|\alpha - a/q| \le q^{-2}$, $(a,q) = 1$, тогда

$$S(\alpha, x) \ll (xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}})\mathscr{L}^{35}. \tag{10}$$

и если $1 \le \eta \le x^{\frac{2}{5}}$, $\eta \le q < x\eta^{-1}$, $|\alpha - a/q| \le 2\eta(qx)^{-1}$, $(a, q) = 1$, то справедлива оценка

$$S(\alpha, x) \ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{35}. \tag{11}$$

Во второй главе уточняются степени логарифмов в (10) и (11).

Харди и Литтлвуд [38] сформулировали гипотезу о том, что все достаточно большие натуральные числа n разлагаются на сумму простого и степени натурального числа в виде

$$n = p + m^k, k \ge 2$$

Такие числа мы назовем числами Харди-Литтлвуда. Г.Бабаев [39] опроверг эту гипотезу, а именно построил бесконечную последовательность натуральных чисел, не являющихся числом Харди - Литтлвуда. Отсюда, в частности, следует, что существуют l, $1 \le l \le q$ для которых выполняется неравенство

$$H_k(q, l) > q, \qquad k \ge 2,$$

где $H_k(q, l)$ — наименьшее число Харди-Литтлвуда вида $p + m^k$, лежащее в арифметической прогрессии $qt + l$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, q – целое. Поэтому, естественно, можно рассматривать следующие две задачи.

1. Оценить сверху величину $H_k(q, l)$ как можно лучше.
2. Получить асимптотический закон распределения чисел Харди - Литтлвуда, лежащих в очень коротких арифметических прогрессиях.

В случае q – простое число и $k \ge 2$, эти две задачи исследовались в работах [34, 35, 36, 37] и была доказана: *пусть* q *– простое,* $x \ge 2$*,* $(l, q) = 2$*, тогда* *справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{\substack{n\le x,\, m\le x^k\\ n+m^k\equiv l\,(\mathrm{mod}\ q)}}\Lambda(n)-\frac{x^{\frac{k+1}{k}}}{\varphi(q)}\ll x\exp\left(-c\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\right)+xq^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{4}+x^{\frac{4}{5}}q\mathscr{L}^{35}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}}\mathscr{L}^{35}.$$

Отметим, что эта формула становится нетривиальной, если

$$q\ll\begin{cases} x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{\frac{-70}{3}}, & \text{при } k=2\\ x^{\frac{k+5}{5k}}\mathscr{L}^{-35}, & \text{при } k=3,4,5;\\ x^{2/k}\mathscr{L}^{-8}, & \text{при } k\ge 6.\end{cases}$$

Во третей главе при $k=2$ этот результат уточняется и обобщается на случай, когда разность прогрессии является степенью простого числа.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета на 2016-2020 гг. по теме «Короткие тригонометрические суммы и их приложения».

Цель и задачи исследования. Целью работы является исследование поведения средних значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле и его приложения оценке тригонометрических сумм с простыми числами и распределение чисел Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях.

В соответствие с поставленной выделяются следующие задачи:

1. получение более точной оценки сумм значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля;
2. получение новой оценки линейной тригонометрической суммы с простыми числами;

3. уточнение остаточного члена асимптотической формулы для количества чисел Харди-Литтлвуда, лежащих в коротких арифметических прогрессиях и обобщение этой формулы на случай, когда разность прогрессии является степенью простого числа.

Объекты исследования. Объектами исследования являются суммы значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля, линейная тригонометрические суммы с простыми числами и количество натуральных представимых в виде суммы простого и квадрата натурально числа, лежащего в арифметических прогрессиях с растущей разностью.

Методы исследования. В основе исследований лежат современные методов аналитической теории чисел, а именно:

- метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградова;
- метод комплексного интегрирования;
- методы L-рядов Дирихле, основанные на среднем значении степеней L-рядов Дирихле в критической прямой;
- методы, основанные на современных теоремах о средних значениях рядов Дирихле;
- метод исследования средних значений арифметических функций типа функции Чебышёва по всем характерам Дирихле.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

1. получена более точная оценка сумм значений функций Чебышева по всем характерам Дирихле заданного модуля;

2. найдена новая оценка линейной тригонометрической суммы с простыми числами;
3. уточнен остаточный член асимптотической формулы для количества чисел Харди-Литтлвуда, лежащих в коротких арифметических прогрессиях и эта формула обобщена на случай, когда разность прогрессии является степенью простого числа.

Положения, выносимые на защиту:

1. лемма об оценке среднего значения интеграла от модуля произведения кусков рядов Дирихле, если это произведение можно представить в виде произведения двух сумм, близких по порядку;
2. лемма об оценке среднего значения интеграла от модуля произведения кусков рядов Дирихле, если произведение длин первых двух сплошных сумм достаточно большая;
3. лемма об оценке среднего значения интеграла от модуля произведения кусков рядов Дирихле, если длина первой сплошной суммы достаточно большая;
4. теорема о новой оценке для сумм значений функций Чебышева по всем характерам Дирихле заданного модуля;
5. теорема о новой оценке линейной тригонометрической суммы с простыми числами;
6. теорема об уточнении остаточного члена в асимптотической формуле для количества чисел Харди-Литтлвуда, лежащих в коротких арифметических

прогрессиях и обобщении этой формулы на случай, когда разность прогрессии является степенью простого числа;

7. оценка сверху наименьшего числа Харди-Литтлвуда, лежащего в короткой арифметической прогрессии, разность которой является степенью простого числа;

Личный вклад автора. Задачи исследования были сформулированы научным руководителем работы, который оказывал консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, отраженные в разделе «Научная новизна», получены лично автором.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел и алгебраической теории чисел.

Степень достоверности проведенных исследований. Достоверность научных результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- международная научная конференция «Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел», посвящённая 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан, Курган-Тюбе, 27-28 октября 2017 г.

- республиканская научно-практическая конференция «Актуальные вопросы дифференциальных уравнений, математического анализа, алгебры и теории чисел и их приложения». Российско-Таджикский(Славянский) университет, Душанбе, 17 мая 2019г.

- международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённая столетию со дня рождения профессора Н.И.Фельдмана и девятностолетию со дня рождения профессоров А.И.Виноградова, А.В.Малышева и Б.Ф.Скубенко, Тула, 23-28 сентября 2019г.

- международная научная конференция, посвященная 70-летию профессора Джангибекова Гулходжи, Душанбе, 30-31 января 2020г.

- семинары отдела алгебры, теории чисел и топологии (2016 – 2020 гг.) и общеинститутский семинаре (2016 – 2020 гг.) в Институте математики им. А. Джураева НАН Таджикистана;

- семинар кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 13 научных работах, список которых приведен в конце автореферата. Работы [1-А, 2-А, 3-А, 4-А, 5-А] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан.В работе, написанной совместно с З.Х.Рахмоновым, соавтору принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из обозначения, введения, трёх глав, заключения, списка цитированной литературы из 59 наименований, занимает 70 страниц машинописного текста и набрана на редакторе LaTeX.

Глава 1. Средние значения функции Чебышёва

1.1. Постановка проблемы и известные результаты

Функцией Чебышёва называется сумма

$$\psi(y,\chi)=\sum_{n\le y}\Lambda(n)\chi(n),$$

$\chi(n)$ — характер Дирихле по модулю q, $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта.

Настоящая глава посвящена оценке средних значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле по модулю q, то есть оценке величины

$$t(x;q)=\sum_{\chi \bmod q}\max_{y\le x}|\psi(y,\chi)|.$$

Среднее значение функции Чебышёва впервые исследовал Ю.В.Линник [24]–[27] для вывода нетривиальной оценки линейной тригонометрической суммы с простыми числами $S(\alpha,x)$.

А.А. Карацуба [31] создал метод решения тернарных мультипликативных задач, с помощью которого оценил самый простой случай величины $t(x;q)$. Следствием этой оценки является распределение чисел вида $p(p_1+a)$ в коротких арифметических прогрессиях.

Воспользовавшись методом большего решета Ю.В.Линника американский математик Г.Монтгомери [32] доказал плотностные теоремы для нулей L-функции Дирихле, с помощью которого, показал, что

$$t(x;q)\ll (x+x^{\frac{5}{7}}q^{\frac{5}{7}}+x^{\frac{1}{2}}q)\mathscr{L}^{17}. \tag{1.1}$$

Этот результат уточнил Р.Вон [33]. Он с помощью представления

$$\frac{L'}{L} = \left(\frac{L'}{L} + F\right)(1 - FG) + (L' + LF)G - F,$$

где F и G – соответственно частные суммы для рядов Дирихле – $\frac{L'}{L}$ и $\frac{1}{L}$, доказал, что

$$t(x;q) \ll x\mathscr{L}^3 + x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}^{\frac{7}{2}}. \tag{1.2}$$

В 1989 году З.Х.Рахмонов в работе [34] опираясь на метод А.А. Карацубы, доказал, что

$$t(x;q) \ll (x + x^{\frac{5}{6}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}q)x^{\delta}. \tag{1.3}$$

Это оценка сильнее (1.1) и слабее (1.2), но доказательство, в отличие от этих оценок, проводится элементарно и опирается на метод А.А.Карацубы решения мультипликативных тернарных задач [31].

Из оценок (1.1), (1.2) и (1.3) для $t(x;q)$ видно, что из трёх слагаемых, присутствующих в этих оценках, два крайних равны между собой с точностью конечной степени логарифма и их нельзя вообще улучшить относительно степеней x и q. Поэтому дальнейшим продвижением в оценке $t(x;q)$ может быть только улучшение второго слагаемого. В 1993-1995 гг. ([35, 36, 37]) З.Х.Рахмонов создал новый метод исследования средних значений арифметических функций типа функции Чебышёва по всем характерам Дирихле. Применение этого метода позволило ему получить наилучшие результаты в следующих проблемах:

- оценки средних значений функций Чебышёва (в том числе с линейным и квадратичным экспоненциальным весом в коротких интервалах) по всем характерам Дирихле данного модуля;

- оценки средних значений функций Чебышёва по всем примитивным характерам Дирихле, модуль которых не превосходит заданной величины,

и, в частности, для $t(x;q)$ — среднего значения функции Чебышёва по всем характерам Дирихле данного модуля [35, 36] доказал, что

$$t(x;q) \ll \left(x + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}q\right)\mathscr{L}^{34}. \tag{1.4}$$

Основным результатом первой главы является теорема, в которой уточняются степени логарифмов в слагаемых в оценке (1.4).

Теорема 1.1. *При $x \geq 2$ и $q \geq 1$ имеет место оценка:*

$$t(x;q) \ll x\mathscr{L}^{28} + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{31} + x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}^{32}.$$

Доказательство теоремы 1.1 проводится методом исследования средних значений арифметических функций типа функции Чебышёва по всем характерам Дирихле. Основные утверждения, позволившие получить новую оценку $t(x;q)$, содержатся в леммах 1.7, 1.10, 1.11, соответственно в которых получены оценки для суммы

$$t_k(q;M,N) = \sum_{\chi}{}'' \int_{-T}^{T} |W_k(0,5+it,\chi)| \frac{dt}{1+|t|},$$

то есть для среднего значения интеграла от модулей произведения кусков рядов Дирихле, если:

- произведению $W_k(0,5+it,\chi)$ можно представить в виде произведения двух сумм, близких по порядку;
- длины Y_1 и Y_2 суммы $S_1(s,\chi)$ и $S_2(s,\chi)$ достаточно большие;

- длина Y_1 суммы $S_1(s,\chi)$ достаточно большая;

а также в лемме 1.9 о приближении суммы $|S(0.5+it,\chi)|$, $|t|\le T$, $T\le T_0$ интегралом от модуля функции Дирихле $L(0.5+i(u+t),\chi)$ по интервалу $|u|\le T_0$; .

1.2. Известные леммы

Лемма 1.1. *Предположим, что* $M\ge 0$ *и* $N\ge 1$. *Тогда для любых значений* H *справедливо неравенство:*

$$\sum_{\chi_q}{}'' \int_{-T}^{T} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n\chi(n)n^{-it} \right|^2 \frac{dt}{1+|t|} \ll \sum_{n=M}^{M+N} (n+q\ln T)|a_n|^2.$$

Доказательство см. [32, 33].

Лемма 1.2. *При* $x\ge 2$ *имеем*

$$\sum_{n\le x} \tau_r^2(n) \ll (\ln x)^{r^2-1}$$

Доказательство см. [40].

Лемма 1.3. *Пусть* $b>0$ *и* $T>1$, *тогда имеет место соотношение:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s}ds = \begin{cases} 1+O\left(\dfrac{a^b}{T\ln a}\right), & \text{если} \quad a>1 \\ O\left(\dfrac{a^b}{T|\ln a|}\right), & \text{если} \quad 0<a<1 \end{cases}$$

Доказательство см. [41].

Лемма 1.4. *Пусть* $q\ge 1$, χ *— характер Дирихле по модулю* q, $s=\sigma+it$. *Тогда при* $Re\, s=\sigma\ge 0,5$ *справедлива оценка:*

$$|L(s,\chi)| \ll (q|s|)^{1-\sigma}\ln q|s|.$$

Доказательство см. [42].

Лемма 1.5. *Пусть* $T \geq 2$. *Тогда справедливы неравенства:*

$$\sum_{\chi}{}'' \int\limits_{-T}^{T} |L(0.5+it,\chi)|^4 \, \frac{dt}{1+|t|} \ll q(\ln qT)^5,$$

$$\sum_{\chi}{}'' \int\limits_{-T}^{T} |L(0.5+it,\chi)|^2 \, \frac{dt}{1+|t|} \ll q \ln qT.$$

Доказательство см. [32, 42].

Лемма 1.6. *Пусть* $f(n)$ — *произвольная комплекснозначная функция,* $u \leq x$, $r \geq 1$,

$$C_r^k = \frac{r!}{k!(r-k)!}, \quad \lambda(n) = \sum_{d\backslash n,\, d \leq u} \mu(n).$$

Тогда имеет место тождество:

$$\sum_{n\leq x}\Lambda(n)f(n) = (-1)^r \sum_{n_1 \geq u} \lambda(n_1) \cdots \sum_{\substack{n_r \geq u \\ n_1\cdots n_k m \leq x}} \lambda(n_r) \sum_{m} \Lambda(m) f(n_1\cdots n_r m) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} C_r^k \sum_{m_1 \leq u} \mu(m_1) \cdots \sum_{\substack{m_k \leq u \\ m_1\cdots m_k n_1 \cdots n_k \leq x}} \mu(m_k) \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_k} \ln n_1 f(m_1 n_1 \cdots m_k n_k).$$

Доказательство см. [36].

1.3. Основные леммы об оценках сумм вида $t_k(q; M, N)$

Лемма 1.7. *Пусть* $T \geq 2$, $M_1 \ldots M_k N_1 \ldots N_k = Y$, $k_1 \leq k$, $k_2 \leq k$, $k_1 + k_2 = r$, $2^r M_{j_1} \ldots M_{j_{k_1}} N_{i_1} \ldots N_{i_{k_2}} = X$. *Тогда справедлива оценка:*

$$t_k(q; M, N) \ll (Y^{\frac{1}{2}} + X^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \mathscr{L} + Y^{\frac{1}{2}} X^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \mathscr{L} + q\mathscr{L}^2) \mathscr{L}^{r^2+2k^2-2rk-1}.$$

Доказательство. Имеем

$$t_k(q;M,N) = \sum_{\chi}{}'' \int_{-T}^{T} |W_k(0,5+it,\chi)| \frac{dt}{1+|t|}$$

Пусть

$$H_1(s,\chi) = \prod_{\alpha=1}^{k_1} G_{j_\alpha}(s,\chi) \prod_{t=1}^{k_2} S_{i_t}(s,\chi), \quad H_2(s,\chi) = W_k(s,\chi)H_1^{-1}(s,\chi),$$

Из определения функций $G_{j_\alpha}(s,\chi)$ и $S_{i_t}(s,\chi)$ следует, что

$$H_1(s,\chi) = \sum_{n\le X} \frac{a_n\chi(n)}{n^s}, \qquad H_2(s,\chi) = \sum_{m\le V} \frac{b_m\chi(m)}{m^s}, \qquad V = 2^{2k}YX^{-1},$$

где $|a_n| \le \tau_r(n)$, $|b_m| \le \tau_{2k-r}(m)$. Применяя неравенство Коши сначала для интеграла по t, затем для суммы по характерам χ, найдём:

$$t_k(q;M,N) = \sum_{\chi}{}'' \int_{-T}^{T} |H_1(0.5+it,\chi)|\,|H_2(0.5+it,\chi)| \frac{dt}{1+|t|} \le$$
$$\le \left(t_k'(q;M,N)t_k''(q;M,N)\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.5}$$

где

$$t_k'(q;M,N) = \sum_{\chi}{}'' \int_{-T}^{T} \left|\sum_{n\le X} a_n\chi(n)n^{-0.5-it}\right|^2 \frac{dt}{1+|t|},$$
$$t_k''(q;M,N) = \sum_{\chi}{}'' \int_{-T}^{T} \left|\sum_{n\le V} b_n\chi(n)n^{-0.5-it}\right|^2 \frac{dt}{1+|t|}.$$

Оценим $t_k'(q;M,N)$. Применяя последовательно леммы 1.1 и 1.2, найдём:

$$t_k'(q;M,N) \ll \sum_{n\le X}(n+q\ln T)\left|a_n n^{-0.5}\right|^2 \ll \sum_{n\le X}\tau_r^2(n) + q\ln T\sum_{n\le X}\frac{\tau_r^2(n)}{n} \ll$$
$$\ll X\mathscr{L}^{r^2-1} + q\mathscr{L}^{r^2+1} \ll (X+q\mathscr{L}^2)\mathscr{L}^{r^2-1}.$$

Таким же способом найдём, что

$$t_k''(q;M,N) \ll \sum_{n\le V}(n+q\ln T)\left|b_n n^{-0.5}\right|^2 \ll \sum_{n\le V}\tau_{2k-r}^2(n) + q\ln T\sum_{n\le X}\frac{\tau_{2k-r}^2(n)}{n} \ll$$

$$\ll V\mathscr{L}^{(2k-r)^2-1} + q\mathscr{L}^{(2k-r)^2+1} \ll (YX^{-1}+q\mathscr{L}^2)\mathscr{L}^{(2k-r)^2-1}.$$

Отсюда и из оценки суммы $t_k'(q;M,N)$, ввиду (1.5), получим

$$t_k(q;M,N) \ll \left((X+q\mathscr{L}^2)\mathscr{L}^{r^2-1}(YX^{-1}+q\mathscr{L}^2)\mathscr{L}^{(2k-r)^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll (Y^{\frac{1}{2}} + X^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + Y^{\frac{1}{2}}X^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2)\mathscr{L}^{r^2+2k^2-2rk-1}.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.8. *Пусть u — произвольное вещественное число, N — достаточно большое натуральное число, $N\le U<2N$, тогда имеет место оценка*

$$\left|\frac{(2N)^{iu}-U^{iu}}{u}\right| \le 2\ln 2.$$

Доказательство. Воспользовавшись формулой Эйлера, имеем

$$\left|\frac{(2N)^{iu}-U^{iu}}{u}\right| = \left|\frac{\cos(u\ln 2N)-\cos(u\ln U)+i(\sin(u\ln 2N)-\sin(u\ln U))}{u}\right| =$$

$$= \frac{2-2\left(\cos(u\ln 2N)\cos(u\ln U)+\sin(u\ln 2N)\sin(u\ln U)\right)}{|u|} =$$

$$= \frac{2-2\cos(u(\ln 2N-\ln U))}{|u|} = \frac{4\sin^2(0,5|u|(\ln 2N-\ln U))}{|u|} =$$

$$= 2(\ln 2N-\ln U)\cdot\frac{\sin^2(0,5|u|(\ln 2N-\ln U))}{(0,5|u|(\ln 2N-\ln U))} \le$$

$$\le 2\ln 2\cdot\frac{\sin(0,5|u|(\ln 2N-\ln U))}{(0,5|u|(\ln 2N-\ln U))}.$$

Далее воспользовавшись теоремой Лагранжа о конечных разностях в форме $\sin\varphi = \sin\varphi - \sin 0 = \varphi\cos\theta\varphi$, $0\le\theta\le 1$, найдём

$$\left|\frac{(2N)^{iu}-U^{iu}}{u}\right| \le 2\ln 2\cdot\frac{(0,5|u|(\ln 2N-\ln U))\cos(0,5\theta|u|(\ln 2N-\ln U))}{(0,5|u|(\ln 2N-\ln U))} \le 2\ln 2.$$

Лемма 1.9. *Пусть* $|t| \le T$, $T \le T_0$, $N \le U < 2N$ *и*

$$S(0.5+it,\chi)=\sum_{U<n\le 2N}\frac{\chi(n)}{n^{0.5+it}}.$$

Тогда справедливо неравенство:

$$S(0.5+it,\chi)\ll\int_{-T_0}^{T_0}|L(0.5+i(u+t),\chi)|\frac{du}{1+|u|}+\frac{N^{\frac12}\mathscr{L}}{T_0}+\left(\frac{q}{T_0}\right)^{\frac12}\mathscr{L}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности будем считать, что U и $2N$ полуцелые числа. Вводя обозначение $R(a)=\dfrac{a^b}{T_0|\ln a|}$, применим тождество Перрона (лемма 1.3), при $T=T_0$ и $b=0,5+(\ln 2N)^{-1}$. Имеем

$$S(0.5+it,\chi)=\sum_{U<n\le 2N}\frac{\chi(n)}{n^{0.5+it}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^{0.5+it}}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT_0}^{b+iT_0}\left(\left(\frac{2N}{n}\right)^z-\left(\frac{U}{n}\right)^z\right)\frac{dz}{z}+O\left(R\left(\frac{2N}{n}\right)+R\left(\frac{U}{n}\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT_0}^{b+iT_0}L(0.5+it+z,\chi)\frac{(2N)^z-U^z}{z}dz+O\left(R_1(2N,T_0)+R_1(U,T_0)\right),$$

$$R_1(N,T_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{0.5}}R\left(\frac{N}{n}\right)=\frac{1}{T_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{0.5}}\left(\frac{N}{n}\right)^b\left|\ln\left(\frac{N}{n}\right)\right|^{-1}=$$

$$=\frac{N^b}{T_0}\left(\sum_{\frac N2\ge n\ge 2N}\left(n^{0,5+b}\left|\ln\left(\frac{N}{n}\right)\right|\right)^{-1}+\sum_{\frac N2<n\le 2N-1}\left(n^{0,5+b}\left|\ln\left(\frac{N}{n}\right)\right|\right)^{-1}\right),$$

где N одно из полуцелых чисел $2N$ и U. Неравенства $\frac N2\ge n\ge 2N$ и $-\ln 2\ge\ln\left(\frac Nn\right)\ge\ln 2$ эквивалентны. Поэтому с учётом соотношения $n^{0,5+b}=n^{1+(\ln 2N)^{-1}}=n\exp\left(\ln n(\ln 2N)^{-1}\right)>n$, имеем

$$R_1(N,T_0)\le\frac{N^b}{T_0}\left(\frac{1}{\ln 2}\sum_{\frac N2\ge n\ge 2N}\frac{1}{n^{1+(\ln 2N)^{-1}}}+\frac{2}{N}\sum_{\frac N2<n\le 2N-1}\left|\ln\left(\frac{N}{n}\right)\right|^{-1}\right).\quad(1.6)$$

Обозначая две последние суммы через R_{11} и R_{12}, оценим каждую из них отдельно. Первая сумма — R_{11} является сходящимся числовым рядом

$$R_{11} = \sum_{\frac{N}{2}\geq n\geq 2N} \frac{1}{n^{1+(\ln 2N)^{-1}}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+(\ln 2N)^{-1}}} \ll 1.$$

Во второй сумме — R_{12} переменная суммирования n принимает значения целых чисел, начиная от целого числа N_1 до целого числа $2N-1$, где

$$N_1 = \begin{cases} \dfrac{N+0,5}{2}+1, & \text{если } N-0,5 \text{ – нечетное;} \\[2ex] \dfrac{N-0,5}{2}+1, & \text{если } N-0,5 \text{ – четное.} \end{cases}$$

Разбивая сумму по n на две части, имеем

$$R_{12} = \sum_{\frac{N}{2}<n\leq 2N-1} \left|\ln\left(\frac{N}{n}\right)\right|^{-1} = \sum_{n=N_1}^{2N-1} \left|\ln\left(\frac{N}{n}\right)\right|^{-1} = R'_{12} + R''_{12}, \qquad (1.7)$$

$$R'_{12} = -\sum_{n=N_1}^{N-0,5} \left(\ln\left(\frac{n}{N}\right)\right)^{-1}, \quad R''_{12} = \sum_{n=N+0,5}^{2N-1} \left(\ln\left(\frac{n}{N}\right)\right)^{-1}.$$

Воспользовавшись эквивалентностью неравенств $N_1 \leq n \leq N-0,5$ и $0 \leq N-0,5-n \leq N-0,5-N_1$ представим сумму R'_{12} в виде

$$R'_{12} = -\sum_{n=0}^{N-0,5-N_1} \left(\ln\left(\frac{N-0,5-n}{N}\right)\right)^{-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-0,5-N_1} \left(-\ln\left(1-\frac{n+0,5}{N}\right)\right)^{-1}.$$

Далее при $0 \leq n \leq N-0,5-N_1$ применяя соотношение

$$-\ln\left(1-\frac{n+0,5}{N}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{n+0,5}{N}\right)^k > \frac{n+0,5}{N},$$

находим

$$R'_{12} < \sum_{n=0}^{N-0,5-N_1} \frac{N}{n+1,5} \ll N\ln N.$$

Для оценки суммы R''_{12} при $0 \le n \le N-1,5$ воспользуемся соотношением

$$\ln\left(1+\frac{n+0,5}{N}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{n+0,5}{N}\right)^k > \frac{n+0,5}{2N}.$$

Имеем

$$R''_{12}=\sum_{n=N+0,5}^{2N-1}\left(\ln\left(\frac{n}{N}\right)\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{N-1,5}\left(\ln\left(\frac{n+N+0,5}{N}\right)\right)^{-1}=$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1,5}\left(\ln\left(1+\frac{n+0,5}{N}\right)\right)^{-1}<\sum_{n=0}^{N-1,5}\frac{2N}{n+0,5}\ll N\ln N.$$

Подставляя полученные оценки для R'_{12} и R''_{12} в правую часть формулы (1.7), найдём

$$R_{12}\ll N\ln N.$$

Затем подставляя эту оценку и оценку для R_{11} в формулу (1.6), получим

$$R_1(N,T_0)\ll\frac{N^b}{T_0}\left(1+\frac{1}{N}\cdot N\ln N\right)\ll\frac{N^b\mathscr{L}}{T_0}.$$

Следовательно

$$R_1(2N,T_0)\ll\frac{N^b\mathscr{L}}{T_0}\ll\frac{N^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}}{T_0},$$

$$R_1(U,T_0)\ll\frac{U^b\mathscr{L}}{T_0}\ll\frac{N^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}}{T_0}.$$

Поэтому

$$S(0.5+it,\chi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT_0}^{b+iT_0}\left((2N)^z-U^z\right)L(0.5+it+z,\chi)\frac{dz}{z}+O\left(\frac{N^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}}{T_0}\right),$$

Перенесём контур интегрирования на прямую $Rez = 0$, тогда получим:

$$S(0.5+it,\chi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-T_0}^{T_0}((2N)^{iu} - U^{iu})L(0.5+i(t+u),\chi)\frac{du}{u} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b}^{0}\frac{(2N)^{u-iT_0} - U^{u-iT_0}}{u-iT_0}L(0.5+u+i(t-T_0),\chi)du +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{b}\frac{(2N)^{u+iT_0} - U^{u+iT_0}}{u+iT_0}L(0.5+u+i(t+T_0),\chi)du + O\left(\frac{N^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}}{T_0}\right).$$

Переходя к оценкам, затем воспользовавшись неравенством, которое доказали в лемме 1.8, найдём

$$|S(0.5+it,\chi)| \leq \frac{\ln 2}{\pi}\int\limits_{-T_0}^{T_0}|L(0.5+i(t+u),\chi)|\frac{du}{1+|u|} +$$

$$+\frac{3}{\pi T_0}\int\limits_{0}^{b}N^u|L(0.5+u+i(t+T_0),\chi)|du + +O\left(\frac{N^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}}{T_0}\right).$$

С учётом условий $|t| \leq T$, $T \leq T_0$, воспользовавшись соотношением

$$|0.5+u+i(t+T_0)| = \sqrt{(0.5+u)^2 + (t+T_0)^2|} \ll T_0,$$

применяя к подинтегральной функции в последнем интеграле лемму 1.4, найдём

$$|L(0.5+u+i(t+T_0),\chi)| \ll (qT_0)^{0.5-u}\ln qT_0.$$

Следовательно

$$\frac{3}{\pi T_0}\int\limits_{0}^{b}N^u|L(0.5+u+i(t+T_0),\chi)|du \ll \frac{(qT_0)^{0.5}\ln qT_0}{T_0}\int\limits_{0}^{b}\left(\frac{N}{qT_0}\right)^u du \leq$$

$$\leq \frac{(qT_0)^{0.5}\ln qT_0}{T_0}\left(\left(\frac{N}{qT_0}\right)^b + 1\right) \ll \frac{N^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}}{T_0} + \left(\frac{q}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.10. *Пусть* $M_1 \ldots M_k N_1 \ldots N_k = Y$, $Y \le y$, $y \le x$, $N_1 \ge N_2 \ge \ldots \ge N_k$ $T \ge N_1^{\frac{1}{2}}$, $q \le T$. *Тогда справедлива оценка:*

$$t_k(q;M,N) \ll \left(\left(\frac{Yq}{N_1 N_2} \right)^{\frac{1}{2}} + q\mathscr{L} \right) \mathscr{L}^{(2(k-1)^2+4)}.$$

Доказательство. Имеем

$$t_k(q;M,N) = \sum_{\chi}{}'' \int_{-T}^{T} |W_k(0.5+it,\chi)| \frac{dt}{1+|t|},$$

$$\begin{aligned}
&W_k(s,\chi) = H(s,\chi) S_1(s,\chi) S_2(s,\chi),\\
&H(s,\chi) = \prod_{j=1}^{k} G_j(s,\chi) \prod_{i=3}^{k} S_i(s,\chi) = \sum_{V_0 < n \le V_1} \frac{a(n)\chi(n)}{n^s},\\
&a_n = \sum_{M_1 < m_1 \le 2M_1} \mu(m_1) \ldots \sum_{M_k < m_k \le 2M_k} \mu(m_k) \sum_{U_3 < n_3 \le 2N_3} \ldots \sum_{U_k < n_k \le 2N_k} 1,\\
&|a_n| \le \tau_{2k-2}(n), \qquad V_0 = M_1 \ldots M_k U_3 \ldots U_k,\\
&V_1 = 2^{2k-2} M_1 \ldots M_k N_3 \ldots N_k, \quad V_1 \ll \frac{Y}{N_1 N_2}.
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши сначала для интеграла по t, затем для суммы по характерам χ, найдём:

$$\begin{aligned}
t_k(q;M,N) &= \sum_{\chi}{}'' \int_{-T}^{T} |H(0.5+it,\chi) S_1(0.5+it,\chi) S_2(0.5+it,\chi)| \frac{dt}{1+|t|} \le\\
&\le \sum_{\chi}{}'' \left(\int_{-T}^{T} |H(0.5+it,\chi)|^2 \frac{dt}{1+|t|} \int_{-T}^{T} |S_1(0.5+it,\chi) S_2(0.5+it,\chi)|^2 \frac{dt}{1+|t|} \right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le \left(t_k'(q;M,N) t_k''(q;M,N) \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

где

$$t'_k(q;M,N) = \sum_{\chi}{}'' \int_{-T}^{T} |H(0.5+it,\chi)|^2 \frac{dt}{1+|t|}$$

$$t''_k(q;M,N) = \sum_{\chi}{}'' \int_{-T}^{T} |S_1(0.5+it,\chi)S_2(0.5+it,\chi)|^2 \frac{dt}{1+|t|}.$$

Оценим $t'_k(q;M,N)$. Применим лемму 1.1, а затем соотношение $|a_n| \leq \tau_{2k-2}(n)$. Имеем

$$\begin{aligned} t'_k(q;M,N) &= \sum_{\chi}{}'' \int_{-T}^{T} \left| \sum_{V_0<n\leq V_1} \frac{a_n\chi(n)}{n^{0.5+it}} \right|^2 \frac{dt}{1+|t|} \ll \\ &\ll \sum_{V_0<n\leq V_1} (n+q\ln T) \left| \frac{a_n}{n^{0.5}} \right|^2 \ll \\ &\ll \sum_{V_0<n\leq V_1} \tau_{2k-2}^2(n) + q\ln T \sum_{V_0<n\leq V_1} \frac{\tau_{2k-2}^2(n)}{n}. \end{aligned}$$

Две последние суммы оценим, применив лемму 1.2, а затем воспользуемся соотношением $V_1 \ll \dfrac{Y}{N_1N_2}$. Имеем:

$$\begin{aligned} t'_k(q;M,N) &\ll V_1(\ln V_1)^{(2k-2)^2-1} + q\ln T(\ln V_1)^{(2k-2)^2} \ll \\ &\ll \left(\frac{Y}{N_1N_2} + q\mathscr{L}^2 \right) \mathscr{L}^{(2k-2)^2-1}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Перейдем к оценке $t''_k(q;M,N)$. Применим к суммам $S_1(0.5+it,\chi)$ и $S_2(0.5+it,\chi)$ лемму 1.9, полагая в ней $T_0 = T$. Имея в виду, что , $T_0 \geq \max(N_j^{\frac{1}{2}}, q)$, находим:

$$S_j(0.5+it,\chi) \ll \int_{-T}^{T} |L(0.5+i(u+t),\chi)| \frac{du}{1+|u|} + \mathscr{L}, \quad j=1,2.$$

Отсюда для $t_k''(q;M,N)$ имеем:

$$t_k''(q;M,N) \ll {\sum_{\chi}}'' \int\limits_{-T}^{T} \left| \int\limits_{-T}^{T} |L(0.5+i(u+t),\chi)| \frac{du}{1+|u|} + \mathscr{L} \right|^4 \frac{dt}{1+|t|} \ll$$

$$\ll {\sum_{\chi}}'' t(\chi,T) + q\mathscr{L}^5, \tag{1.10}$$

где

$$t(\chi,T) = \int\limits_{-T}^{T} \left(\int\limits_{-T}^{T} |L(0.5+i(u+t),\chi)| \frac{du}{1+|u|} \right)^4 \frac{dt}{1+|t|}.$$

Применяя к внутреннему интегралу по переменной u два раза неравенство Коши, находим:

$$t(\chi,T) = \int\limits_{-T}^{T} \left(\int\limits_{-T}^{T} \frac{|L(0.5+i(u+t),\chi)|}{\sqrt{1+|u|}} \cdot \frac{du}{\sqrt{1+|u|}} \right)^4 \frac{dt}{1+|t|} \ll$$

$$\ll \mathscr{L}^2 \int\limits_{-T}^{T} \left(\int\limits_{-T}^{T} \frac{|L(0.5+i(u+t),\chi)|^2}{1+|u|} du \right)^2 \frac{dt}{1+|t|} \ll$$

$$\ll \mathscr{L}^3 \int\limits_{-T}^{T} \int\limits_{-T}^{T} |L(0.5+i(u+t),\chi)|^4 \frac{du}{1+|u|} \frac{dt}{1+|t|}.$$

Пользуясь симметричностью повторного интеграла по переменным u и t, имеем

$$t(\chi,T) \ll \mathscr{L}^3 \int\limits_{|t|\le T} \int\limits_{|u|\le |t|} |L(0.5+i(u+t),\chi)|^4 \frac{du}{1+|u|} \frac{dt}{1+|t|} +$$

$$+ \mathscr{L}^3 \int\limits_{|t|\le T} \int\limits_{|t|\le |u|\le T} |L(0.5+i(u+t),\chi)|^4 \frac{du}{1+|u|} \frac{dt}{1+|t|} =$$

$$= 2\mathscr{L}^3 \int\limits_{|t|\le T} \int\limits_{|t|\le |u|\le T} |L(0.5+i(u+t),\chi)|^4 \frac{du}{1+|u|} \frac{dt}{1+|t|}.$$

Так как $|u| \ge |t|$, то

$$1+|u| \ge 1 + \frac{|u|+|t|}{2} \ge 1 + \frac{|u+t|}{2} \ge \frac{1}{2}(1+|u+t|).$$

Следовательно

$$t(\chi,T) \ll \mathscr{L}^3 \int\limits_{|t|\le T}\ \int\limits_{|t|\le|u|\le T} |L(0.5+i(u+t),\chi)|^4\,\frac{du}{1+|u+t|}\ \frac{du}{1+|u|} =$$

$$= \mathscr{L}^3 \int\limits_{|t|\le T}\ \int\limits_{|t|\le|v-t|\le T} |L(0.5+iv,\chi)|^4\,\frac{dv}{1+|v|}\ \frac{du}{1+|u|} \ll$$

$$\ll \mathscr{L}^4 \int\limits_{-2T}^{2T} |L(0.5+iv,\chi)|^4\,\frac{dv}{1+|v|}.$$

Подставляя в правую часть полученную формулу для $t(\chi,T)$ в (1.10), найдём

$$t_k''(q;M,N) \ll \mathscr{L}^4 \sum_{\chi}{}'' \int\limits_{-2T}^{2T} |L(0.5+it,\chi)|^4\,\frac{dt}{1+|t|} + q\mathscr{L}^5,$$

Пользуясь леммой 1.5, получим

$$t_k''(q;M,N) \ll q\mathscr{L}^9.$$

Отсюда и из (1.9), в силу (1.8), получим

$$t_k(q;M,N) \ll \left(\left(\frac{Y}{N_1N_2}+q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{(2k-2)^2-1}\cdot q\mathscr{L}^9\right)^{\frac12} \ll$$

$$\ll \left(\left(\frac{Yq}{N_1N_2}\right)^{\frac12}+q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{(2(k-1)^2+4)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.11. *Пусть* $M_1\dots M_kN_1\dots N_k=Y$, $Y\le y$, $y\le x$, $N_1\ge N_2\ge \dots\ge N_k$ $T\ge N_1^{\frac12}$, $q\le T$. *Тогда справедлива оценка:*

$$t_k(q;M,N) \ll \left(\left(\frac{Yq}{N_1}\right)^{\frac12}+q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{(2(k-0,5)^2+1)}.$$

Доказательство. Имеем

$$t_k(q;M,N) = \sum_{\chi}'' \int_{-T}^{T} |W_k(0.5+it,\chi)| \frac{dt}{1+|t|},$$

$$\begin{aligned}
&W_k(s,\chi) = H(s,\chi)S_1(s,\chi),\\
&H(s,\chi) = \prod_{j=1}^{k} G_j(s,\chi) \prod_{i=2}^{k} S_i(s,\chi) = \sum_{V_0<n\le V_1} \frac{a(n)\chi(n)}{n^s},\\
&a_n = \sum_{M_1<m_1\le 2M_1} \mu(m_1) \ldots \sum_{M_k<m_k\le 2M_k} \mu(m_k) \sum_{U_2<n_2\le 2N_2} \ldots \sum_{U_k<n_k\le 2N_k} 1,\\
&|a_n| \le \tau_{2k-1}(n), \qquad V_0 = M_1 \ldots M_k U_2 \ldots U_k,\\
&V_1 = 2^{2k-1} M_1 \ldots M_k N_2 \ldots N_k, \qquad V_1 \ll \frac{Y}{N_1}.
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши сначала для интеграла по t, затем для суммы по характерам χ, найдём:

$$\begin{aligned}
t_k(q;M,N) &= \sum_{\chi}'' \int_{-T}^{T} |H(0.5+it,\chi)S_1(0.5+it,\chi)| \frac{dt}{1+|t|} \le\\
&\le \sum_{\chi}'' \left(\int_{-T}^{T} |H(0.5+it,\chi)|^2 \frac{dt}{1+|t|} \int_{-T}^{T} |S_1(0.5+it,\chi)|^2 \frac{dt}{1+|t|} \right)^{\frac{1}{2}} \le\\
&\le \left(t'_k(q;M,N) t''_k(q;M,N)\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

где

$$t'_k(q;M,N) = \sum_{\chi}'' \int_{-T}^{T} |H(0.5+it,\chi)|^2 \frac{dt}{1+|t|},$$

$$t''_k(q;M,N) = \sum_{\chi}'' \int_{-T}^{T} |S_1(0.5+it,\chi)|^2 \frac{dt}{1+|t|}.$$

Оценим $t'_k(q;M,N)$. Применим лемму 1.1, а затем соотношение $|a_n| \le \tau_{2k-1}(n)$. Имеем

$$t'_k(q;M,N) = \sum_{\chi}{}'' \int_{-T}^{T} \left| \sum_{V_0<n\le V_1} \frac{a_n \chi(n)}{n^{0.5+it}} \right|^2 \frac{dt}{1+|t|} \ll$$

$$\ll \sum_{V_0<n\le V_1} (n + q\ln T) \left| \frac{a_n}{n^{0.5}} \right|^2 \ll$$

$$\ll \sum_{V_0<n\le V_1} \tau^2_{2k-1}(n) + q \ln T \sum_{V_0<n\le V_1} \frac{\tau^2_{2k-1}(n)}{n}.$$

Две последние суммы оценим, применив лемму 1.2, а затем воспользуемся соотношением $V_1 \ll \dfrac{Y}{N_1 N_2}$. Имеем:

$$t'_k(q;M,N) \ll V_1 (\ln V_1)^{(2k-1)^2-1} + q \ln T (\ln V_1)^{(2k-1)^2} \ll$$

$$\ll \left(\frac{Y}{N_1 N_2} + q\mathscr{L}^2 \right) \mathscr{L}^{(2k-1)^2-1}. \qquad (1.12)$$

Перейдем к оценке $t''_k(q;M,N)$. Применим к сумме $S_1(0.5+it,\chi)$ лемму 1.9, полагая в ней $T_0 = T$. Имея в виду, что , $T_0 \ge \max(N_1^{\frac{1}{2}}, q)$, находим:

$$S_1(0.5+it,\chi) \ll \int_{-T}^{T} |L(0.5+i(u+t),\chi)| \frac{du}{1+|u|} + \mathscr{L}.$$

Отсюда для $t''_k(q;M,N)$ имеем:

$$t''_k(q;M,N) \ll \sum_{\chi}{}'' \int_{-T}^{T} \left| \int_{-T}^{T} |L(0.5+i(u+t),\chi)| \frac{du}{1+|u|} + \mathscr{L} \right|^2 \frac{dt}{1+|t|} \ll$$

$$\ll \sum_{\chi}{}'' t(\chi,T) + q\mathscr{L}^3, \qquad (1.13)$$

где

$$t(\chi,T) = \int_{-T}^{T} \left(\int_{-T}^{T} |L(0.5+i(u+t),\chi)| \frac{du}{1+|u|} \right)^2 \frac{dt}{1+|t|}.$$

Применяя к внутреннему интегралу по переменной u неравенство Коши, находим:

$$t(\chi,T)=\int\limits_{-T}^{T}\left(\int\limits_{-T}^{T}\frac{|L(0.5+i(u+t),\chi)|}{\sqrt{1+|u|}}\cdot\frac{du}{\sqrt{1+|u|}}\right)^2\frac{dt}{1+|t|}\ll$$

$$\ll\mathscr{L}\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T}|L(0.5+i(u+t),\chi)|^2\frac{du}{1+|u|}\frac{dt}{1+|t|}.$$

Пользуясь симметричностью повторного интеграла по переменным u и t, имеем

$$t(\chi,T)\ll\mathscr{L}\int\limits_{|t|\le T}\int\limits_{|u|\le|t|}|L(0.5+i(u+t),\chi)|^2\frac{du}{1+|u|}\frac{dt}{1+|t|}+$$

$$+\mathscr{L}\int\limits_{|t|\le T}\int\limits_{|t|\le|u|\le T}|L(0.5+i(u+t),\chi)|^2\frac{du}{1+|u|}\frac{dt}{1+|t|}=$$

$$=2\mathscr{L}\int\limits_{|t|\le T}\int\limits_{|t|\le|u|\le T}|L(0.5+i(u+t),\chi)|^2\frac{du}{1+|u|}\frac{dt}{1+|t|}.$$

Так как $|u|\ge|t|$, то

$$1+|u|\ge1+\frac{|u|+|t|}{2}\ge1+\frac{|u+t|}{2}\ge\frac{1}{2}(1+|u+t|).$$

Следовательно

$$t(\chi,T)\ll\mathscr{L}\int\limits_{|t|\le T}\int\limits_{|t|\le|u|\le T}\left|L(0.5+i(u+t),\chi)\right|^2\frac{du}{1+|u+t|}\frac{du}{1+|u|}=$$

$$=\mathscr{L}\int\limits_{|t|\le T}\int\limits_{|t|\le|v-t|\le T}\left|L(0.5+iv,\chi)\right|^2\frac{dv}{1+|v|}\frac{du}{1+|u|}\ll$$

$$\ll\mathscr{L}^2\int\limits_{-2T}^{2T}\left|L(0.5+iv,\chi)\right|^2\frac{dv}{1+|v|}.$$

Подставляя в правую часть полученную формулу для $t(\chi,T)$ в (1.13), найдём

$$t_k''(q;M,N)\ll\mathscr{L}^2{\sum_{\chi}}''\int\limits_{-2T}^{2T}\left|L(0.5+it,\chi)\right|^2\frac{dt}{1+|t|}+q\mathscr{L}^3,$$

Пользуясь леммой 1.5, получим

$$t_k''(q;M,N) \ll q\mathscr{L}^3.$$

Отсюда и из (1.12), в силу (1.11), получим

$$t_k(q;M,N) \ll \left(\left(\frac{Y}{N_1}+q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{(2k-1)^2-1}\cdot q\mathscr{L}^3\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$
$$\ll \left(\left(\frac{Yq}{N_1}\right)^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{(2(k-0,5)^2+1)}.$$

Лемма доказана.

1.4. Доказательство теоремы 1.1

Пусть χ_d – примитивный характер по модулю d, χ – индуцированный χ_d характер по модулю q, $d|q$, тогда

$$\psi(y,\chi)=\sum_{n\le y}\Lambda(n)\chi(n)=\sum_{n\le y}\Lambda(n)\chi_d(n)=\psi(y,\chi_d)+O(\mathscr{L}^2),$$

отсюда

$$t(x;q)=\sum_{\chi \bmod q}\max_{y\le x}|\psi(y,\chi)|=\sum_{\chi\ne\chi_0}\max_{y\le x}|\psi(y,\chi)|+\psi(x,\chi_0)=$$
$$=\sum_{\chi}{}''\max_{y\le x}|\psi(y,\chi)+O(\mathscr{L}^2)|+x+O(\mathscr{L}^2)\ll$$
$$\ll \sum_{\chi}{}''\max_{y\le x}|\psi(y,\chi)|+x+\varphi(q)\mathscr{L}^2. \qquad (1.14)$$

Полагая в лемме 1.6, $u=y^{\frac{1}{4}}$, $r=4$ и $f(n)=\chi(n)$, найдём

$$\psi(y,\chi)=\sum_{k=1}^{4}(-1)^k C_4^k\tilde{\psi}_k(y,\chi), \qquad (1.15)$$

$$\tilde{\psi}_k(y,\chi)=\sum_{m_1\le u}\mu(m_1)\cdots\sum_{m_k\le u}\mu(m_k)\sum_{n_1}\cdots\sum_{m_1\cdots m_kn_1\cdots n_k\le y}\ln n_1\chi(m_1n_1\cdots m_kn_k).$$

Разобьём в $\tilde{\psi}_k(y,\chi)$ области изменения каждого $m_1,\cdots,m_k,n_1,\cdots,n_k$ на не более $\mathscr{L}$ интервалов вида $M_j < m_j \le 2M_j$, $N_j < n_j \le 2N_j$, $j=1,2,\cdots,k$. Получим не более $\mathscr{L}^{2k}$ сумм вида

$$\hat{\psi}_k(y,\chi,M,N) = \sum_{M_1<m_1\le 2M_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{M_k<m_k\le 2M_k}\mu(m_k)\sum_{N_1<n_1\le 2N_1}\cdots\sum_{\substack{N_k<n_k\le 2N_k\\ m_1n_1\cdots m_kn_k\le y}}\chi(m_1n_1\cdots m_kn_k)\ln n_1 =$$

$$=\sum_{M_1<m_1\le 2M_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{M_k<m_k\le 2M_k}\mu(m_k)\sum_{N_1<n_1\le 2N_1}\cdots\sum_{\substack{N_k<n_k\le 2N_k\\ m_1n_1\cdots m_kn_k\le y}}\chi(m_1n_1\cdots m_kn_k)\int_1^{n_1}\frac{du}{u} =$$

$$= \int_1^{2N_1}\sum_{M_1<m_1\le 2M_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{M_k<m_k\le 2M_k}\mu(m_k)\sum_{\max(u,N_1)<n_1\le 2N_1}\cdots\sum_{\substack{N_k<n_k\le 2N_k\\ m_1n_1\cdots m_kn_k\le x}}\chi(m_1n_1\cdots m_kn_k)d\ln u.$$

Через $U_1=\max(u,N_1)$ обозначим такое число u, при котором модуль подынтегральной функции принимает максимальное значение, тогда

$$|\hat{\psi}_k(y,\chi,M,N)| \ll \mathscr{L}\,|\psi_k(y,\chi,M,N)|\,,$$

где

$$\psi_k(y,\chi,M,N) = \sum_{M_1<m_1\le 2M_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{M_k<m_k\le 2M_k}\mu(m_k)\sum_{U_1<n_1\le 2N_1}\cdots\sum_{\substack{U_k<n_k\le 2N_k\\ m_1n_1\cdots m_kn_k\le y}}\chi(m_1n_1\cdots m_kn_k),$$

где $N_j \le U_j < 2N_j$, $j=1,2,\ldots,k$. Не ограничивая общности будем считать, что

$$M_1\ldots M_kN_1\ldots N_k = Y, \qquad Y<y$$

и y полуцелое число. От ограничения $m_1n_1\ldots m_kn_k \le y$ освобождаемся с помощью леммы 1.3 при $T=(xq)^{10}$:

$$\psi_k(y,\chi,M,N)=\sum_{M_1<m_1\le 2M_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{M_k<m_k\le 2M_k}\mu(m_k)\sum_{U_1<n_1\le 2N_1}\cdots\sum_{U_k<n_k\le 2N_k}\chi(m_1n_1\cdots m_kn_k)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0.5-iT}^{0.5+iT}\left(\frac{y}{m_1n_1\dots m_kn_k}\right)^s\frac{ds}{s}+O\left(\frac{\left(\frac{y}{m_1n_1\dots m_kn_k}\right)^{\frac12}}{T\left|\ln\frac{y}{m_1n_1\dots m_kn_k}\right|}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0.5-iT}^{0.5+iT}\prod_{j=1}^{k}\sum_{M_j<m_j\le 2M_j}\frac{\chi(m_j)\mu(m_j)}{m_j^s}\sum_{U_j<n_j\le 2N_j}\frac{\chi(n_j)}{n_j^s}\frac{y^s}{s}ds+$$
$$+O\left(\sum_{M_1<m_1\le 2M_1}m_1^{-\frac12}\cdots\sum_{M_k<m_k\le 2M_k}m_k^{-\frac12}\sum_{U_1<n_1\le 2N_1}n_1^{-\frac12}\cdots\sum_{U_k<n_k\le 2N_k}n_k^{-\frac12}\frac{y^{\frac12}}{T\left|\ln\frac{y}{m_1n_1\dots m_kn_k}\right|}\right).$$

Далее воспользовавшись при $m_1n_1\dots m_kn_k<y$ неравенством

$$\ln\frac{y}{m_1n_1\dots m_kn_k}\ge\ln\frac{y}{y-0,5}=\ln\left(1+\frac{1}{2y-1}\right)>\ln\left(1+\frac{1}{2y}\right)>\frac{1}{2y},$$

а при $m_1n_1\dots m_kn_k>y$ неравенством

$$\ln\frac{m_1n_1\dots m_kn_k}{y}\ge\ln\frac{y+0,5}{y}=\ln\left(1+\frac{1}{2y}\right)>\frac{1}{2y},$$

получим

$$\psi_k(y,\chi,M,N)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0.5-iT}^{0.5+iT}W_k(s,\chi)\frac{y^s}{s}ds+O\left(\frac{y^{\frac32}}{T}\prod_{j=1}^{k}\sum_{M_j<m_j\le 2M_j}m_j^{-\frac12}\sum_{N_j<n_j\le 2N_j}n_j^{-\frac12}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0.5-iT}^{0.5+iT}W_k(s,\chi)\frac{y^s}{s}ds+O\left(\frac{y^2}{(xq)^{10}}\right),$$

где

$$W_k(s,\chi) = \prod_{j=1}^{k} G_j(s,\chi) S_j(s,\chi),$$

$$G_j(s,\chi) = \sum_{M_j < m_j \le 2M_j} \frac{\chi(m_j)\mu(m_j)}{m_j^s},$$

$$S_j(s,\chi) = \sum_{U_j < n_j \le 2N_j} \frac{\chi(n_j)}{n_j^s}.$$

Отсюда воспользовавшись соотношением

$$\left|\frac{y^s}{s}\right| = \left|\frac{y^{0.5+it}}{0.5+it}\right| \le \frac{2\sqrt{y}}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{2y}}{((1+t)^2+(1+t)^2)^{\frac{1}{2}}} \le \frac{2\sqrt{2y}}{1+|t|},$$

находим

$$\tilde{\psi}(y,\chi,M,N) \ll y^{\frac{1}{2}} \mathscr{L} \int_{-T}^{T} |W_k(0.5+it,\chi)| \frac{dt}{1+|t|} + \frac{y^2 \mathscr{L}}{(xq)^{10}}.$$

Переходя к (1.15) к оценкам и затем подставляя полученную оценку для $\tilde{\psi}(y,\chi,M,N)$, получим

$$\psi(y,\chi) \ll \sum_{k=1}^{4} |\tilde{\psi}_k(y,\chi)| \ll \sum_{k=1}^{4} \mathscr{L}^{2k} |\tilde{\psi}_k(y,\chi,M,N)| \ll$$

$$\ll y^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^9 \sum_{k=1}^{4} \int_{-T}^{T} |W_k(0.5+it,\chi)| \frac{dt}{1+|t|} + \frac{y^2 \mathscr{L}^9}{(xq)^{10}}.$$

Отсюда и из формулы (1.14), имеем

$$t(x;q) \ll {\sum_{\chi}}'' \max_{y \le x} |\psi(y,\chi)| + x + \varphi(q)\mathscr{L}^2 \ll$$

$$\ll {\sum_{\chi}}'' \max_{y \le x} \left(y^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^9 \sum_{k=1}^{4} \int_{-T}^{T} |W_k(0.5+it,\chi)| \frac{dt}{1+|t|} + \frac{y^2 \mathscr{L}^9}{(xq)^{10}} \right) + x + \varphi(q)\mathscr{L}^2 \ll$$

$$\ll x^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^9 {\sum_{\chi}}'' \max_{y \le x} \int_{-T}^{T} |W_k(0.5+it,\chi)| \frac{dt}{1+|t|} + \frac{\mathscr{L}^9}{x^8 q^9} + x + \varphi(q)\mathscr{L}^2.$$

Вводя обозначение

$$t_k(q;M,N)=\sum_{\chi_q}{}''\int\limits_{-T}^{T}|W_k(0.5+it,\chi)|\frac{dt}{1+|t|},$$

последнее неравенство представим в виде

$$t(x,q)\ll x^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^9\sum_{k=1}^{4}\max_{y\le x}t_k(q;M,N)+x+\varphi(q)\mathscr{L}^2. \tag{1.16}$$

Оценим $t_k(q;M,N)$ отдельно для каждого $k=1,2,3,4$. Не ограничивая общности будем считать, что для $t_k(q;M,N)$ выполняются следующие условия, которым и мы будем далее много раз пользоваться:

$$M_1\ge M_2\ge\ldots\ge M_k, \tag{1.17}$$

$$N_1\ge N_2\ge\ldots\ge N_k, \tag{1.18}$$

$$M_1\ldots M_kN_1\ldots N_k=Y,\quad Y\le y,\quad M_j\le y^{\frac{1}{4}}. \tag{1.19}$$

2. Оценка $t_1(q;M,N)$. Воспользовавшись леммой 1.11 имеем:

$$t_1(q;M,N)\ll\left(\left(\frac{Yq}{N_1}\right)^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{1,5}=\left((M_1q)^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{1,5}\le$$
$$\le(y^{\frac{1}{8}}q^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L})\mathscr{L}^{1,5}\le(y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L})\mathscr{L}^{1,5}.$$

3. Оценка $t_2(q;M,N)$. Применяя лемму 1.10, находим:

$$t_2(q;M,N)\ll\left(\left(\frac{Yq}{N_1N_2}\right)^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{6}=\left((M_1M_2q)^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{6}\le$$
$$\le(y^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L})\mathscr{L}^{6}\le(y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L})\mathscr{L}^{6}.$$

4. Оценка $t_3(q;M,N)$. Рассмотрим три возможных случая:

1. $M_1M_2M_3\le Y^{\frac{2}{5}}$;

2. $Y^{\frac{2}{5}}<M_1M_2M_3\le Y^{\frac{3}{5}}$;

3. $Y^{\frac{3}{5}} < M_1M_2M_3$.

Случай 1. $M_1M_2M_3 \le Y^{\frac{2}{5}}$. Тогда ввиду условий (1.19) и (1.18), находим, что

$$N_1N_2N_3 = \frac{Y}{M_1M_2M_3} \ge Y^{\frac{3}{5}};$$
$$N_1N_2 \ge N_1N_2 \cdot \frac{N_3}{\sqrt[3]{N_1N_2N_3}} = (N_1N_2N_3)^{\frac{2}{3}} \ge Y^{\frac{2}{5}}.$$

Следовательно, применяя 1.10, имеем:

$$t_3(q;M,N) \ll \left(\left(\frac{Yq}{N_1N_2}\right)^{\frac{1}{2}} + q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{12} \le \left(\left(Y^{\frac{3}{5}}q\right)^{\frac{1}{2}} + q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{12} \ll$$
$$\ll \left(y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}} + q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{12}.$$

Случай 2. $Y^{\frac{2}{5}} < M_1M_2M_3 \le Y^{\frac{3}{5}}$**.** К сумме $t_3(q;M,N)$ применяя лемму 1.7 при $X = 8M_1M_2M_3$, имеем:

$$t_3(q;M,N) \ll \left(Y^{\frac{1}{2}} + (M_1M_2M_3)^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + Y^{\frac{1}{2}}(M_1M_2M_3)^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^8 \le$$
$$\le \left(Y^{\frac{1}{2}} + 2Y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^8 \ll \left(y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^8.$$

Случай 3. $Y^{\frac{3}{5}} < M_1M_2M_3$**.** Из соотношений (1.17) и условия рассматриваемого случая находим, что

$$M_1M_2 \ge M_1M_2 \cdot \frac{M_3}{\sqrt[3]{M_1M_2M_3}} = (M_1M_2M_3)^{\frac{2}{3}} \ge Y^{\frac{2}{5}},$$

также из условия (1.19) следует, что $M_1M_2 \le y^{\frac{1}{2}}$, поэтому, полагая в лемме 1.7 $X = M_1M_2$, имеем:

$$t_3(q;M,N) \ll \left(Y^{\frac{1}{2}} + (M_1M_2)^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + Y(M_1M_2)^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^9 \le$$
$$\le \left(Y^{\frac{1}{2}} + Y^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + Y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^9 \ll \left(y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^9.$$

5. Оценка $t_4(q;M,N)$**.** Рассмотрим семь возможных случаев:

1. $M_1M_2M_3M_4 \leq Y^{\frac{1}{5}}$;

2. $Y^{\frac{1}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \leq Y^{\frac{2}{5}}$, $N_1N_2 \leq Y^{\frac{2}{5}}$;

3. $Y^{\frac{1}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \leq Y^{\frac{2}{5}}$; $N_1N_2 > Y^{\frac{2}{5}}$

4. $Y^{\frac{2}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \leq Y^{\frac{3}{5}}$;

5. $Y^{\frac{3}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \leq Y^{\frac{4}{5}}$, $M_1M_2M_3 \leq Y^{\frac{3}{5}}$;

6. $Y^{\frac{3}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \leq Y^{\frac{3}{5}}$, $M_1M_2M_3 > Y^{\frac{3}{5}}$;

7. $M_1M_2M_3M_4 > Y^{\frac{4}{5}}$.

Случай 1. $M_1M_2M_3M_4 \leq Y^{\frac{1}{5}}$**.** Из соотношений (1.18), (1.19) и условия рассматриваемого случая, имеем:

$$N_1N_2 \geq (N_1N_2N_3N_4)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{Y}{M_1M_2M_3M_4}\right)^{\frac{1}{2}} \geq Y^{\frac{2}{5}}.$$

Поэтому по лемме 1.10, найдём:

$$t_4(q; M, N) \ll \left(\left(\frac{Yq}{N_1N_2}\right)^{\frac{1}{2}} + q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{22} \leq$$
$$\leq \left(Y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}} + q\mathscr{L})\mathscr{L}^{22} \leq (y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}} + q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{22}.$$

Случай 2. $Y^{\frac{1}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \leq Y^{\frac{2}{5}}$; $\quad N_1N_2 \leq Y^{\frac{2}{5}}$**.** Из соотношений (1.18), (1.19) и условия рассматриваемого случая, имеем:

$$N_1N_2N_3 \geq N_1N_2N_3\frac{N_4}{\sqrt[4]{N_1N_2N_3N_4}} = (N_1N_2N_3N_4)^{\frac{3}{4}} \geq$$
$$\geq \left(\frac{Y}{M_1M_2M_3M_4}\right)^{\frac{3}{4}} \geq \left(Y^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{3}{4}} = Y^{\frac{9}{20}} > Y^{\frac{2}{5}},$$
$$N_1N_2N_3 \leq N_1N_2 \cdot \sqrt{N_1N_2} = (N_1N_2)^{\frac{3}{2}} \leq \left(Y^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{2}} = Y^{\frac{3}{5}}.$$

Поэтому, полагая в лемме 1.7 $X = 8N_1N_2N_3$, и имея в виду, что $Y^{\frac{2}{5}} \ll X \ll Y^{\frac{3}{5}}$, находим:

$$t_4(q;M,N) \ll \left(Y^{\frac{1}{2}} + (N_1N_2N_3)^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + Y^{\frac{1}{2}}(N_1N_2N_3)^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{16} \le$$
$$\le \left(Y^{\frac{1}{2}} + Y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{16} \le \left(y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{16}.$$

Случай 3. $Y^{\frac{1}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \le Y^{\frac{2}{5}};\quad N_1N_2 > Y^{\frac{2}{5}}$**.** Применяя к сумме $t_4(q;M,N)$ лемму 1.10, получаем:

$$t_4(q;M,N) \ll \left(\left(\frac{Yq}{N_1N_2}\right)^{\frac{1}{2}} + q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{22} \le$$
$$\le \left(Y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}} + q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{22} \le \left(y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}} + q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{22}.$$

Случай 4. $Y^{\frac{2}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \le Y^{\frac{3}{5}}$**.** Применяя лемму 1.7 при $X = 16M_1M_2M_3M_4$, имеем:

$$t_4(q;N) \ll \left(Y^{\frac{1}{2}} + Y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{15} \le \left(y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{15}.$$

Случай 5. $Y^{\frac{3}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \le Y^{\frac{4}{5}};\quad M_1M_2M_3 \le Y^{\frac{3}{5}}$**.** Из соотношений (1.17) и условия рассматриваемого случая, найдём:

$$M_1M_2M_3 \ge M_1M_2M_3\frac{M_4}{\sqrt[4]{M_1N_2M_3M_4}} = (M_1M_2M_3M_4)^{\frac{3}{4}} \ge \left(Y^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{3}{4}} = Y^{\frac{9}{20}} > Y^{\frac{2}{5}},$$

Поэтому, полагая в лемме 1.7 $X = 8M_1M_2M_3$, и имея в виду, что $Y^{\frac{2}{5}} \ll X \ll Y^{\frac{3}{5}}$, находим:

$$t_4(q;M,N) \ll \left(Y^{\frac{1}{2}} + Y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{16} \le \left(y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{16}.$$

Случай 6. $Y^{\frac{3}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \le Y^{\frac{3}{5}};\quad M_1M_2M_3 > Y^{\frac{3}{5}}$**.** Из соотношений (1.19), (1.17) и условия рассматриваемого случая, найдём:

$$y^{\frac{1}{2}} \ge M_1M_2 \ge M_1M_2\frac{M_3}{\sqrt[3]{M_1M_2M_3}} = (M_1M_2M_3)^{\frac{2}{3}} > \left(Y^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{2}{3}} = Y^{\frac{2}{5}}.$$

Поэтому, полагая в лемме 1.7 $X = 4M_1M_2$, и имея в виду, что $Y^{\frac{2}{5}} \ll X \ll Y^{\frac{1}{2}}$, находим:

$$t_4(q; M, N) \ll \left(Y^{\frac{1}{2}} + Y^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + Y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{19} \ll$$
$$\ll \left(y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{19}.$$

Случай 7. $M_1M_2M_3M_4 > Y^{\frac{4}{5}}$**.** Из соотношений (1.19), (1.17) и условия рассматриваемого случая, найдём:

$$y^{\frac{1}{2}} \geq M_1M_2 \geq M_1M_2\frac{M_3M_4}{\sqrt{M_1M_2M_3M_4}} = (M_1M_2M_3M_4)^{\frac{1}{2}} > Y^{\frac{2}{5}}.$$

Поэтому, полагая в лемме 1.7 $X = 4M_1M_2$, и имея в виду, что $Y^{\frac{2}{5}} \ll X \ll Y^{\frac{1}{2}}$, находим:

$$t_4(q; M, N) \ll \left(Y^{\frac{1}{2}} + Y^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + Y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{19} \ll$$
$$\ll \left(y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{19}.$$

6. Таким образом для всех $k = 1, 2, 3, 4$ доказана, что

$$\max_{y \leq x} t_k(q; M, N) \ll \max_{y \leq x}\left(y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{19} + y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{22} + q\mathscr{L}^{23}\right) =$$
$$= x^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{19} + x^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{22} + q\mathscr{L}^{23}.$$

Подставляя эти оценки в (1.16), получим

$$t(x, q) \ll x^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^9 \sum_{k=1}^{4} \max_{y \leq x} t_k(q; M, N) + x + \varphi(q)\mathscr{L}^2 \ll$$
$$\ll x^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^9 \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{19} + x^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{22} + q\mathscr{L}^{23}\right) + x + \varphi(q)\mathscr{L}^2 \ll$$
$$\ll x\mathscr{L}^{28} + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{31} + x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}^{32}.$$

Теорема 1.1 доказана.

Глава 2. Оценки тригонометрических сумм на основе средних значений функций Чебышёва

2.1. Постановка проблемы и формулировка результатов

В 1937 г. И.М.Виноградов [1] обнаружил, что суммы по простым числам могут быть составлены путем только сложения и вычитания из сравнительно небольшого числа других сумм, хорошие оценки которых могут быть получены с помощью метода оценок двойных сумм, не имеющих какого-либо отношения к теории L-рядов Дирихле. В частности, такой суммой оказалась линейная тригонометричкая сумма с простыми числами вида

$$S(\alpha,x)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)e(\alpha n),$$

где α — вещественное число и при условии

$$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\le\frac{1}{q^2},\qquad q\le x,\qquad (a,q)=1,$$

была найдена оценка:

$$S(\alpha,x)\ll(xq^{-\frac12}+x^{\frac45}+x^{\frac12}q^{\frac12})x^{\varepsilon},\tag{2.1}$$

доказательство которой проводится элементарным методом.

В последующие годы появились работы [24, 27, 29, 30], посвящённые оценкам сумм $S(\alpha,x)$, в которых аналитическим методом, то есть методом Римана-Адамара, с помощью L-рядов Дирихле, контурного интегрирования и плотностных теорем о нулях L-рядов Дирихле получен ряд нетривиальных оценок $S(\alpha,x)$.

Впервые сумму $S(\alpha, x)$ аналитическим методом оценил Ю.В.Линник [24, 27]. Он с помощью идей Харди-Литтлвуда [28], применявшимися ранее в проблеме Гольдбаха, и теоремы о густоте нулей L-рядов Дирихле дал новый вариант нетривиальной оценки линейной тригонометрической суммы с простыми числами в следующей формулировке: *пусть* α *- вещественное число,* $N \geq N_0 > 0$, $\alpha = \frac{a}{q} + \lambda$, *где* $(a, q) = 1$, $1 < q \leq \tau = (\ln x)^{1000}$, $\tau^{1000} x^{-1} \leq |\lambda| \leq (q\tau)^{-1}$, *тогда справедлива оценка:*

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) \exp\left(-\frac{n}{N}\right) e(\alpha n) \right| < N (\ln N)^{-1000}.$$

Г.Монтгомери [32], пользуясь своей оценкой средних значений функций Чебышева (1.1), то есть оценкой:

$$t(x; q) \ll (x + x^{\frac{5}{7}} q^{\frac{5}{7}} + x^{\frac{1}{2}} q) \mathscr{L}^{17},$$

доказал, что

$$S\left(\frac{a}{q}, x\right) \ll \left(x q^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{7}} q^{\frac{3}{14}} + x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}\right) \mathscr{L}^{17}. \qquad (2.2)$$

Он также доказал, что если $\eta \leq x^{\frac{1}{4}}$, $\eta \leq q \leq x\eta^{-1}$, $|\alpha - a/q| \leq 2\eta (qx)^{-1}$, $(a, q) = 1$, то

$$S(\alpha, x) \ll x \eta^{-\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{17}. \qquad (2.3)$$

Р.Вон [33], применяя свою оценку для средних значений функций Чебышёва (1.2), то есть оценку

$$t(x; q) \ll x \mathscr{L}^3 + x^{\frac{3}{4}} q^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}} q \mathscr{L}^{\frac{7}{2}},$$

уточнил результат Г.Монтгомери. Он доказал, если $|\alpha - a/q| \leq q^{-2}$, $(a, q) = 1$, то имеет место оценка

$$S(\alpha, x) \ll (x q^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{7}{8}} q^{-\frac{1}{8}} + x^{\frac{3}{4}} q^{\frac{1}{8}} + x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}) \mathscr{L}^4, \qquad (2.4)$$

и, если $\eta \le x^{\frac{1}{3}}$, $\eta \le a \le x\eta^{-1}$, $|\alpha - a/q| \le 2\eta(qx)^{-1}$, $(a,q)=1$, то

$$S(\alpha, x) \ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^4. \tag{2.5}$$

Отметим, что оценки (2.2), (2.3), (2.4) и (2.5), полученные аналитическим методом, слабее оценки (2.1), полученной И.М.Виноградовым элементарным методом.

З.Х.Рахмонов [35, 36], воспользовавшись своей оценкой средних значений функций Чебышёва (1.4) вида

$$t(x;q) \ll \left(x + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}q\right)\mathscr{L}^{34},$$

вывел оценку в котором множитель x^{ε} в (2.1) заменяется на конечную степень логарифма, то есть если $|\alpha - a/q| \le q^{-2}$, $(a,q)=1$, тогда

$$S(\alpha, x) \ll (xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}})\mathscr{L}^{35}. \tag{2.6}$$

и если $1 \le \eta \le x^{\frac{2}{5}}$, $\eta \le q < x\eta^{-1}$, $|\alpha - a/q| \le 2\eta(qx)^{-1}$, $(a,q)=1$, то справедлива оценка

$$S(\alpha, x) \ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{35}. \tag{2.7}$$

В этой главе, воспользовавшись доказанной нами в первой главе теоремой 1.1 о оценке средних значений функций Чебышёва, то есть оценкой вида

$$t(x;q) \ll x\mathscr{L}^{28} + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{31} + x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}^{32},$$

докажем оценку суммы $S(\alpha, x)$, в которой в (2.6) уточняются степени логарифмов в слагаемых, точнее оценка (2.6) сначала уточняется в случае, когда α является рациональным числом (теорема 2.1), а затем для произвольного вещественного числа α (следствие 2.1.1).

Теорема 2.1. *Пусть* $(a,q)=1$. *Тогда справедлива оценка:*

$$S\left(\frac{a}{q},x\right)\ll xq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{29}+x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{32}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}.$$

Следствие 2.1.1. *Пусть* $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$, $(a,q)=1$, *тогда имеет место оценка:*

$$S(\alpha,x)\ll xq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}+x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{32}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}.$$

Следующее следствие является уточнением оценки (2.7) для $x^{\frac{1}{3}}\ll\eta\ll x^{\frac{2}{5}}$.

Следствие 2.1.2. *Пусть* $\eta\le x^{\frac{2}{5}}$, $\eta\le q\le x\eta^{-1}$, $|\alpha-aq^{-1}|\le 2\eta(qx)^{-1}$, $(a,q)=1$, *тогда справедлива оценка:*

$$S(\alpha,x)\ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}.$$

2.2. Вспомогательные леммы

Лемма 2.1. *Справедливы равенства*

$$\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi mod q}\chi(n)=\begin{cases}1, & \text{если } n\equiv 1(mod q);\\ 0, & \text{если } n\not\equiv 1(mod q).\end{cases}.$$

где суммирование ведется по всем $\varphi(q)$ *характерам модуля* q;

$$\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{n=1}^{q}\chi(n)=\begin{cases}1, & \text{если } \chi=\chi_0;\\ 0, & \text{если } \chi\neq\chi_0.\end{cases}.$$

Доказательство см. [41]

Лемма 2.2. *Пусть* χ_q — *примитивный характер по модулю* q. *Тогда*

$$\tau(\bar{\chi}_q)\chi_q(n) = \sum_{m=1}^{q} \bar{\chi}_q(m) e\left(\frac{mn}{q}\right),$$

где

$$\tau(\chi_q) = \sum_{m=1}^{q} \chi_q(m) e\left(\frac{m}{q}\right), \qquad |\tau(\chi_q)| = \sqrt{q}.$$

Доказательство см. [41]

Лемма 2.3. *Пусть* q – *целое,* $q \geq 10$, *а* $\varphi(q)$ — *функция Эйлера, тогда справедлива оценка*

$$q \ll \varphi(q) \ln\ln q.$$

Доказательство см. [43].

Лемма 2.4. *Пусть* $f(x)$ — *комплекснозначная непрерывно дифференцируемая функция на отрезке* $[a,b]$, c_n — *произвольные комплексные числа, тогда*

$$\sum_{a<n\leq b} c_n f(n) = -\int_a^b C(x) f'(x) dx + C(b) f(b),$$

где

$$C(x) = \sum_{a<n\leq x} c_n.$$

Доказательство см. [41]

2.3. Доказательство теоремы 2.1.

Имеем

$$S\left(\frac{a}{q},x\right)=\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}}\Lambda(n)e\left(\frac{an}{q}\right)+O(\mathscr{L}^2)=$$
$$=\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}}\Lambda(n)e\left(\frac{an}{q}\right)\sum_{\substack{h=1\\h\equiv n\,(\mathrm{mod}\ q)}}^{q}1+O(\mathscr{L}^2)=$$
$$=\sum_{h=1}^{q}e\left(\frac{ah}{q}\right)\sum_{\substack{n\le x,\ (n,q)=1,\\h\equiv n\,(\mathrm{mod}\ q)}}\Lambda(n)+O(\mathscr{L}^2).$$

Пользуясь свойством ортогональности характеров (лемма 2.1), находим:

$$S\left(\frac{a}{q},x\right)=\sum_{h=1}^{q}e\left(\frac{ah}{q}\right)\sum_{n\le x}\Lambda(n)\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\ \mathrm{mod}\ q}\overline{\chi}(h)\chi(n)+O(\mathscr{L}^2)=$$
$$=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\ \mathrm{mod}\ q}\tau(\bar{\chi})\psi(x,\chi)+O(\mathscr{L}^2),$$

где $\tau(\chi)$ — сумма Гаусса, а $\psi(x,\chi)$ — функция Чебышёва, которые определяются соответственно соотношениями

$$\tau(\chi)=\sum_{h=1}^{q}\chi(h)e\left(\frac{h}{q}\right),\qquad \psi(x,\chi)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)\chi(n).$$

Переходя к оценкам, а затем пользуясь леммой 2.2, то есть оценкой

$$|\tau(\chi)|\le q^{\frac{1}{2}},$$

найдём

$$\left|S\left(\frac{a}{q},x\right)\right|\le\frac{\sqrt{q}}{\varphi(q)}\sum_{\chi\ \mathrm{mod}\ q}\max_{y\le x}|\psi(y,\chi)|+O(\mathscr{L}^2)=\frac{\sqrt{q}}{\varphi(q)}t(x,q)+O(\mathscr{L}^2)$$

а, затем оценкой

$$q\ll\varphi(q)\ln\ln q\ll\varphi(q)\ln\mathscr{L},$$

которая следует из леммы 2.3, получим

$$S\left(\frac{a}{q},x\right) \ll \frac{\ln\mathscr{L}}{\sqrt{q}}t(x;q)+\mathscr{L}^2.$$

Отсюда и из соотношения $\ln\mathscr{L} \ll \mathscr{L}$ и теоремы 1.1, найдём

$$S\left(\frac{a}{q},x\right) \ll \frac{\mathscr{L}}{\sqrt{q}}\left(x\mathscr{L}^{28}+x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{31}+x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}^{32}\right)+\mathscr{L}^2 \ll$$
$$\ll xq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{29}\ln\mathscr{L}+x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{32}\ln\mathscr{L}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}\ln\mathscr{L}.$$

Теорема 2.1 доказана.

2.4. Доказательство следствия 2.1.1 и 2.1.2

Вводя обозначение

$$\alpha-\frac{a}{q}=\lambda,$$

рассмотрим два возможных случая: $|\lambda|\le 2x^{-1}$ и $2x^{-1}<|\lambda|\le q^{-2}$.

Случай 1: $|\lambda| \le 2x^{-1}$. Пользуясь преобразованием Абеля (лемма 2.4) сумму $S(\alpha,x)$ выразим через сумму $S\left(\frac{a}{q},u\right)$, $u\le x$. Имеем

$$S(\alpha,x)=-\int\limits_2^x S\left(\frac{a}{q},u\right)2\pi i\lambda e(u\lambda)du+e(\lambda x)S\left(\frac{a}{q},x\right).$$

Переходя к оценкам, и воспользовавшись условием рассматриваемого случая, находим

$$|S(\alpha,x)|\le 2\pi|\lambda|x\max_{u\le x}\left|S\left(\frac{a}{q},u\right)\right|+\left|S\left(\frac{a}{q},x\right)\right|\le(4\pi+1)\max_{u\le x}S\left(\frac{a}{q},u\right).$$

Применяя теорему 2.1, получим утверждение следствия, то есть:

$$|S(\alpha,x)\ll xq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{29}\ln\mathscr{L}+x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{32}\ln\mathscr{L}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}\ln\mathscr{L}.$$

Случай 2: $2x^{-1} < |\lambda| \leq q^{-2}$. Имеем $q^2 \leq \frac{x}{2}$. Согласно теореме Дирихле о приближении вещественных чисел рациональными числами, для любого $\tau \geq 1$ существуют целые взаимно простые числа b и r, $1 \leq r \leq \tau$, такие что

$$\left|\alpha - \frac{b}{r}\right| \leq \frac{1}{r\tau}.$$

Возьмем $\tau = \frac{x}{q}$, тогда

$$\left|\alpha - \frac{b}{r}\right| \leq \frac{q}{rx}, \qquad r \leq \frac{x}{q}. \tag{2.8}$$

Предположим, что $r = q$, тогда (2.8) принимает вид

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{x}$$

и, как в случае 1, получим для $S(\alpha, x)$ нужную оценку. Пусть теперь $r \neq q$, тогда

$$\left|\frac{a}{q} - \frac{b}{r}\right| = \frac{|ar - bq|}{rq} \geq \frac{1}{rq}.$$

Отсюда и из $q^2 \leq \frac{x}{2}$ имеем

$$\frac{1}{q^2} \geq \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| = \left|\left(\frac{a}{q} - \frac{b}{r}\right) + \left(\frac{b}{r} - \alpha\right)\right| \geq \left|\frac{a}{q} - \frac{b}{r}\right| - \left|\alpha - \frac{b}{r}\right| \geq$$
$$\geq \frac{1}{rq} - \frac{q}{rx} = \frac{1}{rq}\left(1 - \frac{q^2}{x}\right) \geq \frac{1}{rq}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2rq},$$

то есть $\frac{q}{r} \leq 2$. Поэтому (2.8) принимает вид:

$$\left|\alpha - \frac{b}{r}\right| \leq \frac{2}{x}, \qquad \frac{q}{2} < r \leq \frac{x}{q}.$$

Следовательно, как в случае 1, имеем

$$S(\alpha, x) \ll xr^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{29} + x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{32} + x^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33} \ll xq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33} + x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{32}.$$

Следствие 2.1.1 доказано.

Следствие 2.1.2 непосредственно вытекает из следствия 2.1.1. Действительно, воспользовавшись условиями $\eta \le x^{\frac{2}{5}}$, $\eta \le q \le x\eta^{-1}$ и $|\alpha - aq^{-1}| \le 2\eta(qx)^{-1}$, имеем

$$S(\alpha, x) \ll xq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33} + x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{32} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33} \le$$
$$\le x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33} + x \cdot x^{-\frac{1}{5}}\mathscr{L}^{32} + x\eta^{-\frac{1}{2}\mathscr{L}^{33}} \ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}.$$

Глава 3. Числа Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях

3.1. Постановка проблемы и формулировка результатов

Харди и Литтлвуд [38] сформулировали гипотезу о том, что все достаточно большие натуральные числа n разлагаются на сумму простого и степени натурального числа в виде

$$n = p + m^k, \qquad k \geq 2.$$

Такие числа мы назовем числами Харди-Литтлвуда. Г.Бабаев [39] опроверг эту гипотезу, а именно показал, что существует бесконечное число натуральных чисел, не являющихся числом Харди - Литтлвуда. Отсюда, в частности, следует, что существуют $l,\ 1 \leq l \leq q$, для которых выполняется неравенство

$$H_k(q, l) > q, \qquad k \geq 2,$$

где $H_k(q, l)$ — наименьшее число Харди-Литтлвуда вида $p + m^k$, лежащее в арифметической прогрессии $qt + l,\ t = 0, 1, 2, \ldots,\ q$ – целое. Поэтому, естественно, можно рассматривать следующие две задачи.

1. Оценить сверху величину $H_k(q, l)$ как можно лучше.
2. Получить асимптотический закон распределения чисел Харди-Литтлвуда, лежащих в очень коротких арифметических прогрессиях.

В случае q – простое число и $k \geq 2$, эти две задачи исследовались в работах [34, 35, 36, 37], и была получена асимптотическая формула для числа решений сравнения

$$p+m^k\equiv l\,(\mathrm{mod}\ q),\qquad p\le x,\qquad m\le\sqrt[k]{x},$$
$$q\ll\min\left(x^{\frac{2}{k}}\mathscr{L}^{-8},x^{\frac{k+5}{5k}}\mathscr{L}^{-35},x^{\frac{k+2}{3k}}\mathscr{L}^{-\frac{70}{3}},\right),$$

откуда, в частности, следует, что

$$H_2(q,l)\ll q^{\frac{3}{2}}\ln^{35}q.$$

Основным результатом этой главы — обобщение и уточнение этого результата на случай когда $k=2$ и q – разность прогрессии является степенью простого числа.

Теорема 3.1. *Пусть $x\ge x_0$, $q=p^{\alpha}$, p — нечётное простое число, $p\ge\mathscr{L}^{58}$, α — фиксированное натуральное число, $(l,p)=1$, $\rho(p,l)$ — число решений сравнения $n^2\equiv l\,(\mathrm{mod}\ p)$,*

$$H_2(x;q,l)=\sum_{\substack{n\le x,\ m^2\le x\\ n+m^2\equiv l(\mathrm{mod}\ q)}}\Lambda(n).$$

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$H_2(x;q,l)=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\varphi(q)}\left(1+O\left(\mathscr{L}^{-1}+\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{x}}\mathscr{L}^{29}+\frac{q}{x^{\frac{7}{10}}}\mathscr{L}^{32}+\frac{q^{1.5}}{x}\mathscr{L}^{33}\right)\right),$$

где постоянная под знаком O зависит от α.

Отметим, что эта формула становится нетривиальной, если

$$q\ll x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{\frac{-68}{3}}.$$

Следствие 3.1.1. *Пусть $q=p^{\alpha}$, p – простое число, α – фиксированное натуральное число, $(l,p)=1$. Тогда*

$$H(q,l)\ll q^{\frac{3}{2}}(\ln q)^{34}.$$

3.2. Вспомогательные леммы

При доказательстве воспользуемся следующими леммами.

Лемма 3.1. *Пусть $R(u)$ — рациональная функция по модулю p, $f(u)$ — произвольный многочлен с целыми коэффициентами; пусть, далее, $\chi(R(m)) \neq const$. Тогда*

$$\sum_{m=0}^{p-1} \chi\left(R(m)\right) e\left(\frac{f(m)}{p}\right) \ll \sqrt{p}.$$

Доказательство см. [44].

Лемма 3.2. *Пусть χ — примитивный характер модуля p^β, $\beta \geq 2$, $(l,p) = 1$, $k \geq 2$, τ — целое такое, что $k = p^\tau k_1$, $(k_1, p) = 1$, при этом если $1 < \beta \leq k$ и $\tau \geq 1$, то предположим, что $\beta \geq \tau + 1$, когда $p > 2$ и $\beta > \tau + 2$, когда $p = 2$ и*

$$S_k(p^\beta, \chi, l, h) = \sum_{m=1}^{p^\beta} \chi(l - m^k) e\left(\frac{hm}{p^\beta}\right).$$

Тогда имеют место формулы:

$$\begin{aligned}
S_k(p^\beta, \chi, l, 0) &= p^{\beta\left(1-\frac{1}{k}\right)}\chi(l), && \text{если} \quad \beta \equiv 0 \pmod{k},\\
S_k(p^\beta, \chi, l, 0) &= p^{\beta-\left[\frac{\beta}{k}\right]-1}\chi(l), && \text{если} \quad \beta \not\equiv 0; 1 \pmod{k},\\
S_k(p^\beta, \chi, l, 0) &= p^{\beta-\frac{\beta-1}{k}-1} T_k(l, \chi, p), && \text{если} \quad \beta \equiv 1 \pmod{k},
\end{aligned}$$

где $[t]$ обозначает целую часть числа t,

$$T_k(l, \chi, p) = \sum_{u=1}^{p} \chi(l - p^{\beta-1} u^k).$$

Доказательство см. [45].

Лемма 3.3. *Пусть k и l — натуральные числа, $\chi(m)$ — характер Дирихле по модулю p^β,*

$$V_k(u,\chi,l)=\sum_{m\le u}\chi(l-m^k),\qquad S_k(p^\beta,\chi,l,h)=\sum_{m=1}^{p^\beta}\chi(l-m^k)e\left(\frac{hm}{p^\beta}\right).$$

Тогда имеет место оценка

$$|V_k(u,\chi,l)|\le\left(\frac{u}{p^\beta}+\ln p^\beta\right)\max_{1\le h\le p^\beta}|S_k(p^\beta,\chi,l,h)|.$$

Доказательство. Имеем равенство:

$$\begin{aligned}V_k(u,\chi,l)&=\sum_{m\le u}\chi(l-m^k)\sum_{\substack{1\le n\le p^\beta\\ n\equiv m\ (\mathrm{mod}\ p^\beta)}}1=\\&=\sum_{1\le n\le p^\beta}\chi(l-n^k)\sum_{m\le u}\frac{1}{p^\beta}\sum_{h=0}^{p^\beta-1}e\left(\frac{(n-m)h}{p^\beta}\right)=\\&=\frac{1}{p^\beta}\sum_{h=0}^{p^\beta-1}\sum_{m\le u}e\left(-\frac{hm}{q}\right)S_k(p^\beta,\chi,l,h).\end{aligned}$$

Переходя к оценкам, и воспользовавшись равенством

$$\sum_{m\le u}e\left(-\frac{hm}{q}\right)=\frac{\sin\frac{\pi h[u]}{q}}{\sin\frac{\pi h}{q}}e\left(-\frac{h(1+[u])}{2q}\right),$$

найдём

$$\begin{aligned}|V_k(u,\chi,l)|&\le\frac{1}{p^\beta}\max_{1\le h\le p^\beta}|S_k(p^\beta,\chi,l,h)|\sum_{h=0}^{p^\beta-1}\left|\sum_{m\le u}e\left(-\frac{hm}{p^\beta}\right)\right|=\\&=\frac{1}{p^\beta}\max_{1\le h\le p^\beta}|S_k(p^\beta,\chi,l,h)|\left(u+\sum_{h=1}^{p^\beta-1}\left|\sin\frac{\pi h}{p^\beta}\right|^{-1}\right)\end{aligned}$$

Так как p^β — нечётное число, то воспользовавшись последовательно неравенствами $\sin\pi\alpha \geq 2\alpha$ при $0 \leq \alpha \leq 1/2$ и $\frac{1}{h} \leq \ln\frac{2h+1}{2h-1}$, найдём

$$\sum_{h=1}^{p^\beta-1}\left|\sin\frac{\pi h}{p^\beta}\right|^{-1} = 2\sum_{h=1}^{0.5(p^\beta-1)}\left|\sin\frac{\pi h}{p^\beta}\right|^{-1} \leq 2\sum_{h=1}^{0.5(p^\beta-1)}\left(\frac{2h}{p^\beta}\right)^{-1} = p^\beta\sum_{h=1}^{0.5(p^\beta-1)}\frac{1}{h} \leq$$
$$\leq p^\beta\sum_{h=1}^{0.5(p^\beta-1)}(\ln(2h+1)-\ln(2h-1)) = p^\beta\ln p^\beta.$$

Следовательно

$$|V_2(u,\chi,l)| \leq \frac{1}{p^\beta}\max_{1\leq h\leq p^\beta}|S_2(p^\beta,\chi,l,h)|\left(u+p^\beta\ln p^\beta\right) =$$
$$= \left(\frac{u}{p^\beta}+\ln p^\beta\right)\max_{1\leq h\leq p^\beta}|S_2(p^\beta,\chi,l,h)|.$$

3.3. Доказательство теоремы 3.1

Не ограничивая общности будем считать что $\sqrt{x} \leq q = p^\alpha$. Разбивая в $H_2(x;p^\alpha,l)$ сумму по n и m на три части имеем

$$H_2(x;q,l) = \sum_{\substack{n\leq x\\(n,p)=1}}\Lambda(n)\sum_{\substack{m^2\leq x,\ (m^2-l,p)=1\\ n\equiv l-m^2 (\mathrm{mod}\ p^\alpha)}}1 + \mathcal{R}_1(x,q)+\mathcal{R}_2(x,q),$$
$$\mathcal{R}_1(x,q) = \sum_{\substack{n\leq x\\(n,p)=p}}\Lambda(n)\sum_{\substack{m^2\leq x\\ m^2\equiv l-n (\mathrm{mod}\ p^\alpha)}}1 \leq k\left(\frac{\sqrt{x}}{p^\alpha}+1\right)\mathscr{L}^2 \ll \mathscr{L}^2,$$

$$\mathcal{R}_2(x,q) = \sum_{\substack{n\leq x\\(n,p)=1}}\Lambda(n)\sum_{\substack{m^2\leq x,\ (m^2-l,p)=p\\ n\equiv l-m^2 (\mathrm{mod}\ p^\alpha)}}1 =$$
$$= \sum_{\substack{n\leq x\\(n,p)=1}}\Lambda(n)\sum_{\substack{m\leq\sqrt{x},\ m^2-l\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)\\ m^2-l\equiv -n (\mathrm{mod}\ p^\alpha)}}1 = 0.$$

Далее, пользуясь свойством ортогональности характеров, найдём

$$H_2(x;q,l) = \sum_{\substack{n\le x\\(n,p)=1}} \Lambda(n) \sum_{\substack{m^2\le x,\\(m^2-l,p)=1}} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod p^\alpha} \chi(n)\overline{\chi}(l-m^2) + O(\mathscr{L}^2) =$$
$$= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod p^\alpha} \psi(x,\chi)V_2(\sqrt{x},\overline{\chi},l) + +O(\mathscr{L}^2),$$

где

$$\psi(x,\chi) = \sum_{n\le x}\Lambda(n)\chi(n), \qquad V_2(u,\chi,l) = \sum_{m\le u}\chi(l-m^2).$$

Разбивая последнюю сумму по χ на две части находим

$$\begin{aligned} H_2(x;q,l) &= G_2(x,q) + R_2(x,q) + O(\mathscr{L}^2), \\ G_2(x,q) &= \frac{\psi(x,\chi_0)V_2(\sqrt{x},\chi_0,l)}{\varphi(q)}, \\ R_2(x,q) &= \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\psi(x,\chi)V_2(\sqrt{x},\overline{\chi},l). \end{aligned} \tag{3.1}$$

В этой формуле $G(x,q)$ даёт предполагаемый главный член $H_k(x;q,l)$, а $R_2(x,q)$ входит в его остаточный член.

Вычислим главный член. Из теоремы Ш. Валле – Пуссена, получим

$$\psi(x,\chi_0) = \sum_{n\le x}\Lambda(n) + O(\mathscr{L}^2) = x + O(x\exp(-c\sqrt{\mathscr{L}})).$$

Рассмотрим теперь

$$V_2(\sqrt{x},\chi_0,l)=\sum_{\substack{m\le\sqrt{x}\\(l-m^2,p)=1}}1=\sum_{m\le\sqrt{x}}1-\sum_{\substack{m\le\sqrt{x}\\(l-m^2,p)=p}}1=$$

$$=x^{\frac12}+O(1)-\sum_{\substack{m\le\sqrt{x}\\m^2\equiv l(\mathrm{mod}\ p)}}1=x^{\frac12}-\sum_{\substack{m\le\sqrt{x}\\m^2\equiv l(\mathrm{mod}\ p)}}\sum_{\substack{1\le n\le p\\n\equiv m(\mathrm{mod}\ p)}}1+O(1)=$$

$$=x^{\frac12}-\sum_{\substack{1\le n\le p\\n^2\equiv l(\mathrm{mod}\ p)}}\sum_{\substack{m\le\sqrt{x}\\m\equiv n(\mathrm{mod}\ p)}}1+O(1)=$$

$$=x^{\frac12}-\sum_{\substack{1\le n\le p\\n^2\equiv l(\mathrm{mod}\ p)}}\sum_{m_1p+n\le\sqrt{x}}1+O(1)=$$

$$=x^{\frac12}-\sum_{\substack{1\le n\le p\\n^2\equiv l(\mathrm{mod}\ p)}}\left[\frac{\sqrt{x}-n}{p}\right]+O(1)=$$

$$=x^{\frac12}-\sum_{\substack{1\le n\le p\\n^2\equiv l(\mathrm{mod}\ p)}}\left(\frac{\sqrt{x}}{p}+O(1)\right)+O(1)=x^{\frac1k}\left(1-\frac{\rho(p,l)}{p}\right)+O(1),$$

где $\rho(p,l)$ — число решений сравнения $n^2\equiv l\,(\mathrm{mod}\ p),\ 1\le n\le p$. Поэтому

$$G_2(x,q)=\frac{\psi(x,\chi_0)V_2(\sqrt{x},\chi_0,l)}{\varphi(q)}=$$
$$=\frac{1}{\varphi(q)}\left(x+O(x\exp(-c\sqrt{\mathscr{L}}))\right)\left(x^{\frac12}\left(1-\frac{\rho(p,l)}{p}\right)+O(1)\right)$$
$$=\frac{x^{\frac32}}{\varphi(q)}\left(1-\frac{\rho(p,l)}{p}+O\left(\exp(-c\sqrt{\mathscr{L}})\right)\right).\qquad(3.2)$$

Оценим остаточный член $R_2(x,q)$. Переходя к примитивным характерам, и имея в виду, что $q=p^\alpha$, имеем

$$R_2(x,q)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\psi(x,\chi)V_2(\sqrt{x},\overline{\chi},l)=$$
$$=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\beta=1}^{\alpha}\sideset{}{^*}\sum_{\chi\,\mathrm{mod}\,p^\beta}\psi(x,\chi)V_2(\sqrt{x},\overline{\chi},l),$$

где * означает, что суммирование ведется по примитивным характерам. Далее переходя к оценке получим

$$|R_2(x,q)| \le \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\beta=1}^{\alpha} \max_{\chi \bmod p^\beta} |V_2(\sqrt{x},\chi,l)| \sum_{\chi \bmod p^\beta}^{\quad *} |\psi(,\chi)|, \tag{3.3}$$

в последней сумме максимум берется по всем примитивным характерам по модулю p^β. Воспользовавшись теоремой 1.1, имеем

$$\sum_{\chi \bmod p^\beta}^{\quad *} |\psi(x,\chi)| \le \sum_{\chi \bmod p^\beta} \max_{y\le x} |\psi(y,\chi)| \ll x\mathscr{L}^{28} + x^{\frac{4}{5}} p^{\frac{\beta}{2}} \mathscr{L}^{31} + x^{\frac{1}{2}} p^{\beta} \mathscr{L}^{32}.$$

Подставляя эту оценку в правую часть (3.3), получим

$$|R_2(x,q)| \ll \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\beta=1}^{\alpha} \left(x\mathscr{L}^{28} + x^{\frac{4}{5}} p^{\frac{\beta}{2}} \mathscr{L}^{31} + x^{\frac{1}{2}} p^{\beta} \mathscr{L}^{32} \right) \max_{\chi \bmod p^\beta} |V_2(\sqrt{x},\chi,l)| =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\varphi(q)} \sum_{\beta=1}^{\alpha} \left(\mathscr{L}^{28} + x^{-\frac{1}{5}} p^{\frac{\beta}{2}} \mathscr{L}^{31} + x^{-\frac{1}{2}} p^{\beta} \mathscr{L}^{32} \right) \max_{\chi \bmod p^\beta} \frac{|V_2(\sqrt{x},\chi,l)|}{\sqrt{x}}, \tag{3.4}$$

Пользуясь леммой 3.3, оценку сверху модуля суммы $V_2(\sqrt{x},\chi,l)$, сведём к оценкам полных сумм. Имеем

$$|V_2(\sqrt{x},\chi,l)| \le \left(\frac{\sqrt{x}}{p^\beta} + \ln p^\beta \right) \max_{1\le h\le p^\beta} |S_2(p^\beta,\chi,l,h)|, \tag{3.5}$$

$$S_2(p^\beta,\chi,l,h) = \sum_{m=1}^{p^\beta} \chi(l-m^2) e\left(\frac{hm}{p^\beta}\right).$$

Для оценки суммы $S_2(p^\beta,\chi,l,h)$, воспользовавшись леммой 3.2, имеем

$$S_2(p^\beta,\chi,l,0) = \begin{cases} p^{\frac{\beta}{2}}\chi(l), & \text{если } \beta \text{ — чётное число;} \\ p^{\frac{\beta-1}{2}} T_2(l,\chi,p), & \text{если } \beta \text{ — нечётное число,} \end{cases}$$

где

$$T_2(l,\chi,p) = \sum_{u=1}^{p} \chi(l - p^{\beta-1}u^2).$$

Согласно оценке А.Вейля (лемма 3.1), имеем

$$|T_2(l,\chi,p)| \ll \sqrt{p}.$$

Поэтому, пользуясь оценками смешанных сумм вида $S_2(p^\beta,\chi,l,h)$ в работе [46], имеем

$$|S_2(p^\beta,\chi,l,h)|\ll p^{\frac{\beta}{2}}.$$

Подставляя эту оценку в формуле (3.5), получим

$$|V_2(\sqrt{x},\chi,l)|\le\left(\frac{\sqrt{x}}{p^\beta}+\ln p^\beta\right)p^{\frac{\beta}{2}}\ll\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{p^{\frac{\beta}{2}}}, & \text{если } \sqrt{x}\ge p^\beta;\\[2ex] p^{\frac{\beta}{2}}\mathscr{L}, & \text{если } \sqrt{x}< p^\beta.\end{cases}$$

Имея в виду, что $\sqrt{x}\le q=p^\alpha$, обозначим через α_1, $2\le\alpha_1\le\alpha$ такое целое число, которое удовлетворяет условию $p^{\alpha_1-1}<\sqrt{x}\le p^{\alpha_1}$, поэтому, разбивая сумму по β на две суммы, и воспользовавшись последней оценкой для $|V_2(\sqrt{x},\chi,l)|$ в формуле (3.4), получим

$$|R_2(x,q)|\ll\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\varphi(q)}\sum_{\beta=1}^{\alpha_1-1}\left(\frac{\mathscr{L}^{28}}{p^{\frac{\beta}{2}}}+\frac{\mathscr{L}^{31}}{x^{\frac{1}{5}}}+\frac{p^{\frac{\beta}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\mathscr{L}^{32}\right)+$$
$$+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\varphi(q)}\sum_{\beta=\alpha_1}^{\alpha}\left(\frac{p^{\frac{\beta}{2}}}{\sqrt{x}}\mathscr{L}^{29}+\frac{p^\beta}{x^{\frac{7}{10}}}\mathscr{L}^{32}+\frac{p^{1.5\beta}}{x}\mathscr{L}^{33}\right).$$

Далее, суммируя обе последние суммы по β, и имея в виду, что $\alpha\ll\mathscr{L}$, имеем

$$|R_2(x,q)|\ll\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\varphi(p^\alpha)}\left(\frac{\mathscr{L}^{28}}{\sqrt{p}}+\frac{\mathscr{L}^{32}}{x^{\frac{1}{5}}}+\frac{p^{0.5(\alpha_1-1)}}{x^{\frac{1}{2}}}\mathscr{L}^{32}\right)+$$
$$+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\varphi(q)}\left(\frac{p^{0.5\alpha}}{\sqrt{x}}\mathscr{L}^{29}+\frac{p^\alpha}{x^{\frac{7}{10}}}\mathscr{L}^{32}+\frac{p^{1.5\alpha}}{x}\mathscr{L}^{33}\right).$$

Затем воспользовавшись выбором числа α_1, получим

$$\frac{p^{0.5(\alpha_1-1)}}{x^{\frac{1}{2}}}\mathscr{L}^{32}=\left(\frac{p^{\alpha_1-1}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{32}\le x^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{32}.$$

Отсюда, из соотношений $p\ge\mathscr{L}^{58}$ и $p^\alpha=q$ находим

$$|R_2(x,q)|\ll\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\varphi(p^\alpha)}\left(\mathscr{L}^{-1}+\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{x}}\mathscr{L}^{29}+\frac{q}{x^{\frac{7}{10}}}\mathscr{L}^{32}+\frac{q^{1.5}}{x}\mathscr{L}^{33}\right).$$

Теорема 3.1 доказана.

Заключение

Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

1. найдена оценка среднего значения интеграла от модулей произведения кусков рядов Дирихле, если произведения кусков рядов Дирихле можно представить в виде произведения двух сумм, близких по порядку, [2-A, 5-A, 13-A];

2. найдена оценка среднего значения интеграла от модулей произведения кусков рядов Дирихле, если произведение длин первых двух сплошных сумм достаточно большая, [2-A, 5-A, 13-A];

3. найдена оценка среднего значения интеграла от модулей произведения кусков рядов Дирихле, если длина первой сплошной суммы достаточно большая, [2-A, 5-A, 13-A];

4. получена более точная оценка сумм значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля, [2-A, 5-A, 12-A, 13-A];

5. найдена новая оценка линейной тригонометрической суммы с простыми числами, [4-A];

6. уточнён остаточный член в асимптотической формуле для количества чисел Харди-Литтлвуда, лежащих в коротких арифметических прогрессиях и эта формула обобщена на случай, когда разность прогрессии является степенью простого числа, [1-A, 3-A, 6-A, 7-A, 8-A, 9-A, 10-A, 11-A];

7. найдена оценка сверху наименьшего числа Харди-Литтлвуда, лежащего в короткой арифметической прогрессии, разность которой является степенью простого числа, [1-A, 3-A, 6-A, 7-A, 8-A, 9-A, 10-A, 11-A].

Рекомендации по практическому использованию результатов:

Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применение в аналитической теории чисел и алгебраической теории чисел. Материалы диссертации могут использоваться при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

Список литературы

[1] . Виноградов И.М. Избранные труды [Текст] / И.М. Виноградов. М:Изд-во АН СССР, 1952.

[2] . Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел [Текст] / И.М. Виноградов. М:Наука, 1980.

[3] . Виноградов И.М. Особые варианты методов тригонометрических сумм [Текст] / И.М. Виноградов. М: Наука, 1976.

[4] . Виноградов И.М. Представление нечетного числа суммой трех простых чисел [Текст] / И.М. Виноградов. Докл. АН СССР, 1937, Т. 15, С. 291 – 294.

[5] . Виноградов И.М. Некоторые теоремы, относящихся к теории простых чисел [Текст] / И.М. Виноградов. Мат. сб. 1937, Т. 2, С. 179 – 195.

[6] . Виноградов И.М. Некоторые общие теоремы, относящиеся к теории простых чисел [Текст] / И.М. Виноградов. Труды Тбил, мат. ин-та, 1937, Т. 3, С. 1 – 33.

[7] . Виноградов И.М. Оценки некоторых простейших сумм с простыми числами [Текст] / И.М. Виноградов. Известия АН СССР, Серия математическая. 1939, Т. 3, С. 371 – 398.

[8] . Виноградов И.М. Некоторые общие свойства распределения простых чисел [Текст] / И.М. Виноградов. Мат. сб. 1940, Т. 7, С. 365 – 372.

[9] . Виноградов И.М. Уточнение метода оценки сумм с простыми числами [Текст] / И.М. Виноградов. Известия АН СССР, сер. матем., 1943, Т. 7, С. 17 – 34

[10] . Виноградов И.М. Элементарное доказательство одной теоремы теории простых чисел [Текст] / И.М. Виноградов. Известия АН СССР, сер. матем., 1953, Т. 17, С. 3 – 12.

[11] . Виноградов И.М. Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p+k)$ [Текст] / И.М. Виноградов. Известия АН СССР, сер. матем., 1952, Т. 16, С. 197 – 210.

[12] . Виноградов И.М. Улучшение оценки для суммы значений $\chi(p+k)$ [Текст] / И.М. Виноградов. Известия АН СССР, сер. матем., 1953, Т. 17, С. 285 – 290.

[13] . Виноградов И.М. Оценка одной суммы, распространенной на простые числа арифметической прогрессии [Текст] / И.М. Виноградов. Известия АН СССР, сер. матем., 1966, Т. 30, С. 481 – 496.

[14] . Карацуба А.А. Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях [Текст] / А.А. Карацуба. Докл. АН СССР, 1968. Т. 180, –№ 6, С. 1287 – 1289.

[15] . Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами [Текст] / А.А. Карацуба. Известия АН СССР, сер. матем., 1970, Т. 34, С. 299 – 321.

[16] . Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами, принадлежащими арифметической прогрессии [Текст] / А.А. Карацуба. Известия АН СССР сер. матем., 1971, Т. 35, –№ 3, С. 469 – 484.

[17] . Карацуба А.А. Суммы характеров по последовательности сдвинутых простых чисел и их применения [Текст] / А.А. Карацуба. Мат. заметки, 1975, Т. 17, –№ 1, С. 155 – 159.

[18] . Карацуба А.А. О некоторых проблемах современной аналитической теории чисел [Текст] / А.А. Карацуба. Мат. заметки, 1975, Т. 17, –№ 2, С. 341 – 349.

[19] . Карацуба А.А.О распределении значений неглавных характеров [Текст] / А.А. Карацуба. Труды Матем. Института им.В.А.Стеклова. АН СССР, 1976, Т. 142 С. 156 – 164.

[20] . Карацуба А.А. Сумма символов Лежандра от многочленов второй степени с простыми числами [Текст] / А.А. Карацуба. Известия АН СССР, сер. матем., 1978, Т. 42, –№ 2, С. 315 – 324.

[21] . Перельмутер Г.И. Оценка одной суммы с простыми числами [Текст] / Г.И. Перельмутер // Докл. АН СССР,1962, Т. 144, –№ 1, С. 48 – 51.

[22] . Чубариков В.Н. Кратные тригонометрические суммы с простыми числами [Текст] / В.Н. Чубариков. ДАН СССР, 1984, Т. 278. –№ 2, С. 302 – 304.

[23] . Чубариков В.Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами [Текст] / В.Н. Чубариков. Известия АН СССР, 1985, Т. 49, –№ 5, С. 1031 – 1067.

[24] . Линник Ю.В. Избранные труды [Текст] / Ю.В. Линник. Ленинград. Наука, 1980

[25] . Линник Ю.В. Новое доказательство теоремы Гольдбаха-Виноградова [Текст] / Ю.В. Линник. Мат.сборник, 1976, Т. 19, Вып. I, С. 3 – 8.

[26] . Линник Ю.В. О возможности единого метода в некоторых вопросах аддитивной и дистрибутивной теории чисел [Текст] / Ю.В. Линник. Докл. АН СССР, 1945, Т. 49, –№ 1, С. 3 – 7.

[27] . Линник Ю.В. О густоте нулей L – рядов [Текст] / Ю.В. Линник// Изв. АН СССР.сер. матем.1946. Т. 30, –№ 1, С. 35 – 46

[28] . Hardy G.H., Littlwood I.E. Some problems of partitio numerorum III. On the expression of number as a sum of primes. [Текст] / G.H. Hardy, I.E. Littlwood // Acta Math, 1923, v. 44, pp. 1–70.

[29] . Чудаков Н.Г. On Goldbach-Vinogradov‘s theorem [Текст] / Н.Г. Чудаков // Acta Math (2).1947. Т. 48(3). С. 515 – 545.

[30] . Чудаков Н.Г. Введение в теорию L – функций Дирихле [Текст] / Н.Г. Чудаков // Москва – Ленинград. 1947. гос.изд-во технико-теоретической литературы.

[31] . Карацуба А.А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях [Текст] / А.А. Карацуба // Докл. АН СССР, 1970, Т. 192, –№ 4, С. 724 – 727.

[32] . Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел [Текст] / Г. Монтгомери // Москва, 1974.

[33] . Vaughan R.O. Mean value theorems in prime number theory [Текст] / R.O. Vaughan // J.London Math. Soc. (2), 10(1975), 153 – 162.

[34] . Рахмонов З.Х. Распределение чисел Харди Литтвлуда в арифметических прогрессиях [Текст] / З.Х. Рахмонов // Известия АН СССР. Серия математическая. 1989. Т. 52, –№ 1, С. 211 – 224.

[35] . Рахмонов З.Х. Средние значения функции Чебышева [Текст] / З.Х. Рахмонов // Докл. АН России. 1993, Т. 331(3), С. 281–282.

[36] . Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения [Текст] / З.Х. Рахмонов // Известия РАН. Серия математическая. 1993. Т 57, –№ 4, С. 55 – 71.

[37] . Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения [Текст] / З.Х. Рахмонов // Труды МИРАН, 1994, Т. 207, С. 286 – 296.

[38] . Hardy G.H., Wright E.M. An introduction to theory of numbers [Текст] / G.H. Hardy, E.M. Wright // Oxford at the clarendon press. 1954.

[39] . Бабаев Г.Б. Замечание к работе Дэвенпорта и Хейлброна [Текст] / Г.Б. Бабаев // УМН. 1958. Т. 13, Т. 84, В. 6, С. 63 – 64.

[40] . Марджанишвили К.К. Оценка одной арифметической суммы [Текст] / К.К. Марджанишвили // Докл. АН СССР, 1939, Т. 22, –№ 7, С.391 – 393.

[41] . Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел [Текст] / А.А. Карацуба// 2-ое изд, М.: Наука, 1983.

[42] . Прахар К. Распределение простых чисел [Текст] / К. Прахар // Москва, Мир, 1967.

[43] . Виноградов И.М. Основы теории чисел [Текст] / И.М. Виноградов// 8-ое изд, М.: Наука, 1972.

[44] . Weil A. On some exponential sums [Текст] / A. Weil // Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 1948, 34, –№ 5. – P. 204 – 207.

[45] . Исмоилов Д. Оценки полных сумм характеров от многочленов [Текст] / Д. Исмоилов // Труды МИАН СССР, 1991, Т. 200, С. 171 – 184.

[46] . Cochrane T., Zheng. Z A survey on pure and mixed exponential sums modulo prime powers [Текст] / T. Cochrane, Z. Zheng // September 8, 2009. 1991 Mathematics Subject Classification. 11L07;11L03

Публикации автора по теме диссертации в рецензируемых изданиях из списка ВАК при Президенте Республики Таджикистан

[1-А] . Нозиров О.О. Распределение чисел Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа [Текст] / З.Х. Рахмонов, О.О. Нозиров // ДАН РТ., 2017, Т. 60, –№ 11 – 12, С. 549 – 554.

[2-А] . Нозиров О.О. О среднем значении функций Чебышёва [Текст] / О.О. Нозиров // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2019, Т. 62, –№ 11 – 12, С. 613–618.

[3-А] . Нозиров О.О. Наименьшее число Харди-Литтлвуда арифметической прогрессии с разностью, равной степени простого числа [Текст] / З.Х. Рахмонов, О.О. Нозиров // Доклады НАН Таджикистна, 2020, Т. 62, –№ 9 – 10, С. 631 – 639.

[4-А] . Нозиров О.О. Оценки линейных тригонометрических сумм с простыми числами на основе средних значений функций Чебышёва [Текст] /

О.О. Нозиров // Доклады НАН Таджикистна 2020 с. Т. 62, –№ 11 – 12, С. 747 – 755.

[5-А] . Нозиров О.О. Об оценке сумм значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле по заданного модуля [Текст] / О.О. Нозиров // Вестник Таджикский национальный университет, 2020, –№ 4, С. 233 – 240.

В других изданиях

[6-А] . Нозиров О.О. Наименьшее число Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа [Текст] / З.Х. Рахмонов, О.О. Нозиров // Материалы международной научной конференции «Дифференсиальные уравнения, математический анализ и теория чисел», посвящённой 25 – летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан, Курган-Тюбе, 27 – 28 октября, 2017г, С. 98 – 102.

[7-А] . Нозиров О.О. Наименьшее число Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа [Текст] / О.О. Нозиров // Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции, материалы международной научной конференции, посвящённой 90 – летию академика АН Республики Таджикистан, лауреата государственной премии имени Абуали Ибн Сино Михайлова Леонида Григорьевича. Душанбе, 27 – 28 февраля 2018г, С. 115 – 119.

[8-А] . Нозиров О.О. Числа Харди-Литтлвуда в арифметических проггрессиях с разностью, равной степени простого числа [Текст] / О.О. Нозиров // Современные проблемы алгебры и теории чисел, материалы научно-теоретической конференции, посвящённой 90 – летию со дня рождения профессора Бабаева Г.Б. Душанбе, 14 – 15 декабря 2018г, С. 68 – 71.

[9-A] . Нозиров О.О. Наименьшее число Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа [Текст] / О.О. Нозиров // Актуальные вопросы дифференциальных уравнений, математического анализа, алгебры и теории чисел и их приложения. Российско-Таджикский(Славянский) университет, материалы Республиканского научно-практической конференции. Душанбе, 17 мая 2019г, С. 216 – 218.

[10-A] . Нозиров О.О. Распределение чисел Харди-Литтлвуда в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа [Текст] / О.О. Нозиров // Математический анализ и его приложения, материалы Республиканской научной конференции, посвящённой 80 – летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова Таджикистан, Душанбе, 10 – 11 июня 2019г, С. 179 – 181.

[11-A] . Нозиров О.О. Числа Харди-Литтлвуд в арифметических прогрессиях [Текст] / З.Х. Рахмонов, О.О. Нозиров // Алгебра , теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения профессора Н.И.Фельдмана и девяностолетнею со дня рождения профессоров А.И.Виноградова, А.В.Малышева и Б.Ф.Скубенко. Тула, 23 – 28 сентября 2019г, С. 26 – 30.

[12-A] . Нозиров О.О. Новая оценка сумм значений функций Чебышёва [Текст] / О.О. Нозиров // Материалы международной научной конференции, посвящённой 70-летию профессора Джангибекова Гулходжа. Душанбе, 30 – 31 января 2020г, С. 207 – 210.

[13-A] . Нозиров О.О. Об оценке сумм значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле по заданного модуля [Текст] / О.О. Нозиров // Материалы Международной научной онлайн конференции «Современные проблемы математики: проблемы и их пути решения». г. Термез. Узбекистан. 21-23 октября 2020 г. С. 32 – 34.