

«Утверждаю»

Ректор Таджикского государственного педагогического университета им. Садриддина Айни,
доктор исторических наук, профессор
Гаффори Н.У.
10 марта 2021 г.



Отзыв ведущей организации

на диссертацию Нозирова Опокхона Окилхоновича
«Средние значения функций Чебышёва и их приложения»
представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Актуальность темы диссертации. При решении ряда проблем теории простых чисел, одной из которых является нетривиальная оценка тригонометрической суммы Г.Вейля с простыми числами, возникает вопрос о поведении средних значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле по модулю q . В предположении справедливости расширенной гипотезы Римана, имеет место оценка

$$t(x; q) = \sum_{\chi \bmod q} \max_{y \leq x} |\psi(y, \chi)| \ll x + x^{1/2} q \mathcal{L}^2, \quad \mathcal{L} = \ln xq. \quad (1)$$

Английские математики Г.Харди и Д.Литтлвуд воспользовавшись этой оценкой получили нетривиальную оценку линейной тригонометрической суммы с простыми числами и условно решили тернарную проблему Гольдбаха о представлении нечётного в виде суммы трёх простых чисел. И.М.Виноградов в 1937 г. создал элементарный метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами и, в частности, при условии $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$, $(a, q) = 1$ для

линейной тригонометрической суммы с простыми числами получил оценку

$$S(\alpha, x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha n) \ll (xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}) x^{\varepsilon}, \quad (2)$$

и безусловно решил тернарную проблему Гольдбаха. Среднее значение функции Чебышёва аналитическим методом исследовали Ю.В.Линник(1943 г.), Н.Г.Чудаков, Г.Монтгомери и Р.Вон и вывели нетривиальную оценку линейной суммы $S(\alpha, x)$. Эти все оценки были более слабыми чем оценка (2). З.Х.Рахмонов, пользуясь своей оценкой средних значений функций Чебышёва вывел оценку, в которой множитель x^{ε} в оценке (2) заменяется на конечную степень логарифма и изучил распределения чисел Харди-Литтлвуда в коротких арифметических прогрессиях, в случае когда разность прогрессии является простым числом.

В работе О.О.Нозирова получена новая оценка для средних значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле по модулю q , с помощью которого найдена более точная оценка для линейной тригонометрической суммы с простыми числами, а также изучено распределение чисел Харди-Литтлвуда в коротких арифметических прогрессиях, в случае когда разность прогрессии является степенью простого числа.

Структура и основные результаты диссертации. Диссертационная работа О.О. Нозирова состоит из введения, списка обозначений, трёх глав, перечня литературы. Во введении изложена краткая история исследуемых задач, а также приведены методы исследования, научная новизна, положения выносимые на защиту. В первый параграф каждой из глав приведены постановка и краткая история исследуемой задачи, а также формулировки результатов, а во вторых параграфах известные леммы.

Глава первая состоит из четырёх параграфов. В третьем параграфе получены следующие оценки для $t_k(q; M, N)$ — среднего значения интеграла от модуля $W_k(0.5 + it, \chi)$ — произведения кусков рядов Дирихле. суть которых заключается в следующем:

- оценка $t_k(q; M, N)$, если $W_k(0.5 + it, \chi)$ можно представить в виде произведения двух сумм, близких по порядку (лемма 1.7);
- оценка $t_k(q; M, N)$, если $W_k(0.5 + it, \chi)$, если произведение длин первых двух сплошных сумм достаточно большая (лемма 1.10);
- оценка $t_k(q; M, N)$, если $W_k(0.5 + it, \chi)$, если длина первой сплошной суммы достаточно большая (лемма 1.11).

Прилагая эти оценки в четвёртом параграфе доказывается теорема 1.1 о новой оценке средних значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля, что является уточнением соответствующей оценки З.Х.Рахмонова (1993 г.). Теорема 1.1 используется при доказательствах основных результатов последующих глав теоремы 2.1 и 3.1.

Вторая глава также состоит из четырёх параграфов, в её третьем параграфе доказана теорема 2.1 об оценке линейной тригонометрической суммы с простыми числами $S(\alpha, x)$ в случае, когда α является рациональным числом. В четвёртом параграфе воспользовавшись этой теоремой и теоремой Дирихле о приближении вещественных чисел рациональными числами найдены оценки линейной тригонометрической суммы с простыми числами $S(\alpha, x)$ при произвольном вещественной числе α (следствие 2.1.1 и 2.1.2), что соответственно являются уточнением оценок З.Х.Рахмонова.

Третья глава состоит из трёх параграфов. Основными результатами этой главы являются асимптотическая формула для количества чисел Харди-Литтлвуда вида $p + m^k$, лежащих в коротких арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа (теорема 3.1) и оценка сверху для наименьшего числа Харди-Литтлвуда, лежащем в коротких арифметических прогрессиях (следствие 3.1.1). Эти результаты уточняют и обобщают в случае $k=2$ соответствующие результаты З.Х.Рахмонова в случае, когда разностью прогрессии является простое число.

Научная новизна. Все утверждения теорем и научные положения, сформулированные в диссертации, а также, полученные автором формулы и

оценки полностью обоснованы. Полученные в диссертации результаты являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

1. получена более точная оценка сумм значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля;
2. найдена новая оценка линейной тригонометрической суммы с простыми числами;
3. уточнен остаточный член асимптотической формулы для количества чисел Харди-Литтлвуда, лежащих в коротких арифметических прогрессиях и эта формула обобщена на случай, когда разность прогрессии является степенью простого числа.

Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов. Основные результаты диссертации носят теоретический характер и они могут быть использованы в научных институтах и организациях, занимающихся тригонометрическими суммами и суммами характеров, в том числе в Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН, Институте математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, МГУ им. М.В.Ломоносова, Таджикском национальном университете, Таджикском государственном педагогическом университете им. С.Айни, а также в учебном процессе при чтении спецкурсов по аналитической теории чисел.

Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, и подтверждается исследованиями других авторов.

Апробация работы и публикации. Результаты диссертационной работы были доложены и получили положительные отзывы в различных международных конференциях и семинарах. Основные результаты диссертации опубликованы в 13 работах автора, список которых приведен в конце автореферата. Работы [1]-[5] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Министерства образования и науки

РФ. Диссертация и автореферат имеют ясный и понятный научный язык. Содержание диссертации достаточно полно и подробно раскрывает постановку, методы и результаты решения рассмотренных задач. Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Оформление диссертации и автореферата соответствует требованиям.

Замечания по содержанию и оформлению диссертации. Диссертация оформлена аккуратно, за исключением следующих опечаток редакционного характера:

- история исследования изучаемых объектов с небольшими отличиями приводится автором дважды, сначала во введении, затем в первых параграфах каждой главы;
- при доказательстве леммы 1.8 (стр 22), в 7-ой, 6-ой и 5-ой строках снизу пропущены знаки квадратного корня, а в 5-ой строке в коэффициенте вместо $2\sqrt{2}$ должно быть $\sqrt{2}$, а также пропущен знак модуля;
- стр. 53, строка 1 снизу вместо $H(q, l) \ll q^{\frac{3}{2}}(\ln q)^{34}$ должно быть $H_2(q, l) \ll q^{\frac{3}{2}}(\ln q)^{34}$;

которые не умаляют достоинства полученных в диссертации результатов и не могут существенно повлиять на её положительную оценку.

Заключение по диссертации. Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты в теории характеров Дирихле и тригонометрических суммах. Полученные автором результаты могут быть использованы при решении задач в аналитической теории чисел и алгебраической теории чисел. Автореферат соответствует требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, полно и правильно отражает положения диссертационной работы.

Диссертационная работа Нозирова Опокхона Окилхоновича на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук является научно-квалифицированной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение по теории тригонометрических сумм и сумм характеров, и полностью соответствует требованиям «Порядка присвоения учё-

ных степеней и присуждения учёных званий», утверждённого Постановлением Правительства Республики Таджикистан от 26.11.2016 г. №505, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теории чисел.

Отзыв составил кандидат физико-математических наук, доцент У. Чариев. Отзыв обсуждён и одобрен на заседании кафедры алгебры и теории чисел, математического факультета Таджикского педагогического университета им. Садриддина Айни, протокол №9, пункт от 2021 года.

Председатель заседания, заведующая кафедрой
алгебры и теории чисел,
кандидат физ.-мат. наук

Камариддинзода З.Н.

Секретарь заседания, кандидат физ.-мат. наук

Олимов М.И.

Эксперт, кандидат физ.-мат. наук, доцент

Чариев У.

Адрес: 734003, г.Душанбе, проспект Рудаки, 121, тел.: +992(37)224-13-83,
сайт: <http://www.tgpu.tj>, E-mail: inf0@tgpu.tj

Подписи Камараддинзода З.Н., Олимова М.И. и Чариева У. заверяю

Начальник управления кадров
особых дел ТГПУ им. Садриддина Айни



Назаров Д.К.

10.03.2021г.