

Отзыв

официального оппонента на диссертацию Нозирова Опокхона Окилхоновича «Средние значения функций Чебышёва и их приложения», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теории чисел.

Актуальность темы диссертации. И.М.Виноградов в 1937 г. создал элементарный метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, и в частности, при условии $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$, $(a, q) = 1$ для линейной тригонометрической суммы с простыми числами получил оценку

$$S(\alpha, x) = \sum_{p \leq x} e^{2\pi i p \alpha} \ll \left(x q^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \right) x^\varepsilon, \quad (1)$$

и решил тернарную проблему Гольдбаха.

В предположении справедливости расширенной гипотезы Римана, для средних значений функции Чебышёва по всем характерам модуля q , имеет место оценка

$$t(x; q) = \sum_{\chi \bmod q} \max_{y \leq x} |\psi(y, \chi)| \ll x + x^{\frac{1}{2}} q \mathcal{L}^2, \mathcal{L} = \ln x q. \quad (2)$$

При решении ряда задач теории простых, в том числе для оценки суммы $S(\alpha, x)$, достаточно, чтобы для $t(x; q)$ имелась оценка близкая к оценке (2). Средние значения функции Чебышёва впервые исследовал Ю.В.Линник и вывел нетривиальную оценку линейной суммы $S(\alpha, x)$. Затем Н.Г.Чудаков, Г.Монтгомери и Р.Вон аналитическим методом для этой суммы получили новые оценки для $t(x; q)$, применением которых получили соответствующие оценки суммы $S(\alpha, x)$. Все эти оценки были более слабыми, чем оценка (1). З.Х.Рахмонов, пользуясь своей оценкой средних значений функции Чебышёва, вывел оценку в которой множитель x^ε в оценке (1) заменяется на конечную степень логарифма и изучил распределения чисел Харди-Литтлвуда в коротких арифметических прогрессиях, в случае когда разность прогрессии является простым числом.

В работе О.О.Нозирова получена новая оценка для средних значений функции Чебышёва по всем характерам Дирихле по модулю q , с помощью которой найдена более точная оценка для для линейной тригонометрической суммы с простыми числами, а также изучено распределение чисел Харди-Литтлвуда в коротких арифметических прогрессиях, в случае когда

разность прогрессии является степенью простого числа.

Структура и основные результаты диссертации. Работа состоит из списка обозначений, введения, трёх глав, заключения и списка цитированной литературы из 59 наименований, занимает 70 страниц компьютерного текста и набрана на редакторе LaTeX. В достаточно подробном введении автор даёт обзор проведённых ранее исследований, связанных с тематикой работы, а также приведены методы исследования, научная новизна, положения, выносимые на защиту. Первый параграф каждой из глав состоит из постановки задачи, краткой истории исследуемой задачи и формулировки результатов, во вторых параграфах приведены известные леммы.

Глава первая посвящена оценке средних значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля и состоит из четырёх параграфов. В третьем параграфе доказываются следующие основные леммы об оценке $t_k(q; M, N)$ - среднего значения интеграла от модуля произведения кусков рядов Дирихле:

- лемма 1.7 об оценке среднего значения интеграла от модуля произведения кусков рядов Дирихле, если это произведение можно представить в виде произведения двух сумм, близких по порядку;
- лемма 1.10 об оценке среднего значения интеграла от модуля произведения кусков рядов Дирихле, если произведение длин первых двух сплошных сумм достаточно большая;
- лемма 1.11 об оценке среднего значения интеграла от модуля произведения кусков рядов Дирихле, если длина первой сплошной суммы достаточно большая.

Спомощью этих лемм в четвёртом параграфе доказывается основной результат этой главы - теорема 1.1 «о новой оценке средних значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля», что является уточнением соответствующей оценки З.Х.Рахмонова (1993 г.).

Вторая глава также состоит из четырёх параграфов и в третьем параграфе, воспользовавшись доказанной в первой главе теоремой 1.1, доказана оценка линейной тригонометрической суммы с простыми числами $S(\alpha, x)$ в случае, когда α является рациональным числом (теорема 2.1). В четвёртом параграфе, пользуясь теоремой 2.1, теоремой Дирихле «о приближении вещественных чисел рациональными числами» и формулой частичного суммирования для линейной тригонометрической суммы с простыми числами $S(\alpha, x)$ при произвольном вещественной числе α получены две оценки (следствие 2.1.1.) и (следствие

2.1.2.). Эти оценки соответственно являются уточнением оценок З.Х.Рахмонова.

Третья глава состоит из трёх параграфов и основным результатом этой главы является теорема 3.1 об асимптотической формуле для количества чисел Харди-Литтлвуда, лежащих в коротких арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа. Теорема 3.1 и её следствие уточняют и обобщают в случае $k = 2$ соответствующие результаты З.Х.Рахмонова в случае, когда разностью прогрессии является простое число.

Научная новизна. Новыми результатами являются:

1. Получена более точная оценка сумм значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля;
2. Найдена новая оценка линейной тригонометрической суммы с простыми числами;
3. Уточнен остаточный член асимптотической формулы для количества чисел Харди-Литтлвуда, лежащих в коротких арифметических прогрессиях и эта формула обобщена на случай, когда разность прогрессии является степенью простого числа.

Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов. Основные результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в научных институтах и организациях, занимающихся тригонометрическими функциями, в том числе в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Институте математики им. А. Джуроева НАН Таджикистана, в учебном процессе при чтении спецкурсов в МГУ им. М.В. Ломоносова, в Термезском государственном университете, в Таджикском национальном университете и в других учебных заведениях.

Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, и подтверждается исследованиями других авторов.

Апробация работы и публикации. Основные результаты диссертационной работы получили положительные отзывы различных международных конференций и семинаров и опубликованы в 13 работах автора, список которых приведен в конце автореферата. Работы [1]-[5] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Министерства образования и науки РФ. Диссертация и автореферат имеют ясный и понятный научный язык. Содержание диссертации достаточно полно и подробно раскрывает постановку,

методы и результаты решения рассмотренных задач. Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Оформление диссертации и автореферата соответствует требованиям.


Замечания по содержанию и оформлению диссертации. К недостаткам диссертации можно отнести несколько незначительных опечаток редакционного характера, например:



- ✓ стр 22, при доказательстве леммы 1.8 в 6-ой и 7-ой строке снизу в числителе пропущены знаки квадратного корня.
- ✓ стр.53, строка 1 снизу вместо $H(q, l)$ должно быть $H_2(q, l)$;
- ✓ стр.57, строка 4 снизу вместо $H_k(x, q, l)$ должно быть $H_2(x, q, l)$,

которые не умаляют достоинства полученных в диссертации результатов и не могут существенно повлиять на её положительную оценку.

Заключение по диссертации. Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты для тригонометрических сумм, которые могут быть использованы при решении ряда задач аналитической теории чисел.

Диссертационная работа Нозирова Опокхона Окилхоновича «Средние значения функций Чебышёва и их приложения» на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук является научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для аналитической теории чисел, и полностью удовлетворяет всем требованиям «Порядка присвоения учёных степеней и присуждения учёных званий» утвержденного Постановлением Правительства Республики Таджикистан от 26.11.2016 г., № 505, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теории чисел.

Официальный оппонент: Аллаков Исмаил, 
доктор физико-математических наук по специальности
01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теории чисел
профессор кафедры алгебры и геометрии
Термезского государственного университета
Адрес: 190111, г. Термез, ул. Ф.Ходжаева, 43,
тел.:+998905197576 , e-mail: iallakov@mail.ru

Подпись И.Аллакова удостоверяю  
Начальник ОК и СЧ Термезского государственного университета

