

**Отзыв официального оппонента на
диссертационную работу Нозирова Опокхона Окилхоновича «Средние
значения функций Чебышёва и их приложения», представленную на
соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по
специальности 01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел**

Актуальность темы диссертации. Основным предметом исследования диссертационной работы О.О.Нозирова является изучение поведения средних значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле вида

$$t(x; q) = \sum_{\chi \bmod q} \max_{y \leq x} |\psi(y, \chi)|,$$

их приложений к оценке линейных тригонометрических сумм с простыми числами и распределения чисел Харди-Литтлвуда в коротких арифметических прогрессиях. Среднее значение функции Чебышёва ранее последовательно исследовали Ю.В.Линник, А.А. Карацуба, Г.Монтгомери, Р.Вон, З.Х.Рахмонов.

Линейную тригонометрическую сумму с простыми числами в малых дугах, впервые воспользовавшись своим элементарным методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами, оценил И.М.Вишegradов. Он доказал, что, если $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$, $(a, q) = 1$, то имеет место оценка

$$S(\alpha, x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha n) \ll (xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{5}} + x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}) x^{\epsilon}, \quad (1)$$

Затем Ю.В.Линник, Н.Г.Чудаков, Г.Монтгомери и Р.Вон аналитическим методом для этой суммы получили более слабые оценки. З.Х.Рахмонов, пользуясь своей оценкой средних значений функций Чебышёва, вывел оценку в которой множитель x^{ϵ} в оценке (1) заменяется на конечную степень логарифма.

Распределения чисел Харди-Литтлвуда в коротких арифметических прогрессиях в случае, когда разность прогрессии является простым числом, изучил З.Х.Рахмонов, воспользовавшись своей оценкой средних значений функций Чебышёва.

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней получены более точные оценки для среднего значения функции Чебышёва и для линейной тригонометрической суммы с простыми числами, а также теорема о распределении чисел Харди-Литтлвуда в коротких арифметических прогрессиях уточняется и обобщается в случае, когда разность прогрессии является степенью простого числа.

Структура и основные результаты диссертации. Диссертация состоит из списка обозначений, введения, трёх глав, заключения, списка цитированной литературы из 59 наименований, занимает 70 страниц машинописного текста и набрана на редакторе L^AT_EX. Во введении изложена краткая история исследуемых задач, а также приведены методы исследования, научная новизна, положения выносимые на защиту.

Глава первая состоит из четырёх параграфов, посвящена оценке средних значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля. В третьем параграфе

доказываются основные леммы 1.7, 1.10 и 1.11 об оценке $t_k(q; M, N)$ — среднего значения интеграла от модуля произведения кусков рядов Дирихле соответственно

- если это произведение можно представить в виде произведения двух сумм, близких по порядку;
- если произведение длин первых двух сплошных сумм достаточно большая;
- если длина первой сплошной суммы достаточно большая.

В четвёртом параграфе, прилагая эти леммы, доказывается основной результат этой главы — теорема 1.1 о новой оценке $l(x, q)$ — средних значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле по модулю q , которая уточняет степени логарифмов в соответствующей оценке З.Х.Рахмонова от 1993 г.

Вторая глава также состоит из четырёх параграфов, посвящена оценке линейной тригонометрической суммы с простыми числами. В этой главе, воспользовавшись теоремой 1.1, получена более точная оценка для линейной тригонометрической суммы с простыми числами $S(\alpha, x)$, которая также является более сильной, чем оценка И.М.Виноградова.

Третья глава состоит из трёх параграфов и её основными результатами являются теорема 3.1 об асимптотической формуле для количества чисел Харди-Литтлвуда лежащих в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа и следствие 3.1.1 об оценке сверху наименьшего числа Харди-Литтлвуда, лежащего в короткой арифметической прогрессии с разностью, равной степени простого числа. Эта теорема и её следствие уточняют и обобщают в случае $k = 2$ соответствующие результаты З.Х.Рахмонова в случае, когда разность прогрессии является простым числом.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют теоретический интерес и состоят в следующем:

1. получена более точная оценка сумм значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля;
2. найдена новая оценка линейной тригонометрической суммы с простыми числами;
3. уточнен остаточный член асимптотической формулы для количества чисел Харди-Литтлвуда, лежащих в коротких арифметических прогрессиях и эта формула обобщена на случай, когда разность прогрессии является степенью простого числа.

Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов. Работа носит теоретический характер и может быть использована в научных исследованиях, проводимых в МГУ им. М.В.Ломоносова, Математическом институте им. В.А.Стеклова, Институте математики им. А.Джураева, Таджикском национальном университете, Курган-тибинском государственном университете им. Носира Хусрава, а также в других ведущих научных организациях зарубежья.

Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, и подтверждается исследованиями других авторов.

Апробация работы и публикации. Обсуждённые основные результаты диссертационной работы получили положительные отзывы различных международных конференций

и семинаров. Основные результаты диссертации опубликованы в 13 работах автора, список которых приведен в конце автореферата. Работы [1]-[5] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Министерства образования и науки РФ. Диссертация и автореферат имеют ясный и понятный научный язык. Содержание диссертации достаточно полно и подробно раскрывает постановку, методы и результаты решения рассмотренных задач. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Замечания по содержанию и оформлению диссертации. В диссертации имеются отдельные опечатки и стилистические погрешности, например:

- с небольшими отличиями история исследования изучаемых объектов приводится автором дважды – во введении (стр. 5-6, стр. 7-8, стр. 9), затем соответственно в главах 1, 2 и 3 (стр. 16-17, стр. 44-45, стр. 52). Вполне достаточно было приведение истории во введении;
- стр 22, при доказательстве леммы 1.8 в 7-ой, 6-ой и 5-ой строках снизу в числителе пропущены знаки квадратного корня, в 5-ой строке в коэффициенте лишняя «2» и пропущен знак модуля;
- стр.53, строка 1 снизу вместо $H(q, l) \ll q^{\frac{3}{2}}(\ln q)^{34}$ должно быть $H_2(q, l) \ll q^{\frac{3}{2}}(\ln q)^{34}$; однако они не влияют на положительную оценку диссертационной работы.

Заключение по диссертации. Диссертационная работа Нозирова Опокхона Окилхонича «Средние значения функций Чебышёва и их приложения», на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук является научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для аналитической теории чисел, и полностью удовлетворяет всем требованиям «Порядка присвоения учёных степеней и присуждения учёных званий», утвержденного Постановлением Правительства Республики Таджикистан от 26.11.2016 г., № 505, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теории чисел.

Официальный оппонент:

Мирзорохимов Шерали Хусейнбоевич,

кандидат физико-математических наук по специальности

01.01.06–Математическая логика, алгебра и теория чисел,

доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений

Бохтарского государственного университета им. Носира Хусрава,

Адрес: 735140 г. Бохтар ул. Айни, 67, тел. +992 988557380;

e-mail: smirzorakhimov@mail.ru

Подпись Ш.Х. Мирзорохимова, заверяю.

Учёный секретарь БГУ им. Носира Хусрава.

3



Шукурзод Дж.А.