АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. А.ДЖУРАЕВА

УДК 517.957 На правах рукописи

Рахмонов Бахтовар Абдуганиевич

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДЕННЫХ НЕКОЭРЦИТИВНЫМИ ФОРМАМИ, ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный
анализ

Душанбе – 2019

Работа выполнена в Институте математики им. А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

Научный руководитель: **Исхоков Сулаймон Абунасрович**
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент АН РТ, профессор

Официальные оппоненты: **Байзаев Саттор,**
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математических дисциплин и современного естествознания, Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики

Джангибеков Гулходжа,
доктор физико-математических наук,
профессор, Таджикский национальный университет, профессор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений

Ведущая организация: Межгосударственное образовательное учреждение высшего профессионального образования ”Российско-Таджикский (Славянский) университет ”

Защита состоится *11 октября 2019 г. в 11 ч. 00 мин.* на заседании диссертационного совета 6D.KOA–037 при Институте математики имени А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г.Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики имени А.Джураева АН Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj.

Автореферат разослан "____" ____________ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 6D.KOA–037,
кандидат физико–математических наук Каримов О.Х.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа посвящена исследованию разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов высшего порядка во всем пространстве.

Одним из основных направлений в современной теории вариационных задач для дифференциальных операторов с частными производными является исследование разрешимости вариационных задач для различных классов вырождающихся эллиптических операторов. Интерес к таким исследованиям обусловлен тем, что вырождающиеся эллиптические уравнения встречаются в теории малых изгибов поверхностей вращения, в теории трещин, в теории броунских движений и во многих других задачах математической физики и механики. Также известно, что с помощью замены независимых переменных некоторые классы дифференциальных уравнений в неограниченных областях и в областях с сингулярностями границы сводятся к вырождающимся эллиптическим уравнениям.

Существуют разнообразные способы вырождения эллиптических уравнений и поэтому для изучения краевых задач для таких уравнений применяются разные методы. Применяемый нами метод основан на элементах теории вложения весовых функциональных пространств и теории полуторалинейных форм. Этот метод разрабатывался и совершенствовался в работах С.М.Никольского, Л.Д.Кудрявцева, П.И.Лизоркина, С.В.Успенского, К.Х.Бойматова, Х.Трибеля, А.Куфнера, Н.В.Мирошина, Б.Л.Байдельдинова, С.А.Исхокова и др.[1−4].

Основная часть научных публикаций по вариационным задачам для эллиптических операторов с вырождением относится к случаю, когда соответствующие интегро-дифференциальные полуторалинейные формы удовлетворяют условию коэрцитивности. Здесь коэрцитивность формы понимается в следующем смысле[2]: если H_0 – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_0$ и нормой $\|\cdot\|_0$, H_+ – другое гильбертово

[1]Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.- М.: Мир.- 1980.- 664 с.

[2]Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений.// Известия Вузов. Математика. 1988, №8, с.4 – 30.

[3]Исхоков С.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением // Математические заметки. 2010. Т. 87. №2. С. 201 – 216.

[4]Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Якушев И.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов высокого порядка с нестепенным вырождением // Доклады Академии наук (Россия). 2012. Т. 443, №3. с. 286-289.

пространство с нормой $\|\cdot\|_+$, плотно вложенное в H_0, то определенная в H_+ полуторалинейная форма $P[u,\, v]$ называется H_+-коэрцитивной относительно H_0, если найдутся числа $\mu_0 \in R$, $\delta_0 > 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} P[u,\, u] + \mu_0 \|u\|_0^2 \geq \delta_0 \|u\|_+^2$$

для всех $u \in H_+$.

Случай, когда исследуемые дифференциальные операторы порождаются с помощью некоэрцитивных полуторалинейних форм, сопряжен многими техническими трудностями и впервые рассматривался в работе К.Х.Бойматова[5]. Позже этот случай исследовался в работах К.Х.Бойматова[6–8], К.Х.Бойматова и С.А.Исхокова[9], С.А. Исхокова[10,11] и др. Метод, разработанный в этих работах, существенно опирается на ограниченность области Ω n-мерного евклидова пространства R^n, в которой задается исследуемый дифференциальный оператор. Усовершенствование этого метода в работах[11,12] позволяло исследовать дифференциальные операторы, заданные в неограниченных областях, которые очень близки к ограниченным (предельно-цилиндрическая область с нулевым диаметром на бесконечности).

В отличие от этого, в нашей диссертационной работе разрешимость вариационной задачи Дирихле впервые исследуется в случае вырождающихся эллиптических операторов высшего порядка во всем пространстве, ассоциированных с некоэрцитивными полуторалинейными формами.

---

[5] Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка / К.Х Бойматов // Доклады АН СССР. – 1992. – Т.327. – №1. – С. 9-15.

[6] Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле, порожденная некоэрцитивной формой / К.Х.Бойматов // Доклады АН России, – 1993. – Т. 330. – №3. – С.285 – 290.

[7] Бойматов К.Х.Матричные дифференциальные операторы, порожденные некоэрцитивными формами / К.Х.Бойматов// Доклады АН России. – 1994. – Т. 339. – №1. – С.5 – 10.

[8] Бойматов К.Х. Граничные задачи для некоэрцитивных форм /К.Х.Бойматов// Доклады АН РТ. – 1998. – Т. XLI. – №10. – С.10-16.

[9] Бойматов К.Х., Исхоков С.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой /К.Х. Бойматов, С.А. Исхоков // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. 1997. Т. 214. С. 107-134.

[10] Исхоков С.А. О гладкости решений обобщенной задачи Дирихле и задачи на собственные значения для дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами / С.А. Исхоков // Доклады Академии наук (Россия). –1995. – Т. 342. – №1. – С. 20-22.

[11] Исхоков С.А. Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов с нестепенным вырождением, порожденных некоэрцитивными формами // Доклады Академии наук России. 2003. Т. 392, №5. С. 606-609.

[12] Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Петрова М.Н. О некоторых спектральных свойствах одного класса вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов // Математические заметки СВФУ. 2016. Т. 23, №2. С. 31-50.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование разрешимости однородной вариационной задачи Дирихле во всем пространстве для эллиптических операторов высшего порядка со степенным вырождением на бесконечности в случае, когда соответствующие полуторалинейные формы могут не удовлетворять условию коэрцитивности.

Объекты исследования. Объектом исследования являются эллиптические операторы высокого порядка во всем пространстве со степенным вырождением на бесконечности, которые порождаются с помощью некоэрцитивных полуторалинейных интегро-дифференциальных форм.

Методы исследования. Применяемый в диссертации метод основан на элементах функционального анализа и теории пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных со степенным весом (теоремы вложения, эквивалентные нормировки, теоремы о плотности гладких функций и т.д.).

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют научный интерес и состоят в следующем:

1. Доказана теорема о существовании и единственности решения однородной вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов высшего порядка во всем пространстве, соответствующие полуторалинейные формы которых, в общем случае, не удовлетворяют условию коэрцитивности, и коэффициенты которых имеют согласованное степенное вырождение на бесконечности.

2. В зависимости от гладкости коэффициентов и правой части уравнения исследована гладкость решения однородной вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов высшего порядка во всем пространстве, соответствующие полуторалинейные формы которых, в общем случае, не удовлетворяют условию коэрцитивности, и коэффициенты которых имеют согласованное степенное вырождение на бесконечности.

3. Доказана теорема о существовании и единственности решения однородной вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов высшего порядка во всем пространстве, соответствующие полуторалинейные формы которых, в общем случае, не удовлетворяют условию коэрцитивности, и коэффициенты которых имеют несогласованное степенное вырождение на бесконечности. Введено понятие старшей формы и доказано, что весовые функции пространства решений исследуемой задачи зависят только от степеней вырождения коэффициентов старших форм.

4. Исследованы дифференциальные свойства решения вариационной

задачи Дирихле для эллиптических операторов высшего порядка во всем пространстве с несогласованным вырождением коэффициентов на бесконечности в случае, когда соответствующие полуторалинейные формы могут не удовлетворят условию коэрцитивности.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы при развитии теории вариационных задач для вырождающихся эллиптических операторов высокого порядка, порожденных с помощью некоэрцитивных полуторалинейных форм, а также при исследовании спектральных свойств таких операторов.

Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью вырождающихся дифференциальных уравнений в решении прикладных задач механики и других разделов физики.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались автором и обсуждались на семинаре отдела функционального анализа и теории функций и общеинститутском семинаре Института математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан. Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях:

- Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел», посвящённая 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан, Курган-тюбе, 27-28 октября 2017 г.

- Международная научная конференция «Современные проблемы математики и ее приложений», Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова, г. Душанбе, 20-21 июня 2018 г.

- Международная научная конференция «Современные проблемы математики и её приложений», посвященная 70-летию со дня рождения академика АН РТ, доктора физико-математических наук, профессора М.Илолова, Душанбе, 14-15 марта 2018 г.

- Международная научная конференция «Современные проблемы алгебры и теории чисел», посвященная 90-летию со дня рождения профессора Г.Б.Бобоева, Душанбе, 27-28 ноября 2018 г.

- II-ая Международная научно-практическая конференция «Наука и инновационные разработки - Северу», Россия, г. Мирный, 14-15 марта 2019 г.

- Республиканская научно-практическая конференция «Актуальные вопросы дифференциальных уравнений, математического анализа, алгебры и теории чисел и их приложения», г. Душанбе, Российско-Таджикский (Славянский) университет, 17 мая 2019 г.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 10 работах, список которых приведен в конце автореферата. Работы [1-4] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК РТ.

В работах опубликованных в соавторстве с научным руководителем, соавтору принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 80 наименований и заключения, занимает 115 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX . Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Во введении даётся обоснование актуальности темы диссертации, приведен обзор литературы по теме исследования, описана структура диссертации и изложены её основные результаты.

Первая глава диссертационной работы, состоящая из четырех параграфов, посвящена изучению однородной вариационной задачи Дирихле для одного класса эллиптических операторов во всем пространстве, связанных с некоэрцитивными полуторалинейными интегро-дифференциальными формами, со степенными вырождениями на бесконечности. Здесь однородность граничных условий задачи Дирихле понимается в том смысле, что решение исследуемой задачи ищется в функциональном пространстве, в котором плотен класс бесконечно дифференцируемых финитных функций.

В **первом параграфе** сформулированы основные результаты главы.

Пусть R^n – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ – длина мультииндекса k. Обозначим через

$$u^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|} u(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}}$$

обобщенную в смысле С.Л. Соболева производную функции $u(x)$ мультииндекса k. Пусть r – натуральное, α, p – вещественные числа и $1 < p < \infty$. Символом $V^r_{p,\alpha}(R^n)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных во всем пространстве R^n, имеющих производные порядка r с конечной нормой

$$\|u; V^r_{p;\,\alpha}(R^n)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int d^{p\alpha}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx + \int d^{p(\alpha+r)}(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

где $d(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2}$. Здесь и далее все интегралы берутся по всему R^n.

Пространство $V^r_{p,\alpha}(R^n)$ хорошо изучено в монографии Х.Трибеля. Оно является частным случаем пространства $V^r_p(\Omega; \sigma, \delta)$, введенного и изученного в работах К.Х.Бойматова и С.А.Исхокова. Согласно результатам этих работ для любого натурального числа r и вещественных чисел α, p, причем $1 < p < \infty$, множество $C_0^\infty(R^n)$ плотно в пространстве $V^r_{p;\,\alpha}(R^n)$.

Пусть δ – вещественное число. Вводим пространство $L_{p,\,\delta}(R^n)$ с нормой

$$\|u;\, L_{p,\,\delta}(R^n)\| = \left\{ \int \left(d^\delta(x)\, |u(x)| \right)^p dx \right\}^{1/p}.$$

Пространство $L_{p,\,\delta}(R^n)$ при $p = 2$ является гильбертовым пространством, и скалярное произведение в $L_{2,\,\delta}(R^n)$ определяется равенством

$$(u,\, v)_\delta = \int d^{2\delta}(x) u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Определим пространство $\left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)'$ – пополнение пространства $L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$ по норме

$$\left\| f;\, \left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)' \right\| = \sup \frac{|(f,\, v)_{\alpha+r}|}{\left\|v;\, V^r_{2,\alpha}(R^n)\right\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $v(x) \in V^r_{2,\,\alpha}(R^n)$.

На функциях $u,\, v \in C_0^\infty(R^n)$ рассмотрим интегро-дифференциальную полуторалинейную форму

$$B[u,v] = \sum_{|k|,|l|\le r} \int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \tag{1}$$

коэффициенты $a_{kl}(x)$ которой являются ограниченными комплекснозначными функциями.

Наряду с формой (1) вводим следующую функцию

$$A(x,\, \zeta) = \sum_{|k|,|l|\le r} a_{kl}(x)\zeta_k \overline{\zeta_l}, \quad x \in R^n, \quad \zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\le r} \subset \mathbb{C}.$$

Предположим, что для всех $x \in R^n$, $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\le r} \subset \mathbb{C}$ выполнены условия

$$|\mathrm{arg} A(x,\, \zeta)| < \varphi,$$
$$\sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \le M \mathrm{Re}\left\{\gamma(x) A(x,\, \zeta)\right\},$$

где φ – некоторое число из интервала $(0,\, \pi)$, и отличная от нуля комплекснозначная функция $\gamma(x)$ всюду непрерывна, и для любого числа $\nu > 0$ существует число $R_\nu > 0$ такое, что $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$ для всех $x,\, y \in R^n$ таких, что $|x| > R_\nu$, $|y| > R_\nu$. Здесь и далее считается, что функция $\mathrm{arg} z$ принимает значения на полуинтервале $(-\pi,\, \pi]$.

Задача D_λ**.** Для заданного функционала $F \in \left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)'$ требуется найти решение $u(x)$ уравнения

$$B[u,\, v] + \lambda \int d^{2(\alpha+r)}(x) u(x) \overline{v(x)} dx =< F,\, v > \forall v \in C_0^\infty(R^n), \tag{2}$$

принадлежащее пространству $V^r_{2,\alpha}(R^n)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены все сформулированные выше условия. Тогда существует число $\lambda_0 \ge 0$ такое, что если $\lambda \ge \lambda_0$, то для любого заданного функционала $F \in \left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)'$ задача D_λ имеет единственное решение, и при этом справедлива оценка*

$$\left\|u;\, V^r_{2,\alpha}(R^n)\right\| \le M \left\|F;\, \left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)'\right\|,$$

где число $M > 0$ не зависит от $\lambda \in [\lambda_0,\, +\infty)$ и функционала F.

Если коэффициенты формы (1) и правая часть уравнения (2) обладают более хорошими свойствами гладкости, то можно исследовать гладкость решения задачи D_λ.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Пусть также существует натуральное число* m_0 *такое, что*

$$\left| a_{kl}^{(s)}(x) \right| \leq M d^{|s|}(x)$$

для любого мультииндекса s *такого, что* $|s| \leq m_0$. *Тогда при* $\lambda \geq \lambda_0$, *где* λ_0 *– такое же число, как в теореме 1, для любого заданного элемента* $F \in \left(V_{2;\alpha+m}^{r-m}(R^n)\right)'$, *где целое число* m *такое, что* $0 \leq m \leq m_0$, *существует решение* $u(x)$ *задачи* D_λ, *оно принадлежит пространству* $V_{2,\alpha-m}^{r+m}(R^n)$, *и имеет место неравенство*

$$\left\| u;\, V_{2,\alpha-m}^{r+m}(R^n) \right\| \leq M \left\| F;\, \left(V_{2;\alpha+m}^{r-m}(R^n)\right)' \right\|,$$

где число $M > 0$ *не зависит от* $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$ *и функционала* F.

Во втором параграфе проводятся некоторые известные вспомогательные леммы и теоремы, которые в последующих параграфах применяются в процессе доказательства основных результатов первой главы. В работах, где изучались дифференциальные операторы, ассоциированные с некоэрцитивными полуторалинейными формами в ограниченной области, всегда использовалось конечное разбиение единицы области. С помощью конечного разбиения единицы невозможно исследовать подобные дифференциальные операторы во всем пространстве. Поэтому мы используем специальное бесконечное разбиение единицы конечной кратности, которое построено в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть функция* $\gamma(x)$, $x \in R^n$, *такая же, как в теореме 1, и пусть* ν *– достаточно малое положительное число. Тогда существуют неотрицательные функции* $\varphi_m(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $\eta_m(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $m = 1, 2, \ldots,$ *такие, что:*

a) система функций $\left\{\varphi_m^2(x)\right\}_{m=1}^\infty$ *образуют разбиение единицы пространства* R^n *с конечной кратностью, то есть*

$$\sum_{m=1}^\infty \varphi_m^2(x) \equiv 1,\ x \in R^n,$$

и если $\chi_m(x)$ *– характеристическая функция* $supp\,\varphi_m$, *то существует конечное число* Λ_n, *зависящее только от* n, *такое, что*

$$1 \leq \sum_{m=1}^\infty \chi_m(x) \leq \Lambda_n \quad \text{для всех } x \in R^n;$$

б) функция $\eta_m(x)$ *обращается в единицу в некоторой окрестности множества* $supp\,\varphi_m$ *и* $0 \le \eta_m(x) \le 1$ *для всех* $x \in R^n$*;*

в) функции $\varphi_m(x)$, $\eta_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, *удовлетворяют неравенствам*

$$\left|\varphi_m^{(k)}(x)\right| \le C_1\, d^{|k|}(x), \quad \left|\eta_m^{(k)}(x)\right| \le C_1\, d^{|k|}(x),\ |k| \le r,$$

положительные числа C_1, C_2 *не зависят от* m *и* r*;*

г) $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$ *для всех* $x, y \in supp\,\eta_m\, (m = 1, 2, \ldots)$.

В **третьем параграфе** подробно доказывается сформулированная выше **теорема 1** о разрешимости однородной вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов во всем пространстве, ассоциированных с некоэрцитивными формами. Здесь однородность граничных условий задачи Дирихле понимается в том смысле, что решение исследуемой задачи ищется в функциональном пространстве, в котором плотен класс бесконечно дифференцируемых финитных функций.

В **четвертом параграфе** первой главы доказывается **теорема 2** о гладкости решения исследуемой вариационной задачи Дирихле.

Вторая глава диссертационной работы посвящена исследованию вариационной задачи Дирихле для одного класса эллиптических операторов высшего порядка во всем n-мерном евклидовом пространстве в случае **несогласованности вырождения коэффициентов на бесконечности**. Постановка исследуемой задачи связана с интегро-дифференциальной полуторалинейной формой, которая может не удовлетворять условию коэрцитивности. Вводится понятие старшей формы, и в соответствии с поведением коэффициентов старших форм определяется основное весовое нормированное пространство, в котором ищется решение основной задачи второй главы. В первом параграфе сформулированы основные результаты второй главы.

Пусть r – натуральное число и J – некоторое подмножество множества $\{0, 1, \ldots, r\}$, причем $r \in J$. Пусть α_j, $j \in J$, – вещественные числа. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L[u] = \sum_{|k|=|l|=j \in J} (-1)^j \left(d(x)^{2\alpha_j} a_{kl}(x) u^{(k)}(x)\right)^{(l)}, \tag{3}$$

который понимается в смысле теории распределений на R^n. Предполагается, что коэффициенты $a_{kl}(x)$, $x \in R^n$, являются ограниченными комплекснозначными функциями.

Определение 1. *Вырождение коэффициентов оператора (3) называется* **согласованным**, *если существует число* α *такое, что* $\alpha_j = \alpha - j + r$ *при всех* $j \in J$. *В противном случае оно называется* **несогласованным**.

Постановка вариационной задачи Дирихле для оператора (3) связана со следующей полуторалинейной формой:

$$B[u,v] = \sum_{|k|=|l|=j\in J} \int d^{2\alpha_j}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx. \tag{4}$$

Форму (4) представим в виде

$$B[u,\, v] = \sum_{j\in J} B_j[u,\, v],\;\; B_j[u,\, v] = \sum_{|k|=|l|=j} \int d^{2\alpha_j}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx$$

и дадим следующее определение

Определение 2. *Форму* $B_r[u,\, v]$ *назовем* **старшей**. *Далее обозначим для удобства* r *через* j_1. *Другие старшие формы определим по индукции. Пусть уже указаны старшие формы* $B_{j_1}[u,\, v],\, \dots,\, B_{j_{p-1}}[u,\, v]$ $(j_1 > j_2 > \cdots > j_{p-1})$, *и пусть* j_p *– наибольшее число из множества* J, *меньше* j_{p-1}, *для которого выполняется неравенство*

$$\alpha_{j_p} + j_p < \min_{1\le h\le p-1} (\alpha_{j_h} + j_h).$$

Тогда форму $B_{j_p}[u,\, v]$ *также назовем* **старшей**. *Если же такого* j_p *не найдется, то* **старшими** *будем называть только формы* $B_{j_1}[u,\, v],\, \dots,\, B_{j_{p-1}}[u,\, v]$, *при этом* $p-1$ *обозначим через* p. *то есть* p *– количество старших форм. Далее через* q *обозначим количество нестарших форм.*

Вводим пространство $\mathbb{H}_+$ комплекснозначных функций $u(x)$, $x \in R^n$, с конечной нормой

$$\|u;\, \mathbb{H}_+\| = \left\{ \sum_{h=1}^{p} \left\| u;\, V^{j_h}_{2;\alpha_{j_h}}(R^n) \right\|^2 \right\}^{1/2}.$$

Из свойства пространства $V^r_{2,\,\alpha}(R^n)$ следует, что множество $C_0^\infty(R^n)$ плотно в пространстве $\mathbb{H}_+$ и

$$\|f;\, L_{2,\,\delta}(R^n)\| \le \|u;\, \mathbb{H}_+\| \quad \forall u \in \mathbb{H}_+.$$

Здесь и далее
$$\delta = \min_{1\le h\le p}\{\alpha_{j_h} + j_h\}.$$

Символом $\mathbb{H}_-$ обозначим пополнение пространства $L_{2,\,\delta}(R^n)$ по норме
$$\|f;\,\mathbb{H}_-\| = \sup \frac{|(f,\,u)_\delta|}{\|u;\,\mathbb{H}_+\|},$$
где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $u \in \mathbb{H}_+$. Элементы из $\mathbb{H}_-$ отождествляются с соответствующими антилинейными непрерывными функционалами над $\mathbb{H}_+$. Действие функционала $F \in \mathbb{H}_-$ на функцию $u \in \mathbb{H}_+$ будем обозначать символом $\langle F,\,v\rangle$.

Рассмотрим вариационную задачу Дирихле для оператора (3).

Задача D_λ**.** Для заданного функционала $F \in \mathbb{H}_-$ требуется найти решение $u(x)$ уравнения
$$B[u,\,v] + \lambda(u,\,v)_\delta =< F,\,v > \quad \forall v \in C_0^\infty(R^n), \tag{5}$$
принадлежащее пространству $\mathbb{H}_+$.

Теорема 3. *Пусть для каждого* $h \in \{1,\,\ldots,\,p\}$ *найдутся числа* $\varphi_h \in (o,\,\pi)$, $M > 0$ *и отличная от нуля комплекснозначная всюду непрерывная функция* $\gamma_h(x)$, $x \in R^n$, *такие, что для всех* $x \in R^n$, $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\le r} \subset \mathbb{C}$ *выполняются следующие неравенства:*
$$|arg\,A_h(x,\,\zeta)| < \varphi_h,$$
$$\sum_{|k|=j_h} |\zeta_k|^2 \le M Re\,\{\gamma_h(x)A_h(x,\,\zeta)\}\,.$$

Пусть для любого числа $\nu > 0$ *существует число* $R_\nu > 0$ *такое, что* $|\gamma_h(x) - \gamma_h(y)| < \nu$ *для любого* $h = \overline{1,\,p}$ *и всех* $x,\,y \in R^n$ *таких, что* $|x| > R_\nu$, $|y| > R_\nu$.

Тогда существует число $\lambda_0 \ge 0$ *такое, что если* $\lambda \ge \lambda_0$, *то для любого заданного функционала* $F \in \mathbb{H}_-$ *задача* D_λ *имеет единственное решение, и при этом справедлива оценка*
$$\|u;\,\mathbb{H}_+\| \le M_0\,\|F;\,\mathbb{H}_-\|\,,$$
где число $M_0 > 0$ *не зависит от* $\lambda \in [\lambda_0,\,+\infty)$ *и функционала* F.

Далее исследуем гладкость решения задачи D_λ в зависимости от гладкости коэффициентов $a_{kl}(x)$ эллиптического оператора (3) и правой части

F уравнения (5). Для этого сначала определим соответствующие функциональные пространства.

Пусть s – целое неотрицательное число. Вводим пространство $\mathbb{H}_+^s$ комплекснозначных функций $u(x)$, $x \in R^n$, с конечной нормой

$$\|u;\, \mathbb{H}_+^s\| = \left\{ \sum_{h=1}^{p} \left\| u;\, V_{2;\alpha_{j_h}-s}^{j_h+s}(R^n) \right\|^2 \right\}^{1/2}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\|f;\, L_{2,\,\delta}(R^n)\| \le \|u;\, \mathbb{H}_+^s\| \quad \forall u \in \mathbb{H}_+,$$

для любого целого неотрицательного числа s. Следовательно $\mathbb{H}_+^s$ вложено в $L_{2,\,\delta}(R^n)$.

Символом $\mathbb{H}_-^{-s}$ обозначим пополнение пространства $L_{2,\,\delta}(R^n)$ по норме

$$\left\| f;\, \mathbb{H}_-^{-s} \right\| = \sup \frac{|(f,\, u)_\delta|}{\|u;\, \mathbb{H}_+^s\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $u \in \mathbb{H}_+^s$. Элементы из $\mathbb{H}_-^{-s}$ отождествляются с соответствующими антилинейными непрерывными функционалами над $\mathbb{H}_+^s$.

Замечание 1. *Из определений пространств $\mathbb{H}_+$, $\mathbb{H}_-$ $\mathbb{H}_+^s$ и $\mathbb{H}_-^{-s}$ следует, что пространства $\mathbb{H}_+^s$, $\mathbb{H}_-^{-s}$ при $s = 0$ совпадают с $\mathbb{H}_+$, $\mathbb{H}_-$, соответственно, то есть $\mathbb{H}_+^0 = \mathbb{H}_+$, $\mathbb{H}_-^0 = \mathbb{H}_-$.*

Теорема 4. *При всех целых $s \ge 0$ и вещественных α_{j_h}, $h = \overline{1,\, p}$, множество $C_0^\infty(R^n)$ плотно в пространстве $\mathbb{H}_+^s$ и имеют место следующие вложения $\mathbb{H}_+^s \to \mathbb{H}_+^0 \to L_{2,\,\delta}(R^n) \to \mathbb{H}_-^0 \to \mathbb{H}_-^{-s}$.*

Теорема 5. *Пусть выполнены все условия теоремы 3, и пусть существует натуральное число m_0 такое, что*

$$\left| a_{kl}^{(s)}(x) \right| \le M d^{|s|}(x)$$

для любого мультииндекса s такого, что $|s| \le m_0$.

Тогда существует число $\lambda_0 \ge 0$ такое, что если $\lambda \ge \lambda_0$, то для любого заданного элемента $F \in \mathbb{H}_-^{-m}$, где целое число m такое, что $0 \le m \le m_0$, существует решение $u(x)$ задачи D_λ; оно принадлежит пространству $\mathbb{H}_+^m$, и имеет место неравенство

$$\|u;\, \mathbb{H}_+^m\| \le M_0 \left\| F;\, \mathbb{H}_-^{-m} \right\|,$$

где число $M_0 > 0$ не зависит от $\lambda \in [\lambda_0,\, +\infty)$ и функционала F.

В **заключении,** приведённом в конце диссертации, излагаются итоги выполненного исследования, даются рекомендации по использованию полученных результатов.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, член-корреспонденту АН Республики Таджикистан, Сулаймону Абунасровичу Исхокову за полезные советы, обсуждения и поддержку.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, входящих в перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК

1-А. Рахмонов Б.А. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов второго порядка во всем пространстве [Текст] /С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов // ДАН Республики Таджикистан. – 2017. – Т. 60. – №11-12. – С. 555 – 559.

2-А. Рахмонов Б.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов второго порядка во всем пространстве [Текст] /С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов // ДАН Республики Таджикистан. – 2018. – Т. 61. – №3. – С. 224 – 230.

3-А. Рахмонов Б.А. Вариационная задача Дирихле, связанная с некоэрцитивной формой во всем пространстве [Текст] /С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов // Изв. АН РТ. Отд. физ-мат., хим., геол. и техн. н. – 2018. – №2. – С. 17 – 25 .

4-А. Рахмонов Б.А. О гладкости решения вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной формой во всем пространстве [Текст] /Б.А.Рахмонов // ДАН Республики Таджикистан. – 2018. – Т. 61. – №9-10. – С. 736 – 741.

Публикации автора по теме диссертации, примыкающие к основным

5-А. Рахмонов Б.А. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов второго порядка во всем пространстве [Текст] /С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов // Международная научная конференция, «Дифференциальные уравнения, математический анализ, и теория чисел», посвященная 25-летию XVI сессии Верховного совета Республики Таджикистан, 27-28 октября 2017 года в г. Курган-Тюбе. – С. 90 – 95.

6-А. Рахмонов Б.А. О разрешимости вариационной задачи Дирихле во всем пространстве [Текст] /С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложений», посвященной 70-летию со дня

рождения академика АН РТ, доктора физико-математических наук, профессора М.Илолова. Душанбе, 14-15 марта 2018 г. – С. 118 – 120.

7-А. Рахмонов Б.А. Об одном классе вырождающихся эллиптических операторов во все пространстве [Текст] /С.А.Исхоков, Б.А. Рахмонов //Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложений», Филиал МГУ им.М.В.Ломоносова в г. Душанбе. Душанбе, 21-22 июня 2018 г. – С. 48 – 50.

8-А. Рахмонов Б.А. Об одном классе вырождающихся эллиптических операторов во все пространстве [Текст] /С.А.Исхоков, Б.А. Рахмонов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы алгебры и теории чисел», посвященной 90-летию со дня рождения, профессора Г.Б.Бобоева. Душанбе, 27-28 ноября 2018 г. – С. 63 – 65.

9-А. Рахмонов Б.А. Об одной однородной вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов во всем пространстве [Текст] / С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов // Сборник материалов II-ой Международной научно-практической конференции «Наука и инновационные разработки - Северу», Россия, г. Мирный, 14-15 марта 2019 г. – С. 186 – 188.

10-А. Рахмонов Б.А. Об одной априорной оценке решения вариационной задачи Дирихле во всем пространстве [Текст]/Б.А.Рахмонов // Сборник материалов Республиканской научно-практической конференции «Актуальные вопросы дифференциальных уравнений, математического анализа, алгебры и теории чисел и их приложения», г. Душанбе, Российско-Таджикский (Славянский) университет, 17 мая 2019 г. –С. 271 – 275.

АКАДЕМИЯИ ИЛМҲОИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ИНСТИТУТИ МАТЕМАТИКАИ ба номи А.ҶӮРАЕВ

УДК 517.957

Бо ҳуқуқи дастхат

Раҳмонов Бахтовар Абдуғаниевич

МАСЪАЛАИ ВАРИАТСИОНИИ ДИРИХЛЕ БАРОИ ОПЕРАТОРҲОИ ТАНАЗЗУЛЁБАНДАИ ЭЛЛИПТИКИИ БО ШАКЛҲОИ ҒАЙРИКОЭРСИТИВӢ ТАВЛИДШУДА ДАР ТАМОМИ ФАЗО

Автореферати

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси
01.01.01 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Душанбе – 2019

Кор дар Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон иҷро шудааст

Роҳбари илмӣ:	**Исҳоқов Сулаймон Абунасрович,** доктори илмҳои физикаю математика, узви вобастаи АИ Ҷумҳурии Тоҷикистон, профессор
Муқарризони расмӣ:	**Байзаев Саттор,** доктори илмҳои физикаю математика, профессор, Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон, профессори кафедраи фанҳои риёзӣ-табиатшиносии муосир
	Ҷангибеков Гулхоҷа, доктори илмҳои физикаю математика, профессор, Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, профессори кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ
Муассисаи пешбар:	Муассисаи байнидавлатии таълимии маълумоти касбии олии "Донишгоҳи (славянии) Россия ва Тоҷикистон"

Ҳимояи диссертатсия санаи 11-уми октябри соли 2019 соати 11:00 дар ҷаласаи Шӯрои диссертатсионии 6D.KOA-037 дар назди Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон аз рӯи нишонаи: 734063, ш. Душанбе, кӯчаи Айнӣ 299/4, баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон ва тавассути сомонаи http://www.mitas.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат санаи “___” ________ соли 2019 аз рӯи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шӯрои диссертатсионии 6D.KOA-037,
номзади илмҳои физикаю математика Каримов О.Х.

ТАВСИФИ УМУМИИ КОР

Муҳиммияти мавзӯъ. Кор ба тадқиқи ҳалшавандагии масъалаи вариатсионии Дирихле барои операторҳои таназзулёбандаи эллиптикии тартиби олӣ дар тамоми фазо бахшида шудааст.

Яке аз равияҳои асосии назарияи муосири масъалаҳои вариатсионӣ барои операторҳои дифференсиалӣ бо ҳосилиҳои хусусӣ ба омӯхтани ҳалшавандагии масъалаҳои вариатсионӣ барои синфҳои гуногуни операторҳои таназзулёбандаи эллиптикӣ бахшида шудааст. Рӯй овардан ба чунин тадқиқотҳо бо он вобаста аст, ки муодилаҳои таназзулёбандаи эллиптикӣ дар назарияи қатшавии хурди сатҳҳои даврзанӣ, дар назарияи тарқишҳо, дар назарияи ҳаракатҳои броунӣ ва дар дигар масъалаҳои гуногуни физикаи математикӣ ва механика во мехӯранд. Инчунин маълум аст, ки бо ёрии иваз намудани тағйирёбандаҳои новобаста баъзе аз синфҳои муодилаҳои дифференсиалӣ дар соҳаҳои номаҳдуд ва соҳаҳое, ки дар сарҳад дорои нуқтаи сингулярӣ мебошанд, ба муодилаҳои таназзулёбандаи эллиптикӣ оварда мешаванд.

Тарзҳои гуногуни таназзулёбии муодилаҳои эллиптикӣ мавҷуданд, бинобарин барои омӯхтани масъалаҳои канорӣ барои чунин муодилаҳо методҳои гуногун истифода мешаванд. Методи истифоданамудаи мо ба элементҳои назарияи ҷойгиркунии фазоҳои функсионалии вазндор ва назарияи шаклҳои якунимхаттӣ асос ёфтааст. Ин метод дар корҳои С.М.Николский, Л.Д.Кудрявсев, П.И.Лизоркин, С.В.Успенский, К.Ҳ.Бойматов, Х.Трибел, А.Куфнер, Н.В.Мирошин, Б.Л.Байделдинов, С.А.Исҳоков ва дигарон[1–4] кашф ва такмил дода шудааст.

Қисми асосии мақолаҳои илмии нашршуда оиди масъалаҳои вариатсионӣ барои операторҳои эллиптикии таназзулёбанда ба ҳолате тааллуқ доранд, ки шаклҳои якунимхаттии интегро-дифференсиалии мувофиқ шарти коэрситивиро қаноат мекунанд. Дар ин ҷо коэрситивӣ будани шакл ба маънои зерин фаҳмида мешавад: агар H_0 – фазои гилбертӣ бо зарби

[1] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.- М.: Мир.- 1980.- 664 с.

[2] Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений.// Известия Вузов. Математика. – 1988. – №8. – с. 4 – 30.

[3] Исхоков С.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением // Математические заметки. – 2010. – Т. 87. – №2. – С. 201 – 216.

[4] Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Якушев И.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов высокого порядка с нестепенным вырождением // Доклады Академии наук (Россия). – 2012. – Т. 443. – №3. – с. 286-289.

скалярии $(\cdot,\cdot)_0$ ва нормаи $\|\cdot\|_0$, инчунин H_+ – фазои гилбертии дигари дар фазои H_0 зич ҷойгиршуда бо нормаи $\|\cdot\|_+$ бошад, он гоҳ шакли якунимхаттии $P[u,\,v]$ дар фазои H_+ муайяншуда H_+ – коэрситивӣ нисбат ба фазои H_0 номида мешавад, агар ҳамин гуна ададҳои $\mu_0 \in R$, $\delta_0 > 0$ ёфт шаванд, ки барои ҳамаи $u \in H_+$ нобаробарии зерин иҷро гардад:

$$\operatorname{Re} P[u,\,u] + \mu_0 \|u\|_0^2 \geq \delta_0 \|u\|_+^2.$$

Ҳолате, ки дар он оператори дифференсиалии тадқиқшаванда бо ёрии шакли якунимхаттии ғайрикоэрситивӣ тавлид мешавад, бо бисёр мушкилиҳои техникӣ ҳамбаст буда бори аввал дар кори К.Ҳ.Бойматов[5] дида баромада шуда буд. Баъдтар ин ҳолат дар корҳои К.Ҳ.Бойматов[6–8], К.Ҳ.Бойматов ва С.А.Исхоков[9], С.А.Исхоков[10,11] ва дигарон тадқиқ карда шуд. Методи дар ин корҳо истифодашуда аз маҳдуд будани соҳае, ки дар он оператори дифференсиалии тадқиқшаванда дода шудааст, сахт вобастагӣ дорад. Такмили ин метод дар баъзе корҳо[11,12] имконият дод, ки операторҳои дар соҳаи номаҳдуди ба соҳаҳои маҳдуд хеле наздик (соҳаи ҳудудан силиндрикӣ бо диаметри нулӣ дар беохирӣ) омӯхта шаванд.

Ба фарқ аз ин, дар кори диссертатсионии мо ҳалшавандагии масъалаи вариатсионии Дирихле бори аввал дар ҳолати операторҳои таназзулёбандаи эллиптикии дараҷаи олӣ дар тамоми фазо, ки бо шаклҳои якунимхаттии ғайрикоэрситивӣ алоқамананд, тадқиқ карда шудаанд.

Мақсади кор. Мақсади кори диссертатсионӣ тадқиқи ҳалшавандагии масъалаи вариатсионии Дирихле дар тамоми фазо барои операторҳои

---

[5] Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка / К.Х.Бойматов // Доклады АН СССР. – 1992. – Т.327. – №1. – С. 9-15.

[6] Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле, порожденная некоэрцитивной формой / К.Х.Бойматов // Доклады АН России, – 1993. – Т. 330. – №3. – С.285 – 290.

[7] Бойматов К.Х. Матричные дифференциальные операторы, порожденные некоэрцитивными формами / К.Х.Бойматов // Доклады АН России. – 1994. – Т. 339. – №1. – С.5 – 10.

[8] Бойматов К.Х. Граничные задачи для некоэрцитивных форм / К.Х.Бойматов// Доклады АН РТ. – 1998. – Т. XLI. – №10. – С.10-16.

[9] Бойматов К.Х., Исхоков С.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой / К.Х.Бойматов, С.А.Исхоков // Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН. – 1997. – Т. 214. – С. 107-134.

[10] Исхоков С.А. О гладкости решений обобщенной задачи Дирихле и задачи на собственные значения для дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами / С.А.Исхоков // Доклады Академии наук (Россия). – 1995. – Т. 342. – №1. – С. 20-22.

[11] Исхоков С.А. Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов с нестепенным вырождением, порожденных некоэрцитивными формами // Доклады Академии наук России. – 2003. – Т. 392. – №5. – С. 606-609.

[12] Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Петрова М.Н. О некоторых спектральных свойствах одного класса вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов // Математические заметки СВФУ. – 2016. – Т. 23. – №2. – С. 31-50.

таназзулёбандаи эллиптикии дараҷаи олӣ бо таназзулёбии дараҷагӣ дар беохирӣ дар ҳолате, ки шаклҳои якунимхаттии мувофиқ метавонанд шарти коэрситивиро қаноат накунанд, мебошад.

Чизҳои тадқиқшаванда. Чизҳои тадқиқшаванда инҳо операторҳои эллиптикии тартиби олӣ дар тамоми фазои n - ченакаи евклидӣ бо дараҷаи таназзулёбӣ дар беохирӣ, ки бо шакли интегро-дифференсиалии якунимхаттие вобаста аст, ки метавонад шарти коэрситивиро қаноат накунад, мебошад.

Усулҳои тадқиқот. Усули дар диссертатсия истифодашуда ба элементҳои таҳлили функсионалӣ ва назарияи фазоҳои функсияҳои дифференсиронидашавандаи бисёр тағйирёбандаҳои ҳақиқӣ дошта бо вазни дараҷагӣ (теоремаҳои ҷойгиркунӣ, нормиронии эквивалентӣ, теоремаҳо оиди зичии функсияҳои суфта ва ғ.) асос ёфтааст.

Нововарии илмӣ. Натиҷаҳои илмии диссертатсия, ки барои ҳимоя пешниҳод мешаванд, нав мебошанд ва аз инҳо иборатанд:

1. Теорема оиди мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи якҷинсаи вариатсионии Дирихле барои операторҳои эллиптикии дараҷаи олӣ дар тамоми фазо, ки шаклҳои якунимхаттии мувофиқашон, дар ҳолати умумӣ, шарти коэрситивиро қаноат намекунанд ва коэффитсиентҳояшон дар беохирӣ таназзулёбии дараҷагии ҳаммувофиқа доранд, исбот карда шуд.

2. Дар вобастагӣ бо суфтагии коэффитсиентҳо ва тарафи рости муодила, суфтагии ҳалли масъалаи якҷинсаи вариатсионии Дирихле барои операторҳои эллиптикии дараҷаи олӣ дар тамоми фазо, ки шаклҳои якунимхаттии мувофиқашон, дар ҳолати умумӣ, шарти коэрситивиро қаноат намекунанд ва коэффитсиентҳояшон дар беохирӣ таназзулёбии дараҷагии ҳаммувофиқа доранд, тадқиқ карда шуд.

3. Теорема оиди мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи якҷинсаи вариатсионии Дирихле барои операторҳои эллиптикии дараҷаи олӣ дар тамоми фазо, ки шаклҳои якунимхаттии мувофиқашон, дар ҳолати умумӣ, шарти коэрситивиро қаноат намекунанд ва коэффитсиентҳояшон дар беохирӣ таназзулёбии дараҷагии ғайриҳаммувофиқа доранд, исбот карда шуд. Мафҳуми шакли калон дохил карда шуда, исбот карда шуд, ки функсияҳои вазнии фазои ҳалҳои масъалаи тадқиқшаванда танҳо аз дараҷаи таназзулёбии коэффитсиентҳои шаклҳои калон вобастагӣ доранд.

4. Хосиятҳои дифференсиронидашавандагии ҳалли масъалаи вариатсионии Дирихле барои операторҳои эллиптикии дараҷаи олӣ дар тамоми фазо бо таназзулёбии ғайриҳаммувофиқаи коэффитсиентҳо дар беохирӣ дар ҳолате, ки шаклҳои якунимхаттии мувофиқ метавонанд шарти коэрситивиро қаноат накунанд, тадқиқ карда шуданд.

Аҳамиятнокии назариявӣ ва амалии кор. Натиҷаҳои дар диссертатсия ба даст овардашуда хусусияти назариявӣ доранд. Онҳо метавонанд дар рушди назарияи масъалаҳои вариатсионӣ барои операторҳои таназзулёбандаи эллиптикии тартиби олии бо ёрии шаклҳои якунимхаттии ғайрикоэрситивӣ тавлидшуда ва инчунин барои тадқиқи хосиятҳои спекторалии ин гуна операторҳо истифода шаванд.

Моҳияти амалии кор бо воситаи аҳамиятҳои амалии муодилаҳои дифференсиалӣ таназзулёбанда дар ҳалли масъалаҳои амалии механика ва дигар қисмҳои физика муайян карда мешавад.

Тасвиби кор. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар семинари шӯъбаи таҳлили функсионалӣ ва назарияи функсияҳо ва семинари умумиинститутии Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон муҳокима шуданд. Натиҷаҳои диссертатсия дар конференсияҳои зерин баррасӣ шуданд:

- конференсияи илмии байналхалқии «Муодилаҳои диффенренсиалӣ, таҳлили математикӣ ва назарияи ададҳо» бахшида ба 25-солагии XVI шӯрои Олии Ҷумҳурии Тоҷикистон (ш. Қурғонтеппа, 27-28 октябри соли 2017);

- конференсияи илмии байналхалқии «Муаммоҳои муосири математика ва тадбиқҳои он», филиали Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В.Ломоносов дар ш. Душанбе (ш. Душанбе, 20-21 июни соли 2018);

- конференсияи илмии байналхалқии «Муаммоҳои муосири математикӣ ва тадбиқҳои он» бахшида ба 70-солагии академики АИ ЧТ, доктори илмҳои физикаю математика, профессор М.Илолов (ш. Душанбе, 14-15 марти соли 2018);

- конференсияи илмии байналхалқии «Муаммоҳои муосири алгебра ва назарияи ададҳо» бахшида ба 90-солагии профессор Г.Б.Бобоев (ш. Душанбе, 27-28 ноябри соли 2018);

- II-юмин конференсияи илмӣ-амалии байналхалқии «Илм ва рушди инноватсия барои Шимол» (ш.Мирный, Россия, 14-15 марти соли 2019);

- конференсияи илмӣ-амалии ҷумҳуриявии «Муаммоҳои муосири муодилаҳои дифференсиалӣ, таҳлили математикӣ, алгебра ва назарияи ададҳо ва тадбиқи онҳо» (ш. Душанбе, Донишгоҳи (славянии) Россия ва Тоҷикистон 17 майи соли 2019).

Интишорот. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар 10 интишороти муаллиф дарҷ гардидаанд. Аз ҷумла 4 мақола дар маҷаллаҳои тақризшаванда, ки ба рӯйхати амалкунандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон тааллуқ доранд ва 6 мақолаи дигар дар маҷмӯаҳои маводи конференсияҳои байналхалқӣ ва ҷумҳуриявӣ чоп шудаанд.

Сохтор ва ҳаҷми кор. Диссертатсия аз муқадима, ду боб, феҳристи адабиёти истифодашуда, ки 80 номгӯйро дар бар мегирад, иборат мебошад. Ҳаҷми умумии диссертатсия 115 саҳифаи компютериро дар бар гирифта, дар барномаи LaTeX ҳуруфчинӣ шудааст.

Барои қулай шудани хондан дар диссертатсия рақамгузории секаратаи теоремаҳо, леммаҳо, таърифҳо ва формулаҳо мавриди истифода қарор дода шудааст, ки рақами якум бо рақами боб, рақами дуюм бо рақами параграф ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, таърифҳо ё формулаҳои ҳамин параграф мувофиқат мекунад.

Муҳтавои мухтасари диссертатсия

Дар муқаддима актуалӣ будани мавзӯи диссертатсия асоснок карда шуда, муҳокимаи адабиёт аз рӯи мавзӯи тадқиқшаванда, инчунин сохти диссертатсия ва натиҷаҳои асосии он оварда шудаанд.

Боби якуми диссертатсия аз чаҳор параграф иборат буда, ба омӯхтани масъалаи якҷинсаи вариатсионии Дирихле барои як синфи операторҳои эллиптикӣ дар тамоми фазо, ки бо шаклҳои интегро-дифференсиалии якунимхаттии ғайрикоэрситивӣ алоқаманданд ва дорои таназзулёбии дараҷагӣ дар беохирӣ мебошанд, бахшида шудааст. Дар ин ҷо якҷинсагии шарти канории масъалаи Дирихле ба он маънӣ фаҳмида мешавад, ки ҳалли масъалаи тадқиқшаванда дар фазои функсионалие ҷуста мешавад, ки дар он синфи функсияҳои беохирмаротиба дифференсиронидашавандаи финитӣ зич мебошад.

Дар параграфи якум натиҷаҳои асосии боби якум мухтасар оварда шудаанд.

Бигзор R^n – фазои n-ченаки евклидии нуқтаҳои $x = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$, $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ – мултииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ – дарозии мултииндекси k бошад. Бо воситаи

$$u^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|} u(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}}$$

ҳосилаи умумикардашудаи мултииндекси k-и функсияи $u(x)$ бо маънои С.Л.Соболевро ишора мекунем. Бигзор r – адади натуралӣ, α, p – ададҳои ҳақиқӣ ва $1 < p < \infty$ бошанд. Бо воситаи $V^r_{p,\alpha}(R^n)$ фазои функсияҳои $u(x)$, ки дар тамоми фазои R^n муайян шудаанд, дорои ҳосилаҳои тартиби r буда, нормаи охирноки зеринро доранд

$$\|u; V^r_{p;\,\alpha}(R^n)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int d^{p\alpha}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx + \int d^{p(\alpha+r)}(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

ишора мекунем. Дар инҷо $d(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2}$ мебошад. Қайд мекунем, ки дар ин ҷо ва минбаъд ҳамаи интегралҳо аз рӯи фазои R^n гирифта мешаванд.

Фазои $V^r_{p,\alpha}(R^n)$ дар монографияи Х.Трибел хело хуб омӯхта шудааст. Ӯ ҳолати хусусии фазои $V^r_p(\Omega; \sigma,\, \delta)$ мебошад, ки дар корҳои К.Ҳ.Бойматов, С.А.Исҳоков ворид карда шуда ва омӯхта шудааст. Мувофиқи натиҷаҳои ин корҳо барои ҳамаи ададҳои натуралии r ва ададҳои ҳақиқии α, p, ки $1 < p < \infty$ аст, маҷмӯи $C_0^\infty(R^n)$ дар фазои $V^r_{p;\,\alpha}(R^n)$ зич мебошад.

Бигзор δ – адади ҳақиқӣ бошад. Фазои $L_{p,\,\delta}(R^n)$ – ро бо нормаи

$$\|u;\, L_{p,\,\delta}(R^n)\| = \left\{ \int \left(d^\delta(x)\, |u(x)| \right)^p dx \right\}^{1/p}$$

дохил мекунем.

Фазои $L_{p,\,\delta}(R^n)$ ҳангоми $p = 2$ будан ба фазои гирбертӣ табдил меёбад ва зарби скалярӣ дар фазои $L_{2,\,\delta}(R^n)$ бо баробарии зерин муайян карда мешавад:

$$(u,\, v)_\delta = \int d^{2\delta}(x) u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Фазои $\left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)'$-ро ҳамчун пуркунии фазои $L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$ аз рӯи нормаи

$$\left\| f;\, \left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)' \right\| = \sup \frac{|(f,\, v)_{\alpha+r}|}{\left\| v;\, V^r_{2,\alpha}(R^n) \right\|}$$

муайян мекунем, ки дар ин ҷо сарҳади болоӣ аз рӯи ҳамаи функсияҳои ғайрисифрии $v(x) \in V^r_{2,\,\alpha}(R^n)$ гирифта мешавад.

Барои функсияҳои $u, v \in C_0^\infty(R^n)$ шакли интегро-дифференсиалии якунимхаттии зеринро

$$B[u, v] = \sum_{|k|,|l|\le r} \int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx \tag{1}$$

дида мебароем, ки коэффисиентҳои $a_{kl}(x)$ функсияҳои комплексии маҳдуд мебошанд.

Дар баробари шакли (1) функсияҳои зеринро низ дохил мекунем:

$$A(x,\,\zeta) = \sum_{|k|,|l|\le r} a_{kl}(x)\zeta_k\overline{\zeta_l}, \quad x \in R^n, \quad \zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\le r} \subset \mathbb{C}.$$

Фарз мекунем, ки барои ҳамаи $x \in R^n$, $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\le r} \subset \mathbb{C}$ шартҳои зерин иҷро мегарданд:

$$|\mathrm{arg} A(x,\,\zeta)| < \varphi,$$

$$\sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \le M \mathrm{Re}\left\{\gamma(x) A(x,\,\zeta)\right\},$$

дар ин ҷо φ – ададе аз интервали $(0,\,\pi)$ ва $\gamma(x)$ функсияи комплексии аз сифр фарққунандаи дар ҳамаҷо бефосила буда, барои дилхоҳ адади $\nu > 0$ ҳамин хел адади $R_\nu > 0$ ёфт мешавад, ки нобаробарии $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$ барои ҳамаи $x,\,y \in R^n$, ки $|x| > R_\nu$, $|y| > R_\nu$ мебошад, иҷро мегардад. Дар ин ҷо ва минбаъд функсияи $\mathrm{arg} z$ қиммати худро аз ниминтервали $(-\pi,\,\pi]$ қабул мекунад.

Масъалаи D_λ. Талаб карда мешавад, ки барои функсионали додашудаи $F \in \left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)'$ ҳалли $u(x)$-и муодилаи

$$B[u,\,v] + \lambda \int d^{2(\alpha+r)}(x) u(x)\overline{v(x)}dx =< F,\,v > \forall v \in C_0^\infty(R^n), \tag{2}$$

ки тааллуқи фазои $V^r_{2,\alpha}(R^n)$ мебошад, ёфта шавад.

Теоремаи 1. *Бигзор ҳамаи шартҳои дар боло зикргардида иҷро шаванд. Он гоҳ ҳамин хел адади $\lambda_0 \ge 0$ ёфт мешавад, ки агар $\lambda \ge \lambda_0$ бошад, пас барои дилхоҳ функсионали додашудаи $F \in \left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)'$ масъалаи D_λ ҳалли ягона дорад ва барои он баҳои зерин дуруст мебошад:*

$$\left\|u;\,V^r_{2,\alpha}(R^n)\right\| \le M \left\|F;\,\left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)'\right\|,$$

ки дар ин ҷо адади $M > 0$ *аз* $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$ *ва функсионали* F *вобастагӣ надорад.*

Агар коэффисиентҳои шакли (1) ва тарафи рости муодилаи (2) дорои хосияти хуби суфтагӣ бошанд, он гоҳ суфтагии ҳалли масъалаи D_λ – ро тадқиқ кардан мумкин аст.

Теоремаи 2. *Бигзор ҳамаи шартҳои теоремаи 1 иҷро шаванд. Инчунин бигзор ҳамин хел адади натуралии* m_0 *мавҷуд бошад, ки нобаробарии*

$$\left|a_{kl}^{(s)}(x)\right| \leq M d^{|s|}(x)$$

барои дилхоҳ мултииндекси s, *ки* $|s| \leq m_0$ *мебошад, иҷро шавад. Он гоҳ ҳангоми* $\lambda \geq \lambda_0$ *будан, дар ин ҷо* λ_0 *– ҳамон ададе, ки дар теоремаи 1 аст, барои дилхоҳ элементи додашудаи* $F \in \left(V_{2;\alpha+m}^{r-m}(R^n)\right)'$, *ки* m *адади бутун буда,* $0 \leq m \leq m_0$ *мебошад, ҳалли* $u(x)$*-и масъалаи* D_λ *мавҷуд аст, он аз фазои* $V_{2,\alpha-m}^{r+m}(R^n)$ *мебошад ва барои он нобаробарии зерин ҷой дорад:*

$$\left\|u;\, V_{2,\alpha-m}^{r+m}(R^n)\right\| \leq M \left\|F;\, \left(V_{2;\alpha+m}^{r-m}(R^n)\right)'\right\|,$$

ки дар ин ҷо адади $M > 0$ *аз* $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$ *ва функсионали* F *вобаста намебошад.*

Дар параграфи дуюм якчанд леммаҳо ва теоремаҳои маълум ва ёрирасон оварда шудаанд, ки дар параграфҳои оянда дар ҷараёни исботи натиҷаҳои асосии боби якум истифода мешаванд. Дар корҳое, ки дар онҳо операторҳои дифференсиалӣ бо шакли якунимхаттии ғайрикоэрситивӣ дар соҳаи маҳдуд вобастаанд, омӯхта шудаанд, доимо тақсимоти охирноки воҳид дар соҳа истифода шудааст. Бо ёрии тақсимоти охирноки воҳид тадқиқ намудани ин гуна операторҳои диффересиалӣ дар тамоми фазо номумкин аст. Бинобарин дар инҷо мо тақсимоти махсуси беохири каратнокиаш охирноки воҳидро истифода мебарем, ки онро дар шакли чунин лемма баён кардан мумкин аст:

Леммаи 1. *Бигзор функсия* $\gamma(x)$, $x \in R^n$, *ҳамон функсияе, ки дар теоремаи 1 баён карда будем, бошад ва бигзор* ν *– адади мусбати кифояхурд бошад. Он гоҳ ҳамин хел функсияҳои ғайриманфии* $\varphi_m(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $\eta_m(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $m = 1, 2, \ldots,$ *ёфт мешаванд, ки*

а) системаи функсияҳои $\left\{\varphi_m^2(x)\right\}_{m=1}^{\infty}$ *тақсимоти каратнокиаш охирноки воҳиди фазои* R^n*-ро ташкил медиҳанд, яъне*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m^2(x) \equiv 1,\; x \in R^n$$

ва агар $\chi_m(x)$ *– функсияи характеристикии маҷмӯи* $supp\,\varphi_m$ *бошад, он гоҳ адади охирноки* Λ_n*, ки фақат аз* n *вобаста аст, ёфт мешавад, ки нобаробарии зерин иҷро мегардад:*

$$1 \le \sum_{m=1}^{\infty} \chi_m(x) \le \Lambda_n, \quad \text{барои ҳамаи } x \in R^n;$$

б) функсияи $\eta_m(x)$ *дар баъзе атрофи маҷмӯи* $supp\,\varphi_m$ *ба воҳид табдил меёбад ва* $0 \le \eta_m(x) \le 1$ *барои ҳамаи* $x \in R^n$ *мебошад;*

в) функсияҳои $\varphi_m(x)$*,* $\eta_m(x)$*,* $m = 1, 2, \ldots,$ *нобаробарии зеринро қаноат мекунанд:*

$$\left|\varphi_m^{(k)}(x)\right| \le C_1\, d^{|k|}(x), \quad \left|\eta_m^{(k)}(x)\right| \le C_1\, d^{|k|}(x), \ |k| \le r,$$

ададҳои мусбати C_1, C_2 *аз* m *ва* r *вобаста нестанд;*

г) $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$ *барои ҳамаи* $x, y \in supp\,\eta_m\,(m = 1, 2, \ldots)$.

Дар параграфи сеюм исботи пурраи **теоремаи 1**-и дар боло дарҷгардида оиди ҳалшавандагии масъалаи якҷинсаи вариатсионии Дирихле барои операторҳои таназзулёбандаи эллиптикӣ дар тамоми фазо, ки бо шаклҳои ғайрикоэрситивӣ алоқамананд, оварда шудааст. Дар ин ҷо якҷинсагии шарти канории масъалаи Дирихле ба он маънӣ фаҳмида мешавад, ки ҳалли масъалаи тадқиқшаванда дар фазои функсионалие ҷуста мешавад, ки дар он синфи функсияҳои беохирмаротиба дифференсиронидашавандаи финитӣ зич мебошад.

Дар параграфи чаҳоруми боби якум **теоремаи 2** оиди суфтагии ҳалли масъалаи вариатсионии Дирихлеи таҳқиқшаванда исбот карда шудааст.

Боби дуюми диссертатсия ба тадқиқи масъалаи вариатсионии Дирихле барои як синфи операторҳои эллиптикии тартиби олӣ дар тамоми фазои n – ченакаи евклидӣ дар ҳолати ҳаммувофиқа набудани таназзулёбии коэффисиентҳо дар беохирӣ бахшида шудааст. Гузориши масъалаи тадқиқшаванда бо шакли интегро-дифференсиалии якунимхаттие вобаста аст, ки метавонад шарти коэрситивиро қаноат накунад. Мафҳуми шакли калонро ворид менамоем ва нисбат ба рафтори коэффитсиентҳои шакли калон фазои вазндори нормиронидашудаи асосиро муайян мекунем, ки дар он ҳалли масъалаи асосии гузошташуда ҷустуҷӯ карда мешавад.

Бигзор r – адади натуралӣ ва J – яке аз зермаҷмӯъҳои маҷмӯи $\{0, 1, \ldots, r\}$ бошад, ки дар ин ҷо $r \in J$ аст. Бигзор α_j, $j \in J$, – ададҳои ҳақиқӣ бошанд.

Оператори дифференсиалии

$$L[u] = \sum_{|k|=|l|=j\in J} (-1)^j \left(d(x)^{2\alpha_j} a_{kl}(x) u^{(k)}(x)\right)^{(l)} \tag{3}$$

-ро дида мебароем, ки ба маънои назарияи тақсимотҳо дар R^n фаҳмида мешавад. Фарз карда мешавад, ки коэффитсиентҳои $a_{kl}(x)$, $x \in R^n$, функсияҳои комплексии маҳдуд мебошанд.

Таърифи 1. *Таназзулёбии коэффисиентҳои оператори (3)* **ҳаммувофиқа** *номида мешавад, агар ҳамин хел адади α ёфт шавад, ки $\alpha_j = \alpha - j + r$ барои ҳамаи $j \in J$ бошад. Дар ҳолати баръакс онро* **ғайриҳаммувофиқа** *меноманд.*

Гузориши масъалаи вариатсионии Дирихле барои оператори (3) бо шакли якунимхаттии зерин вобастагӣ дорад:

$$B[u,v] = \sum_{|k|=|l|=j\in J} \int d^{2\alpha_j}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx. \tag{4}$$

Шакли (4) – ро ба намуди зерин менависем:

$$B[u,\, v] = \sum_{j\in J} B_j[u,\, v],\ \ B_j[u,\, v] = \sum_{|k|=|l|=j} \int d^{2\alpha_j}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx$$

ва мегузарем ба таърифи дигар.

Таърифи 2. *Шакли $B_r[u,\, v]$ – ро* **калон** *меномем. Минбаъд барои осонии кор r –ро бо воситаи j_1 ишора мекунем. Шаклҳои калони боқимондаро ба воситаи индуксия муайян мекунем. Бигзор аллакай шаклҳои калони $B_{j_1}[u,\, v], \ldots, B_{j_{p-1}}[u,\, v]$ $(j_1 > j_2 > \cdots > j_{p-1})$ дода шуда бошанд ва бигзор j_p адади аз ҳама калон аз маҷмӯи J бошад, ки хурдтар аз j_{p-1} аст ва барои он нобаробарии зерин иҷро гардад:*

$$\alpha_{j_p} + j_p < \min_{1\le h\le p-1} (\alpha_{j_h} + j_h).$$

Он гоҳ шакли $B_{j_p}[u,\, v]$ –ро низ **калон** *меномем. Агар чунин адади j_p ёфт нашавад, он гоҳ танҳо шаклҳои $B_{j_1}[u,\, v], \ldots, B_{j_{p-1}}[u,\, v]$ – ро* **калон** *меномем ва дар ин ҳолат $p-1$-ро ба воситаи p ифода мекунем, яъне p – миқдори шаклҳои калон мебошад. Минбаъд бо воситаи q миқдори шаклҳои ғайрикалонро ишора мекунем.*

Фазои $\mathbb{H}_+$-и функсияи комплексии $u(x)$, $x \in R^n$, бо нормаи охирноки

$$\|u;\, \mathbb{H}_+\| = \left\{ \sum_{h=1}^{p} \left\| u;\, V_{2;\alpha_{j_h}}^{j_h}(R^n) \right\|^2 \right\}^{1/2}$$

-ро дохил мекунем. Аз хосияти фазои $V^r_{2,\alpha}(R^n)$ бармеояд, ки маҷмӯи $C_0^\infty(R^n)$ дар фазои $\mathbb{H}_+$ зич мебошад ва нобаробарии зерин иҷро мешавад:

$$\|f;\, L_{2,\delta}(R^n)\| \le \|u;\, \mathbb{H}_+\| \quad \forall u \in \mathbb{H}_+.$$

Дар ин ҷо ва минбаъд

$$\delta = \min_{1\le h\le p}\{\alpha_{j_h} + j_h\}.$$

Бо воситаи $\mathbb{H}_-$ пуркунии фазои $L_{2,\delta}(R^n)$ –ро аз рӯи нормаи

$$\|f;\, \mathbb{H}_-\| = \sup \frac{|(f,\, u)_\delta|}{\|u;\, \mathbb{H}_+\|}$$

ишора мекунем, ки дар ин ҷо сарҳади болоӣ аз рӯи ҳамаи функсияҳои ғайрисифрии $u \in \mathbb{H}_+$ гирифта мешавад. Элементҳои фазои $\mathbb{H}_-$ бо функсионалҳои бефосилаи антихаттии мувофиқи дар $\mathbb{H}_+$ муайяншуда айният дода мешаванд. Амали функционали $F \in \mathbb{H}_-$ –ро дар функсияи $u \in \mathbb{H}_+$ бо рамзи $\langle F,\, v\rangle$ ишора мекунем.

Масъалаи вариатсионии Дирихлеро барои оператори (3) дида мебароем.

Масъалаи D_λ. Талаб карда мешавад, ки барои функсионали додашудаи $F \in \left(V^r_{2,\alpha}(R^n)\right)'$ ҳалли $u(x)$-и муодилаи

$$B[u,\, v] + \lambda(u,\, v)_\delta =< F,\, v > \quad \forall v \in C_0^\infty(R^n), \tag{5}$$

ки тааллуқи фазои $\mathbb{H}_+$ мебошад, ёфта шавад.

Теоремаи 3. *Бигзор барои ҳамаи $h \in \{1,\, \dots,\, p\}$ чунин ададҳои $\varphi_h \in (o,\, \pi)$, $\quad M > 0$ ва функсияи дар ҳама ҷо бефосилаи комплексии аз сифр фарққунандаи $\gamma_h(x)$, $x \in R^n$, ёфт шавад, ки барои ҳамаи $x \in R^n$, $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\le r} \subset \mathbb{C}$ нобаробариҳои зерин иҷро гарданд:*

$$|arg\, A_h(x,\, \zeta)| < \varphi_h,$$

$$\sum_{|k|=j_h} |\zeta_k|^2 \le M Re\, \{\gamma_h(x) A_h(x,\, \zeta)\}\,.$$

Бигзор барои дилхоҳ адади $\nu > 0$ чунин адади $R_\nu > 0$ ёфт шавад, ки $|\gamma_h(x) - \gamma_h(y)| < \nu$ барои дилхоҳ $h = \overline{1,\, p}$ ва ҳамаи $x,\, y \in R^n$, ки $|x| > R_\nu$, $|y| > R_\nu$ бошад.

Он гоҳ чунин адади $\lambda_0 \ge 0$ ёфт мешавад, ки агар $\lambda \ge \lambda_0$ бошад, барои дилхоҳ функсионали додашудаи $F \in \mathbb{H}_-$ масъалаи D_λ ҳалли ягона дорад ва барои он баҳои зерин дуруст аст:

$$\|u;\, \mathbb{H}_+\| \le M_0\, \|F;\, \mathbb{H}_-\|\,,$$

ки дар ин ҷо адади $M > 0$ *аз* $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$ *ва функсионали* F *вобаста намебошад.*

Акнун суфтагии ҳалли масъалаи D_λ-ро вобаста бо суфтагии коэффисиентҳои $a_{kl}(x)$-и оператори эллиптикии (3) ва тарафи рости F муодилаи (5)-ро меомӯзем. Барои ин аввал фазои функсионалии мувофиқро муайян мекунем.

Бигзор s – адади бутуни ғайриманфӣ бошад. Фазои $\mathbb{H}_+^s$ функсияҳои комплексии $u(x)$, $x \in R^n$, бо нормаи охирноки

$$\|u;\, \mathbb{H}_+^s\| = \left\{ \sum_{h=1}^{p} \left\| u;\, V^{j_h+s}_{2;\alpha_{j_h}-s}(R^n) \right\|^2 \right\}^{1/2}$$

-ро дохил мекунем.

Ба осонӣ санҷидан мумкин аст, ки

$$\|f;\, L_{2,\,\delta}(R^n)\| \le \|u;\, \mathbb{H}_+^s\| \quad \forall u \in \mathbb{H}_+$$

барои дилхоҳ адади бутуни ғайрисифрии s мебошад. Бинобар ин $\mathbb{H}_+^s$ даруни фазои $L_{2,\,\delta}(R^n)$ мебошад.

Бо воситаи $\mathbb{H}_-^{-s}$ пуркунии фазои $L_{2,\,\delta}(R^n)$ –ро аз рӯи нормаи

$$\left\| f;\, \mathbb{H}_-^{-s} \right\| = \sup \frac{|(f,\, u)_\delta|}{\|u;\, \mathbb{H}_+^s\|}$$

ишора мекунем, ки дар ин ҷо сарҳади болоӣ аз рӯи ҳамаи функсияҳои ғайрисифрии $u \in \mathbb{H}_+^s$ гирифта шудааст. Элементҳои фазои $\mathbb{H}_-^{-s}$ бо функсионалҳои бефосилаи антихаттии мувофиқи дар $\mathbb{H}_+^s$ муайяншуда айният дода мешаванд.

Қайди 1. *Аз таърифи фазоҳои* $\mathbb{H}_+$, $\mathbb{H}_-$ $\mathbb{H}_+^s$ *ва* $\mathbb{H}_-^{-s}$ *бармеояд, ки фазои* $\mathbb{H}_+^s$, $\mathbb{H}_-^{-s}$, *ҳангоми* $s = 0$, *будан бо* $\mathbb{H}_+$, $\mathbb{H}_-$ *ҳамҷо мешаванд, яъне* $\mathbb{H}_+^0 = \mathbb{H}_+$, $\mathbb{H}_-^0 = \mathbb{H}_-$.

Теоремаи 4. *Барои ҳамаи ададҳои бутуни* $s \ge 0$ *ва ададҳои ҳақиқии* α_{j_h}, $h = \overline{1,\, p}$, *маҷмӯи* $C_0^\infty(R^n)$ *дар фазои* $\mathbb{H}_+^s$ *пурра мебошад ва ҷойгиркуниҳои зерин ҷой доранд:* $\mathbb{H}_+^s \to \mathbb{H}_+^0 \to L_{2,\,\delta}(R^n) \to \mathbb{H}_-^0 \to \mathbb{H}_-^{-s}$.

Теоремаи 5. *Бигзор ҳамаи шартҳои теоремаи 3 иҷро шаванд ва бигзор чунин адади натуралии* m_0 *мавҷуд бошад, ки нобаробарии*

$$\left| a_{kl}^{(s)}(x) \right| \le M d^{|s|}(x)$$

барои дилхоҳ мултииндекси s, *ки* $|s| \le m_0$ *аст, иҷро гардад.*

Он гоҳ ҳангоми $\lambda \geq \lambda_0$ будан, ки дар ин ҷо λ_0 – ҳамон ададе аз теоремаи 3 аст, барои дилхоҳ элементи додашудаи $F \in \mathbb{H}_-^{-m}$, ки m адади бутун буда, $0 \leq m \leq m_0$ мебошад, ҳалли $u(x)$-и масъалаи D_λ мавҷуд аст ва он аз фазои $\mathbb{H}_+^m$ буда, барои он нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$\|u; \mathbb{H}_+^m\| \leq M_0 \left\|F; \mathbb{H}_-^{-m}\right\|,$$

ки дар ин ҷо адади $M > 0$ аз $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$ ва функсионали F вобаста намебошад.

Дар хулосаи дар хотимаи диссертатсия овардашуда ҷамъбасти тадқиқотҳои дар диссертатсия иҷрокардашуда баён карда шуда, барои истифодаи ояндаи натиҷаҳои ба даст овардашуда тавсияҳо дода шудааст.

Дар охир, аз фурсати муносиб истифода бурда, муаллиф миннатдории самимии худро ба роҳбари илмиаш узви вобастаи АИ Ҷумҳурии Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор Сулаймон Абунасрович Исҳоқов барои маслиҳатҳои муфид, муҳокимаҳо ва дастгириҳо иброз медорад.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ

Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон нашр шудаанд:

1-А. Рахмонов Б.А. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов второго порядка во всем пространстве [Текст] /С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов // ДАН Республики Таджикистан. – 2017. – Т. 60. – №11-12. – С. 555 – 559.

2-А. Рахмонов Б.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов второго порядка во всем пространстве [Текст] /С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов // ДАН Республики Таджикистан. – 2018. – Т. 61. – №3. – С. 224 – 230.

3-А. Рахмонов Б.А. Вариационная задача Дирихле, связанная с некоэрцитивной формой во всем пространстве [Текст] /С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов // Изв. АН РТ. Отд. физ-мат., хим., геол. и техн. н. – 2018. – №2. – С. 17 – 25 .

4-А. Рахмонов Б.А. О гладкости решения вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной формой во всем пространстве [Текст] /Б.А.Рахмонов // ДАН Республики Таджикистан. – 2018. – Т. 61. – №9-10. – С. 736 – 741.

Дар дигар нашрияҳо

5-А. Рахмонов Б.А. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов второго порядка во всем пространстве [Текст] /С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов // Международная научная конференция, «Дифференциальные уравнения, математический анализ, и теория чисел», посвященная 25-летию XVI сессии Верховного совета Республики Таджикистан, 27-28 октября 2017 года в г. Курган-Тюбе. – С. 90 – 95.

6-А. Рахмонов Б.А. О разрешимости вариационной задачи Дирихле во всем пространстве [Текст] /С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложений», посвященной 70-летию со дня рождения академика АН РТ, доктора физико-математических наук, профессора М.Илолова. Душанбе, 14-15 марта 2018 г. – С. 118 – 120.

7-А. Рахмонов Б.А. Об одном классе вырождающихся эллиптических операторов во все пространстве [Текст] /С.А.Исхоков, Б.А. Рахмонов //Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложений», Филиал МГУ им.М.В.Ломоносова в г. Душанбе. Душанбе, 21-22 июня 2018 г. – С. 48 – 50.

8-А. Рахмонов Б.А. Об одном классе вырождающихся эллиптических операторов во все пространстве [Текст] /С.А.Исхоков, Б.А. Рахмонов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы алгебры и теории чисел», посвященной 90-летию со дня рождения, профессора Г.Б.Бобоева. Душанбе, 27-28 ноября 2018 г. – С. 63 – 65.

9-А. Рахмонов Б.А. Об одной однородной вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов во всем пространстве [Текст] / С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов // Сборник материалов II-ой Международной научно-практической конференции «Наука и инновационные разработки - Северу», Россия, г. Мирный, 14-15 марта 2019 г. – С. 186 – 188.

10-А. Рахмонов Б.А. Об одной априорной оценке решения вариационной задачи Дирихле во всем пространстве [Текст]/Б.А.Рахмонов // Сборник материалов Республиканской научно-практической конференции «Актуальные вопросы дифференциальных уравнений, математического анализа, алгебры и теории чисел и их приложения», г. Душанбе, Российско-Таджикский (Славянский) университет, 17 мая 2019 г. –С. 271 – 275.

АННОТАЦИЯ

диссертации Рахмонова Бахтовара Абдуганиевича на тему "Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными формами, во всем пространстве", представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: эллиптический оператор, степенное вырождение, вариационная задача Дирихле, некоэрцитивная форма, гладкость решения.

Актуальность темы: Диссертационная работа посвящена исследованию разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов высшего порядка во всем пространстве.

Одним из основных направлений в современной теории краевых задач для уравнений с частными производными является исследование разрешимости краевых задач для различных классов вырождающихся эллиптических уравнений. Интерес к таким исследованиям обусловлен тем, что вырождающиеся эллиптические уравнения встречаются в теории малых изгибов поверхностей вращения, в теории трещин, в теории броунских движений и во многих других задачах математической физики и механики.

Существуют разнообразные способы вырождения эллиптических уравнений и поэтому для изучения краевых задач для таких уравнений применяются разные методы. Применяемый нами метод основан на элементах теории вложения весовых функциональных пространств и теории полуторалинейных форм. Этот метод разрабатывался и совершенствовался в работах С.М.Никольского, Л.Д.Кудрявцева, П.И.Лизоркина, С.В.Успенского, К.Х.Бойматова, Х.Трибеля, А.Куфнера, Н.В.Мирошина, Б.Л. Байдельдинова, С.А.Исхокова и др.

Основная часть научных публикаций по краевым задачам для эллиптических уравнений с вырождением относится к случаю, когда соответствующие полуторалинейные формы удовлетворяют условию коэрцитивности.

Случай, когда исследуемые дифференциальные операторы порождаются с помощью некоэрцитивных полуторалинейных форм, сопряжен многими техническими трудностями и впервые рассматривался в работе К.Х.Бойматова в 1992 году. Позже этот случай исследовался в работах

К.Х.Бойматова и его учеников. Метод, разработанный в этих работах, существенно опирается на ограниченность области, в которой задается исследуемый дифференциальный оператор.

В отличие от этого, в нашей диссертационной работе разрешимость вариационной задачи Дирихле впервые исследуется в случае вырождающихся эллиптических операторов высшего порядка во всем пространстве, ассоциированных с некоэрцитивными полуторалинейными формами.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и заключаются в следующем:

1. Доказана теорема о существовании и единственности решения однородной вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов высшего порядка во всем пространстве, соответствующие полуторалинейные формы которых, в общем случае, не удовлетворяют условию коэрцитивности и коэффициенты которых имеют согласованное степенное вырождение на бесконечности.
2. В зависимости от гладкости коэффициентов и правой части уравнения исследована гладкость решения однородной вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов высшего порядка во всем пространстве, соответствующие полуторалинейные формы которых, в общем случае, не удовлетворяют условию коэрцитивности и коэффициенты которых имеют согласованное степенное вырождение на бесконечности.
3. Доказана теорема о существовании и единственности решения однородной вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов высшего порядка во всем пространстве, соответствующие полуторалинейные формы которых, в общем случае, не удовлетворяют условию коэрцитивности и коэффициенты которых имеют несогласованное степенное вырождение на бесконечности. Введено понятие старшей формы и доказано, что весовые функции пространства решений исследуемой задачи зависят только от степеней вырождения коэффициентов старших форм.
4. Исследованы дифференциальные свойства решения вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов высшего порядка во всем пространстве с несогласованным вырождением коэффициентов на босконечности в случае когда соответствующие полуторалинейные формы могут не удовлетворять условию коэрцитивности.

ШАРҲИ МУХТАСАРИ

диссертатсияи Раҳмонов Бахтовар Абдуғаниевич "Масъалаи вариатсионии Дирихле барои операторҳои таназзулёбандаи эллиптикии бо шаклҳои ғайрикоэрситивӣ тавлидшуда дар тамоми фазо", ки барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01-Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ пешниҳод шудааст

Вожаҳои калидӣ: оператори эллиптикӣ, таназзулёбии дараҷагӣ, масъалаи вариатсионии Дирихле, шакли ғайрикоэрситивӣ, суфтагии ҳал.

Муҳиммияти мавзӯъ: Кори диссертатсионӣ ба тадқиқи ҳалшавандагии масъалаи вариатсионии Дирихле барои операторҳои таназзулёбандаи эллиптикии дараҷаи олӣ дар тамоми фазо бахшида шудааст.

Яке аз равияҳои асосии назарияи муосири масъалаҳои вариатсионӣ барои операторҳои дифференсиалӣ бо ҳосилиҳои хусусӣ ба омӯхтани ҳалшавандагии масъалаҳои вариатсионӣ барои синфҳои гуногуни операторҳои таназзулёбандаи эллиптикӣ бахшида шудааст. Рӯй овардан ба чунин тадқиқотҳо бо он вобаста аст, ки муодилаҳои таназзулёбандаи эллиптикӣ дар назарияи қатшавии хурди сатҳҳои даврзанӣ, дар назарияи тарқишҳо, дар назарияи ҳаракатҳои броунӣ ва дар дигар масъалаҳои гуногуни физикаи математикӣ ва механика во мехӯранд.

Тарзҳои гуногуни таназзулёбии муодилаҳои эллиптикӣ мавҷуданд, бинобарин барои омӯхтани масъалаҳои канорӣ барои чунин муодилаҳо методҳои гуногун истифода мешаванд. Методи истифоданамудаи мо ба элементҳои назарияи ҷойгиркунии фазоҳои функсионалии ваздор ва назарияи шаклҳои якунимхаттӣ асос гузошта шудааст. Ин метод дар корҳои С.М.Николский, Л.Д.Кудрявтсев, П.И.Лизоркин, С.В.Успенский, К.Ҳ.Бойматов, Х.Трибел, А.Куфнер, Н.В.Мирошин, Б.Л.Байделдинов, С.А.Исхоқов ва дигарон кашф ва такмил дода шудааст.

Қисми асосии мақолаҳои илмии нашршуда оиди масъалаҳои вариатсионӣ барои операторҳои эллиптикии таназзулёбанда ба ҳолате тааллуқ доранд, ки шаклҳои якунимхаттии интегро-дифференсиалии мувофиқ шарти коэрситивиро қаноат мекунанд. Ҳолате, ки дар он оператори дифференсиалии тадқиқшаванда бо ёрии шакли якунимхаттии ғайрикоэрситивӣ тавлид мешавад бо бисёр мушкилиҳои техникӣ ҳамбаст аст ва бори аввал соли 1992 дар кори К.Ҳ.Бойматов дида баромада шуда буд. Баъдтар ин ҳолат дар корҳои К.Ҳ.Бойматов ва шогирдони ӯ тадқиқ карда шуд.

Методи дар ин корҳо истифодашуда аз маҳдуд будани соҳае, ки дар он оператори дифференсиалии тадқиқшаванда дода шудааст, сахт вобастагӣ дорад.

Ба фарқ аз ин дар кори диссертатсионии мо ҳалшавандагии масъалаи вариатсионии Дирихле бори аввал дар ҳолати операторҳои таназзулёбандаи эллиптикии дараҷаи олӣ дар тамоми фазо, ки бо шаклҳои якунимхаттии ғайрикоэрситивӣ алоқамананд, тадқиқ карда шудаанд.

Нововарии илмӣ. Натиҷаҳои илмии диссертатсия, ки барои ҳимоя пешниҳод мешаванд, нав мебошанд ва аз инҳо иборатанд:

1. Теорема оиди мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи якҷинсаи вариатсионии Дирихле барои операторҳои эллиптикии дараҷаи олӣ дар тамоми фазо, ки шаклҳои якунимхаттии мувофиқашон, дар ҳолати умумӣ, шарти коэрситивиро қаноат намекунанд ва коэффитсиентҳояшон дар беохирӣ таназзулёбии дараҷагии ҳаммувофиқа доранд, исбот карда шуд.

2. Дар вобастагӣ бо суфтагии коэффитсиентҳо ва тарафи рости муодила, суфтагии ҳалли масъалаи якҷинсаи вариатсионии Дирихле барои операторҳои эллиптикии дараҷаи олӣ дар тамоми фазо, ки шаклҳои якунимхаттии мувофиқашон, дар ҳолати умумӣ, шарти коэрситивиро қаноат намекунанд ва коэффитсиентҳояшон дар беохирӣ таназзулёбии дараҷагии ҳаммувофиқа доранд, тадқиқ карда шуд.

3. Теорема оиди мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи якҷинсаи вариатсионии Дирихле барои операторҳои эллиптикии дараҷаи олӣ дар тамоми фазо, ки шаклҳои якунимхаттии мувофиқашон, дар ҳолати умумӣ, шарти коэрситивиро қаноат намекунанд ва коэффитсиентҳояшон дар беохирӣ таназзулёбии дараҷагии ғайриҳаммувофиқа доранд, исбот карда шуд. Мафҳуми шакли калон дохил карда шуда исбот карда шуд, ки функсияҳои вазнии фазои ҳалҳои масъалаи тадқиқшаванда танҳо аз дараҷаи таназзулёбии коэффитсиентҳои шаклҳои калон вобастагӣ доранд.

4. Хосиятҳои дифференсиронидашавандагии ҳалли масъалаи вариатсионии Дирихле барои операторҳои эллиптикии дараҷаи олӣ дар тамоми фазо бо таназзулёбии ғайриҳаммувофиқаи коэффитсиентҳо дар беохирӣ дар ҳолате, ки шаклҳои якунимхаттии мувофиқ метавонанд шарти коэрситивиро қаноат накунанд, тадқиқ карда шуданд.

SUMMARY

of the thesis of Rakhmonov Bakhtovar Abduganievich "Variational Dirichlet problem for degenerate elliptic operators, generated by noncoercive forms, in the whole space" presented for Candidate physico-mathematical sciences degree on the speciality 01.01.01 – Real, complex and functional analysis

Key words: elliptic operator, power degeneracy, variational Dirichlet problem, noncoercive form, smoothness of a solution.

Actuality of the work: The thesis is devoted to investigation of solvability of variational Dirichlet problem for higher-order degenerate elliptic operators in the whole space.

One of the main directions in the modern theory of boundary value problems for partial differential equations is the investigation of the solvability of boundary value problems for various classes of degenerate elliptic equations. Interest in such studies is due to the fact that degenerate elliptic equations are encountered in the theory of small bends of surfaces of revolution, in the theory of cracks, in the theory of Brownian motions, and in many other problems of mathematical physics and mechanics.

There are various ways of degenerate elliptic equations, and therefore different methods are used to study boundary-value problems for such equations. The our used method is based on the elements of the embedding theory of weighted functional spaces and the theory of sesquilinear forms. This method was developed and improved in the works of S.M.Nikolsky, L.D.Kudryavtsev, P.I.Lizorkin, S.V.Uspensky, K.Kh.Boymatov, H.Triebel, A.Kufner, N.V.Miroshin, B.L.Baideldinov, S.A.Iskhokov and others.

The main part of scientific publications on boundary value problems for elliptic equations with degeneration relates to the case when the corresponding integro-differential sesquilinear forms satisfy the coercivity condition.

The case when the differential operators under study are generated using non-coercive sesquilinear forms is fraught with many technical difficulties and it was first considered by K.Kh.Boymatov in 1992. Later this case was investigated in the works of K.Kh.Boymatov and his colleagues. The method developed in these works relies heavily on the boundedness of the domain in which the differential operator under study is specified.

In contrast, in our thesis, the solvability of the Dirichlet variational problem is first investigated in the case of higher-order degenerate elliptic operators in

the whole space associated with non-coercive sesquilinear forms.

Scientific novelity. The results to be presented for defence are new and are as follows:

1. A theorem on the existence and uniqueness of the solution of the homogeneous variational Dirichlet problem for higher order elliptic operators in the whole space is proved, the corresponding sesquilinear forms of which, in general, do not satisfy the coercivity condition and whose coefficients have a coordinated power degeneration at infinity.

2. Depending on the smoothness of the coefficients and the right-hand side of the equation, the smoothness of the solution of the homogeneous variational Dirichlet problem for higher-order elliptic operators in the whole space is investigated, the corresponding sesquilinear forms of which, in general, do not satisfy the coercivity condition and whose coefficients have a coordinated power degeneration at infinity.

3. A theorem on the existence and uniqueness of the solution of the homogeneous variational Dirichlet problem for higher-order elliptic operators in the whole space is proved, when the corresponding sesquilinear forms, in general, do not satisfy the coercivity condition and whose coefficients have an uncoordinated power degeneration at infinity. The concept of the highest form is introduced and it is proved that the weight functions of the solutions space of the problem under study depend only on the degrees of degeneration of the highest forms coefficients.

4. The differential properties of the solution of the variational Dirichlet problem for higher-order elliptic operators in the whole space with uncoordinated degeneration of coefficients at infinity in the case when the corresponding sesquilinear forms may not satisfy the coercivity condition are investigated.