Институт математики им. академика А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

На правах рукописи

УДК 517.957

РАХМОНОВ БАХТОВАР АБДУГАНИЕВИЧ

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДЕННЫХ НЕКОЭРЦИТИВНЫМИ ФОРМАМИ, ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент АН РТ, профессор
Исхоков Сулаймон Абунасрович

Душанбе — 2019

Оглавление

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Диссертационная работа посвящена исследованию разрешимости вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов высшего порядка во всем n-мерном евклидовом пространстве R^n. Исследуемые операторы порождаются с помощью полуторалинейных интегро-дифференциальных форм, коэффициенты которых имеют степенное вырождение на бесконечности и, в общем случае, могут не удовлетворять условию коэрцитивности.

Исследование разрешимости краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений является одной из бурно развивающихся областей теории дифференциальных уравнений. Как отмечено авторами многих обзорных работ, существуют многообразные способы вырождения, которые требуют применения соответствующих разных методов, и в настоящее время не существует единой теории, которая охватывала бы все результаты этого направления.

Применяемый нами метод основан на элементах теории весовых функциональных пространств (теоремы вложения, эквивалентные нормировки, теоремы о плотности гладких функций и т.д.). Первый результат типа теорем вложения для весовых пространств функций многих переменных был получен в 1938 г. в работе В.И.Кондрашова [35]. Систематическое изучение весовых пространств с весом, равным расстоянию до границы области в положительной степени, а так же их приложения к решению краевых задач для вырождающихся на границе ограниченной области эллиптических дифференциальных уравнений, впервые было проведено в монографии Л.Д.Кудрявцева [36]. Обзор работ и подробная библиография по весовым функциональным пространствам содержатся в монографиях С.М.Никольского [51], Х.Трибеля [57, 58] и статьях О.В.Бесова, Л.Д. Кудрявцева, П.И.Лизоркина, С.М.Никольского [3], Л.Д.Кудрявцева, С.М.Никольского [40].

Достаточно полный обзор полученных результатов в теории краевых задач для вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений содержится в работах В.П.Глушко, Ю.Б.Савченко [17], С.З.Левендорского, Б.П.Панеяха [41], С.М.Никольского, П.И.Лизоркина, Н.В.Мирошина [52], О.А.Олейника, Е.В.Радкевича [53], М.М.Смирнова [54], С.А.Терсенова [55], Х.Трибеля [58] и С.В.Успенского, Г.В.Демиденко, В.Г.Перепелкина [59].

Наши исследования в основном примыкают к исследованиям, проведенным в работах Б.Л.Байдельдинова [1, 2], К.Х.Бойматова [4] – [10], К.Х.Бойматова, С.А.Исхокова [12, 13], А.А.Вашарина [14], А.А.Вашарина, П.И.Лизоркина [15], С.А.Исхокова [19, 20, 21, 22], С.А.Исхокова, А.Ё. Куджмуродова [29, 30, 31, 32], Л.Д.Кудрявцева [36] – [39], П.И.Лизоркина [42], П.И.Лизоркина, С.М.Никольского [44, 45], П.И.Лизоркина, Н.В. Мирошина [43], Н.В.Мирошина [46] – [50].

Случай, когда исследуемые дифференциальные операторы порождаются с помощью некоэрцитивных полуторалинейних форм, сопряжен с многими техническими трудностями и впервые рассматривался в работе К.Х.Бойматова [5]. Позже этот случай исследовался в работах К.Х.Бойматова [6] – [10], К.Х.Бойматова и С.А.Исхокова [12, 13], С.А.Исхокова [19, 21, 23], С.А.Исхокова и А.Г.Каримова [27, 28]. Метод, разработанный в этих работах, существенно опирается на ограниченность области Ω n-мерного евклидова пространства R^n, в которой задается исследуемый дифференциальный оператор. Усовершенствование этого метода в работах [21], [26] позволяло исследовать дифференциальные операторы, заданные в неограниченных областях, которые очень близки к ограниченным (предельно-цилиндрическая область с нулевым диаметром в бесконечности).

В отличие от этих исследований, в настоящей диссертационной работе разрешимость вариационной задачи Дирихле впервые изучается в случае вырождающихся эллиптических операторов высшего порядка во всем пространстве, ассоциированных с некоэрцитивными полуторалинейными формами.

Разрешимость задачи Дирихле для различных классов вырождающихся эллиптических уравнений исследовалась в работах J.H.Chabrowski [60, 61, 62], D.Kim [66], S.V.Lototsky [68], A.C.Cavalheiro [63], H.Chen, P.Luo [64], H.Chen, X.Liu [65]. В этих работах также применяется метод, основанный на предварительном изучении свойств соответствующих весовых пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных.

Относительно работ по вырождающимся эллиптическим уравнениям, в которых применяются методы, отличные от метода настоящей диссертационной работы, отметим также монографии S.Levendorskii [67], E.W.Stredulinsky [70], P.R.Popivanov, D.K.Palagachev [69], С.А.Терсенов [55].

Цель диссертации. Целью диссертационной работы является исследование разрешимости однородной вариационной задачи Дирихле во всем пространстве для эллиптических операторов высшего порядка со степенным вырождением на бесконечности в случае, когда соответствующая полуторалинейная форма может не удовлетворять условию коэрцитивности. Здесь и далее коэрцитивность формы понимается в смысле определения 2.0.1 работы [52]: если H_0 – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_0$ и нормой $\|\cdot\|_0$, H_+ – другое гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_+$, плотно вложенное в H_0, то определенная в H_+ полуторалинейная форма $P[u,\, v]$ называется H_+-коэрцитивной относительно H_0, если найдутся числа $\mu_0 \in R$, $\delta_0 > 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} P[u,\, u] + \mu_0 \|u\|_0^2 \geq \delta_0 \|u\|_+^2$$

для всех $u \in H_+$.

Объекты исследования. Объектами исследования являются эллиптические операторы высокого порядка во всем пространстве со степенным вырождением на бесконечности, которые порождаются с помощью некоэрцитивных полуторалинейных интегро-дифференциальных форм.

Методы исследования. Применяемый в диссертации метод основан на элементах функционального анализа и теории пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных со степенным весом: теоремы вложения, эквивалентные нормировки, теоремы о плотности гладких функций и т.д.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют научный интерес и состоят в следующем:

1. Доказана теорема о существовании и единственности решения однородной вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов высшего порядка во всем пространстве, соответствующие полуторалинейные формы которых, в общем случае, не удовлетворяют условию коэрцитивности, и коэффициенты которых имеют согласованное степенное вырождение на бесконечности.

2. В зависимости от гладкости коэффициентов и правой части уравнения исследована гладкость решения однородной вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов высшего порядка во всем пространстве, соответствующие полуторалинейные формы которых, в общем случае, не удовлетворяют условию коэрцитивности, и коэффициенты которых имеют согласованное степенное вырождение на бесконечности.

3. Доказана теорема о существовании и единственности решения однородной вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов высшего порядка во всем пространстве, соответствующие полуторалинейные формы которых, в общем случае, не удовлетворяют условию коэрцитивности, и коэффициенты которых имеют несогласованное степенное вы-

рождение на бесконечности. Введено понятие старшей формы и доказано, что весовые функции пространства решений исследуемой задачи зависят только от степеней вырождения коэффициентов старших форм.

4. Исследованы дифференциальные свойства решения вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов высшего порядка во всем пространстве с несогласованным вырождением коэффициентов на бесконечности в случае, когда соответствующие полуторалинейные формы могут не удовлетворять условию коэрцитивности.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы при развитии теории вариационных задач для вырождающихся эллиптических операторов высокого порядка, порожденных с помощью некоэрцитивных полуторалинейных форм, а также при исследовании спектральных свойств таких операторов.

Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью вырождающихся дифференциальных уравнений в решении прикладных задач механики и других разделов физики.

Степень достоверности результатов проведенных исследований. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведенных в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались автором и обсуждались на семинаре отдела теории функции и функционального анализа и общеинститутском семинаре Института математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан. Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях:

- Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел», посвящённая 25-летию

XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан, Курган-тюбе, 27-28 октября 2017 г.

- Международная научная конференция «Современные проблемы математики и ее приложений». Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Душанбе, 20-21 июня 2018 г.

- Международная научная конференция «Современные проблемы математики и её приложений», посвящённая 70-летию со дня рождения академика АН РТ, доктора физико-математических наук, профессора М.Илолова, Душанбе, 14-15 марта 2018 г.

- Международная научная конференция «Современные проблемы алгебры и теории чисел», посвящённая 90-летию со дня рождения профессора Г.Б.Бобоева, Душанбе, 27-28 ноября 2018 г.

- II-ая Международная научно-практическая конференция «Наука и инновационные разработки - Северу», Россия, г. Мирный, 14-15 марта 2019 г.

- Республиканская научно-практическая конференция «Актуальные вопросы дифференциальных уравнений, математического анализа, алгебры и теории чисел и их приложения», г. Душанбе, Российско-Таджикский (Славянский) университет, 17 мая 2019 г.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [71-А] – [80-А], список которых приведен в конце диссертации. Работы [71-А] – [74-А] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте РТ. В работах, опубликованных в соавторстве с научным руководителем, соавтору принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Краткое содержание диссертации

Работа состоит из настоящего введения, двух глав и списка литературы. Используется тройная нумерация теорем, лемм, следствий и формул, в которой первый номер совпадает с номером главы, второй указывает на номер параграфа, а третий – на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формул в данном параграфе. Для удобства чтения в начале каждой главы приводится краткая информация о ее содержании.

Во введении даётся обоснование актуальности темы диссертации, приведен обзор литературы по теме исследования, описана структура диссертации и изложены её основные результаты.

Первая глава диссертационной работы, состоящая из четырех параграфов, посвящена изучению однородной вариационной задачи Дирихле для одного класса эллиптических операторов во всем пространстве, связанных с некоэрцитивными полуторалинейными интегро-дифференциальными формами, со степенными вырождениями на бесконечности. Здесь однородность граничных условий задачи Дирихле понимается в том смысле, что решение исследуемой задачи ищется в функциональном пространстве, в котором плотен класс бесконечно дифференцируемых финитных функций.

В **первом параграфе** сформулированы основные результаты главы.

Пусть R^n – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$, $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ – длина мультииндекса k. Обозначим через

$$u^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|} u(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}}$$

обобщенную в смысле С.Л. Соболева производную функции $u(x)$ мультииндекса k. Пусть r – натуральное, α, p – вещественные числа и $1 < p < \infty$. Символом $V^r_{p,\alpha}(R^n)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных во всем пространстве R^n, имеющих производные порядка

r с конечной нормой

$$\|u; V^r_{p;\,\alpha}(R^n)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int d^{p\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx + \int d^{p(\alpha+r)}(x)|u(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

где $d(x) = (1+|x|^2)^{-1/2}$. Здесь и далее все интегралы берутся по всему R^n.

Пространство $V^r_{p,\alpha}(R^n)$ хорошо изучено в монографии Х.Трибелья. Оно является частным случаем пространства $V^r_p(\Omega; \sigma,\, \delta)$, введенного и изученного в работах К.Х.Бойматова, С.А.Исхокова [4, 12, 20]. Согласно результатам этих работ, для любого натурального числа r и вещественных чисел $\alpha,\ p$, причем $1 < p < \infty$, множество $C^\infty_0(R^n)$ плотно в пространстве $V^r_{p;\,\alpha}(R^n)$.

Пусть δ – вещественное число. Вводим пространство $L_{p,\,\delta}(R^n)$ с нормой

$$\|u;\ L_{p,\,\delta}(R^n)\| = \left\{ \int \left(d^\delta(x)\,|u(x)|\right)^p dx \right\}^{1/p}.$$

Пространство $L_{p,\,\delta}(R^n)$ при $p = 2$ является гильбертовым пространством, и скалярное произведение в $L_{2,\,\delta}(R^n)$ определяется равенством

$$(u,\, v)_\delta = \int d^{2\delta}(x) u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Определим пространство $\left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)'$ – пополнение пространства $L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$ по норме

$$\left\| f;\ \left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)' \right\| = \sup \frac{|(f,\, v)_{\alpha+r}|}{\left\|v;\ V^r_{2,\alpha}(R^n)\right\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $v(x) \in V^r_{2,\,\alpha}(R^n)$.

На функциях $u,\, v \in C^\infty_0(R^n)$ рассмотрим интегро-дифференциальную полуторалинейную форму

$$B[u,v] = \sum_{|k|,|l| \le r} \int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \tag{0.1}$$

коэффициенты $a_{kl}(x)$ которой являются ограниченными комплекснозначными функциями.

Наряду с формой (0.1) вводим следующую функцию

$$A(x,\, \zeta) = \sum_{|k|,|l|\le r} a_{kl}(x)\zeta_k\overline{\zeta_l}, \quad x \in R^n, \quad \zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\le r} \subset \mathbb{C}.$$

Предположим, что для всех $x \in R^n$, $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\le r} \subset \mathbb{C}$ выполнены условия

$$|\mathrm{arg} A(x,\, \zeta)| < \varphi,$$
$$\sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \le M \mathrm{Re}\left\{\gamma(x) A(x,\, \zeta)\right\},$$

где φ – некоторое число из интервала $(0,\, \pi)$, отличная от нуля комплекснозначная функция $\gamma(x)$ всюду непрерывна и для любого числа $\nu > 0$ существует число $R_\nu > 0$ такое, что $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$ для всех $x,\, y \in R^n$ таких, что $|x| > R_\nu$, $|y| > R_\nu$. Здесь и далее считается, что функция $\mathrm{arg} z$ принимает значения на полуинтервале $(-\pi,\, \pi]$.

Задача D_λ. Для заданного функционала $F \in \left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)'$ требуется найти решение $u(x)$ уравнения

$$B[u,\, v] + \lambda \int d^{2(\alpha+r)}(x) u(x) \overline{v(x)} dx = < F,\, v > \quad \forall v \in C_0^\infty(R^n), \qquad (0.2)$$

принадлежащее пространству $V^r_{2,\alpha}(R^n)$.

Теорема 0.1. *Пусть выполнены все сформулированные выше условия. Тогда существует число $\lambda_0 \ge 0$ такое, что если $\lambda \ge \lambda_0$, то для любого заданного функционала $F \in \left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)'$ задача D_λ имеет единственное решение, и при этом справедлива оценка*

$$\left\|u;\, V^r_{2,\alpha}(R^n)\right\| \le M \left\|F;\, \left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)'\right\|,$$

где число $M > 0$ не зависит от $\lambda \in [\lambda_0,\, +\infty)$ и функционала F.

Если коэффициенты формы (0.1) и правая часть уравнения (0.2) обладают более хорошими свойствами гладкости, то можно исследовать гладкость решения задачи D_λ.

Теорема 0.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 0.1. Пусть также существует натуральное число* m_0 *такое, что*

$$\left|a_{kl}^{(s)}(x)\right| \le M d^{|s|}(x)$$

для любого мультииндекса s *такого, что* $|s| \le m_0$. *Тогда при* $\lambda \ge \lambda_0$, *где* λ_0 *– такое же число, как в теореме 1, для любого заданного элемента* $F \in \left(V_{2;\alpha+m}^{r-m}(R^n)\right)'$, *где целое число* m *такое, что* $0 \le m \le m_0$, *существует решение* $u(x)$ *задачи* D_λ*; оно принадлежит пространству* $V_{2,\alpha-m}^{r+m}(R^n)$, *и имеет место неравенство*

$$\left\|u;\, V_{2,\alpha-m}^{r+m}(R^n)\right\| \le M \left\|F;\, \left(V_{2;\alpha+m}^{r-m}(R^n)\right)'\right\|,$$

где число $M > 0$ *не зависит от* $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$ *и функционала* F.

Во втором параграфе приводятся некоторые известные вспомогательные леммы и теоремы, которые в последующих параграфах применяются в процессе доказательства основных результатов работы. Во всех работах, где изучались дифференциальные операторы, ассоциированные с некоэрцитивными полуторалинейными формами в ограниченной области, всегда использовалось конечное разбиение единицы области. С помощью конечного разбиения единицы невозможно исследовать подобные дифференциальные операторы во всем пространстве. Поэтому мы используем специальное бесконечное разбиение единицы конечной кратности, которое построено в следующей лемме.

Лемма 0.1. *Пусть функция* $\gamma(x)$, $x \in R^n$, *такая же, как в теореме 0.1, и пусть* ν *– достаточно малое положительное число. Тогда существуют неотрицательные функции* $\varphi_m(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $\eta_m(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $m = 1, 2, \ldots,$ *такие, что:*

а) система функций $\left\{\varphi_m^2(x)\right\}_{m=1}^{\infty}$ *образует разбиение единицы пространства* R^n *с конечной кратностью, то есть*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m^2(x) \equiv 1,\; x \in R^n$$

и если $\chi_m(x)$ *– характеристическая функция* $\mathrm{supp}\,\varphi_m$*, то существует конечное число* Λ_n*, зависящее только от* n*, такое, что*

$$1 \le \sum_{m=1}^{\infty} \chi_m(x) \le \Lambda_n \quad \text{для всех } x \in R^n;$$

б) функция $\eta_m(x)$ *обращается в единицу в некоторой окрестности множества* $\mathrm{supp}\,\varphi_m$ *и* $0 \le \eta_m(x) \le 1$ *для всех* $x \in R^n$*;*

в) функции $\varphi_m(x)$*,* $\eta_m(x)$*,* $m = 1, 2, \ldots,$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\left|\varphi_m^{(k)}(x)\right| \le C_1\, d^{|k|}(x), \quad \left|\eta_m^{(k)}(x)\right| \le C_1\, d^{|k|}(x), \ |k| \le r, \tag{12}$$

положительные числа C_1, C_2 *не зависят от* m *и* r*;*

г) $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$ *для всех* $x, y \in \mathrm{supp}\,\eta_m\,(m = 1, 2, \ldots)$.

В **третьем параграфе** подробно доказывается сформулированная выше **теорема 0.1** о разрешимости однородной вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов во всем пространстве, ассоциированных с некоэрцитивными формами. Здесь однородность граничных условий задачи Дирихле понимается в том смысле, что решение исследуемой задачи ищется в функциональном пространстве, в котором плотен класс бесконечно дифференцируемых финитных функций.

В **четвертом параграфе** первой главы доказывается **теорема 0.2** о гладкости решения исследуемой вариационной задачи Дирихле.

Вторая глава диссертационной работы посвящена исследованию вариационной задачи Дирихле для одного класса эллиптических операторов высшего порядка во всем n-мерном евклидовом пространстве в случае **несогласованности вырождения коэффициентов на бесконечности**. Постановка исследуемой задачи связана с интегро-дифференциальной полуторалинейной формой, которая может не удовлетворять условию коэрцитивности. Вводится понятие старшей формы и в соответствии с поведением коэффициентов старших форм определяется основное весовое нормированное пространство, в котором ищется решение основной задачи работы. В первом параграфе сформулированы основные результаты второй главы.

Пусть r – натуральное число и J – некоторое подмножество множества $\{0, 1, \dots, r\}$, причем $r \in J$. Пусть α_j, $j \in J$, – вещественные числа. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L[u] = \sum_{|k|=|l|=j\in J} (-1)^j \left(d(x)^{2\alpha_j} a_{kl}(x) u^{(k)}(x)\right)^{(l)}, \tag{0.3}$$

который понимается в смысле теории распределений на R^n. Предполагается, что коэффициенты $a_{kl}(x)$, $x \in R^n$, являются ограниченными комплекснозначными функциями.

Определение 0.1. *Вырождение коэффициентов оператора (0.3) называется* **согласованным**, *если существует число α такое, что $\alpha_j = \alpha - j + r$ при всех $j \in J$. В противном случае оно называется* **несогласованным**.

Постановка вариационной задачи Дирихле для оператора (0.3) связана со следующей полуторалинейной формой

$$B[u,v] = \sum_{|k|=|l|=j\in J} \int d^{2\alpha_j}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx. \tag{0.4}$$

Форму (0.4) представим в виде

$$B[u,\, v] = \sum_{j\in J} B_j[u,\, v],\ B_j[u,\, v] = \sum_{|k|=|l|=j} \int d^{2\alpha_j}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx$$

и дадим следующее определение

Определение 0.2. *Форму $B_r[u,\, v]$ назовем* **старшей**. *Далее обозначим для удобства r через j_1. Другие старшие формы определим по индукции. Пусть уже указаны старшие формы $B_{j_1}[u,\, v], \dots, B_{j_{p-1}}[u,\, v]$*

$(j_1 > j_2 > \cdots > j_{p-1})$ *и пусть* j_p *наибольшее число из множества* J, *меньше* j_{p-1}, *для которого выполняется неравенство*

$$\alpha_{j_p} + j_p < \min_{1 \le h \le p-1} (\alpha_{j_h} + j_h).$$

Тогда форму $B_{j_p}[u,\, v]$ *также назовем* **старшей**. *Если же такого* j_p *не найдется, то* **старшими** *будем называть только формы* $B_{j_1}[u,\, v], \ldots, B_{j_{p-1}}[u,\, v]$, *при этом* $p-1$ *обозначим через* p, *то есть* p *– количество старших форм. Далее через* q *обозначим количество нестарших форм.*

Вводим пространство $\mathbb{H}_+$ комплекснозначных функций $u(x)$, $x \in R^n$, с конечной нормой

$$\|u;\, \mathbb{H}_+\| = \left\{ \sum_{h=1}^{p} \left\| u;\, V^{j_h}_{2;\alpha_{j_h}}(R^n) \right\|^2 \right\}^{1/2}.$$

Из свойства пространства $V^r_{2,\,\alpha}(R^n)$ (см., например, [4]) следует, что множество $C_0^\infty(R^n)$ плотно в пространстве $\mathbb{H}_+$ и

$$\|f;\, L_{2,\,\delta}(R^n)\| \le \|u;\, \mathbb{H}_+\| \quad \forall u \in \mathbb{H}_+.$$

Символом $\mathbb{H}_-$ обозначим пополнение пространства $L_{2,\,\delta}(R^n)$ по норме

$$\|f;\, \mathbb{H}_-\| = \sup \frac{|(f,\, u)_\delta|}{\|u;\, \mathbb{H}_+\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $u \in \mathbb{H}_+$. Элементы из $\mathbb{H}_-$ отождествляются с соответствующими антилинейными непрерывными функционалами над $\mathbb{H}_+$. Действие функционала $F \in \mathbb{H}_-$ на функцию $u \in \mathbb{H}_+$ будем обозначать символом $\langle F,\, v\rangle$.

Рассмотрим вариационную задачу Дирихле для оператора (0.3).

Задача $\mathbb{D}_\lambda$**.** Для заданного функционала $F \in \mathbb{H}_-$ требуется найти решение $u(x)$ уравнения

$$B[u,\, v] + \lambda(u,\, v)_\delta = < F,\, v > \quad \forall v \in C_0^\infty(R^n), \tag{0.5}$$

принадлежащего пространству $\mathbb{H}_+$.

Теорема 0.3. *Пусть для каждого* $h \in \{1, \ldots, p\}$ *найдутся числа* $\varphi_h \in (o, \pi)$, $M > 0$ *и отличная от нуля комплекснозначная всюду непрерывная функция* $\gamma_h(x)$, $x \in R^n$, *такие, что для всех* $x \in R^n$, $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k| \le r} \subset \mathbb{C}$ *выполняются следующие неравенства:*

$$|arg\, A_h(x, \zeta)| < \varphi_h,$$

$$\sum_{|k|=j_h} |\zeta_k|^2 \le M Re \left\{\gamma_h(x) A_h(x, \zeta)\right\}.$$

Пусть для любого числа $\nu > 0$ *существует число* $R_\nu > 0$ *такое, что* $|\gamma_h(x) - \gamma_h(y)| < \nu$ *для любого* $h = \overline{1, p}$ *и всех* $x, y \in R^n$ *таких, что* $|x| > R_\nu$, $|y| > R_\nu$.

Тогда существует число $\lambda_0 \ge 0$ *такое, что если* $\lambda \ge \lambda_0$, *то для любого заданного функционала* $F \in \mathbb{H}_-$ *задача* $\mathbb{D}_\lambda$ *имеет единственное решение, и при этом справедлива оценка*

$$\|u;\, \mathbb{H}_+\| \le M_0 \|F;\, \mathbb{H}_-\|,$$

где число $M_0 > 0$ *не зависит от* $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$ *и функционала* F.

Далее исследуем гладкость решения задачи $\mathbb{D}_\lambda$ в зависимости от гладкости коэффициентов $a_{kl}(x)$ эллиптического оператора (0.3) и правой части F уравнения (0.5). Для этого сначала определим соответствующие функциональные пространства.

Пусть s – целое неотрицательное число. Вводим пространство $\mathbb{H}^s_+$ комплекснозначных функций $u(x)$, $x \in R^n$, с конечной нормой

$$\|u;\, \mathbb{H}^s_+\| = \left\{ \sum_{h=1}^{p} \left\| u;\, V^{j_h+s}_{2;\alpha_{j_h}-s}(R^n) \right\|^2 \right\}^{1/2}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\|f;\, L_{2,\delta}(R^n)\| \le \|u;\, \mathbb{H}^s_+\| \quad \forall u \in \mathbb{H}_+,$$

для любого целого неотрицательного числа s. Следовательно $\mathbb{H}^s_+$ вложено в $L_{2,\delta}(R^n)$.

Символом $\mathbb{H}_-^{-s}$ обозначим пополнение пространства $L_{2,\,\delta}(R^n)$ по норме

$$\left\|f;\,\mathbb{H}_-^{-s}\right\| = \sup\frac{|(f,\,u)_\delta|}{\|u;\,\mathbb{H}_+^s\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $u\in\mathbb{H}_+^s$. Элементы из $\mathbb{H}_-^{-s}$ отождествляются с соответствующими антилинейными непрерывными функционалами над $\mathbb{H}_+^s$.

Замечание 0.1. *Из определений пространств $\mathbb{H}_+$, $\mathbb{H}_-$ $\mathbb{H}_+^s$ и $\mathbb{H}_-^{-s}$ следует, что пространства $\mathbb{H}_+^s$, $\mathbb{H}_-^{-s}$ при $s=0$ совпадают с $\mathbb{H}_+$, $\mathbb{H}_-$, соответственно, то есть $\mathbb{H}_+^0=\mathbb{H}_+$, $\mathbb{H}_-^0=\mathbb{H}_-$.*

Теорема 0.4. *При всех целых $s\geq 0$ и вещественных α_{j_h}, $h=\overline{1,\,p}$, множество $C_0^\infty(R^n)$ плотно в пространстве $\mathbb{H}_+^s$ и имеют место следующие вложения: $\mathbb{H}_+^s\to\mathbb{H}_+^0\to L_{2,\,\delta}(R^n)\to\mathbb{H}_-^0\to\mathbb{H}_-^{-s}$.*

Теорема 0.5. *Пусть выполнены все условия теоремы 3 и пусть существует натуральное число m_0 такое, что*

$$\left|a_{kl}^{(s)}(x)\right|\leq Md^{|s|}(x)$$

для любого мультииндекса s такого, что $|s|\leq m_0$.

Тогда существует число $\lambda_0\geq 0$ такое, что если $\lambda\geq\lambda_0$, то для любого заданного элемента $F\in\mathbb{H}_-^{-m}$, где целое число m такое, что $0\leq m\leq m_0$, существует решение $u(x)$ задачи $\mathbb{D}_\lambda$, оно принадлежит пространству $\mathbb{H}_+^m$ и имеет место неравенство

$$\|u;\,\mathbb{H}_+^m\|\leq M_0\left\|F;\,\mathbb{H}_-^{-m}\right\|,$$

где число $M_0>0$ не зависит от $\lambda\in[\lambda_0,\,+\infty)$ и функционала F.

В **заключении,** приведённом в конце диссертации, излагаются итоги приведённого исследования, даются рекомендации по использованию полученных результатов.

Глава 1

О разрешимости однородной вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов во всем пространстве, ассоциированных с некоэрцитивными формами

В этой главе, состоящей из четырех параграфов, исследуется разрешимость вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов во всем пространстве, ассоциированных с некоэрцитивными формами. В первом параграфе сформулированы основные результаты главы. Во втором параграфе проводятся некоторые известные вспомогательные леммы. В третьем параграфе подробно доказывается теорема 1.1.1 о разрешимости однородной вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов во всем пространстве, ассоциированных с некоэрцитивными формами. Здесь однородность граничных условий задачи Дирихле понимается в том смысле, что решение исследуемой задачи ищется в функциональном пространстве, в котором плотен класс бесконечно дифференцируемых финитных функций. В четвертом параграфе доказывается теорема 1.1.2 о гладкости решения исследуемой вариационной задачи Дирихле.

1.1. Основные обозначения и формулировка основных результатов

1. Пусть R^n – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$, $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1+k_2+\cdots+k_n$ – длина мультииндекса k. Обозначим через

$$u^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|}u(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}}$$

обобщенную в смысле С.Л.Соболева производную функции $u(x)$ мультииндекса k. Пусть r – натуральное, α, p – вещественные числа и $1 < p < \infty$. Символом $V^r_{p,\alpha}(R^n)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных во всем пространстве R^n, имеющих все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные порядка r с конечной нормой

$$\|u; V^r_{p;\,\alpha}(R^n)\| = \left\{\sum_{|k|=r}\int d^{p\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx + \int d^{p(\alpha+r)}(x)|u(x)|^p dx\right\}^{1/p}, \tag{1.1.1}$$

где $d(x) = (1+|x|^2)^{-1/2}$. Здесь и далее в этой работе все интегралы берутся по всему пространству R^n.

Пространство $V^r_{p,\alpha}(R^n)$ хорошо изучено в монографии [58]. Оно является частным случаем пространства $V^r_p(\Omega; \sigma,\, \delta)$, введенного и изученного в работах [20], [4]. Согласно результатам этих работ для любого натурального числа r и вещественных чисел $\alpha,\ p$, причем $1 < p < \infty$, множество $C_0^\infty(R^n)$ (множество бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в R^n) плотно в пространстве $V^r_{p;\,\alpha}(R^n)$, и для любого мультииндекса $k:\ |k| \le r$ и всех $u \in V^r_{p;\,\alpha}(R^n)$ выполняется неравенство

$$\left\{\int \left(d^{\alpha+r-|k|}(x)\left|u^{(k)}(x)\right|\right)^p dx\right\}^{1/p} \le M_0\left\|u;\, V^r_{p,\alpha}(R^n)\right\|, \tag{1.1.2}$$

где число $M_0 > 0$ не зависит от $u(x)$.

Символом $V^{-r}_{q,-\alpha}(R^n)$, где $q = p/(p-1)$, обозначим пространство антилинейных непрерывных функционалов F над пространством $V^r_{p,\alpha}(R^n)$ с нормой

$$\left\|F;\, V^{-r}_{q,-\alpha}(R^n)\right\| = \sup_{v\neq 0} \frac{|< F,\, v >|}{\left\|v;\, V^r_{p,\alpha}(R^n)\right\|},$$

где символ $< F,\, v >$ обозначает действие функционала $F \in V^{-r}_{q,-\alpha}(R^n)$ на функцию $v(x)$.

Пусть δ – некоторое вещественное число. Вводим весовое пространство $L_{p,\,\delta}(R^n)$ с конечной нормой

$$\|u;\, L_{p,\,\delta}(R^n)\| = \left\{\int \left(d^{\delta}(x)\,|u(x)|\right)^p dx\right\}^{1/p}.$$

Пространство $L_{p,\,\delta}(R^n)$ при $p = 2$ является гильбертовым пространством, и определим скалярное произведение в пространстве $L_{2,\,\delta}(R^n)$ равенством

$$(u,\, v)_\delta = \int d^{2\delta}(x) u(x)\overline{v(x)} dx.$$

Заметим, что

$$\left|\int d^{2\alpha+2r}(x) f(x)\overline{v(x)} dx.\right| \leq \|f;\, L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\|\, \|v;\, L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\| \leq$$

$$\leq \|f;\, L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\| \left\|v;\, V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right\|$$

для всех $f \in L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$ и всех $v \in V^r_{2,\,\alpha}(R^n)$. Это позволяет нам определить пространство $\left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)'$ – пополнение пространства $L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$ по норме

$$\left\|f;\, \left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)'\right\| = \sup \frac{|(f,\, v)_{\alpha+r}|}{\left\|v;\, V^r_{2,\alpha}(R^n)\right\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $v(x) \in V^r_{2,\,\alpha}(R^n)$.

2. На функциях $u,\, v \in C^\infty_0(R^n)$ рассмотрим интегро-дифференциальную полуторалинейную форму

$$B[u,v] = \sum_{|k|,|l|\leq r} \int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)} dx, \qquad (1.1.3)$$

коэффициенты $a_{kl}(x)$ которой являются ограниченными комплекснозначными функциями. Здесь и далее все интегралы берутся по всему пространству R^n.

Наряду с формой (1.1.3) вводим следующую функцию:

$$A(x,\,\zeta) = \sum_{|k|,|l|\le r} a_{kl}(x)\zeta_k\overline{\zeta_l}, \tag{1.1.4}$$

определенную для всех $x \in R^n$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\le r}$.

Предположим, что для всех $x \in R^n$, $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\le r} \subset \mathbb{C}$ выполнены условия

$$|\mathrm{arg} A(x,\,\zeta)| < \varphi, \tag{1.1.5}$$

$$\sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \le M\mathrm{Re}\left\{\gamma(x)A(x,\,\zeta)\right\}, \tag{1.1.6}$$

где φ – некоторое число из интервала $(0,\,\pi)$, отличная от нуля комплекснозначная функция $\gamma(x)$ всюду непрерывна, и для любого числа $\nu > 0$ существует число $R_\nu > 0$ такое, что

$$|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu \tag{1.1.7}$$

для всех $x,\,y \in R^n$ таких, что $|x| > R_\nu$, $|y| > R_\nu$.

Здесь и далее считается, что функция $\mathrm{arg} z$ принимает значения на полуинтервале $(-\pi,\,\pi]$.

Задача D_λ. Для заданного функционала $F \in \left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)'$ требуется найти решение $u(x)$ уравнения

$$B[u,\,v] + \lambda \int d^{2(\alpha+r)}(x)u(x)\overline{v(x)}dx =< F,\,v > \quad \forall v \in C_0^\infty(R^n), \tag{1.1.8}$$

принадлежащее пространству $V^r_{2,\alpha}(R^n)$.

Теорема 1.1.1. *Пусть выполнены все сформулированные выше условия. Тогда существует число $\lambda_0 \ge 0$ такое, что если $\lambda \ge \lambda_0$, то для* *любого заданного функционала* $F \in \left(V^r_{2,\alpha}(R^n)\right)'$ *задача* D_λ *имеет единственное решение и при этом справедлива оценка*

$$\left\|u;\, V^r_{2,\alpha}(R^n)\right\| \le M \left\|F;\, \left(V^r_{2,\alpha}(R^n)\right)'\right\|, \tag{1.1.9}$$

где число $M > 0$ *не зависит от* $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$ *и функционала* F.

Если коэффициенты формы (1.1.3) обладают более хорошими свойствами гладкости, то можно исследовать гладкость решения задачи D_λ.

Теорема 1.1.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.1.1. Пусть также существует натуральное число* m_0 *такое, что*

$$\left|a^{(s)}_{kl}(x)\right| \le M d^{|s|}(x)$$

для любого мультииндекса s *такого, что* $|s| \le m_0$. *Тогда при* $\lambda \ge \lambda_0$, *где* λ_0 *– такое же число, как в теореме 1.1.1, для любого заданного элемента* $F \in \left(V^{r-m}_{2;\alpha+m}(R^n)\right)'$, *где целое число* m *такое, что* $0 \le m \le m_0$, *существует решение* $u(x)$ *задачи* D_λ, *оно принадлежит пространству* $V^{r+m}_{2,\alpha-m}(R^n)$ *и имеет место неравенство*

$$\left\|u;\, V^{r+m}_{2,\alpha-m}(R^n)\right\| \le M \left\|F;\, \left(V^{r-m}_{2;\alpha+m}(R^n)\right)'\right\|, \tag{1.1.10}$$

где число $M > 0$ *не зависит от* $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$ *и функционала* F.

Доказательство теоремы 1.1.2 рассмотрено в четвертом параграфе.

1.2. Вспомогательные леммы и теоремы

1. В работах, где изучались дифференциальные операторы, ассоциированные с некоэрцитивными полуторалинейными формами в ограниченной области, всегда использовалось конечное разбиение единицы области. С помощью конечного разбиения единицы невозможно исследовать подобные дифференциальные операторы во всем пространстве. Поэтому мы используем специальное бесконечное разбиение единицы конечной кратности, которое построено в следующей лемме.

Лемма 1.2.1. *Пусть функция* $\gamma(x)$, $x \in R^n$, *такая же, как в предыдущем параграфе, и пусть* ν *– достаточно малое положительное число. Тогда существуют неотрицательные функции* $\varphi_m(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $\eta_m(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $m = 1, 2, \ldots$, *такие, что:*

а) система функций $\left\{\varphi_m^2(x)\right\}_{m=1}^{\infty}$ *образует разбиение единицы пространства* R^n *с конечной кратностью, то есть*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m^2(x) \equiv 1,\ x \in R^n, \tag{1.2.1}$$

и если $\chi_m(x)$ *– характеристическая функция множества* $supp\,\varphi_m$, *то существует конечное число* Λ_n, *зависящее только от* n, *такое, что*

$$1 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \chi_m(x) \leq \Lambda_n \quad \text{для всех } x \in R^n; \tag{1.2.2}$$

б) функция $\eta_m(x)$ *обращается в единицу в некоторой окрестности множества* $supp\,\varphi_m(x)$ *и* $0 \leq \eta_m \leq 1$ *для всех* $x \in R^n$;

в) производные функции $\varphi_m(x)$, $\eta_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, *удовлетворяют следующим неравенствам*

$$\left|\varphi_m^{(k)}(x)\right| \leq C_1\, d^{|k|}(x), \quad \left|\eta_m^{(k)}(x)\right| \leq C_1\, d^{|k|}(x),\ |k| \leq r, \tag{1.2.3}$$

положительные числа C_1, C_2 *не зависят от* m *и* r;

г) $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$ *для всех* $x, y \in supp\,\eta_m\, (m = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Существование неотрицательных функций $\varphi_m(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $\eta_m(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $m = 1, 2, \ldots$, обладающих свойствами а) – в) следует из леммы 2.1 работы [11]. Так как отличная от нуля комплекснозначная функция $\gamma(x)$ всюду непрерывна, и для любого числа $\nu > 0$ существует число $R_\nu > 0$ такое, что (см. (1.1.7))

$$|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$$

для всех $x, y \in R^n$ таких, что $|x| > R_\nu$, $|y| > R_\nu$, то утверждение п. г) леммы 1.2.1 может не выполняться для конечного числа индексов m. В этом случае представляя функций $\varphi_m(x)$, $\eta_m(x)$ (для тех индексов m, для которых не выполняется утверждение п. г) леммы 1.2.1) в виде суммы конечного числа подобных функций можно добиться того, что утверждение п. г) леммы 1.2.1 будет выполняться при всех $m = 1,\, 2,\, \ldots$.

Обозначим через $\|T\|$ норму непрерывного оператора $T : L_2(R^n) \to L_2(R^n)$. Далее при оценке норм вспомогательных операторов, мы часто будем пользоваться следующей леммой.

Лемма 1.2.2. *(см. [11, лемма 2.2]) Пусть оператор* $T : L_2(R^n) \to L_2(R^n)$ *имеет вид*

$$T = \sum_{m=1}^{\infty} \chi_m T_m \chi_m,$$

где χ_m $(m = 1, 2, \ldots)$ *– характеристическая функция множества* $supp\, \varphi_m$, *а* $T_1,\, T_2,\, \ldots$ *– последовательность непрерывных операторов в* $L_2(R^n)$ *таких, что*

$$\Lambda = \sup_{m=1,\,2,\ldots} \|T_m\| < +\infty.$$

Тогда T *– ограниченный оператор и выполняется неравенство*

$$\|T\| \le \Lambda_n^{1/2} \Lambda,$$

где Λ_n *– кратность разбиения единицы* $\left\{\varphi_m^2\right\}_{m=1}^{\infty}$ *пространства* R^n.

2. Сформулируем основные свойства пространства $V^r_{p,\alpha}(R^n)$, которые следуют из соответствующих результатов работ [4, 20].

Теорема 1.2.1. *При всех* $r \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (-\infty,\, +\infty)$, $p \in (1,\, +\infty)$ *справедливы следующие утверждения:*

1) множество $C_0^{\infty}(\Omega)$ *плотно в пространстве* $V^r_{p,\alpha}(R^n)$;

2) норма (1.1.1) пространства $V^r_{p,\alpha}(R^n)$ *эквивалентна следующей величине*

$$\|u; V^r_{p;\,\alpha}(R^n)\|_* = \left\{ \sum_{|k|=r} \int d^{p\alpha}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx + \int d^{p\alpha}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx \right\}^{1/p};$$

3) для любого натурального числа m имеют место вложения

$$V^{r+m}_{p;\,\alpha-m}(R^n) \to V^r_{p;\,\alpha}(R^n), \quad V^{-r+m}_{q,-\alpha-m}(R^n) \to V^{-r}_{q,-\alpha}(R^n).$$

4) Пусть $n/p-\alpha \notin \{1,\, 2,\, \ldots, r\}$. Тогда справедливо равенство

$$\mathring{W}^r_{p,\alpha}(R^n) = V^r_{p,\alpha}(R^n). \tag{1.2.4}$$

3. Далее сформулируем некоторые утверждения о свойствах секториальных форм и операторов в гильбертовом пространстве.

Лемма 1.2.3. *(см. [34, гл. 6, теорема 2.1]) Пусть $\mathbf{H}$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}}$ и пусть $t[u,v]$ – плотно определенная замкнутая секториальная полуторалинейная форма в $\mathbf{H}$. Тогда существует m – секториальный оператор T такой, что*

i) $D(T) \subset D(t)$ и $t[u,v] = (Tu,v)_{\mathbf{H}}$ для всех $u \in D(T)$ и $v \in D(t)$;

ii) $D(T)$ является ядром формы t;

iii) если $u \in D(t)$, $w \in \mathbf{H}$ и равенство $t[u,v] = (w,v)_{\mathbf{H}}$ справедливо для всех v, принадлежащих ядру формы t, то $u \in D(T)$ и $Tu = w$.

Условие i) определяет m – секториальный оператор T однозначно.

Лемма 1.2.4. *(см. [34, гл. 6, теорема 3.2]) Пусть T есть m-секториальный оператор с вершиной 0 и полууглом θ. Тогда оператор $H = \mathrm{Re}T$ неотрицателен, и существует симметричный оператор $B \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$ такой, что $\|B\| \le \tan\theta$ и*

$$T = G(1+iB)G, \quad G = H^{1/2}.$$

Здесь $\mathscr{B}(\mathbf{H})$ – пространство ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$.

Следующая лемма является частным случаем леммы 7.1 из [18, гл.V].

Лемма 1.2.5. *Пусть H - положительный самосопряженный оператор и $\mathbb{T}$ - вполне непрерывный оператор. Тогда равномерно выполняется соотношение*

$$\lim_{\mu\to\infty} \|\mathbb{T}(E+\mu H)\| = 0.$$

3. Теорема Лакса-Мильграма о представлении билинейной формы и различные ее обобщения играют важную роль в процессе исследования разрешимости граничных задач для уравнений с частными производными методами функционального анализа. Ниже мы приведем одно такое обобщение, которое сформулировано в работе [52].

Рассмотрим гильбертовы пространства $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{H}_+$ со скалярными произведениями $(\cdot,\,\cdot)_0$, $(\cdot,\,\cdot)_+$ и нормами $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_+$, соответственно. Предположим, что пространство $\mathbf{H}_+$, плотно вложено в $\mathbf{H}_0$, и для любого $u \in \mathbf{H}_+$ выполняется неравенство

$$\|u\|_0 \le \|u\|_+.$$

Это неравенство означает нормальность вложения $\mathbf{H}_+ \to \mathbf{H}_0$. Отметим, что любое ограниченное вложение сводится к нормальному вложению путем введения новой эквивалентной нормы.

В пространстве $\mathbf{H}_0$ введем новую норму

$$\|f\|_- = \sup_{0\ne u\in\mathbf{H}_+} \frac{(f,\,u)_0}{\|u\|_+}, \quad f \in \mathbf{H}_0$$

и символом $\mathbf{H}_-$ обозначим пополнения пространства $\mathbf{H}_0$ по этой норме. Тройку плотно вложенных пространств $\mathbf{H}_+ \to \mathbf{H}_0 \to \mathbf{H}_-$ называют оснащенным гильбертовым пространством. При этом, пространство $\mathbf{H}_+$ называется позитивным пространством, а $\mathbf{H}_-$ – негативным пространством.

Пусть $\mathbf{D}$ – некоторое линейное множество элементов пространства $\mathbf{H}_+$, плотное в $\mathbf{H}_0$ (отметим, что плотность $\mathbf{D}$ в $\mathbf{H}_+$ не предполагается). Символом $\mathring{\mathbf{H}}_+$ обозначим замыкание множества $\mathbf{D}$ в норме пространства $\mathbf{H}_+$, а символом $\mathring{\mathbf{H}}_-$ – отвечающее ему негативное пространство.

Пусть $\mathbb{B}[u,\,v]$ – заданная в $\mathbf{D}$ полуторалинейная форма. Предположим, что форма $\mathbb{B}[u,\,v]$ удовлетворяет условиям:

1. существует положительное число C такое, что
$$|\mathbb{B}[u,\,v]| \le C\|u\|_+\|v\|_+ \quad \forall u,\,v \in \mathbf{D} = D(B); \tag{1.2.5}$$

2. найдутся, числа $\lambda_0 \in R$ и $\delta > 0$ такие, что
$$\mathrm{Re}\left\{\mathbb{B}[u,\,v] + \lambda_0\|u\|_0^2\right\} \ge \delta\|u\|_+^2 \tag{1.2.6}$$
для всех $u \in \mathring{\mathbf{H}}_+$

Следующая теорема является обобщением теоремы Лакса-Мильграма.

Теорема 1.2.2. *Пусть форма $\mathbb{B}[u,\,v]$ удовлетворяет условиям (1.2.5) и (1.2.6). Тогда*

1. *существует линейный оператор Λ, осуществляющий гомеоморфизм пространств $\mathring{\mathbf{H}}_+$ и $\mathring{\mathbf{H}}_-$ и такой, что*
$$\langle \Lambda u,\,v\rangle \equiv \mathbb{B}[u,\,v] + \lambda_0(u,\,v)_0 \quad \forall u,\,v \in \mathring{\mathbf{H}}_+,$$
где символом $\langle f,\,v\rangle$ обозначено действие функционала f на элемент v;

2. *всякий антилинейный непрерывный функционал $l(v)$ над $\mathring{\mathbf{H}}_+$ допускает представление*
$$l(v) = \mathbb{B}[u,\,v] + \lambda_0(u,\,v)_0 = \langle \Lambda u_0,\,v\rangle,$$
причем такое представление единственно.

Для изучения фредгольмовой разрешимости вариационных задач наряду с формой $\mathbb{B}[u,\,v]$ также нужно рассмотреть форму $\mathbb{B}^+[u,\,v] = \overline{\mathbb{B}[v,\,u]}$, определенную на $D(\mathbb{B}^+) = D(\mathbb{B})$. Очевидно, форма

$\mathbb{B}^+[u,\,v]$ также удовлетворяет условиям (1.2.5), (1.2.6) с теми же постоянными C, λ_0, δ.

Рассмотрим вариационную задачу, связанную с формой $\mathbb{B}[u,\,v]$: для заданного элемента $F \in \mathring{\mathbf{H}}_-$ требуется найти элемент u, удовлетворяющий условиям

$$\mathbb{B}[u,\,w] + \lambda(u,\,w)_0 = \langle F,\,w\rangle \quad \forall w \in \mathring{\mathbf{H}}_+,\ u \in \mathring{\mathbf{H}}_+. \tag{1.2.7}$$

Наряду с задачей (1.2.7) рассмотрим отвечающие ей однородную и формально сопряженные задачи:

$$\mathbb{B}^+[v,\,w] + \overline{\lambda}(v,\,w)_0 = \langle G,\,w\rangle \quad \forall w \in \mathring{\mathbf{H}}_+,\ v \in \mathring{\mathbf{H}}_+; \tag{1.2.8}$$

$$\mathbb{B}[u,\,w] + \lambda(u,\,w)_0 = 0 \quad \forall w \in \mathring{\mathbf{H}}_+,\ u \in \mathring{\mathbf{H}}_+; \tag{1.2.9}$$

$$\mathbb{B}^+[v,\,w] + \overline{\lambda}(v,\,w)_0 = 0 \quad \forall w \in \mathring{\mathbf{H}}_+,\ v \in \mathring{\mathbf{H}}_+. \tag{1.2.10}$$

Здесь G – заданный элемент пространства $\mathring{\mathbf{H}}_-$.

Теорема 1.2.3. *Пусть форма $\mathbb{B}[u,\,v]$ удовлетворяет условиям (1.2.5) и (1.2.6), и пусть вложение $\mathring{\mathbf{H}}_+$ в $\mathbf{H}_0$ компактно. Тогда задача (1.2.7) – (1.2.10) фредгольмова, а именно:*

- а) *задача (1.2.7) разрешима для тех и только тех $F \in \mathring{\mathbf{H}}_-$, для которых $\langle F,\,v\rangle \equiv 0$ на всех v, являющихся решениями задачи (1.2.10);*
- б) *размерности пространств решений задач (1.2.9) и (1.2.10) равны;*
- в) *задача (1.2.9) имеет отличные от нуля решения только для счетного числа значений параметра $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots$, причем $|\lambda_j| \to \infty$ при $j \to \infty$;*
- г) *сопряженная задача (1.2.10) разрешима для тех и только тех значений параметра λ, что и задача (1.2.9).*

Если в условиях теоремы 1.2.2 форма $\mathbb{B}[u,\, v]$ является самосопряженной, т.е. $\mathbb{B}[u,\, v] = \overline{\mathbb{B}[v,\, u]}$, то можно уточнить поведение собственных чисел задачи (1.2.7). В этом случае справедлива следующая асимптотическая формула (см., например,[50])

$$\lambda_J \sim (s_j(\mathbb{O}))^{-2}, \tag{1.2.11}$$

где $\mathbb{O}$ – оператор вложения пространства $\mathring{\mathbf{H}}_+$ в $\mathbf{H}_0$ и $s_j(\mathbb{O})$ – s-числа оператора $\mathbb{O}$.

1.3. Доказательство теоремы 1.1.1

Доказательство теоремы 1.1.1 проводится в несколько этапов.

1. Пусть ν – достаточно малое положительное число, и пусть $\varphi_m(x)$, $\eta_m(x)$ $(m = 1,\, 2\, 3,\, \ldots)$ – такие же неотрицательные функции, как в лемме 1.2.1.

В каждом множестве $\operatorname{supp}\varphi_m\, (m = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots)$ фиксируем точку x_m и рассмотрим полуторалинейную форму

$$B^{(0)}_{\lambda;m}[u,v] = \sum_{|k|,|l|\le r} \int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x) a^{(0)}_{klm}(x) u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx+$$

$$+\lambda \int d^{2(\alpha+r)}(x)u(x)\overline{v(x)}dx, \tag{1.3.1}$$

где

$$a^{(0)}_{klm}(x) = (1-\eta_m(x))\gamma(x_m)a_{kl}(x_m) + \eta_m(x)\gamma(x)a_{kl}(x). \tag{1.3.2}$$

Из ограниченности коэффициентов $a_{kl}(x)$, $|k|, |l| \le r$, следует ограниченность коэффициентов $a^{(0)}_{klm}(x)$. Поэтому применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$\left|B^{(0)}_{\lambda;m}[u,v]\right| \le M_0 \int \sum_{|k|,|l|\le r} d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x) \left|u^{(k)}(x)\right| \left|v^{(l)}(x)\right| dx+$$

$$+|\lambda| \int d^{2(\alpha+r)} |u(x)||v(x)| dx \le$$

$$\le M_0 \left\{ \sum_{|k|\le r} \int \left(d^{\alpha+r-|k|}(x) \left| u^{(k)}(x) \right| \right)^2 dx \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{|l|\le r} \int \left(d^{\alpha+r-|l|}(x) \left| v^{(l)}(x) \right| \right)^2 dx \right\}^{1/2} +$$

$$+|\lambda| \left\{ \int d^{2(\alpha+r)} |u(x)| dx \right\}^{1/2} \left\{ \int d^{2(\alpha+r)} |v(x)| dx \right\}^{1/2} \le$$

$$\le (M_0 + |\lambda|) \|u; V^r_{2;\alpha}(R^n)\| \cdot \|v; V^r_{2;\alpha}(R^n)\| \tag{1.3.3}$$

для всех $u, v \in V^r_{2,\alpha}(R^n)$.

Из условия (1.1.6) следует, что

$$\mathrm{Re} \left\{ \gamma(x_m) \sum_{|k|,|l|\le r} a_{kl}(x_m) \zeta_i \overline{\zeta_j} \right\} \ge c \sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2,$$

$$\mathrm{Re} \left\{ \gamma(x) \sum_{|k|,|l|\le r} a_{kl}(x) \zeta_i \overline{\zeta_j} \right\} \ge c \sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2$$

для всех $m = 1, 2, 3, \ldots$, $x \in R^n$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\le r} \subset \mathbb{C}$. В силу этих неравенств из (1.3.2) следует, что

$$\mathrm{Re} \left\{ \sum_{|k|,|l|\le r} a^{(0)}_{kl}(x)(x) \zeta_i \overline{\zeta_j} \right\} \ge c \sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2$$

для всех $m = 1, 2, 3, \ldots$, $x \in R^n$, $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\le r} \subset \mathbb{C}$.

Подставляя в этом неравенстве $\zeta_k = d^{\alpha+r-|k|}(x) u^{(k)}(x)$ после интегрирования по R^n получим: существует число $\lambda_0 \ge 0$ такое, что при $\lambda \ge \lambda_0$

$$\mathrm{Re}\, B^{(0)}_{\lambda;m}[u, u] \ge C_0 \|u; V^r_{2;\alpha}(R^n)\|^2 \tag{1.3.4}$$

для всех $m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\quad u \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$.

2. Теперь рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,v] = \sum_{|k|,|l|\le r} \int d^{2\alpha+r-|k|-|l|}(x)\widehat{a}_{klm}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx+$$

$$+\lambda \int d^{2(\alpha+r)}u(x)\overline{v(x)}dx,$$

где

$$\widehat{a}_{klm}(x) = [(1-\eta_m(x))a_{kl}(x_m) + \eta_m(x)a_{kl}(x)]\gamma(x_m).$$

Так как

$$a^{(0)}_{klm}(x) - \widehat{a}_{klm}(x) = \eta_m(x)(\gamma(x) - \gamma(x_m))a_{kl}(x)$$

и коэффициенты $a_{kl}(x)$ ограничены, то действуя так же, как в доказательстве неравенства (1.3.3), с помощью неравенства Коши-Буняковского получим

$$|B^{(0)}_{\lambda;m}[u,v] - \mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,v]| \le M\,\Lambda\,\|u; V^r_{2;\alpha}(R^n)\| \cdot \|v; V^r_{2;\alpha}(R^n)\|$$

для всех $u, v \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$. Здесь $\Lambda = \sup|\eta_m(x)(\gamma_m(x) - \gamma(x_m))|$, где супремум берется по всем $x \in R_n$ и всем $m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Применяя это неравенство из (1.3.4) находим

$$C_0\|u; V^r_{2;\alpha}(R^n)\|^2 \le \mathrm{Re}\left(B^{(0)}_{\lambda;m}[u,u] - \mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,u]\right) + \mathrm{Re}\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,u] \le$$
$$\le \mathrm{Re}\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,u] + M\,\Lambda\,\|u; V^r_{2;\alpha}(R^n)\|^2. \quad (1.3.5)$$

Так как

$$|\eta_m(x)(\gamma(x) - \gamma(x_m))| < \nu, \qquad m = 1,\ 2, \ldots,$$

и ν – достаточно малое положительное число, то из (1.3.5) следует, что

$$c_0\|u; V^r_{2;\alpha}(R^n)\|^2 \le \mathrm{Re}\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,u] \qquad (1.3.6)$$

для всех $u \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$. Здесь $\lambda \ge \lambda_0$ и λ_0 – такое же положительное число, как в (1.3.4).

3. Вводим следующую полуторалинейную форму

$$\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v] = \sum_{|k|,|l|\le r} \int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x) a_{klm}(x) u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx+$$

$$+\lambda \int d^{2(\alpha+r)}(x)u(x)\overline{v(x)}dx, \qquad (1.3.7)$$

где

$$a_{klm}(x) = (1-\eta_m(x))a_{kl}(x_m) + \eta_m(x)a_{kl}(x).$$

Заметим, что

$$\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,v] = \gamma(x_m)\mathcal{B}_{\lambda_m;m}[u,v],$$

где

$$\lambda_m = \lambda\gamma^{-1}(x_m)$$

Поэтому из неравенства (1.3.6) следует, что при достаточно больших λ

$$c_0\|u; V^r_{2;\alpha}(R^n)\|^2 \le \operatorname{Re}\{\gamma(x_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u]\} \qquad (1.3.8)$$

для всех $u \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$.

4. При доказательстве основных результатов настоящего параграфа (см. [10, пункт 2]), не нарушая общности, можно считать, что число φ в условии (1.1.5) такое, что $\varphi > \pi/2$. В силу (1.1.5) неравенство (1.1.6) будет выполняться также и в том случае, если $\gamma(x)$ заменить на $\exp(i\theta(x))$, где

$$\theta(x) = \min\{\varphi - \pi/2,\ |\arg\gamma(x)|\}\,(\operatorname{sign}\arg\gamma(x)).$$

Поэтому из неравенства (1.3.8) следует, что

$$c_0\|u; V^r_{2;\alpha}(R^n)\|^2 \le \operatorname{Re}\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u]\} \qquad (1.3.9)$$

для всех $u \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$. Здесь и далее

$$\theta_m = \theta(x_m), \qquad m = 1,\, 2, \ldots .$$

Поступая так же, как в доказательстве неравенства (1.3.3), находим

$$|\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v]| \le (M_0 + |\lambda|)\|u; V^r_{2;\alpha}(R^n)\| \cdot \|v; V^r_{2;\alpha}(R^n)\| \qquad (1.3.10)$$

для всех $u,\, v \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$.

Неравенства (1.3.9), (1.3.10) позволяют нам применить теорему Лакса-Мильграма (см. теорему 1.2.2 или [52, теорема 2.0.1]). Согласно этой теореме, при $\mathbf{H}_0 = L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$, $\mathring{\mathbf{H}}_+ = V^r_{2,\,\alpha}(R^n)$ и $\mathring{\mathbf{H}}_- = \big(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\big)'$ существует оператор $\widetilde{\mathcal{R}}_m(\lambda)$, осуществляющий гомеоморфизм пространств $V^r_{2,\,\alpha}(R^n)$ и $\big(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\big)'$ и такой, что

$$\Big\langle \widetilde{\mathcal{R}}_m(\lambda)u,\, v\Big\rangle = \exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v] \tag{1.3.11}$$

для всех $v \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$.

Обозначим

$$\mathcal{R}_m(\lambda) = \widetilde{\mathcal{R}}^{-1}_m(\lambda) : \big(V^r_{2;\alpha}(R^n)\big)' \to V^r_{2;\alpha}(R^n)$$

Тогда из равенства (1.3.11) следует, что

$$\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[\mathcal{R}_m(\lambda)F, v] = \langle F, v\rangle \tag{1.3.12}$$

для всех $F \in \big(V^r_{2;\alpha}(R^n)\big)'$ и всех $v \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$.

Оператор $\mathcal{R}_m(\lambda)$ является ограниченным и

$$\|\mathcal{R}_m(\lambda)F; V^r_{2;\alpha}(R^n)\| \le M_1 \left\|F; \big(V^r_{2;\alpha}(R^n)\big)'\right\| \tag{1.3.13}$$

для всех $F \in \big(V^r_{2;\alpha}(R^n)\big)'$. Здесь число M_1 не зависит от F и от λ, и $\lambda \ge \lambda_0$, число λ_0 – такое же, как в (1.3.4).

5. Символом Φ_m обозначим оператор умножения на функцию $\varphi_m(x)$ и введем оператор

$$\mathcal{R}(\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(i\theta_m)\Phi_m\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m, \tag{1.3.14}$$

который действует из $\big(V^r_{2;\alpha}(R^n)\big)'$ в $V^r_{2;\alpha}(R^n)$.

Так как коэффициенты $a_{kl}(x)$ $\;(|k|,\,|l| \le r)$ ограничены, то с помощью неравенства Коши-Буняковского доказывается, что

$$\left|\sum_{|k|,|l|\le r} \int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx\right| \le M_0\|u; V^r_{2;\alpha}(R^n)\|\cdot\|v; V^r_{2;\alpha}(R^n)\|$$

для всех $u,\, v \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$. Отсюда следует, что

$$|B_\lambda[u,\, v]| \le (M_0+\lambda)\|u; V^r_{2;\alpha}(R^n)\| \cdot \|v; V^r_{2;\alpha}(R^n)\|$$

для всех $u,\, v \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$. Следовательно, оператор $\mathbb{R}(\lambda)$, определенный равенством

$$\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle = B_\lambda[\mathcal{R}(\lambda)F, v] \quad (\forall v \in V^r_{2;\alpha}(R^n)), \tag{1.3.15}$$

действует из $\big(V^r_{2;\alpha}(R^n)\big)'$ в $\big(V^r_{2;\alpha}(R^n)\big)'$.

Согласно нашим построениям, функции $\varphi^2_m(x)$, $m = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$ образуют разбиение единицы R^n, то есть

$$\varphi^2_1(x) + \varphi^2_2(x) + \cdots + \varphi^2_N(x) + \cdots \equiv 1 \quad (x \in R^n).$$

Поэтому для всех $F \in L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$ и всех $v \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$ выполняются следующие равенства:

$$\langle F,\, v\rangle = (F,\, v)_{\alpha+r} = \int d^{2\alpha+2r}(x)F(x)\overline{v(x)}dx =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \int d^{2\alpha+2r}(x)\varphi^2_m(x)F(x)\overline{v(x)}dx = \sum_{m=1}^{\infty}(\varphi_m F,\, \varphi_m)_{\alpha+r}. \tag{1.3.16}$$

Здесь и далее символом $(\cdot,\cdot)_{\alpha+r}$ обозначено скалярное произведение в пространстве $L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$, и как прежде, все интегралы берутся по всему пространству R^n.

Так как

$$a_{klm}(x) = (1-\eta_m(x))a_{kl}(x_m) + \eta_m(x)a_{kl}(x),$$

и функция $\eta_m(x)$ обращается в единицу в некоторой окрестности множества $\operatorname{supp}\varphi_m$, то функции $a_{klm}(x)$ и $a_{kl}(x)$ на множестве $\operatorname{supp}\varphi_m$ совпадают. Поэтому из равенств (1.1.3), (1.3.14) и (1.3.15) следует, что

$$\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(i\theta_m)\times$$

$$\times \left\{ \sum_{|k|,|l|\le r} \int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x) a_{klm}(x) D^k(\varphi_m \mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx + \right.$$

$$\left. + \lambda \int d^{2\alpha+2r}(x)(\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\overline{\varphi_m(x)v(x)}dx \right\}. \quad (1.3.17)$$

Здесь и далее символ D^k – дифференцирование мультииндекса k.

Пусть $F \in L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$. В равенстве (1.3.12) заменим F на $\varphi_m F$, а v – на $\varphi_m v$:

$$\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F, \varphi_m v] = (\varphi_m F, \varphi_m v)_{\alpha+r}.$$

Отсюда с учетом равенства (1.3.7) следует, что

$$(\varphi_m F, \varphi_m v)_{\alpha+r} = \exp(i\theta_m)\times$$

$$\times \left\{ \sum_{|k|,|l|\le r} \int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x) a_{klm}(x) D^k\left((\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\right)\overline{D^l\left((\varphi_m(x)v(x)\right))}dx + \right.$$

$$\left. + \lambda \int d^{2(\alpha+r)}(x)(\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\overline{\varphi_m(x)v(x)}dx \right\}.$$

Суммируя это равенство по m от 1 до бесконечности, в силу равенств (1.3.16), имеем

$$\langle F,\, v\rangle = (F,\, v)_{\alpha+r} = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(i\theta_m)\times$$

$$\times \left\{ \sum_{|k|,|l|\le r} \int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x) a_{klm}(x) D^k\left((\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\right)\overline{D^l\left((\varphi_m(x)v(x)\right))}dx + \right.$$

$$\left. + \lambda \int d^{2(\alpha+r)}(x)(\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\overline{\varphi_m(x)v(x)}dx \right\}.$$

Отсюда и из (1.3.17) следует, что

$$\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle - \langle F,\, v\rangle = \sum_{m=1}^{\infty}\exp(i\theta_m)\times$$

$$\times\left\{\sum_{|k|,|l|\le r}\int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x)a_{klm}(x)D^k\left((\varphi_m\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\right)\overline{v^{(l)}(x)}dx+\right.$$

$$\left.+\,\lambda\int d^{2\alpha+2r}(x)(\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\overline{\varphi_m(x)v(x)}dx\right\}-\sum_{m=1}^{\infty}\exp(i\theta_m)\times$$

$$\times\left\{\sum_{|k|,|l|\le r}\int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x)a_{klm}(x)D^k\left((\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\right)\overline{D^l\left((\varphi_m(x)v(x))\right)}dx+\right.$$

$$\left.+\,\lambda\int d^{2(\alpha+r)}(x)(\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\overline{\varphi_m(x)v(x)}dx\right\}=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\exp(i\theta_m)\left\{\sum_{|k|,|l|\le r}\int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x)a_{klm}(x)\times\right.$$

$$\times\left\{D^k\left((\varphi_m\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\right)\overline{v^{(l)}(x)}-\right.$$

$$\left.\left.-D^k\left((\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\right)\overline{D^l\left((\varphi_m(x)v(x))\right)}\right\}dx\right\}. \quad (1.3.18)$$

Вводим обозначение

$$U_{m,\lambda}(x) = (\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x), \quad m = 1,\, 2,\, \ldots. \quad (1.3.19)$$

Тогда в силу равенства (1.3.18) имеем

$$\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle - \langle F,\, v\rangle = \mathbb{K}_\lambda[F,\, v] + \mathbb{L}_\lambda[F,\, v], \quad (1.3.20)$$

где

$$\mathbb{K}_\lambda[F,\, v] =$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\exp(i\theta_m)\sum\nolimits^{(1)} C_{k'}^{k''}\int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x)a_{klm}(x)\varphi_m^{(k')}(x)U_{m,\lambda}^{(k'')}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx, \quad (1.3.21)$$

$$\mathbb{L}_\lambda[F,\, v] =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \exp(i\theta_m) \sum\nolimits^{(2)} C_{l'}^{l''} \int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x) a_{klm}(x) U_{m,\lambda}^{(k)}(x) \overline{\varphi_m^{(l')}(x) v^{(l'')}(x)} dx. \tag{1.3.22}$$

Здесь символ $\sum^{(1)}$ обозначает суммирование по мультииндексам $k,\, l,\, k',\, k''$ таким, что $k = k' + k'',\, k' \neq 0,\, |k|,\, |l| \leq r$, а символ $\sum^{(2)}$ обозначает суммирование по мультииндексам $k,\, l,\, l',\, l''$ таким, что $l = l' + l'',\, l' \neq 0,\, |k|,\, |l| \leq r$.

Утверждение 1.3.1. *Существует положительная функция* $\omega_1(\lambda)$, $\lambda > 0$, *такая, что*

$$|\mathbb{K}_\lambda[F,\, v]| \leq \omega_1(\lambda) \left\| F; \left(V_{2;\alpha}^r(R^n)\right)' \right\| \cdot \|v; V_{2;\alpha}^r(R^n)\| \tag{1.3.23}$$

для всех $F \in L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$, $v \in V_{2;\alpha}^r(R^n)$, *и* $\omega_1(\lambda) \to 0$ *при* $\lambda \to \infty$.

Доказательство. Прежде, чем приступить к непосредственному доказательству утверждения 2.2.1, докажем несколько вспомогательных лемм.

Рассмотрим симметричную полуторалинейную форму

$$\widetilde{\mathcal{B}_{\lambda;m}}[u,v] = \frac{1}{2}\left\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v] + \exp(-i\theta_m)\overline{\mathcal{B}_{\lambda;m}[v,u]}\right\}, \tag{1.3.24}$$

$$D(\widetilde{\mathcal{B}_{\lambda;m}}) = V_{2;\alpha}^r(R^n).$$

В силу неравенств (1.3.9), (1.3.10) существует самосопряженный оператор $B_{\lambda m}$ в пространстве $L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$, порожденный симметричной формой (1.3.24), такой что

$$\left(B_{\lambda;m}^{1/2}u, B_{\lambda;m}^{1/2}v\right)_{\alpha+r} = \widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda;m}[u,v] \tag{1.3.25}$$

для всех $u, v \in V_{2;\alpha}^r(R^n)$.

Лемма 1.3.1. *А) Существует неотрицательное число* λ_0 *такое, что при* $\lambda \geq \lambda_0$ *для любого мультииндекса* k *такого, что* $|k| \leq r$, *и любого* $m = 1, 2, 3, \ldots$ *оператор* $d^{-|k|} D^k B_{\lambda;m}^{-1/2}$ *является ограниченным оператором в* $L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$.

Б) если мультииндекс k'' *такой, что* $|k''| < |k|$, *то существует положительная функция* $q(\lambda)$ *такая, что* $q(\lambda) \to 0$ *при* $\lambda \to \infty$ *и*

$$\left\| d^{-|k|} \varphi_m^{(k')} D^{k''} u;\; L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \right\| \leq q(\lambda) \| B_{\lambda;m}^{1/2} u; L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \| \tag{1.3.26}$$

для всех $u \in V_{2;\alpha}^r(R^n)$

Доказательство. Из (1.3.25) следует, что

$$\| B_{\lambda;m}^{1/2} u; L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \|^2 = \mathrm{Re}\, \{ \exp(i\theta_m) \mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u] \} \tag{1.3.27}$$

Поэтому в силу неравенства (1.3.9) имеем

$$\| B_{\lambda;m}^{1/2} u; L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \| \geq c_0 \| u; V_{2;\alpha}^r(R^n) \| \qquad (\lambda \geq \lambda_0) \tag{1.3.28}$$

для всех $u \in V_{2;\alpha}^r(R^n)$. Отсюда в силу неравенств (1.1.2) следует, что

$$\left\| d^{-|k|} D^k u;\; L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \right\| \leq M_0 \| B_{\lambda;m}^{1/2} u;\; L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \|,$$

$$(|k| \leq r, \quad m = 1,\, 2, \quad u \in V_{2;\alpha}^r(R^n)).$$

Следовательно оператор $d^{-|k|} D^k B_{\lambda;m}^{-1/2}$ является ограниченным в пространстве $L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$.

Переходим к доказательству пункта Б) леммы 2.2.1. Рассмотрим случай $0 \neq |k''| < |k| \leq r$. Заметим, что согласно лемме 1.2.1)

$$\left| \varphi_m^{(k')}(x) \right| \leq C_1 d^{|k'|}(x) \quad \forall x \in R^n.$$

Поэтому

$$\left\| d^{-|k|}(x) \varphi_m^{(k')}(x) D^{k''} u(x);\; L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \right\| \leq \left\| d^{-|k''|} D^{k''} u;\; L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \right\|. \tag{1.3.29}$$

С другой стороны, из леммы 2.2 работы [22], в частности, следует, что для любого $\tau > 0$ и всех $u \in C_0^\infty(R^n)$ справедливо неравенство

$$\left\| d^{-|k''|} D^{k''} u;\ L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \right\| \le \tau \| u; L^r_{2;\alpha}(R^n)\| + c_0 \tau^{-\mu} \left\| u;\ L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \right\|,$$

где

$$\|u; L^r_{2,\,\alpha}(R^n)\| = \left\{ \sum_{|l|=r} \int \Big(d^\alpha(x) |u^{(l)}(x)| \Big)^2 dx \right\}^{1/2}$$

и

$$\mu = |k''|/(r - |k''|). \tag{1.3.30}$$

Так как $0 \ne |k''| < |k| \le r$, то μ – конечное положительное число.

Из полученного выше неравенства и из (1.3.29) следует, что

$$\left\| d^{-|k|}(x) \varphi_m^{(k')}(x) D^{k''} u(x);\ L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \right\| \le$$

$$\le \tau \|u; L^r_{2,\,\alpha}(R^n)\| + c_0 \tau^{-\mu} \left\| u;\ L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \right\|.$$

Возведя это неравенство в квадрат, получаем (при этом $\sqrt{2}\tau$ снова обозначим через τ)

$$\left\| d^{-|k|}(x) \varphi_m^{(k')}(x) D^{k''} u(x);\ L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \right\|^2 \le$$
$$\le \tau^2 \|u; L^r_{2,\,\alpha}(R^n)\|^2 + c_1 \tau^{-2\mu} \left\| u;\ L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \right\|^2.$$

Далее применяя неравенство (1.3.28) имеем

$$\left\| d^{-|k|}(x) \varphi_m^{(k')}(x) D^{k''} u(x);\ L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \right\|^2 \le$$
$$\le \tau^2 \|B^{1/2}_{\lambda;m} u; L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\|^2 + c_1 \tau^{-2\mu} \left\| u;\ L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \right\|^2.$$

Отсюда в силу равенства (1.3.27) следует, что

$$\left\| d^{-|k|}(x) \varphi_m^{(k')}(x) D^{k''} u(x);\ L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \right\|^2 \le$$
$$\le \tau^2 \mathrm{Re}\left\{ \exp(i\theta_m) \mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u] \right\} + c_1 \tau^{-2\mu} \left\| u;\ L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \right\|^2. \tag{1.3.31}$$

Используя равенство (1.3.7), оценим правую часть этого неравенства

$$\tau^2 \mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda_0;m}[u,u]\right\} + c_1\tau^{-2\mu}\left\|u;\ L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\right\|^2 =$$
$$= \tau^2\mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_m)\left(\sum_{|k|,|l|\le r}\int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x)a_{klm}(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx\, +\right.\right.$$
$$\left.\left. +\ \lambda\int d^{2(\alpha+r)}(x)|u(x)|^2dx\right)\right\} + c_1\tau^{-2\mu}\int d^{2(\alpha+r)}(x)|u(x)|^2dx \le$$
$$\le \tau^2\mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_m)\left(\sum_{|k|,|l|\le r}\int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x)a_{klm}(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx\, +\right.\right.$$
$$\left.\left. +\ \Lambda(\lambda,\,\tau)\int d^{2(\alpha+r)}(x)|u(x)|^2dx\right)\right\},$$

где $\Lambda(\lambda,\,\tau)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\lambda + c_1\tau^{-2\mu-2} \le \Lambda(\lambda,\,\tau).$$

Из (1.3.30) следует, что $\mu+1 = r/(r-|k''|)$. Так как $0 \ne |k''| < r$, то $\Lambda(\lambda,\,\tau)\to\infty$, если $\tau\to 0$ или $\lambda\to\infty$. Поэтому из полученного выше неравенства при $\lambda = 1/\tau$ следует, что

$$\left\|d^{-|k|}(x)\varphi_m^{(k')}(x)D^{k''}u(x);\ L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\right\|^2 \le$$
$$\le \tau^2\mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_m)\left(\sum_{|k|,|l|\le r}\int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x)a_{klm}(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx\, +\right.\right.$$
$$\left.\left. +\ p(\tau)\int d^{2(\alpha+r)}(x)|u(x)|^2dx\right)\right\}, \quad (1.3.32)$$

где $p(\tau) = \Lambda(1/\tau,\,\tau)$. Заметим, что $p(\tau)\to\infty$ при $\tau\to 0$. Обозначим через $q(\cdot)$ функцию обратную относительно $p(\tau)$. Тогда при $\tau = q(\lambda)$, то есть $\lambda = p(\tau)$, из (1.3.32) следует, что

$$\left\| d^{-|k|}(x)\varphi_m^{(k')}(x)D^{k''}u(x);\, L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\right\|^2 \leq$$

$$\leq q(\lambda)^2 \mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_m)\left(\sum_{|k|,|l|\leq r}\int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x)a_{klm}(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda\int d^{2(\alpha+r)}(x)|u(x)|^2dx\right)\right\}.$$

Здесь положительная непрерывная функция $q(\lambda)$ определена для положительных значений λ и такая, что $q(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\infty$. Из полученного выше неравенства в силу равенств (1.3.7), (1.3.27) следует (1.3.26). Утверждение пункта Б) леммы 2.2.1 для $|k''|\neq 0$ доказано.

Рассмотрим случай $|k''| = 0$. Неравенство (1.3.26) в этом случае примет вид

$$\left\| d^{-|k|}\varphi_m^{(k)}(x)u(x);\, L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\right\| \leq q(\lambda)\|B_{\lambda;m}^{1/2}u; L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\| \qquad (1.3.33)$$

для всех $u\in V_{2;\alpha}^r(R^n)$; $|k|\leq r$ и $q(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\infty$. Так как (см. лемму 1.2.1)

$$\left|\varphi_m^{(k)}(x)\right| \leq C_1 d^{|k|}(x),\ \ (|k|\leq r) \quad \forall x\in R^n,$$

то (1.3.33) следует из неравенство

$$\|u;\, L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\| \leq q(\lambda)\|B_{\lambda;m}^{1/2}u; L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\|, \qquad (1.3.34)$$

которое доказывается ниже.

Пусть $\lambda > \lambda_0$, где λ_0 – такое же положительное число, как в (1.3.28). Тогда используя равенство (1.3.24), имеем

$$\|B_{\lambda;m}^{1/2}u; L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\|^2 = \mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u]\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_m)\left(\sum_{|k|,|l|\leq r}\int d^{2\alpha+r-|k|}(x)a_{klm}(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\lambda\int d^{2(\alpha+r)}(x)|u(x)|^2dx\right)\right\} =$$

$$= \|B_{\lambda_0;m}^{1/2}u; L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\|^2 + (\lambda-\lambda_0)\cos\theta_m \int d^{2(\alpha+r)}(x)|u(x)|^2 dx \geq$$

$$\geq (\lambda-\lambda_0)\cos\theta_m \int d^{2(\alpha+r)}(x)|u(x)|^2 dx.$$

Отсюда следует, что

$$\|u;\, L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\|^2 = \int d^{2(\alpha+r)}(x)|u(x)|^2 dx \leq \frac{1}{(\lambda-\lambda_0)\cos\theta_m}\|B_{\lambda;m}^{1/2}u; L_2(R^n)\|^2.$$

Вводя обозначение

$$q(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{(\lambda-\lambda_0)\cos\theta_m}},$$

из последнего неравенства получим (1.3.34).

Лемма 2.2.1 доказана полностью.

Билинейная форма $\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v]$ удовлетворяет неравенствам (см. (1.3.9), (1.3.10))

$$c_0\|u; V_{2;\alpha}^r(R^n)\|^2 \leq \mathrm{Re}\,\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u]\} \tag{1.3.35}$$

для всех $u \in V_{2;\alpha}^r(R^n)$;

$$|\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v]| \leq (M_0+|\lambda|)\|u; V_{2;\alpha}^r(R^n)\| \cdot \|v; V_{2;\alpha}^r(R^n)\| \tag{1.3.36}$$

для всех $u,\ v \in V_{2;\alpha}^r(R^n)$. Числа $c_0,\ M_0 > 0$ в этих неравенствах не зависят от $u(x),\ \ v(x)$. Отсюда следует, что $D\left(\mathcal{B}_{\lambda;m}\right) = V_{2;\alpha}^r(R^n)$.

Согласно неравенствам (1.3.35), (1.3.36) билинейная форма $\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v]$ замкнута и секториальна. Поэтому применяя лемму 1.2.3, получаем:

I) существует такой m – секториальный оператор $A_{\lambda;m}$, что для всех $u \in D(A_{\lambda;m}) \subset D\left(\mathcal{B}_{\lambda;m}\right) = V_{2;\alpha}^r(R^n)$ и всех $v \in V_{2;\alpha}^r(R^n)$ выполняется равенство

$$\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v] = (A_{\lambda;m}u, v)_{\alpha+r}, \tag{1.3.37}$$

где $(\cdot,\,\cdot)_{\alpha+r}$ – скалярное произведение в пространстве $L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$;

II) если $u \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$, $w \in L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$ и

$$\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v] = (w,\,v)_{\alpha+r}$$

для всех v, принадлежащих ядру формы $\mathcal{B}_{\lambda;m}$, то $u \in D(A_{\lambda;m})$ и $A_{\lambda;m}u = w$.

Пусть $f \in L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$. Тогда $f \in \left(V^r_{2;\alpha}(R^n)\right)'$, поэтому $\mathcal{R}_m(\lambda)f \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$ и ввиду равенства (1.3.12)

$$\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[\mathcal{R}_m(\lambda)f,v] = \langle f,v\rangle \tag{1.3.38}$$

для всех $v \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$.

В силу утверждения п. I) из равенства (1.3.38) следует, что

$$A_{\lambda;m}\mathcal{R}_m(\lambda)f = f, \ \ \forall f \in L_{2,\,\alpha+r}(R^n).$$

Следовательно,

$$\mathcal{R}_m(\lambda)f = A^{-1}_{\lambda;m}f \tag{1.3.39}$$

для всех $f \in L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$.

Пусть $B_{\lambda;m}$ – самосопряженный оператор в пространстве $L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$, порожденный симметричной формой (1.3.24) (то есть, такой же, как в лемме 2.2.1)). Для всех $u,v \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$ выполняется равенство

$$\left(B^{1/2}_{\lambda;m}u,B^{1/2}_{\lambda;m}v\right) = \widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda;m}[u,v],$$

Отсюда при $u(x) = v(x)$ с учетом равенства (1.3.24) получим

$$\left\|B^{1/2}_{\lambda;m}u;L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\right\|^2 = \mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u]\right\} \ \ (\lambda \geq \lambda_0 > 0).$$

Далее применяя неравенство (1.3.9), находим

$$\left\|B^{1/2}_{\lambda;m}u;L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\right\| \geq C\left\|u;V^r_{2;\alpha}(R^n)\right\| \ \ (\lambda \geq \lambda_0 > 0)$$

для всех $u \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$. Отсюда следует обратимость оператора $B^{1/2}_{\lambda;m}$ при $\lambda \geq \lambda_0 > 0$. Применяя лемму 1.2.4 ([34, гл. 6, теорема 3.2]), получим представление

$$A^{-1}_{\lambda;m} = B^{-1/2}_{\lambda;m}X_m(\lambda)B^{-1/2}_{\lambda;m} \ \ (\lambda \geq \lambda_0 > 0), \tag{1.3.40}$$

где $X_m(\lambda) : L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \to L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$ – некоторый ограниченный оператор и его норма $\|X_m(\lambda)\|$ не превосходит числа $M_1 > 0$, не зависящего от $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$.

Переходим к доказательству утверждения 2.2.1. Равенство (1.3.21) перепишем в виде

$$\mathbb{K}_\lambda[F,\, v] =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \exp(i\theta_m) \sum\nolimits^{(1)} C_{k'}^{k''} \left(d^{\alpha+r-|k|} a_{klm} \varphi_m^{(k')} U_{m,\lambda}^{(k'')},\, d^{\alpha+r-|l|} v^{(l)} \right), \qquad (1.3.41)$$

где

$$U_{m,\lambda}(x) = (\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x), \quad m = 1,\, 2,\, \ldots,$$

и символом $\sum^{(1)}$ обозначено суммирование по мультииндексам $k,\, l,\, k',\, k''$ таким, что $k = k' + k''$, $k' \neq 0$, $|k|,\, |l| \le r$.

Пусть $F \in L_2(R^n)$. Используя равенства (1.3.28) – (1.3.41), имеем

$$\mathbb{K}_\lambda[F, v] =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum\nolimits^{(1)} C_{k'}^{k''} \exp(i\theta_m) \left(d^{-|k|} a_{klm} \varphi_m^{(k')} D^{k''} A_{\lambda;m}^{-1} \Phi_m F,\, d^{-|l|} v^{(l)} \right)_{\alpha+r} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum\nolimits^{(1)} C_{k'}^{k''} \exp(i\theta_m) (d^{-|k|} a_{klm} \varphi_m^{(k')} D^{k''} B_{\lambda;m}^{-1/2} X_m(\lambda) B_{\lambda;m}^{-1/2} \Phi_m F, d^{-|l|} v^{(l)}(x))_{\alpha+r}.$$

Далее, применяя лемму 1.2.2 и неравенство Коши – Буняковского, имеем

$$|\mathbb{K}_\lambda[F, v]| \ll \Lambda_n \sup_{m=1,\,2,\,\ldots} \sum\nolimits^{(3)} \|\mathbb{T}_{k',k'',m}(\lambda) V_{m,\lambda}; L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\| \times$$
$$\times \left\| d^{-|l|} v^{(l)}(x); L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \right\|, \quad (1.3.42)$$

где

$$\mathbb{T}_{k',k'',m}(\lambda) = d^{-|k'|-|k''|} \varphi_m^{(k')} a_{klm} D^{k''} B_{\lambda;m}^{-1/2},$$
$$V_{m,\lambda}(x) = X_m(\lambda) B_{\lambda;m}^{-1/2} (\varphi_m F)(x) \quad (1.3.43)$$

и символом $\sum^{(3)}$ обозначено суммирование по мультииндексам k', k'' таким, что $|k'|+|k''|\le r$ и $k'\ne 0$.

Так как (см. (1.1.2))

$$\left\| d^{-|l|}v^{(l)}(x); L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\right\| \le \left\|v; V^r_{2;\alpha}(R^n)\right\| \quad (v\in C_0^\infty(R^n))$$

для любого мультииндекса $l:\ |l|\le r$, то из (1.3.42) следует неравенство

$$|\mathbb{K}_\lambda[F,v]| \ll \\ \ll \left\|v; V^r_{2;\alpha}(R^n)\right\| \sup_{m=1,\,2,\,\ldots} \sum\nolimits^{(3)} \left\| \mathbb{T}^{k'}_{k''m}(\lambda)V_{m,\lambda}; L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\right\|, \quad (1.3.44)$$

Пусть λ_0 – положительное число, такое же как в (1.3.28). Тогда при $\lambda>\lambda_0$ в силу равенства (1.3.27) имеем

$$\left\| B^{1/2}_{\lambda;m}u; L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\right\|^2 = \mathrm{Re}\big\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u]\big\} = \\ = \mathrm{Re}\big\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda_0;m}[u,u]\big\} + \cos(\theta_m)(\lambda-\lambda_0)\int d^{2\alpha+2r}(x)|u(x)|^2dx \ge \\ \ge \mathrm{Re}\big\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda_0;m}[u,u]\big\} = \left\| B^{1/2}_{\lambda_0;m}u; L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\right\|^2. \quad (1.3.45)$$

Отсюда следует, что при $\lambda\ge\lambda_0$ оператор $B^{1/2}_{\lambda_0;m}B^{-1/2}_{\lambda;m}$ является ограниченным оператором, и его норма не превосходит единицу. Так как оператор $B_{\lambda;m}$ является самосопряженным при всех значениях $\lambda\ge 1$, то $\lambda\ge\lambda_0$ оператор $B^{-1/2}_{\lambda;m}B^{1/2}_{\lambda_0;m}$ также является ограниченным оператором, и его норма не превосходит единицу. Учитывая это, имеем

$$\left\| B^{-1/2}_{\lambda;m}(\varphi_m F); L_{2,\,\alpha+r}(\Omega)\right\| \le \\ \le \left\| B^{-1/2}_{\lambda;m}B^{1/2}_{\lambda_0;m}\right\| \times \left\| B^{-1/2}_{\lambda_0;m}(\varphi_m F); L_{2,\,\alpha+r}(\Omega)\right\| \le \\ \le \left\| B^{-1/2}_{\lambda_0;m}(\varphi_m F); L_{2,\,\alpha+r}(\Omega)\right\|. \quad (1.3.46)$$

Пусть Ω – некоторая область в R^n. Норму в пространстве $L_2(\Omega)$ можно задавать с помощью равенства

$$\|f; L_2(\Omega)\| = \sup|(f,v)|, \quad (1.3.47)$$

где супремум берется по всем $v \in L_2(\Omega)$ таким, что $\|v; L_2(\Omega)\| = 1$. Так как $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то в равенстве (1.3.47) можно считать, что супремум берется по всем $v \in C_0^\infty(\Omega)$, таким, что $\|v; L_2(\Omega)\| = 1$.

В равенстве (1.3.47) заменяем f на $d^{\alpha+r} f$, v на $d^{\alpha+r} v$ и получаем равенство

$$\|f; L_{2,\,\alpha+r}(\Omega)\| = \sup |(f, v)_{2,\,\alpha+r}|, \tag{1.3.48}$$

где супремум берется по всем $v \in C_0^\infty(\Omega)$, таким, что $\|v; L_{2,\,\alpha+r}(\Omega)\| = 1$.

При $\lambda = \lambda_0$ из равенства (1.3.25) имеем

$$\left(B_{\lambda_0;m}^{1/2} u, B_{\lambda_0;m}^{1/2} v\right)_{2,\,\alpha+r} = \widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0;m}[u, v],$$

С другой стороны,

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0;m}[u, u] \gg \left\|u; V_{2;\alpha}^r(R^n)\right\|^2,$$

$$\left|\widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0;m}[u, v]\right| \le (M_0 + \lambda_0) \left\|u; V_{2;\alpha}^r(R^n)\right\| \cdot \left\|v; V_{2;\alpha}^r(R^n)\right\|$$

для всех $u, v \in C_0^\infty(R^n)$. Поэтому согласно теореме Лакса – Мильграма, уравнение

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0;m}[u, \widehat{v}] = (w, \widehat{v})_{\alpha+r} \quad \forall \widehat{v} \in C_0^\infty(R^n)$$

имеет решение для любого $w \in L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$. Следовательно, функцию $v \in C_0^\infty(R^n)$ в (1.3.48) можно представить в виде

$$v = B_{\lambda_0;m}^{1/2} w,$$

то есть

$$\|f; L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\| = \sup \left|\left(f, B_{\lambda_0;m}^{1/2} w\right)_{2,\alpha+r}\right|,$$

где супремум берется по всем $w \in C_0^\infty(R^n)$ таким, что

$$\left\|B_{\lambda_0;m}^{1/2} w; L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\right\| = 1.$$

С другой стороны, в классе $C_0^\infty(R^n)$ следующие нормы эквивалентны

$$\left\|v; V_{2;\alpha}^r(R^n)\right\| \quad \text{и} \quad \left\|B_{\lambda_0;m}^{1/2} v; L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\right\|.$$

Поэтому

$$\left\| B^{-1/2}_{\lambda_0;m}(\varphi_m F); L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\right\| = \sup\left|\left(B^{-1/2}_{\lambda_0;m}(\varphi_m F), w\right)_{\alpha+r}\right| =$$
$$= \sup\left|\left(B^{-1/2}_{\lambda_0;m}(\varphi_m F), B^{1/2}_{\lambda_0;m} v\right)_{\alpha+r}\right| \ll \sup|(\varphi_m F, v)_{\alpha+r}| \ll$$
$$\ll \left\|\varphi_m F; \left(V^r_{2;\alpha}(R^n)\right)'\right\| \ll \left\|F; \left(V^r_{2;\alpha}(R^n)\right)'\right\|, \quad (1.3.49)$$

где первый супремум в этой цепочке берется по всем $w \in C_0^\infty(R^n)$: $\|w; L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\| = 1$, второй супремум – по всем $v \in C_0^\infty(R^n)$: $\left\|B^{1/2}_{\lambda_0;m} w; L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\right\| = 1$, а третий супремум – по всем $v \in C_0^\infty(R^n)$: $\left\|v; V^r_{2;\alpha}(R^n)\right\| = 1$.

В силу (1.3.46) из (1.3.49) следует неравенство

$$\|V_{m,\lambda}; L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\| \le M \left\|F; \left(V^r_{2;\alpha}(R^n)\right)'\right\|, \quad (1.3.50)$$

которое справедливо при $\lambda \ge \lambda_0$, где $\lambda_0 \ge 1$ – некоторое конечное число.

Из утверждения п. Б) леммы 2.2.1 (см. (1.3.26)) и равенства (1.3.43) следует, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} \left\|\mathbb{T}^{k'}_{k''m}(\lambda)\right\| = 0. \quad (1.3.51)$$

Ввиду этого равенства из (1.3.44), (1.3.50), (1.3.49) получим

$$|\mathbb{K}_\lambda[F, v]| \ll$$
$$\ll \sup_{m=1,2,\dots} \sup_{|k'|+|k''|\le 2r;\, k'\ne 0} \|\mathbb{T}_{k',k'',m}(\lambda)\| \cdot \|V_{m,\lambda}; L_{2,\,\alpha+r}(R^n)\| \left\|v; V^r_{2;\alpha}(R^n)\right\| \le$$
$$\le \omega_1(\lambda) \left\|F; \left(V^r_{2;\alpha}(R^n)\right)'\right\| \cdot \|v; V^r_{2;\alpha}(R^n)\|$$

для всех $F \in L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$, $v \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$, и $\omega_1(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$.

Таким образом, оценка (1.3.23) доказана, что и завершает доказательство утверждения 2.2.1.

Утверждение 1.3.2. *Существует положительная функция* $\omega_2(\lambda)$, $\lambda > 0$, *такая, что*

$$|\mathbb{L}_\lambda[F,\, v]| \le \omega_2(\lambda_0) \left\|F; \left(V^r_{2;\alpha}(R^n)\right)'\right\| \cdot \|v; V^r_{2;\alpha}(R^n)\| \quad (1.3.52)$$

при всех $\lambda \geq \lambda_0$ *и для всех* $F \in L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$, $v \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$. *Положительная функция* $\omega_2(\lambda_0)$ *такая, что* $\omega_2(\lambda_0) \to 0$ *при* $\lambda_0 \to \infty$.

Доказательство. Напомним определение полуторалинейной формы $\mathbb{L}_\lambda[F,\,v]$ (см. (1.3.22))

$$\mathbb{L}_\lambda[F,\,v] = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(i\theta_m)\times$$

$$\times \sum\nolimits^{(2)} C^{l''}_{l'} \int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x) a_{klm}(x) U^{(k)}_{m,\lambda}(x) \overline{\varphi^{(l')}_m(x) v^{(l'')}(x)} dx. \qquad (1.3.53)$$

Здесь (см. (1.3.19))

$$U^{(k)}_{m,\lambda}(x) = D^k(\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x), \quad m = 1,\,2,\,\ldots.$$

и символ $\sum^{(2)}$ обозначает суммирование по мультииндексам $k,\,l,\,l',\,l''$ таким, что $l = l' + l''$, $l' \neq 0$, $|k|,\,|l| \leq r$.

Форму (1.3.53) представим в виде

$$\mathbb{L}_\lambda[F,\,v] = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(i\theta_m) \sum\nolimits^{(2)} \mathbb{I}^{l',l''}_{\lambda;\,k,m}[F,\,v], \qquad (1.3.54)$$

где

$$\mathbb{I}^{l',l''}_{\lambda;\,k,m}[F,\,v] = C^{l''}_{l'} \left(d^{-|k|} a_{klm} U^{(k)}_{m,\lambda},\, d^{-|l'|-|l''|} \varphi^{(l')}_m v^{(l'')} \right)_{\alpha+r}.$$

Так как (см. (1.3.39), (1.3.40))

$$\mathcal{R}_m(\lambda) = A^{-1}_{\lambda;m} = B^{-1/2}_{\lambda;m} X_m(\lambda) B^{-1/2}_{\lambda;m} \ \ (\lambda \geq \lambda_0 > 0),$$

то форму $\mathbb{I}^{l',l''}_{\lambda;\,k,m}[F,\,v]$ можно записать в виде

$$\mathbb{I}^{l',l''}_{\lambda;\,k,m}[F,\,v] = \left(d^{-|k|} a_{klm} D^k B^{-1/2}_{\lambda;m} X_m(\lambda) B^{-1/2}_{\lambda;m} \Phi_m F,\, d^{-|l'|-|l''|} \varphi^{(l')}_m D^{l''} v \right)_{\alpha+r}.$$

Далее используя обозначение (см. (1.3.43))

$$V_{m,\lambda}(x) = X_m(\lambda) B^{-1/2}_{\lambda;m} (\varphi_m F)(x),$$

имеем

$$\mathbb{I}^{l',l''}_{\lambda;\,k,m}[F,\,v] = \Big(d^{-|k|}a_{klm}D^k B^{-1/2}_{\lambda;m}V_{m,\lambda},\; d^{-|l'|-|l''|}\varphi^{(l')}_m D^{l''}v\Big)_{\alpha+r}.$$

Так как $D^{l''}v = D^{l''}B^{-1/2}_{\lambda_0;m}B^{1/2}_{\lambda_0;m}v$ и $B_{\lambda_0;m}$ – самосопряженный оператор, то

$$\mathbb{I}^{l',l''}_{\lambda;\,k,m}[F,\,v] =$$
$$= \Big(B^{-1/2}_{\lambda_0;m}D^{l''}\varphi^{(l')}_m d^{-|k|-|l'|-|l''|}a_{klm}D^k B^{-1/2}_{\lambda;m}V_{m,\lambda},\; B^{1/2}_{\lambda_0;m}v\Big)_{\alpha+r}. \quad (1.3.55)$$

В процессе доказательства утверждения 2.2.1 мы воспользовались обозначением (см. (1.3.43))

$$\mathbb{T}_{k',k'',m}(\lambda) = d^{-|k'|-|k''|}\varphi^{(k')}_m a_{klm}D^{k''}B^{-1/2}_{\lambda;m}$$

и доказали, что (см. (1.3.51))

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|\mathbb{T}_{k',k'',m}(\lambda)\| = 0 \quad (1.3.56)$$

при $|k'|+|k''|\le r;\; k'\ne 0$. Следовательно,

$$\mathbb{T}_{l',l'',m}(\lambda_0) = d^{-|l'|-|l''|}\varphi^{(l')}_m a_{klm}D^{l''}B^{-1/2}_{\lambda_0;m}$$

и

$$\mathbb{T}^*{}_{l',l'',m}(\lambda_0) = B^{-1/2}_{\lambda_0;m}D^{l''}\varphi^{(l')}_m d^{-|l'|-|l''|}a_{klm}.$$

Так как норма ограниченного оператора совпадает с нормой сопряженного оператора, то из (1.3.56) следует, что

$$\lim_{\lambda_0\to\infty}\|\mathbb{T}^*{}_{l',l'',m}(\lambda_0)\| = 0 \quad (1.3.57)$$

при $|l'|+|l''|\le r;\; l'\ne 0$.

С помощью введенного обозначения равенство (1.3.55) записывается в виде

$$\mathbb{I}^{l',l''}_{\lambda;\,k,m}[F,\,v] = \Big(\mathbb{T}^*{}_{l',l'',m}(\lambda_0)d^{-|k|}D^k B^{-1/2}_{\lambda;m}V_{m,\lambda},\; B^{1/2}_{\lambda_0;m}v\Big)_{\alpha+r}.$$

Далее вводим обозначение

$$\mathbb{P}_{m,\lambda_0,k} = d^{-|k|} D^k B_{\lambda_0;m}^{-1/2} \tag{1.3.58}$$

и записываем полученное равенство в виде

$$\mathbb{I}_{\lambda;\,k,m}^{l',l''}[F,\,v] = \left(\mathbb{T}^*{}_{l',l'',m}(\lambda_0) \mathbb{P}_{m,\lambda_0,k} B_{\lambda_0;m}^{1/2} B_{\lambda;m}^{-1/2} V_{m,\lambda},\ B_{\lambda_0;m}^{1/2} v \right)_{\alpha+r}. \tag{1.3.59}$$

Из (1.3.45) следует, что при $\lambda \geq \lambda_0$ оператор $B_{\lambda_0;m}^{1/2} B_{\lambda;m}^{-1/2}$ является ограниченным оператором, и его норма не превосходит единицу. С другой стороны, согласно утверждения п. а) леммы 2.2.1 оператор $\mathbb{P}_{m,\lambda_0,k}$ является ограниченным. Поэтому из (1.3.59) имеем

$$\begin{gathered} \left| \mathbb{I}_{\lambda;\,k,m}^{l',l''}[F,\,v] \right| \leq \\ \leq M_2 \left\| \mathbb{T}^*{}_{l',l'',m}(\lambda_0) \right\| \left\| V_{m,\lambda};\ L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \right\| \cdot \left\| B_{\lambda_0;m}^{1/2} v;\ L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \right\| \end{gathered} \tag{1.3.60}$$

при всех $\lambda \geq \lambda_0$.

Ранее при доказательстве утверждения 2.2.1 мы доказали, что (см. (1.3.50)),

$$\left\| V_{m,\lambda}; L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \right\| \leq M_3 \left\| F; \left(V_{2;\alpha}^r(R^n) \right)' \right\|,$$

при $\lambda \geq \lambda_0$, где $\lambda_0 \geq 1$ – некоторое конечное число и

$$\left\| B_{\lambda_0;m}^{1/2} v;\ L_{2,\,\alpha+r}(R^n) \right\| \leq M_4 \left\| v;\ V_{2;\alpha}^r(R^n) \right\|$$

для всех $v \in V_{2;\alpha}^r(R^n)$. В силу этих неравенств из (1.3.60) следует, что

$$\begin{gathered} \left| \mathbb{I}_{\lambda;\,k,m}^{l',l''}[F,\,v] \right| \leq \\ \leq M_5 \left\| \mathbb{T}^*{}_{l',l'',m}(\lambda_0) \right\| \left\| F; \left(V_{2;\alpha}^r(R^n) \right)' \right\| \cdot \left\| v;\ V_{2;\alpha}^r(R^n) \right\| \end{gathered} \tag{1.3.61}$$

при всех $\lambda \geq \lambda_0$ и для всех $F \in L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$, $v \in V_{2;\alpha}^r(R^n)$.

Вводя обозначение

$$\delta_*(\lambda_0) = M_5 \left\| \mathbb{T}^*{}_{l',l'',m}(\lambda_0) \right\|,$$

получим

$$\left|\mathbb{I}^{l',l''}_{\lambda;\,k,m}[F,\,v]\right| \le \delta_*(\lambda_0)\left\|F;\,\left(V^r_{2;\alpha}(R^n)\right)'\right\|\cdot\left\|v;\,V^r_{2;\alpha}(R^n)\right\| \tag{1.3.62}$$

при всех $\lambda \ge \lambda_0$ и для всех $F \in L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$, $v \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$.

Из (1.3.57) следует, что $\delta_*(\lambda_0) \to 0$ при $\lambda_0 \to 0$. Поэтому подбирая число λ_0 достаточно большим, из (1.3.62) и (1.3.54) в силу леммы 1.2.2 получаем (1.3.52).

Утверждение 2.2.2 доказано.

Применяя неравенства (1.3.23), (1.3.52), установленные, соответственно, в утверждениях 2.2.1 и 2.2.2, из (1.3.20) получим

$$|\langle\mathbb{R}(\lambda)F,v\rangle - \langle F,\,v\rangle| \le (\omega_1(\lambda)+\omega_2(\lambda_0))\left\|F;\left(V^r_{2;\alpha}(R^n)\right)'\right\|\cdot\|v;V^r_{2;\alpha}(\Omega)\|$$

для всех $F \in L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$, $v \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$. Так как $\omega_1(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$ и $\omega_2(\lambda) \to 0$ при $\lambda_0 \to \infty$, то существует число $\lambda_0 \ge 1$ такое, что

$$|\langle\mathbb{R}(\lambda)F,v\rangle - \langle F,\,v\rangle| \le \frac{1}{2}\left\|F;\left(V^r_{2;\alpha}(R^n)\right)'\right\|\cdot\|v;V^r_{2;\alpha}(R^n)\| \tag{1.3.63}$$

для любого $\lambda \ge \lambda_0$ и всех $F \in L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$, $v \in V^r_{2;\alpha}(R^n)$. Так как по определению пространства $\left(V^r_{2;\alpha}(R^n)\right)'$, $L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$ плотно в $\left(V^r_{2;\alpha}(R^n)\right)'$, то оценка (1.3.63) верна для всех $F \in \left(V^r_{2;\alpha}(R^n)\right)'$.

Из оценки (1.3.63) следует, что при $\lambda > \lambda_0$ оператор $\mathbb{G}(\lambda) = \mathbb{R}(\lambda) - E$, действующий из $\left(V^r_{2;\alpha}(R^n)\right)'$ в $\left(V^r_{2;\alpha}(R^n)\right)'$, является ограниченным и его норма не превосходит $1/2$. Поэтому оператор

$$\mathbb{R}(\lambda):\left(V^r_{2;\alpha}(R^n)\right)' \to \left(V^r_{2;\alpha}(R^n)\right)'$$

непрерывно обратим и

$$\mathbb{R}^{-1}(\lambda) = (E+\mathbb{G}(\lambda))^{-1}.$$

Оператор $\mathcal{R}_m(\lambda)$, определенный равенством (1.3.12), действует из $\left(V^r_{2;\alpha}(R^n)\right)'$ в $V^r_{2;\alpha}(R^n)$. Поэтому из (1.3.14) следует, что оператор $\mathcal{R}(\lambda)$

также действует из $\left(V_{2;\alpha}^{r}(R^{n})\right)'$ в $V_{2;\alpha}^{r}(R^{n})$. Следовательно, для любого функционала $F \in \left(V_{2;\alpha}^{r}(R^{n})\right)'$ функция $U(x)$, определенная равенством

$$U = \mathcal{R}(\lambda)\mathbb{R}^{-1}(\lambda)F \quad (\lambda \geq \lambda_0), \tag{1.3.64}$$

принадлежит пространству $V_{2;\alpha}^{r}(R^{n})$.

Далее будем предполагать, что $\lambda \geq \lambda_0$, и λ_0 –некоторое достаточно большое число. Тогда из равенства (1.3.15) следует, что

$$B_\lambda[\mathcal{R}(\lambda)\mathbb{R}^{-1}(\lambda)F, v] = \langle F, v\rangle$$

для всех $v \in C_0^\infty(R^n)$. Поэтому при $\lambda \geq \lambda_0$ функция $U(x)$, определенная равенством (1.3.64), удовлетворяет равенству

$$B_\lambda[U, v] = \langle F, v\rangle \quad \forall v \in C_0^\infty(R^n).$$

Это означает, что функция (1.3.64) является решением задачи D_λ. Так как при $\lambda \geq \lambda_0$ оператор $\mathbb{R}^{-1}(\lambda)$ ограничен, то из (1.3.13) и (1.3.14) следует, что функция (1.3.64) удовлетворяет оценке (1.1.9) теоремы 1.1.1, то есть

$$\|U; V_{2;\alpha}^{r}(R^{n})\| \leq M \left\|F; \left(V_{2;\alpha}^{r}(R^{n})\right)'\right\|,$$

где число M не зависит от $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$ и от функционала F.

Таким образом, мы доказали, что задача D_λ при $\lambda \geq \lambda_0$ имеет решение для любого заданного функционала $F \in \left(V_{2;\alpha}^{r}(R^{n})\right)'$, и оно удовлетворяет неравенству (1.1.9).

Переходим к доказательству единственности решения задачи D_λ. Очевидно, для этого нам достаточно доказать, что однородная задача D_λ (то есть, когда $F = 0$) имеет только нулевое решение.

Рассмотрим сопряженную задачу: для заданного функционала $F \in \left(V_{2,\alpha}^{r}(R^{n})\right)'$ найти функцию $U_1 \in V_{2,\alpha}^{r}(R^{n})$, удовлетворяющую равенству

$$\overline{B_\lambda[v, U_1]} = \langle F, v\rangle \quad \forall v \in V_{2,\alpha}^{r}(R^{n}). \tag{1.3.65}$$

Так как коэффициенты билинейной формы $\overline{B_\lambda[v,U_1]}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.1.1, поступая так же, как выше, можно построить операторы $\mathcal{R}_*(\lambda)$, $\mathbb{R}_*(\lambda)$ такие, что функция $U_1=\mathcal{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$ $(\lambda\in[\lambda_0^*,\infty))$ принадлежит пространству $V^r_{2;\alpha}(R^n))$ и удовлетворяет уравнению (1.3.65).

Пусть функция $u\in V^r_{2;\alpha}(R^n)$ является решением уравнения

$$B_\lambda[u,v]=0 \quad (\forall v\in V^r_{2;\alpha}(R^n)), \tag{1.3.66}$$

где $\lambda\geq\lambda_0'=\max\{\lambda_0^*,\lambda_0\}$. Пусть F – произвольный элемент пространства $\big(V^r_{2;\alpha}(R^n)\big)'$. Так как $U_1=\mathcal{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$ принадлежит пространству $V^r_{2;\alpha}(R^n)$, то, полагая $v=U_1$ в (1.3.66), получаем

$$B_\lambda[u,U_1]=0,$$

то есть

$$\overline{B_\lambda[u,U_1]}=0.$$

С другой стороны, функция $U_1=\mathcal{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$ удовлетворяет (1.3.65). Поэтому $\langle F,u\rangle=0$ для всех $F\in V^r_{2;\alpha}(R^n)$. Учитывая вложение $V^r_{2;\alpha}(R^n)\to\big(V^r_{2;\alpha}(R^n)\big)'$ и полагая $F=u$, имеем $\langle u,u\rangle=0$, то есть $u=0$.

Теорема 1.1.1 доказана полностью.

1.4. Исследование гладкости решения однородной задачи

Напомним, что норма в пространстве $V^r_{p;\,\alpha}(R^n)$ определяется равенством

$$\|u;V^r_{p;\,\alpha}(R^n)\|=\left\{\sum_{|k|=r}\int d^{p\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx+\int d^{p(\alpha+r)}(x)|u(x)|^p dx\right\}^{1/p},$$

где $d(x)=(1+|x|^2)^{-1/2}$. Здесь и далее в этой работе все интегралы берутся по всему пространству R^n.

Согласно результатам работ [4, 48], множество $C_0^\infty(R^n)$ (множество бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в

R^n), плотно в пространстве $V^r_{p;\,\alpha}(R^n)$, и для любого мультииндекса $k : |k| \le r$ и всех $u \in V^r_{p;\,\alpha}(R^n)$ выполняется неравенство

$$\left\{\int \left(d^{\alpha+r-|k|}(x)\left|u^{(k)}(x)\right|\right)^p dx\right\}^{1/p} \le M_0 \left\|u;\, V^r_{p,\alpha}(R^n)\right\|, \qquad (1.4.1)$$

где число $M_0 > 0$ не зависит от $u(x)$. Это неравенство позволяет нам задавать в пространстве $V^r_{p;\,\alpha}(R^n)$ следующую эквивалентную норму:

$$\|u; V^r_{p;\,\alpha}(R^n)\|_* = \left\{\sum_{|k|\le r}\int d^{p(\alpha+r-|k|)}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx\right\}^{1/p}. \qquad (1.4.2)$$

Используя это равенство, имеем

$$\|u; V^{r+m}_{p;\,\alpha-m}(R^n)\|_* =$$
$$= \left\{\sum_{|k|\le r+m}\int d^{p(\alpha-m+(r+m)-|k|)}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx\right\}^{1/p} =$$
$$= \left\{\sum_{|k|\le r+m}\int d^{p(\alpha+r-|k|)}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx\right\}^{1/p} \ge \|u; V^r_{p;\,\alpha}(R^n)\|_*. \qquad (1.4.3)$$

Отсюда следует вложение

$$V^{r+m}_{p;\,\alpha-m}(R^n) \to V^r_{p;\,\alpha}(R^n) \qquad (1.4.4)$$

Напомним, что $\left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)'$ – пополнение пространства $L_{2,\,\alpha+r}(R^n)$ по норме

$$\left\|f;\, \left(V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right)'\right\| = \sup \frac{|(f,\, v)_{\alpha+r}|}{\left\|v;\, V^r_{2,\alpha}(R^n)\right\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $v(x) \in V^r_{2,\,\alpha}(R^n)$. Если m – целое отрицательное число, то условимся писать

$$\left(V^m_{2,\,\alpha}(R^n)\right)' = V^{-m}_{2,\,-\alpha}(R^n).$$

На функциях $u,\, v \in C_0^\infty(R^n)$ рассмотрим интегро-дифференциальную полуторалинейную форму

$$\mathbb{B}[u,v] = \sum_{|k|,|l|\le r}\int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x) b_{kl}(x) u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx, \qquad (1.4.5)$$

коэффициенты $b_{kl}(x)$ которой являются ограниченными комплекснозначными функциями.

Далее предположим, что выполнены следующие условия:

А) Существует натуральное число m_0 такое, что

$$\left|b_{kl}^{(s)}(x)\right| \leq M d^{|s|}(x),\ x \in R^n, \tag{1.4.6}$$

для любого мультииндекса $s:\ |s| \leq m_0$.

Б) Для всех $x \in R^n$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|=r} \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \leq M \operatorname{Re} \left\{ \gamma(x) \sum_{|k|=|l|=r} b_{kl}(x) \zeta_k \overline{\zeta_l} \right\}, \tag{1.4.7}$$

где отличная от нуля комплекснозначная функция $\gamma(x)$ всюду непрерывна, и для любого числа $\nu > 0$ существует число $R_\nu > 0$ такое, что

$$|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu \tag{1.4.8}$$

для всех $x,\, y \in R^n$ таких, что $|x| > R_\nu$, $|y| > R_\nu$.

Теорема 1.4.1. *Пусть выполнены условия (1.4.6), (1.4.7), (1.4.8) и пусть задан элемент* $F \in \left(V_{2;\alpha+m}^{r-m}(R^n)\right)'$, *где целое число* m *такое, что* $0 \leq m \leq m_0$. *Тогда если функция* $u(x) \in L_{2;\alpha}^r(R^n) \cap L_{2;loc}(R^n)$ *является решением уравнения*

$$\mathbb{B}[u, v] = \langle F,\, v \rangle \quad (\forall v \in C_0^\infty(R^n)) \tag{1.4.9}$$

то $u(x) \in W_{2;loc}^{r+m}(R^n)$ *и при наличии добавочного условия*

$$u(x) \in L_{2;\,\alpha+r}(R^n) \tag{1.4.10}$$

выполняется неравенство

$$\left\| u;\, V_{2;\,\alpha-m}^{r+m}(R^n) \right\| \leq M \left\{ \left\| u;\, V_{2;\,\alpha}^{r}(R^n) \right\| + \left\| F;\, \left(V_{2;\alpha+m}^{r-m}(R^n)\right)' \right\| \right\}, \tag{1.4.11}$$

где число $M > 0$ *не зависит от* $u(x)$ *и* F.

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $x^0 \in R^n$ и определим шар $I(x^0)$ с центром в этой точке

$$I(x^0) = \left\{ x \in R^n : \left| x - x^0 \right| < \frac{1}{\mu_0} d^{-1}(x^0) \right\}, \tag{1.4.12}$$

где μ_0 – достаточно большое положительное число.

Рассмотрим случай $m \geq r$. Тогда $F \in \left(V^{r-m}_{2;\alpha+m}(R^n) \right)' = V^{m-r}_{2;-\alpha-m}(R^n)$, то есть, в этом случае F – обычная функция, которая во всем R^n имеет все обобщенные производные до $(m-r)$-того порядка включительно. Поэтому

$$\langle F,\, v \rangle = \int d^{2\alpha+2r} F(x) \overline{v(x)} dx$$

и уравнение (1.4.9) для всех функций $v \in C_0^\infty(R^n)$ с носителями, принадлежащими множеству $I(x^0)$ имеет вид

$$\int\limits_{I(x^0)} \sum_{|k|,|l| \leq r} d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x) b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx = \int\limits_{I(x^0)} F(x) \overline{v(x)} dx.$$

В интегралах этого равенства сделаем замену переменных интегрирования

$$x = x^0 + \frac{1}{\mu_0} d^{-1}(x^0) \left(\xi - x^0 \right). \tag{1.4.13}$$

В результате такой замены шар $I(x^0)$ пространства переменных $x \in R^n$ переводится в единичный шар $J(x^0)$ в пространстве переменных $\xi \in R^n$:

$$J(x^0) = \left\{ \xi \in R^n : \left| \xi - x^0 \right| < 1 \right\}.$$

После замены переменных интегрирования подынтегральные функции мы обозначим теми же буквами, что и раньше, но пометим звездочками. Имеем

$$\left\{ \mu_0 d(x^0) \right\}^{-n+|k|+|l|} \int\limits_{J(x^0)} \sum_{|k|,|l| \leq r} d_*^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(\xi) b^*_{kl}(\xi) u_*^{(k)}(\xi) \overline{v_*^{(l)}(\xi)} d\xi =$$

$$= \left\{ \mu_0 d(x^0) \right\}^{-n} \int\limits_{J(x^0)} F_*(\xi) \overline{v_*(\xi)} d\xi.$$

Умножим это равенство на $d^{-2\alpha}(x^0)\left\{\mu_0 d(x^0)\right\}^{n-2r}$ и представим полученный результат в виде

$$\int\limits_{J(x^0)} \sum_{|k|,|l|\le r} c_{kl}(\xi) u_*^{(k)}(\xi)\overline{v_*^{(l)}(\xi)}d\xi = \int\limits_{J(x^0)} \Phi_*(\xi)\overline{v_*(\xi)}d\xi \qquad (1.4.14)$$

где

$$c_{kl}(\xi) = d^{-2\alpha}(x^0)\left\{\mu_0 d(x^0)\right\}^{-2r+|k|+|l|} d_*^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(\xi) b_{kl}^*(\xi), \qquad (1.4.15)$$

$$\Phi_*(\xi) = d^{-2\alpha}(x^0)\left\{\mu_0 d(x^0)\right\}^{-2r} F_*(\xi). \qquad (1.4.16)$$

Отметим, что равенство (1.4.14) имеет место для всех $v_*(\xi) \in C_0^\infty(J(x^0))$.

Поступая так же как при доказательстве теоремы 2.3 работы Н.В.Мирошина [50] легко доказывается, что коэффициенты $c_{kl}(\xi)$ удовлетворяют условию

$$\left|c_{kl}^{(s)}(\xi)\right| \le M < +\infty \quad \left(\xi \in J(x^0)\right) \qquad (1.4.17)$$

для любого мультииндекса s такого, что $|s| \le m$.

Лемма 1.4.1. *Пусть выполнены все условия теоремы (1.4.1). Пусть x^0 произвольная точка из R^n и μ_0 - достаточно большое число. Тогда для всех $f_* \in W_2^r(J(x^0))$ справедливо неравенство*

$$Re\int\limits_{J(x^0)} \sum_{|k|,|l|=r} c_{kl}(\xi) f_*^{(k)}(\xi)\overline{f_*^{(l)}(\xi)}d\xi \ge \varkappa \int\limits_{J(x^0)} \sum_{|k|=r} \left|f_*^{(k)}(\xi)\right|^2 d\xi. \qquad (1.4.18)$$

Доказательство. Пусть ν – достаточно малое положительное число. Тогда по условию нашей теоремы (см. (1.4.8)) существует число $R_\nu > 0$ такое, что

$$|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu \text{ при } |x| > R_\nu,\ |y| > R_\nu. \qquad (1.4.19)$$

Рассмотрим случай $|x^0| \le 2R_\nu$. Так как функция $\gamma(x)$ непрерывна в замкнутом шаре радиуса $2R_\nu$ с центром в начале координат, то для любого достаточно большого числа $\mu_0 > 0$ существует достаточно малое число $\varepsilon(\mu_0) > 0$ такое, что

$$\left|\gamma(x) - \gamma(x^0)\right| < \varepsilon(\mu_0), \quad \forall x \in I(x^0). \tag{1.4.20}$$

Полагая в неравенстве (1.4.7) $\zeta_k = f^{(k)}(x)$ и интегрируя по $x \in I(x^0)$, получим

$$\frac{1}{M} \sum_{|k|=r} \int\limits_{I(x^0)} \left|f^{(k)}(x)\right|^2 \leq$$

$$\leq \operatorname{Re} \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{I(x^0)} \gamma(x^0) b_{kl}(x) f^{(k)}(x) \overline{f^{(l)}(x)} dx + V(x_0; f), \tag{1.4.21}$$

где

$$V(x_0; f) = \left| \int\limits_{I(x^0)} \big(\gamma(x) - \gamma(x^0)\big) \sum_{|k|=|l|=r} b_{kl}(x) f^{(k)}(x) \overline{f^{(l)}(x)} dx \right|.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и учитывая ограниченность функций $b_{kl}(x)$ (см. (1.4.6)), имеем

$$V(x_0; f) \leq \int\limits_{I(x^0)} \left|\gamma(x) - \gamma(x^0)\right| \sum_{|k|=r} \left|f^{(k)}(x)\right|^2 dx.$$

Отсюда в силу неравенства (1.4.20) следует, что

$$V(x_0; f) \leq \varepsilon(\mu_0) \int\limits_{I(x^0)} \sum_{|k|=r} \left|f^{(k)}(x)\right|^2 dx. \tag{1.4.22}$$

Теперь подбирая положительное число μ_0 достаточно большим, из (1.4.21) и (1.4.22) находим

$$\left(\frac{1}{M} - \varepsilon(\mu_0)\right) \sum_{|k|=r} \int\limits_{I(x^0)} \left|f^{(k)}(x)\right|^2 \leq$$

$$\leq \operatorname{Re} \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{I(x^0)} \gamma(x^0) b_{kl}(x) f^{(k)}(x) \overline{f^{(l)}(x)} dx \tag{1.4.23}$$

Далее заметим, что функция $\gamma(x)$ непрерывна в замкнутом шаре радиуса $2R_\nu$ с центром в начале координат и не обращается в нуль в этом шаре. Поэтому существует число c_0 такое, что

$$\left|\gamma^{-1}(x)\right| \geq c_0 > 0$$

для всех $x \in R^n : |x| \leq 2R_\nu$. Учитывая это, из (1.4.23) имеем

$$\varkappa_0 \sum_{|k|=r} \int\limits_{I(x^0)} \left|f^{(k)}(x)\right|^2 \leq \operatorname{Re} \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{I(x^0)} b_{kl}(x) f^{(k)}(x) \overline{f^{(l)}(x)} dx, \qquad (1.4.24)$$

где $\varkappa_0$ – некоторое положительное число. Теперь можно заметить, что из (1.4.24) после замены переменных интегрирования (1.4.13) следует (1.4.18).

Таким образом, лемма 1.4.1 в случае $|x^0| \leq 2R_\nu$ доказана.

Рассмотрим случай $|x^0| > 2R_\nu$. Пусть $x \in I(x^0)$. Тогда

$$\left|x - x^0\right| < \frac{1}{\mu_0} d^{-1}(x^0) < \frac{1}{\mu_0}\left(1 + |x^0|\right)$$

и следовательно,

$$|x| > \left(1 - \frac{1}{\mu_0}\right)|x^0| - \frac{1}{\mu_0} > \left(1 - \frac{1}{\mu_0}\right) 2R_\nu - \frac{1}{\mu_0}.$$

Поэтому число R_ν можно подобрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$|x| > R_\nu \quad \forall x \in I(x^0).$$

Тогда из (1.4.8) следует, что

$$|\gamma(x) - \gamma(x^0)| < \nu \quad \forall x \in I(x^0). \qquad (1.4.25)$$

Так как $\nu > 0$ – достаточно малое число, то поступая так же, как в случае $|x^0| \leq 2R_\nu$, используя (1.4.25) вместо неравенства (1.4.20), получаем неравенство (1.4.24) в случае $|x^0| > 2R_\nu$, что и завершает доказательство леммы 1.4.1.

Дальнейшая часть доказательства теоремы (1.4.1) в случае $m \geq r$ основана на лемме 1.4.1 и проводится так же, как в доказательстве теоремы 2.3 работы [50].

Теперь рассмотрим случай $0 \leq m \leq r$. В этом случае $F \in \left(V^{r-m}_{2;\alpha+m}(R^n)\right)'$ – обобщенная функция и согласно теореме 1 из [20] она представляется в виде

$$< F, v >= \sum_{|k|\leq r-m} \int f_k(x)\overline{v^{(k)}(x)}dx, \quad \forall v \in V^{r-m}_{2;\alpha+m}(R^n),$$

и для ее нормы справедливо равенство

$$\left\|F;\, \left(V^{r-m}_{2;\alpha+m}(R^n)\right)'\right\| = \left\{\sum_{|k|\leq r-m} \left\|d^{-\alpha+r-|k|}f_k;\, L_2(R^n)\right\|\right\}^{1/2}.$$

Далее, поступая так же, как при выводе (1.4.14), получаем равенство

$$\int\limits_{J(x^0)} \sum_{|k|,|l|\leq r} c_{kl}(\xi)u_*^{(k)}(\xi)\overline{v_*^{(l)}(\xi)}d\xi =< F_*,\, v_* >=$$
$$= d^{-2\alpha}(x^0)\left\{\mu_0 d(x^0)\right\}^{-2r} \sum_{|k|\leq r-m} \left\{\mu_0 d(x^0)\right\}^{-|k|} \int\limits_{J(x^0)} f_k^*(\xi)\overline{v_*^{(k)}(\xi)}d\xi, \quad (1.4.26)$$

где коэффициенты $c_{kl}(\xi)$ определяются равенством (1.4.15) и удовлетворяют неравенствам (1.4.17), (1.4.18). Чтобы оценить норму функционала F_*, применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$|< F_*,\, v_* >| \leq d^{-2\alpha}(x^0)\left\{\mu_0 d(x^0)\right\}^{-2r} \times$$
$$\times \left\{\sum_{|k|\leq r-m} \left\{\mu_0 d(x^0)\right\}^{-2|k|} \int\limits_{J(x^0)} \left|f_k^*(\xi)\right|^2 d\xi\right\}^{1/2} \times$$
$$\times \left\|v_*;\, W_2^{r-m}(J(x^0))\right\|. \quad (1.4.27)$$

Отсюда следует, что $F_* \in \left(W_2^{r-m}(J(x^0))\right)'$, и справедлива следующая оценка

$$\left\|F_*;\ \left(W_2^{r-m}(J(x^0))\right)'\right\| \le$$
$$\le d^{-2\alpha}(x^0)\left\{\mu_0 d(x^0)\right\}^{-2r}\left\{\sum_{|k|\le r-m}\left\{\mu_0 d(x^0)\right\}^{-2|k|}\int\limits_{J(x^0)}\left|f_k^*(\xi)\right|^2 d\xi\right\}^{1/2}.$$

Теперь применяя к уравнению (1.4.26) априорную оценку леммы 1 п. 4.2 работы [45], получаем, что $u_* \in W_2^{r+m}(J_{1/2}(x^0))$, где

$$J_{1/2}(x^0) = \left\{\xi \in R^n:\ \left|\xi - x^0\right| < 1/2\right\}.$$

Далее, поступая так же, как в заключительной части доказательства теоремы 2.3 работы [50] получаем оценку (1.4.11).

Теорема 1.4.1 доказана полностью.

Теперь применяя теорему 1.4.1, исследуем гладкость решения задачи D_λ, рассмотренной в первом параграфе, то есть докажем теорему 1.1.2. Для удобства чтения еще раз сформулируем эту теорему

Теорема 1.4.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.1.1. Пусть также существует натуральное число m_0 такое, что*

$$\left|a_{kl}^{(s)}(x)\right| \le M d^{|s|}(x)$$

для любого мультииндекса s такого, что $|s| \le m_0$. Тогда при $\lambda \ge \lambda_0$, где λ_0 – такое же число, как в теореме 1.1.1,

для любого заданного элемента $F \in \left(V_{2;\alpha+m}^{r-m}(R^n)\right)'$, где целое число m такое, что $0 \le m \le m_0$, существует решение $u(x)$ задачи D_λ, оно принадлежит пространству $V_{2,\alpha-m}^{r+m}(R^n)$, и имеет место неравенство

$$\left\|u;\ V_{2,\alpha-m}^{r+m}(R^n)\right\| \le M\left\|F;\ V_{2,-\alpha-m}^{m-r}(R^n)\right\|, \tag{1.4.28}$$

где число $M > 0$ не зависит от $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$ и функционала F.

Доказательство. Так как выполняются все условия теоремы 1.1.1 и имеет место вложение

$$V^{m-r}_{2,-\alpha-m}(R^n) \to V^{-r}_{2,-\alpha}(R^n), \tag{1.4.29}$$

то при $\lambda \geq \lambda_0$ задача D_λ имеет решение $u(x) \in V^r_{2,\alpha}(R^n)$, которое удовлетворяет неравенству (см. (1.1.9))

$$\left\| u;\, V^r_{2,\alpha}(R^n) \right\| \leq M_0 \left\| F;\, V^{-r}_{2,-\alpha}(R^n) \right\|, \tag{1.4.30}$$

где число $M_0 > 0$ не зависит от $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$ и функционала F. Отсюда следует условие (1.4.10) теоремы 1.4.1, то есть

$$u(x) \in L_{2;\,\alpha+r}(R^n),$$

и в силу этой теоремы выполняется неравенство

$$\left\| u;\, V^{r+m}_{2;\,\alpha-m}(R^n) \right\| \leq M_1 \left\{ \left\| u;\, V^r_{2;\,\alpha}(R^n) \right\| + \left\| F;\, \left(V^{r-m}_{2;\alpha+m}(R^n) \right)' \right\| \right\}, \tag{1.4.31}$$

где число $M_1 > 0$ не зависит от $u(x)$ и F.

Далее заметим, что

$$\left\| F;\, V^{-r}_{2,-\alpha}(R^n) \right\| \leq C_0 \left\| F;\, V^{m-r}_{2,-\alpha-m}(R^n) \right\|$$

в силу вложения (1.4.29), и поэтому из (1.4.30), (1.4.31) имеем

$$\left\| u;\, V^{r+m}_{2;\,\alpha-m}(R^n) \right\| \leq M_1 \left(1 + M_0 C_0\right) \left\| F;\, \left(V^{r-m}_{2;\alpha+m}(R^n) \right)' \right\|.$$

Так как

$$\left(V^{r-m}_{2;\alpha+m}(R^n) \right)' = V^{m-r}_{-\alpha-m}(R^n),$$

то из последнего неравенства следует (1.4.28).

Теорема 1.4.2, следовательно, и теорема 1.1.2, доказана.

Глава 2

Вариационная задачи Дирихле для эллиптических операторов с несогласованным вырождением коэффициентов

В этой главе, состоящей из трех параграфов, изучается вариационная задача Дирихле для одного класса эллиптических операторов высшего порядка во всем n-мерном евклидовом пространстве в случае несогласованности вырождения коэффициентов на бесконечности. Постановка исследуемой задачи связана с интегро-дифференциальной полуторалинейной формой, которая может не удовлетворять условию коэрцитивности. Вводится понятие старшей формы и в соответствии с поведением коэффициентов старших форм определяется основное весовое нормированное пространство, в котором ищется решение основной задачи работы. В первом параграфе сформулированы основные результаты главы. Во втором параграфе подробно доказывается теорема 2.1.1 о разрешимости однородной вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов во всем пространстве с несогласованным вырождением коэффициентов, ассоциированных с некоэрцитивными формами. Здесь так же, как в первой главе, однородность граничных условий задачи Дирихле понимается в том смысле, что решение исследуемой задачи ищется в функциональном пространстве, в котором плотен класс бесконечно дифференцируемых финитных функций. В третьем параграфе доказывается теорема 2.1.2 о гладкости решения исследуемой вариационной задачи Дирихле.

2.1. Формулировка основных результатов

Пусть R^n – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ – длина мультииндекса k. Обозначим через $u^{(k)}(x)$ обобщенную в смысле С.Л.Соболева производную функции $u(x)$ мультииндекса k. Пусть r – натуральное, α, p – вещественные числа и $1 \leq p < \infty$. Символом $V^r_{p,\alpha}(R^n)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных во всем пространстве R^n, имеющих все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные порядка r с конечной нормой

$$\|u; V^r_{p;\,\alpha}(R^n)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int d^{p\alpha}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx + \int d^{p(\alpha+r)}(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

где $d(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2}$. Здесь и далее все интегралы берутся по всему пространству R^n.

Пусть r – натуральное число и J – некоторое подмножество множества $\{0, 1, \ldots, r\}$, причем $r \in J$. Пусть α_j, $j \in J$, – вещественные числа. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L[u] = \sum_{|k|=|l|=j \in J} (-1)^j \left(d(x)^{2\alpha_j} a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \right)^{(l)}, \tag{2.1.1}$$

который понимается в смысле теории распределений на R^n. Предполагается, что коэффициенты $a_{kl}(x)$, $x \in R^n$, являются ограниченными комплекснозначными функциями.

Определение 2.1.1. *Вырождение коэффициентов оператора (2.1.1) называется* **согласованным**, *если существует число α такое, что $\alpha_j = \alpha - j + r$ при всех $j \in J$. В противном случае оно называется* **несогласованным**.

Постановка вариационной задачи Дирихле для оператора (2.1.1) связана со следующей интегро-дифференциальной полуторалинейной формой

$$B[u,\, v] = \sum_{|k|=|l|=j\in J} \int d^{2\alpha_j}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx. \tag{2.1.2}$$

Из приведенного выше определения следует, что дифференциальные операторы, рассмотренные в первой главе, имели согласованное вырождение коэффициентов. В отличие от этого, в настоящей главе исследуется разрешимость и гладкость решения вариационной задачи Дирихле, связанной с оператором (2.1.1) в случае несогласованности вырождения его коэффициентов и некоэрцитивности формы (2.1.2). Здесь так же, как в первой главе, понятие коэрцитивности формы понимается в смысле определения 2.0.1 работы [52]: если H_0 – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_0$ и нормой $\|\cdot\|_0$, H_+ – другое гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_+$, плотно вложенное в H_0, то определенная в H_+ полуторалинейная форма $P[u,\, v]$ называется H_+-коэрцитивной относительно H_0, если найдутся числа $\mu_0 \in R$, $\delta_0 > 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} P[u,\, u] + \mu_0 \|u\|_0^2 \geq \delta_0 \|u\|_+^2$$

для всех $u \in H_+$.

Форму (2.1.2) представим в виде

$$B[u,\, v] = \sum_{j\in J} B_j[u,\, v], \text{ где } B_j[u,\, v] = \sum_{|k|=|l|=j} \int d^{2\alpha_j}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx$$

и дадим следующее определение

Определение 2.1.2. *Форму $B_r[u,\, v]$ назовем* **старшей***. Далее обозначим для удобства r через j_1. Другие старшие формы определим по индукции. Пусть уже указаны старшие формы $B_{j_1}[u,\, v], \ldots, B_{j_{p-1}}[u,\, v]$ $(j_1 > j_2 > \cdots > j_{p-1})$ и пусть j_p наибольшее число из множества J, меньше j_{p-1}, для которого выполняется неравенство*

$$\alpha_{j_p} + j_p < \min_{1\leq h\leq p-1} (\alpha_{j_h} + j_h).$$

Тогда форму $B_{j_p}[u,\, v]$ также назовем **старшей**. *Если же такого j_p не найдется, то* **старшими** *будем называть только формы $B_{j_1}[u,\, v],\, \ldots,\, B_{j_{p-1}}[u,\, v]$, при этом $p-1$ обозначим через p.*

Пусть
$$\delta = \min_{1\le h\le p}\{\alpha_{j_h} + j_h\}, \tag{2.1.3}$$
и $L_{2,\,\delta}(R^n)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением
$$(u,\, v)_\delta = \int d^{2\delta}(x)u(x)\overline{v(x)}dx. \tag{2.1.4}$$
Обозначим через $\|f;\, L_{2,\,\delta}(R^n)\|$ норму пространства $L_{2,\,\delta}(R^n)$, порожденную скалярным произведением (2.1.4).

Вводим пространство $\mathbb{H}_+$ комплекснозначных функций $u(x)$, $x\in R^n$, с конечной нормой
$$\|u;\, \mathbb{H}_+\| = \left\{\sum_{h=1}^{p}\left\|u;\, V^{j_h}_{2;\alpha_{j_h}}(R^n)\right\|^2\right\}^{1/2}. \tag{2.1.5}$$
Из свойства пространства $V^r_{2,\,\alpha}(R^n)$ (см., например, [4]) следует, что множество $C_0^\infty(R^n)$ плотно в пространстве $\mathbb{H}_+$ и
$$\|f;\, L_{2,\,\delta}(R^n)\| \le \|u;\, \mathbb{H}_+\| \quad \forall u\in\mathbb{H}_+.$$

Символом $\mathbb{H}_-$ обозначим пополнение пространства $L_{2,\,\delta}(R^n)$ по норме
$$\|f;\, \mathbb{H}_-\| = \sup\frac{|(f,\, u)_\delta|}{\|u;\, \mathbb{H}_+\|},$$
где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $u\in\mathbb{H}_+$. Элементы из $\mathbb{H}_-$ отождествляются с соответствующими антилинейными непрерывными функционалами над $\mathbb{H}_+$. Действие функционала $F\in\mathbb{H}_-$ на функцию $u\in\mathbb{H}_+$ будем обозначать символом $\langle F,\, v\rangle$.

Рассмотрим вариационную задачу Дирихле для оператора (2.1.1).

Задача $\mathbb{D}_\lambda$. *Для заданного функционала $F\in\mathbb{H}_-$ требуется найти решение $u(x)$ уравнения*
$$B[u,\, v] + \lambda(u,\, v)_\delta =< F,\, v > \quad \forall v\in C_0^\infty(R^n), \tag{2.1.6}$$

принадлежащего пространству $\mathbb{H}_+$.

Прежде чем сформулировать основной результат нашей работы о разрешимости задачи $\mathbb{D}_\lambda$, для каждого $h = \overline{1,\, p}$ вводим функцию

$$A_h(x,\, \zeta) = \sum_{|k|=|l|=j_h} a_{kl}(x)\zeta_k\overline{\zeta_l},$$

где $x \in R^n$ и $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|=j_h}$ – набор комплексных чисел.

Далее будем предполагать, что функция $\arg z$ принимает значения из полуинтервала $(-\pi,\, \pi]$.

Теорема 2.1.1. *Пусть для каждого* $h \in \{1,\, \ldots,\, p\}$ *найдутся числа* $\varphi_h \in (o,\, \pi), M > 0$ *и отличная от нуля комплекснозначная всюду непрерывная функция* $\gamma_h(x)$, $x \in R^n$, *такие, что для всех* $x \in R^n$, $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\le r} \subset \mathbb{C}$ *выполняются следующие неравенства:*

$$|arg\, A_h(x,\, \zeta)| < \varphi_h, \tag{2.1.7}$$

$$\sum_{|k|=j_h} |\zeta_k|^2 \le M Re\, \{\gamma_h(x)A_h(x,\, \zeta)\}\,. \tag{2.1.8}$$

Пусть для любого числа $\nu > 0$ *существует число* $R_\nu > 0$ *такое, что* $|\gamma_h(x) - \gamma_h(y)| < \nu$ *для любого* $h = \overline{1,\, p}$ *и всех* $x,\, y \in R^n$ *таких, что* $|x| > R_\nu$, $|y| > R_\nu$.

Тогда существует число $\lambda_0 \ge 0$ *такое, что если* $\lambda \ge \lambda_0$, *то для любого заданного функционала* $F \in \mathbb{H}_-$ *задача* $\mathbb{D}_\lambda$ *имеет единственное решение, и при этом справедлива оценка*

$$\|u;\, \mathbb{H}_+\| \le M_0\, \|F;\, \mathbb{H}_-\|\,, \tag{2.1.9}$$

где число $M_0 > 0$ *не зависит от* $\lambda \in [\lambda_0,\, +\infty)$ *и функционала* F.

Далее исследуем гладкость решения задачи $\mathbb{D}_\lambda$ в зависимости от гладкости коэффициентов $a_{kl}(x)$ эллиптического оператора (2.1.1) и правой части F уравнения (2.1.6). Для этого сначала определим соответствующие функциональные пространства.

Пусть s – целое неотрицательное число. Вводим пространство $\mathbb{H}_+^s$ комплекснозначных функций $u(x)$, $x \in R^n$, с конечной нормой

$$\|u;\, \mathbb{H}_+^s\| = \left\{ \sum_{h=1}^{p} \left\| u;\, V_{2;\alpha_{j_h}-s}^{j_h+s}(R^n) \right\|^2 \right\}^{1/2}. \qquad (2.1.10)$$

Нетрудно проверить, что

$$\|f;\, L_{2,\,\delta}(R^n)\| \le \|u;\, \mathbb{H}_+^s\| \quad \forall u \in \mathbb{H}_+,$$

для любого целого неотрицательного числа s. Следовательно $\mathbb{H}_+^s$ вложено в $L_{2,\,\delta}(R^n)$.

Символом $\mathbb{H}_-^{-s}$ обозначим пополнение пространства $L_{2,\,\delta}(R^n)$ по норме

$$\left\| f;\, \mathbb{H}_-^{-s} \right\| = \sup \frac{|(f,\, u)_\delta|}{\|u;\, \mathbb{H}_+^s\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $u \in \mathbb{H}_+^s$. Элементы из $\mathbb{H}_-^{-s}$ отождествляются с соответствующими антилинейными непрерывными функционалами над $\mathbb{H}_+^s$. Действие функционала $F \in \mathbb{H}_-^{-s}$ на функцию $u \in \mathbb{H}_+^s$ будем обозначать символом $\langle F,\, v\rangle$.

Замечание 2.1.1. *Из определений пространств $\mathbb{H}_+$, $\mathbb{H}_-$ $\mathbb{H}_+^s$ и $\mathbb{H}_-^{-s}$ следует, что пространства $\mathbb{H}_+^s$, $\mathbb{H}_-^{-s}$ при $s = 0$ совпадают с $\mathbb{H}_+$, $\mathbb{H}_-$, соответственно, то есть $\mathbb{H}_+^0 = \mathbb{H}_+$, $\mathbb{H}_-^0 = \mathbb{H}_-$.*

Теорема 2.1.2. *При всех целых $s \ge 0$ и вещественных α_{j_h}, $h = \overline{1,\, p}$, множество $C_0^\infty(R^n)$ плотно в пространстве $\mathbb{H}_+^s$, и имеют место следующие вложения*

$$\mathbb{H}_+^s \to \mathbb{H}_+^0 \to L_{2,\,\delta}(R^n) \to \mathbb{H}_-^0 \to \mathbb{H}_-^{-s}.$$

Теорема 2.1.3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.1.1, и пусть существует натуральное число m_0 такое, что*

$$\left| a_{kl}^{(s)}(x) \right| \le M d^{|s|}(x) \qquad (2.1.11)$$

для любого мультииндекса s *такого, что* $|s| \le m_0$.

Тогда существует число $\lambda_0 \ge 0$ *такое, что если* $\lambda \ge \lambda_0$, *то для любого заданного элемента* $F \in \mathbb{H}_-^{-m}$, *где целое число* m *такое, что* $0 \le m \le m_0$, *существует решение* $u(x)$ *задачи* $\mathbb{D}_\lambda$, *оно принадлежит пространству* $\mathbb{H}_+^m$ *и имеет место неравенство*

$$\|u;\, \mathbb{H}_+^m\| \le M_0 \left\|F;\, \mathbb{H}_-^{-m}\right\|, \tag{2.1.12}$$

где число $M_0 > 0$ *не зависит от* $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$ *и функционала* F.

2.2. Доказательство теоремы 2.1.1

Доказательство теоремы 2.1.1 проводится техникой, примененной в параграфе 1.2 при доказательстве теоремы 1.1.1. В процессе доказательства важную роль играют старшие формы, поэтому их индексы далее обозначим через j_h, а индексы оставшихся форм – через i_s.

1. Пусть ν – достаточно малое положительное число, и пусть $\varphi_m(x)$, $\eta_m(x)$ $(m = 1,\, 2\, 3,\, \ldots)$ – такие же неотрицательные функции, как в лемме 1.2.1.

В каждом множестве $\operatorname{supp} \varphi_m$ $(m = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots)$ фиксируем точку x_m и рассмотрим полуторалинейную форму

$$B_{\lambda;m}^{(0)}[u, v] = \sum_{j \in J} B_{m,\,j}^{(0)}[u, v] + \lambda \int d^{2\delta} u(x) \overline{v(x)} dx, \tag{2.2.1}$$

где

$$B_{m,\,j}^{(0)}[u, v] = \sum_{|k|=|l|=j} \int d^{2\alpha_j}(x) a_{klm}^{(0)}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \tag{2.2.2}$$

$$a_{klm}^{(0)}(x) = (1 - \eta_m(x)) \gamma_h(x_m) a_{kl}(x_m) + \eta_m(x) \gamma_h(x) a_{kl}(x) \tag{2.2.3}$$

при $|k| = |l| = j_h$, $h = \overline{1,\, p}$, и

$$a_{klm}^{(0)}(x) = (1 - \eta_m(x)) a_{kl}(x_m) + \eta_m(x) a_{kl}(x) \tag{2.2.4}$$

при $|k|=|l|=i_s$, $s=\overline{1,\, q}$.

Далее для удобства записи форму (2.2.1) представим в виде

$$B^{(0)}_{\lambda;m}[u,v]=\sum_{h=1}^{p}B^{(0)}_{m,\,j_h}[u,v]+\sum_{s=1}^{q}B^{(0)}_{m,\,i_s}[u,v]. \qquad (2.2.5)$$

Из ограниченности коэффициентов $a_{kl}(x)$, $|k|,|l|\le r$, следует ограниченность коэффициентов $a^{(0)}_{klm}(x)$. Поэтому применяя неравенство Коши-Буняковского для старших форм имеем

$$\left|B^{(0)}_{m,\,j_h}[u,v]\right|\le M_0\int\sum_{|k|=|l|=j_h}d^{2\alpha_{j_h}}(x)\,|\,u^{(k)}(x)\left|v^{(l)}(x)\right|dx\le$$

$$\le M_0\left\{\sum_{|k|=j_h}\int\left(d^{\alpha_{j_h}}(x)\left|u^{(k)}(x)\right|\right)^2dx\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\left\{\sum_{|l|=j_h}\int\left(d^{\alpha_{j_h}}(x)\left|v^{(l)}(x)\right|\right)^2dx\right\}^{1/2}\le$$

$$\le M_0\|u;V^{j_h}_{2;\alpha_{j_h}}(R^n)\|\cdot\|v;V^{j_h}_{2;\alpha_{j_h}}(R^n)\|\le M_0\left\|u;\,\mathbb{H}_+\right\|\left\|v;\,\mathbb{H}_+\right\|. \qquad (2.2.6)$$

Теперь рассмотрим форму $B^{(0)}_{m,\,i_s}[u,v]$, которая не является старшей. Согласно определения 2.1.2, j_p – индекс старшей формы, если $j_p<j_{p-1}$ и

$$\alpha_{j_p}+j_p<\min_{1\le h\le p-1}\left(\alpha_{j_h}+j_h\right).$$

Следовательно, для любого индекса нестаршей формы i_s находится индекс старшей формы j_h такой, что

$$j_h>i_s,\quad \alpha_{i_s}+i_s\ge\alpha_{j_h}+j_h. \qquad (2.2.7)$$

Из теоремы вложения для пространств $V^r_{2;\,\alpha}(R^n)$ (см. теорему 1.2.1) следует, что

$$\left\|u;\,V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right\|\ge\left\|u;\,V^{r-m}_{2,\,\alpha+m}(R^n)\right\|$$

для $m : 0 \le m \le r$. Отсюда следует, что

$$\left\| u;\, V^{j_h}_{2,\,\alpha_{j_h}}(R^n) \right\| \ge \left\| u;\, V^{i_s}_{2,\,\alpha_{j_h}+j_h-i_s}(R^n) \right\|.$$

Так как $0 < d(x) \le 1, \forall x \in R^n$, то в силу неравенства (2.2.7) имеем

$$\left\| u;\, V^{i_s}_{2,\,\alpha_{j_h}+j_h-i_s}(R^n) \right\| \ge \left\| u;\, V^{i_s}_{2,\,\alpha_{i_s}}(R^n) \right\|.$$

Отсюда в силу определения пространства $\mathbb{H}_+$ следует, что

$$\left\| u;\, V^{i_s}_{2,\,\alpha_{i_s}}(R^n) \right\| \le M_1 \left\| u;\, V^{j_h}_{2,\,\alpha_{j_h}}(R^n) \right\| \le M_1 \left\| u;\, \mathbb{H}_+ \right\|. \qquad (2.2.8)$$

Поэтому

$$\left| B^{(0)}_{m,\,i_s}[u,v] \right| \le M_2 \int \sum_{|k|=|l|=i_s} d^{2\alpha_{i_s}}(x) \,|\, u^{(k)}(x) \left| v^{(l)}(x) \right| dx \le$$

$$\le M_2 \left\{ \sum_{|k|=i_s} \int \left(d^{\alpha_{i_s}}(x) \left| u^{(k)}(x) \right| \right)^2 dx \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{|l|=i_s} \int \left(d^{\alpha_{i_s}}(x) \left| v^{(l)}(x) \right| \right)^2 dx \right\}^{1/2} \le$$

$$\le M_2 \|u; V^{i_s}_{2;\alpha_{i_s}}(R^n)\| \cdot \|v; V^{i_s}_{2;\alpha_{i_s}}(R^n)\| \le M_2 \left\| u;\, \mathbb{H}_+ \right\| \left\| v;\, \mathbb{H}_+ \right\|. \qquad (2.2.9)$$

Так как $d(x) = (1+|x|^2)^{-1/2}$ и $\delta = \min\limits_{1\le h\le p} \{\alpha_{j_h} + j_h\}$, то

$$\|u;\, L_{2,\,\delta}(R^n)\| \le \|u;\, \mathbb{H}_+\|. \qquad (2.2.10)$$

Поэтому

$$\left| \int d^{2\delta} u(x) \overline{v(x)} dx \right| \le \|u;\, \mathbb{H}_+\| \, \|v;\, \mathbb{H}_+\| \qquad (2.2.11)$$

Теперь применяя неравенства (2.2.6), (2.2.9), (2.2.11), из (2.2.1), (2.2.5) имеем

$$\left| B^{(0)}_{\lambda;m}[u,v] \right| \le \sum_{h=1}^{p} \left| B^{(0)}_{m,\,j_h}[u,v] \right| + \sum_{s=1}^{q} \left| B^{(0)}_{m,\,i_s}[u,v] \right| + |\lambda| \left| \int d^{2\delta} u(x) \overline{v(x)} dx \right| \le$$

$$\leq (M_3 + |\lambda|)\, \|u;\, \mathbb{H}_+\|\, \|v;\, \mathbb{H}_+\| \tag{2.2.12}$$

для всех $u, v \in \mathbb{H}_+$.

Из условия (2.1.8) следует, что

$$\mathrm{Re}\left\{\gamma_h(x_m) \sum_{|k|=|l|=j_h} a_{kl}(x_m)\zeta_i\overline{\zeta_j}\right\} \geq c \sum_{|k|=j_h} |\zeta_k|^2,$$

$$\mathrm{Re}\left\{\gamma_h(x) \sum_{|k|=|l|=j_h} a_{kl}(x)\zeta_i\overline{\zeta_j}\right\} \geq c \sum_{|k|=j_h} |\zeta_k|^2$$

для всех $m = 1, 2, 3, \ldots, x \in R^n$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\leq r} \subset \mathbb{C}$. В силу этих неравенств из (2.2.3) следует, что

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{|k|=|l|=j_h} a^{(0)}_{kl}(x)(x)\zeta_i\overline{\zeta_j}\right\} \geq c \sum_{|k|=j_h} |\zeta_k|^2$$

для всех $m = 1, 2, 3, \ldots, x \in R^n$, $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|=J_h} \subset \mathbb{C}$.

Подставляя в этом неравенстве $\zeta_k = d^{\alpha_{j_h}}(x)u^{(k)}(x)$ после интегрирования по R^n получим

$$\mathrm{Re}\, B^{(0)}_{m,\, j_h}[u, u] \geq C_0 \sum_{|k|=j_h} \int d^{2\alpha_{j_h}}(x) \left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx. \tag{2.2.13}$$

Отсюда и из определения нормы пространства $V^r_{2;\alpha}(R^n)$ следует, что

$$\mathrm{Re}\, B^{(0)}_{m,\, j_h}[u, u] + \lambda_h \left\|u;\, L_{2,\, \alpha_{j_h}+j_h}(R^n)\right\|^2 \geq C_0 \left\|u;\, V^{j_h}_{2,\, \alpha_{j_h}}(R^n)\right\|^2$$

для всех $u \in C^\infty_0(R^n)$.

Так как $d(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2}$ и $\delta = \min\limits_{1\leq h\leq p}\{\alpha_{j_h} + j_h\}$, то

$$d^\delta(x) \geq d^{\alpha_{j_h}+j_h}(x) \quad \text{для всех} \quad 1 \leq h \leq p,\ x \in R^n.$$

С другой стороны из (2.2.7) следует, что

$$d^{\alpha_{j_h}+j_h}(x) \geq d^{\alpha_{i_s}+i_s}(x).$$

Поэтому

$$d^{\delta}(x) \geq d^{\alpha_j+j}(x) \quad \text{для всех} \quad j \in J,\ x \in R^n.$$

Таким образом, доказано неравенство

$$\left\| u;\, L_{2,\,\alpha_j+j}(R^n) \right\| \leq M_1 \left\| u;\, L_{2,\,\delta}(R^n) \right\| \quad \forall j \in J,\ u \in C_0^{\infty}(R^n). \qquad (2.2.14)$$

Отсюда в силу неравенства (2.2.13) и определения пространства $\mathbb{H}_+$ следует неравенство

$$\operatorname{Re} \sum_{h=1}^{p} B^{(0)}_{m,\,j_h}[u,u] + \lambda_0' \left\| u;\, L_{2,\,\delta}(R^n) \right\|^2 \geq c_0' \left\| u;\, \mathbb{H}_+ \right\|^2, \qquad (2.2.15)$$

$$u \in C_0^{\infty}(R^n),$$

где λ_0', c_0' – некоторые положительные числа.

Теперь рассмотрим нестаршую форму $B^{(0)}_{m,\,i_s}[u,v]$. В силу ограниченности коэффициентов этой формы имеем

$$\left| B^{(0)}_{m,\,i_s}[u,v] \right| \leq M_2 \left\{ \sum_{|k|=i_s} \int d^{2\alpha_{i_s}}(x) \left| u^{(k)}(x) \right|^2 dx \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{|l|=i_s} \int d^{2\alpha_{i_s}}(x) \left| v^{(l)}(x) \right|^2 dx \right\}^{1/2} =$$

$$= M_2 \left\| u;\, L^{i_s}_{2;\,\alpha_{i_s}}(R^n) \right\| \left\| v;\, L^{i_s}_{2;\,\alpha_{i_s}}(R^n) \right\|. \qquad (2.2.16)$$

Далее заметим, что для любого индекса нестаршей формы i_s находится индекс старшей формы j_h такой, что выполняются неравенства (см. (2.2.7))

$$j_h > i_s, \quad \alpha_{i_s} + i_s \geq \alpha_{j_h} + j_h.$$

С другой стороны, из леммы 2.2 работы [22], в частности, следует, что для любого $\tau > 0$ и всех $u \in C_0^{\infty}(R^n)$ справедливо неравенство

$$\sum_{|k|=i_s} \left\| d^{-i_s+\alpha_{j_h}+j_h} D^k u;\, L_{2,}(R^n) \right\| \leq \tau \| u; L^{j_h}_{2;\alpha_{j_h}}(R^n) \| + c_0 \tau^{-\mu} \left\| u;\, L_{2,\,\alpha_{j_h}+j_h}(R^n) \right\|,$$

где $\mu = i_s/(j_h - i_s)$. Отсюда, в силу неравенства $\alpha_{i_s} \geq -i_s + \alpha_{j_h} + j_h$, следует, что

$$\left\| u;\, L^{i_s}_{2;\,\alpha_{i_s}}(R^n) \right\| \leq \tau \| u; L^{j_h}_{2;\alpha_{j_h}}(R^n) \| + c_0 \tau^{-\mu} \left\| u;\, L_{2,\,\alpha_{j_h}+j_h}(R^n) \right\|. \quad (2.2.17)$$

Так как $0 \neq i_s < j_h$, то μ – конечное положительное число.

Применяя неравенство (2.2.17), из (2.2.16) имеем

$$\left| B^{(0)}_{m,\,i_s}[u,u] \right| \leq \tau^2 \| u; L^{j_h}_{2;\alpha_{j_h}}(R^n) \|^2 + c_0 \tau^{-2\mu} \left\| u;\, L_{2,\,\alpha_{j_h}+j_h}(R^n) \right\|^2. \quad (2.2.18)$$

Далее, используя неравенства (2.2.13), (2.2.18), получаем

$$\operatorname{Re} B^{(0)}_{m,\,j_h}[u,u] + \operatorname{Re} B^{(0)}_{m,\,i_s}[u,u] \geq \operatorname{Re} B^{(0)}_{m,\,j_h}[u,u] - \left| B^{(0)}_{m,\,i_s}[u,u] \right| \geq$$
$$\geq \left(C_0 - \tau^2 \right) \| u; L^{j_h}_{2;\alpha_{j_h}}(R^n) \|^2 - c_0 \tau^{-2\mu} \left\| u;\, L_{2,\,\alpha_{j_h}+j_h}(R^n) \right\|^2.$$

Тогда подбирая подходящее значение параметра τ, находим

$$\operatorname{Re} B^{(0)}_{m,\,j_h}[u,u] + \operatorname{Re} B^{(0)}_{m,\,i_s}[u,u] + \lambda'_h \left\| u;\, L_{2,\,\alpha_{j_h}+j_h}(R^n) \right\|^2 \geq$$
$$\geq C_0 \left\| u;\, V^{j_h}_{2,\,\alpha_{j_h}}(R^n) \right\|^2.$$

Далее, принимая во внимание определения форм $B^{(0)}_{m,\,j_h}[u,u]$, $B^{(0)}_{m,\,i_s}[u,u]$ и пространства $\mathbb{H}_+$, получаем неравенство

$$\operatorname{Re} B^{(0)}_{\lambda;m}[u,u] = \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{p} B^{(0)}_{m,\,j_h}[u,u] + \operatorname{Re} \sum_{s=1}^{q} B^{(0)}_{m,\,i_s}[u,u] +$$
$$+ \lambda \left\| u;\, L_{2,\,\delta}(R^n) \right\|^2 \geq c''_0 \left\| u;\, \mathbb{H}_+ \right\|^2, \quad (2.2.19)$$

$$\left(\lambda \geq \lambda''_0,\ m = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots, \quad u \in \mathbb{H}_+ \right),$$

где λ''_0, c''_0 – некоторые положительные постоянные.

2. Теперь рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,v] = \sum_{h=1}^{p} \sum_{|k|=|l|=j_h} \int d^{2\alpha_j}(x) \widehat{a}_{klm}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx + \sum_{s=1}^{q} B^{(0)}_{m,\,i_s}[u,v] +$$
$$+ \lambda \int d^{2\delta} u(x) \overline{v(x)} dx,$$

где

$$\widehat{a}_{klm}(x) = [(1-\eta_m(x))a_{kl}(x_m) + \eta_m(x)a_{kl}(x)]\gamma_h(x_m)$$

при $|k| = |l| = j_h,\ h = \overline{1,\, p}$. Так как

$$a^{(0)}_{klm}(x) - \widehat{a}_{klm}(x) = \eta_m(x)(\gamma_h(x) - \gamma_h(x_m))a_{kl}(x)\ (|k| = |l| = j_h,\ h = \overline{1,\, p})$$

и коэффициенты $a_{kl}(x)$ ограничены, то действуя так же, как в доказательстве неравенства (2.2.12), с помощью неравенства Коши-Буняковского получим

$$|B^{(0)}_{\lambda;m}[u,v] - \mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,v]| \le M\,\Lambda\,\|u;\,\mathbb{H}_+\| \cdot \|v;\,\mathbb{H}_+\|$$

для всех $u, v \in C^\infty_0(R^n)$. Здесь $\Lambda = \sup|\eta_m(x)(\gamma_m(x) - \gamma(x_m))|$, где супремум берется по всем $x \in R_n$, $h = \overline{1,\, p}$ и всем $m = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$.

Применяя это неравенство, из (2.2.19) находим

$$C_0\|u;\,\mathbb{H}_+\|^2 \le \mathrm{Re}\left(B^{(0)}_{\lambda;m}[u,u] - \mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,u]\right) + \mathrm{Re}\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,u] \le$$
$$\le \mathrm{Re}\,\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,u] + M\,\Lambda\,\|u;\,\mathbb{H}_+\|^2. \quad (2.2.20)$$

Так как

$$|\eta_m(x)(\gamma_h(x) - \gamma_h(x_m))| < \nu, \quad h = \overline{1,\, p}, \quad m = 1,\, 2, \ldots$$

и ν – достаточно малое положительное число, то из (2.2.20) следует, что

$$c_0\|u;\,\mathbb{H}_+\|^2 \le \mathrm{Re}\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,u] \quad (2.2.21)$$

для всех $u \in C^\infty_0(R^n)$. Здесь $\lambda \ge \lambda''_0$ и λ''_0 – такое же положительное число, как в (2.2.19).

Замечание 2.2.1 Из приведенных выше обсуждений в ходе доказательства неравенств (2.2.12), (2.2.19) видно, что различие между числами φ_h и между функциями $\gamma_h(x)$ в условиях (2.1.7), (2.1.8) – несущественны. Поэтому, не ограничивая общности, далее будем считать, что

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_p = \varphi, \quad \gamma_1(x) = \gamma_2(x) = \cdots = \gamma_p(x) = \gamma(x). \quad (2.2.22)$$

3. Вводим следующую полуторалинейную форму

$$\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v]=\sum_{h=1}^{p}\sum_{|k|=|l|=j_h}\int d^{2\alpha_j}(x)a_{klm}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx+$$

$$+\gamma^{-1}(x_m)\sum_{s=1}^{q}B^{(0)}_{m,\,i_s}[u,v]+\lambda\int d^{2\delta}(x)u(x)\overline{v(x)}dx, \qquad (2.2.23)$$

где

$$a_{klm}(x)=(1-\eta_m(x))a_{kl}(x_m)+\eta_m(x)a_{kl}(x),\ |k|=|l|=j_h,\ h=\overline{1,\,p}.$$

Заметим, что

$$\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,v]=\gamma(x_m)\mathcal{B}_{\lambda_m;m}[u,v],$$

где

$$\lambda_m=\lambda\gamma^{-1}(x_m)$$

Поэтому из неравенства (2.2.21) следует, что при $\lambda\ \geq\ \lambda_0$, где λ_0 – некоторое достаточно большое число, имеет место неравенство

$$c_0\|u;\,\mathbb{H}_+\|^2\leq \mathrm{Re}\,\{\gamma(x_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u]\} \qquad (2.2.24)$$

для всех $u\in C_0^\infty(R^n)$.

4. Так же, как при доказательстве теоремы 1.1.1 в параграфе 1.3, не нарушая общности, можно считать, что число (см. замечание 2.2.1) $\varphi_h=\varphi$ в условии (2.1.7) такое, что $\varphi>\pi/2$. В силу (2.1.7) неравенство (2.1.8) будет выполняться также и в том случае, если $\gamma(x)$ заменить на $\exp(i\theta(x))$, где

$$\theta(x)=\min\{\varphi-\pi/2,\ |\arg\gamma(x)|\}\,(\mathrm{sign}\,\arg\gamma(x)).$$

Поэтому из неравенства (2.2.24) следует, что

$$c_0\|u;\,\mathbb{H}_+\|^2\leq \mathrm{Re}\,\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u]\} \qquad (2.2.25)$$

для всех $u\in C_0^\infty(R^n)$. Здесь и далее $\theta_m=\theta(x_m)$, $\qquad m=1,\,2,\ldots.$

Поступая так же, как в доказательстве неравенства (2.2.12), находим

$$|\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v]| \le (M_0 + |\lambda|)\|u;\, \mathbb{H}_+\| \cdot \|v;\, \mathbb{H}_+\| \tag{2.2.26}$$

для всех $u,\, v \in C_0^\infty(R^n)$.

Неравенства (2.2.25), (2.2.26) позволяют нам применить теорему 1.2.2 (т.е. теорему Лакса-Мильграма [52, теорема 2.0.1]). Согласно этой теореме, при $\mathbf{H}_0 = L_{2,\delta}(R^n)$, $\mathring{\mathbf{H}}_+ = \mathbb{H}_+$ и $\mathring{\mathbf{H}}_- = \mathbb{H}_-$ существует оператор $\widetilde{\mathcal{R}}_m(\lambda)$, осуществляющий гомеоморфизм пространств $\mathbb{H}_+$ и $\mathbb{H}_-$, такой, что

$$\left\langle \widetilde{\mathcal{R}}_m(\lambda)u,\, v \right\rangle = \exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v] \tag{2.2.27}$$

для всех $v \in \mathbb{H}_+$.

Обозначим

$$\mathcal{R}_m(\lambda) = \widetilde{\mathcal{R}}_m^{-1}(\lambda) : \mathbb{H}_- \to \mathbb{H}_+.$$

Тогда из равенства (2.2.27) следует, что

$$\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[\mathcal{R}_m(\lambda)F, v] = \langle F, v\rangle \tag{2.2.28}$$

для всех $F \in \mathbb{H}_-$ и всех $v \in \mathbb{H}_+$.

Оператор $\mathcal{R}_m(\lambda)$ является ограниченным и

$$\|\mathcal{R}_m(\lambda)F; \mathbb{H}_+\| \le M_1\, \|F; \mathbb{H}_-\| \tag{2.2.29}$$

для всех $F \in \mathbb{H}_-$. Здесь число M_1 не зависит от F и от λ, и $\lambda \ge \lambda_0$, число λ_0-такое же, как в (2.2.24).

5. Введем оператор

$$\mathcal{R}(\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(i\theta_m)\Phi_m\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m, \tag{2.2.30}$$

который действует из $\mathbb{H}_-$ в $\mathbb{H}_+$. Здесь, так же, как в первой главе символом Φ_m обозначен оператор умножения на функцию $\varphi_m(x)$.

Так как коэффициенты $a_{kl}(x) \quad (|k|,\ |l| \le r)$ ограничены, то аналогично неравенству (2.2.12) доказывается, что

$$\left| B[u,\, v] + \lambda \int d^{2\delta}(x) u(x) \overline{v(x)} dx \right| \le (M_0 + \lambda) \|u; \mathbb{H}_+\| \cdot \|v; \mathbb{H}_+\|$$

для всех $u,\ v \in \mathbb{H}_+$. Следовательно, оператор $\mathbb{R}(\lambda)$, определенный равенством

$$\langle \mathbb{R}(\lambda) F, v\rangle = B[\mathcal{R}(\lambda)F, v] + \\ + \lambda \int d^{2\delta}(x) \left(\mathcal{R}(\lambda)F\right)(x) \overline{v(x)} dx \quad (\forall v \in \mathbb{H}_+) \quad (2.2.31)$$

действует из $\mathbb{H}_-$ в $\mathbb{H}_-$.

Согласно нашим построениям, функции $\varphi_m^2(x)$, $m = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots,$ образуют разбиение единицы R^n, поэтому для всех $F \in L_{2,\,\delta}(R^n)$ и всех $v \in \mathbb{H}_+$ выполняются следующие равенства

$$\langle F,\, v\rangle = (F,\, v)_\delta = \int d^{2\delta}(x) F(x) \overline{v(x)} dx =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \int d^{2\delta}(x) \varphi_m^2(x) F(x) \overline{v(x)} dx = \sum_{m=1}^{\infty} (\varphi_m F,\, \varphi_m)_\delta. \qquad (2.2.32)$$

Напомним, что символом $(\cdot, \cdot)_\delta$ обозначено скалярное произведение в пространстве $L_{2,\,\delta}(R^n)$, и как прежде, все интегралы берутся по всему пространству R^n.

Так как

$$a_{klm}(x) = (1 - \eta_m(x)) a_{kl}(x_m) + \eta_m(x) a_{kl}(x),$$

и функция $\eta_m(x)$ обращается в единицу в некоторой окрестности множества $\operatorname{supp} \varphi_m$, то функции $a_{klm}(x)$ и $a_{kl}(x)$ на множестве $\operatorname{supp} \varphi_m$ совпадают. Поэтому из равенств (2.2.30) и (2.2.31) следует, что

$$\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle =$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \exp(i\theta_m) \left\{ \sum_{|k|=|l|=j\in J} \int d^{2\alpha_j}(x) a_{klm}(x) D^k(\varphi_m \mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx + \right.$$
$$\left. + \lambda \int d^{2\delta}(x)(\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\overline{\varphi_m(x)v(x)}dx \right\}. \quad (2.2.33)$$

Пусть $F \in L_{2,\,\delta}(R^n)$. В равенстве (2.2.28) заменим F на $\varphi_m F$, а v – на $\varphi_m v$:

$$\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F, \varphi_m v] = (\varphi_m F, \varphi_m v)_\delta.$$

Отсюда с учетом равенства (2.2.23) следует, что

$$(\varphi_m F, \varphi_m v)_\delta = \exp(i\theta_m)\times$$
$$\times \left\{ \sum_{|k|=|l|=j\in J} \int d^{2\alpha_j}(x) a_{klm}(x) D^k\left((\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\right) \overline{D^l\left((\varphi_m(x)v(x))\right)}dx + \right.$$
$$\left. + \lambda \int d^{2\delta}(x)(\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\overline{\varphi_m(x)v(x)}dx \right\}.$$

Суммируя это равенство по m от 1 до бесконечности, в силу равенств (2.2.32), имеем

$$\langle F,\, v\rangle = (F,\, v)_\delta = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(i\theta_m)\times$$
$$\times \left\{ \sum_{|k|=|l|=j\in J} \int d^{2\alpha_j}(x) a_{klm}(x) D^k\left((\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\right) \overline{D^l\left((\varphi_m(x)v(x))\right)}dx + \right.$$
$$\left. + \lambda \int d^{2\delta}(x)(\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\overline{\varphi_m(x)v(x)}dx \right\}.$$

Отсюда и из (2.2.33) следует, что

$$\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle - \langle F,\, v\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(i\theta_m)\times$$

$$\times\left\{\sum_{|k|=|l|=j\in J}\int d^{2\alpha_j}(x)a_{klm}(x)D^k\left((\varphi_m\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\right)\overline{v^{(l)}(x)}dx+\right.$$

$$\left.+\,\lambda\int d^{2\delta}(x)(\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\overline{\varphi_m(x)v(x)}dx\right\} - \sum_{m=1}^{\infty}\exp(i\theta_m)\times$$

$$\times\left\{\sum_{|k|=|l|=j\in J}\int d^{2\alpha_j}(x)a_{klm}(x)D^k\left((\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\right)\overline{D^l\left((\varphi_m(x)v(x))\right)}dx+\right.$$

$$\left.+\,\lambda\int d^{2\delta}(x)(\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\overline{\varphi_m(x)v(x)}dx\right\} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\exp(i\theta_m)\left\{\sum_{|k|=|l|=j\in J}\int d^{2\alpha_j}(x)a_{klm}(x)\times\right.$$

$$\times\left\{D^k\left((\varphi_m\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\right)\overline{v^{(l)}(x)}-\right.$$

$$\left.\left.-D^k\left((\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x)\right)\overline{D^l\left((\varphi_m(x)v(x))\right)}\right\}dx\right\}. \qquad (2.2.34)$$

Вводим обозначение

$$U_{m,\lambda}(x) = (\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x), \quad m = 1,\, 2,\, \ldots. \qquad (2.2.35)$$

Тогда в силу равенства (2.2.34) имеем

$$\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle - \langle F,\, v\rangle = \mathbb{K}_\lambda[F,\, v] + \mathbb{L}_\lambda[F,\, v], \qquad (2.2.36)$$

где

$$\mathbb{K}_\lambda[F,\, v] = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{|k|=|l|=j\in J}\exp(i\theta_m)\times$$

$$\times\sum\nolimits_k^{(1)} C_{k'}^{k''}\int d^{2\alpha_j}(x)a_{klm}(x)\varphi_m^{(k')}(x)U_{m,\lambda}^{(k'')}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx, \quad (2.2.37)$$

$$\mathbb{L}_\lambda[F,\,v]=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{|k|=|l|=j\in J}\exp(i\theta_m)\times$$
$$\times\sum\nolimits_{l}^{(2)}C_{l'}^{l''}\int d^{2\alpha_j}(x)a_{klm}(x)U_{m,\lambda}^{(k)}(x)\overline{\varphi_m^{(l')}(x)v^{(l'')}(x)}dx. \quad (2.2.38)$$

Здесь символ $\sum_k^{(1)}$ обозначает суммирование по мультииндексам k', k'' таким, что $k = k' + k''$, $k' \neq 0$,, а символ $\sum_l^{(2)}$ обозначает суммирование по мультииндексам l', l'' таким, что $l = l' + l''$, $l' \neq 0$.

Утверждение 2.2.1. *Существует положительная функция $\omega_1(\lambda)$, $\lambda > 0$, такая, что*

$$|\mathbb{K}_\lambda[F,\,v]| \leq \omega_1(\lambda)\,\|F;\mathbb{H}_-\|\cdot\|v;\mathbb{H}_+\| \quad (2.2.39)$$

для всех $F \in L_{2,\delta}(R^n)$, $v \in \mathbb{H}_+$, и $\omega_1(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$.

Доказательство. Прежде чем приступить к непосредственному доказательству утверждения 2.2.1, докажем несколько вспомогательных лемм.

Рассмотрим симметричную полуторалинейную форму

$$\widetilde{\mathcal{B}_{\lambda;m}}[u,v]=\frac{1}{2}\left\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v]+\exp(-i\theta_m)\overline{\mathcal{B}_{\lambda;m}[v,u]}\right\}, \quad (2.2.40)$$

$$D(\widetilde{\mathcal{B}_{\lambda;m}})=\mathbb{H}_+.$$

В силу неравенств (2.2.25), (2.2.26) существует самосопряженный оператор $B_{\lambda m}$ в пространстве $L_{2,\delta}(R^n)$, порожденный симметричной формой (2.2.40), такой что

$$\left(B_{\lambda;m}^{1/2}u,B_{\lambda;m}^{1/2}v\right)_{\alpha+r}=\widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda;m}[u,v] \quad (2.2.41)$$

для всех $u, v \in \mathbb{H}_+$.

Лемма 2.2.1. *A) Существует неотрицательное число λ_0 такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$ и всех $j \in J$ для любого мультииндекса k такого, что*

$|k| = j$, и любого $m = 1, 2, 3, \ldots$ оператор $d^{-|k|}D^k B_{\lambda;m}^{-1/2}$ является ограниченным оператором, действующим из $L_{2,\delta}(R^n)$ в $L_{2,\alpha_j+j}(R^n)$.

Б) если $|k| = j \in J$, $k = k' + k''$ и $|k'| \neq 0$, то существует положительная функция $q(\lambda)$ такая, что $q(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$ и

$$\left\| d^{-|k|}\varphi_m^{(k')} D^{k''} u;\, L_{2,\alpha_j+j}(R^n) \right\| \leq q(\lambda) \| B_{\lambda;m}^{1/2} u; L_{2,\delta}(R^n)\| \qquad (2.2.42)$$

для всех $u \in \mathbb{H}_+$

Доказательство. Из (2.2.41) следует, что

$$\| B_{\lambda;m}^{1/2} u; L_{2,\delta}(R^n)\|^2 = \mathrm{Re}\,\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u]\} \qquad (2.2.43)$$

Поэтому в силу неравенства (2.2.25) имеем

$$\| B_{\lambda;m}^{1/2} u; L_{2,\delta}(R^n)\| \geq c_0 \|u; \mathbb{H}_+\| \qquad (\lambda \geq \lambda_0) \qquad (2.2.44)$$

для всех $u \in \mathbb{H}_+$. Отсюда в силу определения пространства $\mathbb{H}_+$ следует, что

$$\sum_{h=1}^{p} \left\| u;\, V_{2;\,\alpha_{j_h}}^{j_h}(R^n) \right\| \leq M_0 \| B_{\lambda;m}^{1/2} u;\, L_{2,\delta}(R^n)\| \qquad (2.2.45)$$

$$(|k| = j \in J, \;\; m = 1, 2, \ldots, \; u \in \mathbb{H}_+).$$

Так как для любого индекса i_s не старшей формы найдется индекс j_h старшей формы такой, что

$$\left\| u;\, V_{2;\,\alpha_{i_s}}^{i_s}(R^n) \right\| \leq M_1 \left\| u;\, V_{2;\,\alpha_{j_h}}^{j_h}(R^n) \right\|, \; u \in C_0^\infty(R^n),$$

то из (2.2.45) следует, что

$$\sum_{j \in J}^{p} \left\| u;\, V_{2;\,\alpha_j}^{j}(R^n) \right\| \leq M_0 \| B_{\lambda;m}^{1/2} u;\, L_{2,\delta}(R^n)\|.$$

Отсюда следует, что

$$\left\| d^{-|k|} D^k u;\, L_{2,\alpha_j+j}(R^n) \right\| \leq M_0 \| B_{\lambda;m}^{1/2} u;\, L_{2,\delta}(R^n)\|,$$

$$(|k| = j \in J, \;\; m = 1, 2, \ldots, \; u \in \mathbb{H}_+).$$

Следовательно, оператор $d^{-|k|}D^k B_{\lambda;m}^{-1/2}$ является ограниченным оператором, действующим из $L_{2,\delta}(R^n)$ в $L_{2,\alpha_j+j}(R^n)$.

Переходим к доказательству пункта Б) леммы 2.2.1. Рассмотрим случай $0 \neq |k''| < |k| \le r$. Заметим, что согласно лемме 1.2.1)

$$\left|\varphi_m^{(k')}(x)\right| \le C_1 d^{|k'|}(x) \quad \forall x \in R^n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\left\| d^{-|k|}(x)\varphi_m^{(k')}(x)D^{k''}u(x);\, L_{2,\alpha_j+j}(R^n)\right\| &\le \\ &\le \left\| d^{-|k''|}D^{k''}u;\, L_{2,\alpha_j+j}(R^n)\right\|. \quad (2.2.46)\end{aligned}$$

С другой стороны, из леммы 2.2 работы [22], в частности, следует, что для любого $\tau > 0$ и всех $u \in C_0^\infty(R^n)$ справедливо неравенство

$$\left\| d^{-|k''|}D^{k''}u;\, L_{2,\alpha_j+j}(R^n)\right\| \le \tau\|u; L_{2;\alpha}^j(R^n)\| + c_0\tau^{-\mu}\left\|u;\, L_{2,\alpha_j+j}(R^n)\right\|,$$

где

$$\|u; L_{2,\alpha_j}^j(R^n)\| = \left\{ \sum_{|l|=j} \int \left(d^{\alpha_j}(x)|u^{(l)}(x)| \right)^2 dx \right\}^{1/2}$$

и

$$\mu = |k''|/(j - |k''|). \qquad (2.2.47)$$

Так как $0 \neq |k''| < |k| = j$, то μ – конечное положительное число.

Из полученного выше неравенства и из (2.2.46) следует, что

$$\begin{aligned}\left\| d^{-|k|}(x)\varphi_m^{(k')}(x)D^{k''}u(x);\, L_{2,\alpha_j+j}(R^n)\right\| &\le \tau\|u; L_{2,\alpha_j}^j(R^n)\| + \\ &+ c_0\tau^{-\mu}\left\|u;\, L_{2,\alpha_j+j}(R^n)\right\|.\end{aligned}$$

Возведя это неравенство в квадрат, получаем (при этом $\sqrt{2}\tau$ снова обозначим через τ)

$$\begin{aligned}\left\| d^{-|k|}(x)\varphi_m^{(k')}(x)D^{k''}u(x);\, L_{2,\alpha_j+j}(R^n)\right\|^2 &\le \\ &\le \tau^2\|u; L_{2,\alpha_j}^j(R^n)\|^2 + c_1\tau^{-2\mu}\left\|u;\, L_{2,\alpha_j+j}(R^n)\right\|^2.\end{aligned}$$

Так как $\delta = \min\limits_{1\le h\le p}(\alpha_{j_h}+j_h)$ и для любого индекса i_s не старшей формы найдется индекс j_h старшей формы такой, что $\alpha_{i_s}+i_s \ge \alpha_{j_h}+j_h$, то $\delta = \min\limits_{j\in J}(\alpha_j+j)$. Поэтому имеет место следующее неравенство

$$\left\|u;\, L_{2,\,\alpha_j+j}(R^n)\right\| \le \|u;\, L_{2,\,\delta}(R^n)\| \tag{2.2.48}$$

для всех $j \in J$.

Далее применяя неравенства (2.2.44), (2.2.48), имеем

$$\left\|d^{-|k|}(x)\varphi_m^{(k')}(x)D^{k''}u(x);\, L_{2,\,\alpha_j+j}(R^n)\right\|^2 \le$$
$$\le \tau^2\|B_{\lambda;m}^{1/2}u; L_{2,\,\delta}(R^n)\|^2 + c_1\tau^{-2\mu}\,\|u;\, L_{2,\,\delta}(R^n)\|^2\,.$$

Отсюда в силу равенства (2.2.43) следует, что

$$\left\|d^{-|k|}(x)\varphi_m^{(k')}(x)D^{k''}u(x);\, L_{2,\,\alpha_j+j}(R^n)\right\|^2 \le$$
$$\le \tau^2\mathrm{Re}\,\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u]\} + c_1\tau^{-2\mu}\,\|u;\, L_{2,\,\delta}(R^n)\|^2\,. \tag{2.2.49}$$

Используя равенство (2.2.23), оценим правую часть этого неравенства

$$\tau^2\mathrm{Re}\,\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda_0;m}[u,u]\} + c_1\tau^{-2\mu}\,\|u;\, L_{2,\,\delta}(R^n)\|^2 =$$
$$= \tau^2\mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_m)\left(\sum_{|k|=|l|=j\in J}\int d^{2\alpha_j}(x)a_{klm}(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx\, +\right.\right.$$
$$\left.\left. +\ \lambda\int d^{2\delta}(x)|u(x)|^2dx\right)\right\} + c_1\tau^{-2\mu}\int d^{2\delta}(x)|u(x)|^2dx \le$$
$$\le \tau^2\mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_m)\left(\sum_{|k|=|l|=j\in J}\int d^{2\alpha_j}(x)a_{klm}(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx\, +\right.\right.$$
$$\left.\left. +\ \Lambda(\lambda,\,\tau)\int d^{2\delta}(x)|u(x)|^2dx\right)\right\},$$

где $\Lambda(\lambda,\,\tau)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\lambda + c_1\tau^{-2\mu-2} \le \Lambda(\lambda,\,\tau).$$

Из (2.2.47) следует, что $\mu+1=j/(j-|k''|)$. Так как $0\neq|k''|<j$, то $\Lambda(\lambda,\tau)\to\infty$, если $\tau\to 0$ или $\lambda\to\infty$. Поэтому из полученного выше неравенства при $\lambda=1/\tau$ следует, что

$$\left\|d^{-|k|}(x)\varphi_m^{(k')}(x)D^{k''}u(x);\,L_{2,\,\alpha_j+j}(R^n)\right\|^2\leq$$
$$\leq\tau^2\mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_m)\left(\sum_{|k|=|l|=j\in J}\int d^{2\alpha_j}(x)a_{klm}(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,p(\tau)\int d^{2\delta}(x)|u(x)|^2dx\right)\right\},\quad(2.2.50)$$

где $p(\tau)=\Lambda(1/\tau,\tau)$. Заметим, что $p(\tau)\to\infty$ при $\tau\to 0$. Обозначим через $q(\cdot)$ функцию обратную относительно $p(\tau)$. Тогда при $\tau=q(\lambda)$, то есть при $\lambda=p(\tau)$, из (2.2.50) следует, что

$$\left\|d^{-|k|}(x)\varphi_m^{(k')}(x)D^{k''}u(x);\,L_{2,\,\alpha_j+j}(R^n)\right\|^2\leq$$
$$\leq q(\lambda)^2\mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_m)\left(\sum_{|k|=|l|=j\in J}\int d^{2\alpha_j}(x)a_{klm}(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,\lambda\int d^{2\delta}(x)|u(x)|^2dx\right)\right\}.$$

Здесь положительная непрерывная функция $q(\lambda)$ определена для положительных значений λ и такая, что $q(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\infty$. Из полученного выше неравенства в силу равенств (2.2.23), (2.2.43) следует (2.2.42). Утверждение пункта Б) леммы 2.2.1 для $|k''|\neq 0$ доказано.

Рассмотрим случай $|k''|=0$. Неравенство (2.2.42) в этом случае примет вид

$$\left\|d^{-|k|}\varphi_m^{(k)}(x)u(x);\,L_{2,\,\alpha_j+j}(R^n)\right\|\leq q(\lambda)\|B^{1/2}_{\lambda;m}u;L_{2,\,\delta}(R^n)\|\qquad(2.2.51)$$

для всех $u\in\mathbb{H}_+$; $|k|=j\in J$ и $q(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\infty$. Так как (см. лемму 1.2.1)

$$\left|\varphi_m^{(k)}(x)\right|\leq C_1d^{|k|}(x),\ \ (|k|\leq r)\quad\forall x\in R^n,$$

то (2.2.51) следует из неравенства

$$\big\|u;\ L_{2,\,\alpha_j+j}(R^n)\big\| \le q(\lambda)\|B^{1/2}_{\lambda;m}u; L_{2,\,\delta}(R^n)\|, \qquad (2.2.52)$$

которое доказывается ниже.

Пусть $\lambda > \lambda_0$, где λ_0 – такое же положительное число, как в (2.2.44). Тогда используя равенство (2.2.40), имеем

$$\|B^{1/2}_{\lambda;m}u; L_{2,\,\delta}(R^n)\|^2 = \mathrm{Re}\,\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u]\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_m)\left(\sum_{|k|=|l|=j\in J}\int d^{2\alpha_j}(x)a_{klm}(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\lambda\int d^{2\delta}(x)|u(x)|^2dx\right)\right\} =$$

$$= \|B^{1/2}_{\lambda_0;m}u; L_{2,\,\delta}(R^n)\|^2 + (\lambda-\lambda_0)\cos\theta_m\int d^{2\delta}(x)|u(x)|^2dx \ge$$

$$\ge (\lambda-\lambda_0)\cos\theta_m\int d^{2\delta}(x)|u(x)|^2dx.$$

Отсюда следует, что

$$\|u;\ L_{2,\,\delta}(R^n)\|^2 = \int d^{2\delta}(x)|u(x)|^2dx \le \frac{1}{(\lambda-\lambda_0)\cos\theta_m}\|B^{1/2}_{\lambda;m}u; L_2,\delta(R^n)\|^2.$$

Вводя обозначение

$$q(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{(\lambda-\lambda_0)\cos\theta_m}},$$

из последнего неравенства получим

$$\|u;\ L_{2,\,\delta}(R^n)\| \le q(\lambda)\|B^{1/2}_{\lambda;m}u; L_2,\delta(R^n)\|.$$

Отсюда в силу неравенства (2.2.48) следует (2.2.52).

Лемма 2.2.1 доказана полностью.

Билинейная форма $\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v]$ удовлетворяет неравенствам (см. (2.2.25), (2.2.26)):

$$c_0\|u;\mathbb{H}_+\|^2 \le \mathrm{Re}\,\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u]\} \qquad (2.2.53)$$

для всех $u \in \mathbb{H}_+$;

$$|\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v]| \leq (M_0 + |\lambda|)\|u;\mathbb{H}_+\| \cdot \|v;\mathbb{H}_+\| \qquad (2.2.54)$$

для всех $u,\ v \in \mathbb{H}_+$. Числа $c_0,\ M_0 > 0$ в этих неравенствах не зависят от $u(x),\ \ v(x)$. Отсюда следует, что $D\left(\mathcal{B}_{\lambda;m}\right) = \mathbb{H}_+$.

Согласно неравенствам (2.2.53), (2.2.54), билинейная форма $\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v]$ замкнута и секториальна. Поэтому, применяя лемму 1.2.3, получаем:

I) существует такой m – секториальный оператор $A_{\lambda;m}$, что для всех $u \in D(A_{\lambda;m}) \subset D\left(\mathcal{B}_{\lambda;m}\right) = \mathbb{H}_+$ и всех $v \in \mathbb{H}_+$ выполняется равенство

$$\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v] = (A_{\lambda;m}u, v)_\delta, \qquad (2.2.55)$$

где $(\cdot,\ \cdot)_\delta$ – скалярное произведение в пространстве $L_{2,\,\delta}(R^n)$;

II) если $u \in \mathbb{H}_+$, $w \in L_{2,\,\delta}(R^n)$ и

$$\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v] = (w,\ v)_\delta$$

для всех v, принадлежащих ядру формы $\mathcal{B}_{\lambda;m}$, то $u \in D(A_{\lambda;m})$ и $A_{\lambda;m}u = w$.

Пусть $f \in L_{2,\,\delta}(R^n)$. Тогда $f \in \mathbb{H}_-$ и поэтому $\mathcal{R}_m(\lambda)f \in \mathbb{H}_+$ и вследствие равенства (2.2.28)

$$\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[\mathcal{R}_m(\lambda)f, v] = \langle f, v\rangle \qquad (2.2.56)$$

для всех $v \in \mathbb{H}_+$.

В силу утверждения п. I) из равенства (2.2.56) следует, что

$$A_{\lambda;m}\mathcal{R}_m(\lambda)f = f, \quad \forall f \in L_{2,\,\delta}(R^n).$$

Следовательно,

$$\mathcal{R}_m(\lambda)f = A^{-1}_{\lambda;m}f \qquad (2.2.57)$$

для всех $f \in L_{2,\delta}(R^n)$.

Пусть $B_{\lambda;m}$ – самосопряженный оператор в пространстве $L_{2,\delta}(R^n)$, порожденный симметричной формой (2.2.40) (то есть, такой же, как в лемме 2.2.1)). Для всех $u, v \in \mathbb{H}_+$ выполняется равенство

$$\left(B_{\lambda;m}^{1/2}u, B_{\lambda;m}^{1/2}v\right)_\delta = \widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda;m}[u,v],$$

Отсюда при $u(x) = v(x)$ с учетом равенства (2.2.40) получим

$$\left\|B_{\lambda;m}^{1/2}u; L_{2,\delta}(R^n)\right\|^2 = \mathrm{Re}\big\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u]\big\} \quad (\lambda \geq \lambda_0 > 0).$$

Далее применяя неравенство (2.2.25), находим

$$\left\|B_{\lambda;m}^{1/2}u; L_{2,\delta}(R^n)\right\| \geq C\,\|u; \mathbb{H}_+\| \quad (\lambda \geq \lambda_0 > 0)$$

для всех $u \in \mathbb{H}_+$. Отсюда следует обратимость оператора $B_{\lambda;m}^{1/2}$ при $\lambda \geq \lambda_0 > 0$. Применяя лемму 1.2.4 ([34, гл. 6, теорема 3.2]), получим представление

$$A_{\lambda;m}^{-1} = B_{\lambda;m}^{-1/2}X_m(\lambda)B_{\lambda;m}^{-1/2} \quad (\lambda \geq \lambda_0 > 0), \tag{2.2.58}$$

где $X_m(\lambda) : L_{2,\delta}(R^n) \to L_{2,\delta}(R^n)$ – некоторый ограниченный оператор, и его норма $\|X_m(\lambda)\|$ не превосходит числа $M_1 > 0$, не зависящего от $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$.

Переходим к доказательству утверждения 2.2.1. Равенство (2.2.37) перепишем в виде

$$\mathbb{K}_\lambda[F,\, v] =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \exp(i\theta_m) \sum\nolimits^{(1)} C_{k'}^{k''}\left(d^{\alpha_j}a_{klm}\varphi_m^{(k')}U_{m,\lambda}^{(k'')},\, d^{\alpha_j}v^{(l)}\right), \tag{2.2.59}$$

где

$$U_{m,\lambda}(x) = (\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x), \quad m = 1,\, 2,\, \ldots,$$

и символом $\sum^{(1)}$ обозначено суммирование по мультииндексам k, l, k', k'' таким, что $k = k' + k''$, $k' \neq 0$, $|k| = |l| = j \in J$.

Пусть $F \in L_{2,\delta}(R^n)$. Используя равенства (2.2.35), (2.2.57) – (2.2.59), имеем

$$\mathbb{K}_\lambda[F,v] =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum\nolimits^{(1)} C_{k'}^{k''} \exp(i\theta_m) \Big(d^{-|k|} a_{klm} \varphi_m^{(k')} D^{k''} A_{\lambda;m}^{-1} \Phi_m F,\ d^{-|l|} v^{(l)} \Big)_{\alpha_j+j} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum\nolimits^{(1)} C_{k'}^{k''} \exp(i\theta_m)(d^{-|k|} a_{klm} \varphi_m^{(k')} D^{k''} B_{\lambda;m}^{-1/2} X_m(\lambda) B_{\lambda;m}^{-1/2} \Phi_m F, d^{-|l|} v^{(l)}(x))_{\alpha_j+j}.$$

Далее, применяя лемму 1.2.2 и неравенство Коши – Буняковского, имеем

$$|\mathbb{K}_\lambda[F,v]| \ll \Lambda_n \sup_{m=1,2,\ldots} \sum\nolimits^{(3)} \left\| \mathbb{T}_{l,k',k'',m}(\lambda) V_{m,\lambda}; L_{2,\alpha_j+j}(R^n) \right\| \times$$
$$\times \left\| d^{-|l|} v^{(l)}(x); L_{2,\alpha_j+j}(R^n) \right\|, \quad (2.2.60)$$

где

$$\mathbb{T}_{l,k',k'',m}(\lambda) = d^{-|k'|-|k''|} \varphi_m^{(k')} a_{klm} D^{k''} B_{\lambda;m}^{-1/2},$$
$$V_{m,\lambda}(x) = X_m(\lambda) B_{\lambda;m}^{-1/2} (\varphi_m F)(x), \quad (2.2.61)$$

и символом $\sum^{(3)}$ обозначено суммирование по мультииндексам k', k'', l таким, что $|k'| + |k''| = |l| = j \in J$ и $k' \neq 0$.

Так как (см. (2.1.4))

$$\left\| d^{-|l|} v^{(l)}(x); L_{2,\alpha_j+j}(R^n) \right\| \le \| v; \mathbb{H}_+ \| \quad (v \in C_0^\infty(R^n))$$

для любого мультииндекса $l:\ |l| = j \in J$, то из (2.2.60) следует неравенство

$$|\mathbb{K}_\lambda[F,v]| \ll$$
$$\ll \| v; \mathbb{H}_+ \| \sup_{m=1,2,\ldots} \sum\nolimits^{(3)} \left\| \mathbb{T}_{l,k',k''m}^{k'}(\lambda) V_{m,\lambda}; L_{2,\alpha_j+j}(R^n) \right\|, \quad (2.2.62)$$

Пусть λ_0 – положительное число, такое же, как в (2.2.44). Тогда при $\lambda > \lambda_0$ в силу равенства (2.2.43) имеем

$$\left\| B^{1/2}_{\lambda;m} u; L_{2,\delta}(R^n) \right\|^2 = \mathrm{Re}\left\{ \exp(i\theta_m) \mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u] \right\} =$$
$$= \mathrm{Re}\left\{ \exp(i\theta_m) \mathcal{B}_{\lambda_0;m}[u,u] \right\} + \cos(\theta_m)(\lambda - \lambda_0) \int d^{2\delta}(x) |u(x)|^2 dx \geq$$
$$\geq \mathrm{Re}\left\{ \exp(i\theta_m) \mathcal{B}_{\lambda_0;m}[u,u] \right\} = \left\| B^{1/2}_{\lambda_0;m} u; L_{2,\delta}(R^n) \right\|^2 . \quad (2.2.63)$$

Отсюда следует, что при $\lambda \geq \lambda_0$ оператор $B^{1/2}_{\lambda_0;m} B^{-1/2}_{\lambda;m}$ является ограниченным оператором, и его норма не превосходит единицу. Так как оператор $B_{\lambda;m}$ является самосопряженным при всех значениях $\lambda \geq 1$, то при $\lambda \geq \lambda_0$ оператор $B^{-1/2}_{\lambda;m} B^{1/2}_{\lambda_0;m}$ также является ограниченным оператором, и его норма не превосходит единицу. Учитывая это, имеем

$$\left\| B^{-1/2}_{\lambda;m} (\varphi_m F); L_{2,\delta}(\Omega) \right\| \leq$$
$$\leq \left\| B^{-1/2}_{\lambda;m} B^{1/2}_{\lambda_0;m} \right\| \times \left\| B^{-1/2}_{\lambda_0;m} (\varphi_m F); L_{2,\delta}(\Omega) \right\| \ll$$
$$\ll \left\| B^{-1/2}_{\lambda_0;m} (\varphi_m F); L_{2,\delta}(\Omega) \right\| . \quad (2.2.64)$$

Пусть Ω – некоторая область в R^n. Норму в пространстве $L_2(\Omega)$ можно задавать с помощью равенства

$$\| f; L_2(\Omega) \| = \sup |(f, v)|, \quad (2.2.65)$$

где супремум берется по всем $v \in L_2(\Omega)$ таким, что $\| v; L_2(\Omega) \| = 1$. Так как $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то в равенстве (2.2.65) можно считать, что супремум берется по всем $v \in C_0^\infty(\Omega)$, таким, что $\| v; L_2(\Omega) \| = 1$.

В равенстве (2.2.65) заменяем f на $d^\delta f$ и v на $d^\delta v$ и получаем равенство

$$\| f; L_{2,\delta}(\Omega) \| = \sup |(f, v)_\delta|, \quad (2.2.66)$$

где супремум берется по всем $v \in C_0^\infty(\Omega)$, таким, что $\| v; L_{2,\delta}(\Omega) \| = 1$.

При $\lambda = \lambda_0$ из равенства (2.2.41) имеем

$$\left(B^{1/2}_{\lambda_0;m} u, B^{1/2}_{\lambda_0;m} v \right)_{2,\delta} = \widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0;m}[u,v],$$

С другой стороны,

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0;m}[u,u] \gg \|u;\mathbb{H}_+\|^2\,,$$

$$\left|\widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0;m}[u,v]\right| \le (M_0+\lambda_0)\,\|u;\mathbb{H}_+\|\cdot\|v;\mathbb{H}_+\|$$

для всех $u,v\in C_0^\infty(R^n)$. Поэтому, согласно теореме Лакса – Мильграма, уравнение

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0;m}[u,\widehat{v}] = (w,\widehat{v})_\delta \quad \forall\widehat{v}\in C_0^\infty(R^n)$$

имеет решение для любого $w \in L_{2,\,\delta}(R^n)$. Следовательно, функцию $v\in C_0^\infty(R^n)$ в (2.2.66) можно представить в виде

$$v = B^{1/2}_{\lambda_0;m}w,$$

то есть

$$\|f;L_{2,\,\delta}(R^n)\| = \sup\left|\left(f, B^{1/2}_{\lambda_0;m}w\right)_\delta\right|,$$

где супремум берется по всем $w\in C_0^\infty(R^n)$ таким, что

$$\left\|B^{1/2}_{\lambda_0;m}w;L_{2,\,\delta}(R^n)\right\| = 1.$$

С другой стороны, в классе $C_0^\infty(R^n)$ следующие нормы эквивалентны

$$\|v;\mathbb{H}_+\| \quad \text{и} \quad \left\|B^{1/2}_{\lambda_0;m}v;L_{2,\,\delta}(R^n)\right\|.$$

Поэтому

$$\begin{gathered}\left\|B^{-1/2}_{\lambda_0;m}(\varphi_m F);L_{2,\,\delta}(R^n)\right\| = \sup\left|\left(B^{-1/2}_{\lambda_0;m}(\varphi_m F), w\right)_\delta\right| = \\ = \sup\left|\left(B^{-1/2}_{\lambda_0;m}(\varphi_m F), B^{1/2}_{\lambda_0;m}v\right)_\delta\right| \ll \sup|(\varphi_m F, v)_\delta| \ll \\ \ll \|\varphi_m F;\mathbb{H}_-\| \ll \|F;\mathbb{H}_-\|, \quad (2.2.67)\end{gathered}$$

где первый супремум в этой цепочке берется по всем $w\in C_0^\infty(R^n)$: $\|w;L_{2,\,\delta}(R^n)\| = 1$, второй супремум – по всем $v\in C_0^\infty(R^n)$: $\left\|B^{1/2}_{\lambda_0;m}w;L_{2,\,\delta}(R^n)\right\| = 1$, а третий супремум – по всем $v\in C_0^\infty(R^n)$: $\|v;\mathbb{H}_+\| = 1$.

В силу (2.2.64) из (2.2.67) следует неравенство

$$\|V_{m,\lambda}; L_{2,\,\delta}(R^n)\| \le M\,\|F; \mathbb{H}_-\|\,,$$

которое справедливо при $\lambda \ge \lambda_0$, где $\lambda_0 \ge 1$ – некоторое конечное число.

Так как $\delta \le \alpha_j + j$ для всех $j \in J$, то $d^{\alpha_j+j}(x) \le d^{\delta}(x)$ и из полученного неравенства следует, что

$$\left\|V_{m,\lambda}; L_{2,\,\alpha_j+j}(R^n)\right\| \le M\,\|F; \mathbb{H}_-\| \;\; (u \in \mathbb{H}_+,\, j \in J,\, \lambda \ge \lambda_0)\,. \qquad (2.2.68)$$

Из утверждения п. Б) леммы 2.2.1 (см. (2.2.42)) и равенства (2.2.61) следует, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|\mathbb{T}_{l,k',k''m}(\lambda)\| = 0. \qquad (2.2.69)$$

Ввиду этого равенства из (2.2.62), (2.2.68), (2.2.67) получим

$$|\mathbb{K}_\lambda[F, v]| \ll$$
$$\ll \sup_{m=1,\,2,\ldots}\;\sup_{|k'|+|k''|=j\in J;\,k'\neq 0} \|\mathbb{T}_{l,k',k'',m}(\lambda)\| \cdot \|V_{m,\lambda}; L_{2,\,\delta}(R^n)\|\,\|v; \mathbb{H}_+\| \le$$
$$\le \omega_1(\lambda)\,\|F; \mathbb{H}_-\| \cdot \|v; \mathbb{H}_+\|$$

для всех $F \in L_{2,\,\delta}(R^n)$, $v \in \mathbb{H}_+$, и $\omega_1(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$.

Таким образом, оценка (2.2.39) доказана, что и завершает доказательство утверждения 2.2.1.

Утверждение 2.2.2. *Существует положительная функция $\omega_2(\lambda)$, $\lambda > 0$, такая, что*

$$|\mathbb{L}_\lambda[F,\, v]| \le \omega_2(\lambda_0)\,\|F; \mathbb{H}_-\| \cdot \|v; \mathbb{H}_+\| \qquad (2.2.70)$$

при всех $\lambda \ge \lambda_0$ и для всех $F \in L_{2,\,\delta}(R^n)$, $v \in \mathbb{H}_+$. Положительная функция $\omega_2(\lambda_0)$ такая, что $\omega_2(\lambda_0) \to 0$ при $\lambda_0 \to \infty$.

Доказательство. Напомним определение полуторалинейной формы $\mathbb{L}_\lambda[F,\, v]$ (см. (2.2.38))

$$\mathbb{L}_\lambda[F,\, v] = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{|k|=|l|=j\in J} \exp(i\theta_m)\times$$

$$\times \sum_{l}^{(2)} C_{l'}^{l''} \int d^{2\alpha_j}(x) a_{klm}(x) U_{m,\lambda}^{(k)}(x) \overline{\varphi_m^{(l')}(x) v^{(l'')}(x)} dx. \qquad (2.2.71)$$

Здесь (см. (2.2.35))

$$U_{m,\lambda}^{(k)}(x) = D^k(\mathcal{R}_m(\lambda)\Phi_m F)(x), \quad m = 1,\, 2,\, \ldots .$$

и символ $\sum_l^{(2)}$ обозначает суммирование по мультииндексам l', l'' таким, что $l = l' + l''$, $l' \neq 0$.

Форму (2.2.71) представим в виде

$$\mathbb{L}_\lambda[F,\, v] = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(i\theta_m) \sum_{|k|=|l|=j\in J} \sum_{l}^{(2)} \mathbb{I}_{\lambda;\, k,m}^{l',l''}[F,\, v], \qquad (2.2.72)$$

где

$$\mathbb{I}_{\lambda;\, k,m}^{l',l''}[F,\, v] = C_{l'}^{l''} \left(d^{-|k|} a_{klm} U_{m,\lambda}^{(k)},\, d^{-|l'|-|l''|} \varphi_m^{(l')} v^{(l'')} \right)_{\alpha_j + j}.$$

Так как (см. (2.2.57), (2.2.58))

$$\mathcal{R}_m(\lambda) = A_{\lambda;m}^{-1} = B_{\lambda;m}^{-1/2} X_m(\lambda) B_{\lambda;m}^{-1/2} \quad (\lambda \geq \lambda_0 > 0),$$

то форму $\mathbb{I}_{\lambda;\, k,m}^{l',l''}[F,\, v]$ можно записать в виде

$$\mathbb{I}_{\lambda;\, k,m}^{l',l''}[F,\, v] = \left(d^{-|k|} a_{klm} D^k B_{\lambda;m}^{-1/2} X_m(\lambda) B_{\lambda;m}^{-1/2} \Phi_m F,\, d^{-|l'|-|l''|} \varphi_m^{(l')} D^{l''} v \right)_{\alpha_j + j}.$$

Далее используя обозначение (см. (2.2.61))

$$V_{m,\lambda}(x) = X_m(\lambda) B_{\lambda;m}^{-1/2} (\varphi_m F)(x),$$

имеем

$$\mathbb{I}_{\lambda;\, k,m}^{l',l''}[F,\, v] = \left(d^{-|k|} a_{klm} D^k B_{\lambda;m}^{-1/2} V_{m,\lambda},\, d^{-|l'|-|l''|} \varphi_m^{(l')} D^{l''} v \right)_{\alpha_j + j}.$$

Так как $D^{l''} v = D^{l''} B_{\lambda_0;m}^{-1/2} B_{\lambda_0;m}^{1/2} v$ и $B_{\lambda_0;m}$ – самосопряженный оператор, то

$$\mathbb{I}_{\lambda;\, k,m}^{l',l''}[F,\, v] =$$
$$= \left(B_{\lambda_0;m}^{-1/2} D^{l''} \varphi_m^{(l')} d^{-|k|-|l'|-|l''|} a_{klm} D^k B_{\lambda;m}^{-1/2} V_{m,\lambda},\, B_{\lambda_0;m}^{1/2} v \right)_{\alpha_j + j}. \quad (2.2.73)$$

В процессе доказательства утверждения 2.2.1 мы воспользовались обозначением (см. (2.2.61))

$$\mathbb{T}_{l,k',k'',m}(\lambda) = d^{-|k'|-|k''|}\varphi_m^{(k')} a_{klm} D^{k''} B_{\lambda;m}^{-1/2}$$

и доказывали, что (см. (2.2.69))

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|\mathbb{T}_{l,k',k'',m}(\lambda)\| = 0 \tag{2.2.74}$$

при $|k'| + |k''| = j \in J$; $k' \neq 0$. Следовательно,

$$\mathbb{T}_{k,l',l'',m}(\lambda_0) = d^{-|l'|-|l''|}\varphi_m^{(l')} a_{klm} D^{l''} B_{\lambda_0;m}^{-1/2}$$

и

$$\mathbb{T}^*{}_{k,l',l'',m}(\lambda_0) = B_{\lambda_0;m}^{-1/2} D^{l''} \varphi_m^{(l')} d^{-|l'|-|l''|} a_{klm}.$$

Так как норма ограниченного оператора совпадает с нормой сопряженного оператора, то из (2.2.74) следует, что

$$\lim_{\lambda_0\to\infty} \|\mathbb{T}^*{}_{l',l'',m}(\lambda_0)\| = 0 \tag{2.2.75}$$

при $|l'| + |l''| = j \in J$; $l' \neq 0$.

С помощью введенного обозначения равенство (2.2.73) записывается в виде

$$\mathbb{I}_{\lambda;\,k,m}^{l',l''}[F,\, v] = \Big(\mathbb{T}^*{}_{l',l'',m}(\lambda_0) d^{-|k|} D^k B_{\lambda;m}^{-1/2} V_{m,\lambda},\; B_{\lambda_0;m}^{1/2} v\Big)_{\alpha_j+j}.$$

Далее вводим обозначение

$$\mathbb{P}_{m,\lambda_0,k} = d^{-|k|} D^k B_{\lambda_0;m}^{-1/2} \tag{2.2.76}$$

и записываем полученное равенство в виде

$$\mathbb{I}_{\lambda;\,k,m}^{l',l''}[F,\, v] = \Big(\mathbb{T}^*{}_{k,l',l'',m}(\lambda_0) \mathbb{P}_{m,\lambda_0,k} B_{\lambda_0;m}^{1/2} B_{\lambda;m}^{-1/2} V_{m,\lambda},\; B_{\lambda_0;m}^{1/2} v\Big)_{\alpha_j+j}. \tag{2.2.77}$$

Из (2.2.63) следует, что при $\lambda \geq \lambda_0$ оператор $B_{\lambda_0;m}^{1/2} B_{\lambda;m}^{-1/2}$ является ограниченным оператором, и его норма не превосходит единицу. С другой стороны, согласно утверждения п. а) леммы 2.2.1 оператор $\mathbb{P}_{m,\lambda_0,k}$

является ограниченным. Поэтому из (2.2.77) имеем

$$\left|\mathbb{I}^{l',l''}_{\lambda;\,k,m}[F,\,v]\right| \le$$
$$\le M_2 \left\|\mathbb{T}^*{}_{k,l',l'',m}(\lambda_0)\right\| \left\|V_{m,\lambda};\, L_{2,\,\alpha_j+j}(R^n)\right\| \cdot \left\|B^{1/2}_{\lambda_0;m}v;\, L_{2,\,\alpha_j+j}(R^n)\right\| \quad (2.2.78)$$

при всех $\lambda \ge \lambda_0$.

Ранее при доказательстве утверждения 2.2.1 мы доказывали, что (см. (2.2.68)),

$$\|V_{m,\lambda}; L_{2,\,\delta}(R^n)\| \le M_3 \|F; \mathbb{H}_-\|\,,$$

при $\lambda \ge \lambda_0$, где $\lambda_0 \ge 1$ – некоторое конечное число и

$$\left\|B^{1/2}_{\lambda_0;m}v;\, L_{2,\,\delta}(R^n)\right\| \le M_4 \|v;\, \mathbb{H}_+\|$$

для всех $v \in \mathbb{H}_+$. В силу этих неравенств из (2.2.78) следует, что

$$\left|\mathbb{I}^{l',l''}_{\lambda;\,k,m}[F,\,v]\right| \le M_5 \left\|\mathbb{T}^*{}_{k,l',l'',m}(\lambda_0)\right\| \|F; \mathbb{H}_-\| \cdot \|v;\, \mathbb{H}_+\| \quad (2.2.79)$$

при всех $\lambda \ge \lambda_0$ и для всех $F \in L_{2,\,\delta}(R^n)$, $v \in \mathbb{H}_+$.

Вводя обозначение

$$\delta_*(\lambda_0) = M_5 \sup \left\|\mathbb{T}^*{}_{k,l',l'',m}(\lambda_0)\right\|,$$

получим

$$\left|\mathbb{I}^{l',l''}_{\lambda;\,k,m}[F,\,v]\right| \le \delta_*(\lambda_0)\, \|F; \mathbb{H}_-\| \cdot \|v;\, \mathbb{H}_+\| \quad (2.2.80)$$

при всех $\lambda \ge \lambda_0$ и для всех $F \in L_{2,\,\delta}(R^n)$, $v \in \mathbb{H}_+$.

Из (2.2.75) следует, что $\delta_*(\lambda_0) \to 0$ при $\lambda_0 \to 0$. Поэтому подбирая число λ_0 достаточно большим, из (2.2.80) и (2.2.72) в силу леммы 1.2.2 получаем (2.2.70).

Утверждение 2.2.2 доказано.

Применяя неравенства (2.2.39), (2.2.70), установленные, соответственно, в утверждениях 2.2.1 и 2.2.2, из (2.2.36) получим

$$|\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle - \langle F,\, v\rangle| \le (\omega_1(\lambda) + \omega_2(\lambda_0))\, \|F; \mathbb{H}_-\| \cdot \|v; \mathbb{H}_+\|$$

для всех $F \in L_{2,\delta}(R^n)$, $v \in \mathbb{H}_+$. Так как $\omega_1(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$ и $\omega_2(\lambda) \to 0$ при $\lambda_0 \to \infty$, то существует число $\lambda_0 \geq 1$ такое, что

$$|\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle - \langle F,\, v\rangle| \leq \frac{1}{2}\,\|F; \mathbb{H}_-\| \cdot \|v; \mathbb{H}_+\| \tag{2.2.81}$$

для любого $\lambda \geq \lambda_0$ и всех $F \in L_{2,\delta}(R^n)$, $v \in \mathbb{H}_+$. Так как по определению пространства $\mathbb{H}_-$ пространство $L_{2,\delta}(R^n)$ плотно вложено в $\mathbb{H}_-$, то оценка (2.2.81) верна для всех $F \in \mathbb{H}_-$.

Из оценки (2.2.81) следует, что при $\lambda > \lambda_0$ оператор $\mathbb{G}(\lambda) = \mathbb{R}(\lambda) - E$, действующий из $\mathbb{H}_-$ в $\mathbb{H}_-$, является ограниченным и его норма не превосходит $1/2$. Поэтому оператор

$$\mathbb{R}(\lambda) : \mathbb{H}_- \to \mathbb{H}_-$$

непрерывно обратим и

$$\mathbb{R}^{-1}(\lambda) = (E + \mathbb{G}(\lambda))^{-1}.$$

Оператор $\mathcal{R}_m(\lambda)$, определенный равенством (2.2.28), действует из $\mathbb{H}_-$ в $\mathbb{H}_+$. Поэтому из (2.2.30) следует, что оператор $\mathcal{R}(\lambda)$ также действует из $\mathbb{H}_-$ в $\mathbb{H}_+$. Следовательно, для любого функционала $F \in \mathbb{H}_-$ функция $U(x)$, определенная равенством

$$U = \mathcal{R}(\lambda)\mathbb{R}^{-1}(\lambda)F \quad (\lambda \geq \lambda_0), \tag{2.2.82}$$

принадлежит пространству $\mathbb{H}_+$.

Далее будем предполагать, что $\lambda \geq \lambda_0$ и λ_0 –некоторое достаточно большое число. Тогда из равенства (2.2.31) следует, что

$$B_\lambda[\mathcal{R}(\lambda)\mathbb{R}^{-1}(\lambda)F, v] = \langle F, v\rangle$$

для всех $v \in C_0^\infty(R^n)$. Поэтому при $\lambda \geq \lambda_0$ функция $U(x)$, определенная равенством (2.2.82), удовлетворяет равенству

$$B_\lambda[U, v] = \langle F, v\rangle \quad \forall v \in C_0^\infty(R^n).$$

Это означает, что функция (2.2.82) является решением задачи $\mathbb{D}_\lambda$. Так как при $\lambda \geq \lambda_0$ оператор $\mathbb{R}^{-1}(\lambda)$ ограничен, то из (2.2.29) и (2.2.30) следует, что функция (2.2.82) удовлетворяет оценке (2.1.9) теоремы 2.1.1, то есть

$$\|U; \mathbb{H}_+\| \leq M \|F; \mathbb{H}_-\|,$$

где число M не зависит от $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$ и от функционала F.

Таким образом, мы доказали, что задача $\mathbb{D}_\lambda$ при $\lambda \geq \lambda_0$ имеет решение для любого заданного функционала $F \in \mathbb{H}_-$, и оно удовлетворяет неравенству (2.1.9).

Переходим к доказательству единственности решения задачи $\mathbb{D}_\lambda$. Оно проводится так же, как в заключительной части параграфа 1.3.

Рассмотрим сопряженную задачу: для заданного функционала $F \in \mathbb{H}_-$ найти функцию $U_1 \in \mathbb{H}_+$ удовлетворяющую равенству

$$\overline{B_\lambda[v, U_1]} = \langle F, v\rangle \quad \forall v \in \mathbb{H}_+. \tag{2.2.83}$$

Так как коэффициенты билинейной формы $\overline{B_\lambda[v, U_1]}$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1.1, поступая так же, как выше, можно построить операторы $\mathcal{R}_*(\lambda)$, $\mathbb{R}_*(\lambda)$ такие, что функция $U_1 = \mathcal{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$ $(\lambda \in [\lambda_0^*, \infty))$ принадлежит пространству $\mathbb{H}_+$ и удовлетворяет уравнению (2.2.83).

Пусть функция $u \in \mathbb{H}_+$ является решением уравнения

$$B_\lambda[u, v] = 0 \quad (\forall v \in \mathbb{H}_+), \tag{2.2.84}$$

где $\lambda \geq \lambda_0' = \max\{\lambda_0^*, \lambda_0\}$. Пусть F – произвольный элемент пространства $\mathbb{H}_-$. Так как $U_1 = \mathcal{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$ принадлежит пространству $\mathbb{H}_+$, то, полагая $v = U_1$ в (2.2.84), получаем

$$B_\lambda[u, U_1] = 0,$$

то есть

$$\overline{B_\lambda[u, U_1]} = 0.$$

С другой стороны, функция $U_1 = \mathcal{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$ удовлетворяет (2.2.83). Поэтому $\langle F, u\rangle = 0$ для всех $F \in \mathbb{H}_+$. Учитывая вложение $\mathbb{H}_+ \to \mathbb{H}_-$ и полагая $F = u$, имеем $\langle u, u\rangle = 0$, то есть $u = 0$.

Теорема 2.1.1 доказана полностью.

2.3. Доказательство теоремы 2.1.3

Доказательство теоремы 2.1.3 проводится с помощью априорной оценки, которая доказывается с помощью теоремы 1.4.1.

Пусть $h \in \{1, \dots, p\}$ и $B_{j_h}[u, v]$ – соответствующая старшая форма. Добавляя к этой форме слагаемые соответствующих нестарших (подчиненных) форм, вводим следующую форму

$$B^*_{j_h}[u, v] = \sum_{|k|=|l|=j\le j_h} \int d^{2\alpha_{j_h}-2j}(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx. \qquad (2.3.1)$$

Здесь и далее считается, что

$$a_{kl}(x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad |k| = |l| = j \le j_h,\ j \ne i_s,\ s = \overline{1, q}.$$

Теперь применяя теорему 2.1.2 к полуторалинейной форме (2.3.1), получаем следующий результат:

Теорема 2.3.1. *Пусть выполнены условия (2.1.7), (2.1.8), (2.1.11), и пусть для любого числа $\nu > 0$ существует число $R_\nu > 0$ такое, что $|\gamma_h(x) - \gamma_h(y)| < \nu$ для любого $h = \overline{1, p}$ и всех $x, y \in R^n$ таких, что $|x| > R_\nu$, $|y| > R_\nu$. Пусть $h \in \{1, \dots, p\}$ и задан элемент $F_h \in \left(V^{j_h-m}_{2;\alpha_{j_h}+m}(R^n)\right)'$, где целое число m такое, что $0 \le m \le m_0$. Тогда если функция $u_h(x) \in L^r_{2;\alpha_{j_h}}(R^n) \cap L_{2;loc}(R^n)$ является решением уравнения*

$$B^*_{j_h}[u_h, v] = \langle F_{j_h}, v\rangle \quad (\forall v \in C_0^\infty(R^n)), \qquad (2.3.2)$$

то $u_h(x) \in W^{j_h+m}_{2;loc}(R^n)$, и при наличии добавочного условия

$$u_h(x) \in L_{2;\,\alpha_{j_h}+j_h}(R^n) \qquad (2.3.3)$$

выполняется неравенство

$$\left\| u_h;\, V^{j_h+m}_{2;\,\alpha_{j_h}-m}(R^n) \right\| \le$$

$$\le M \left\{ \left\| u_h;\, V^{j_h}_{2;\,\alpha}(R^n) \right\| + \left\| F;\, \left(V^{j_h-m}_{2;\alpha_{j_h}+m}(R^n) \right)' \right\| \right\}, \quad (2.3.4)$$

где число $M > 0$ *не зависит от* $u_h(x)$ *и* F_h*.*

Напомним, что (см. (2.1.10)) $\mathbb{H}^s_+$ – пространство комплекснозначных функций $u(x)$, $x \in R^n$, с конечной нормой

$$\| u;\, \mathbb{H}^s_+ \| = \left\{ \sum_{h=1}^{p} \left\| u;\, V^{j_h+s}_{2;\alpha_{j_h}-s}(R^n) \right\|^2 \right\}^{1/2}. \qquad (2.3.5)$$

Поступая так же, как в п. 5.2 работы [45], можно отождествить каждый элемент $u \in \mathbb{H}^s_+$ с вектор-функцией $U(x) = (U_1(x),\, U_2(x), \ldots,\, U_p(x))$, где $U_h(x) \in V^{j_h+s}_{2;\alpha_{j_h}-s}(R^n)$, $h = \overline{1,\, p}$. При этом норма (2.3.5) элемента $u \in \mathbb{H}^s_+$ эквивалентна следующей норме

$$\| U;\, \mathbb{H}^{s,p}_+ \| = \left\{ \sum_{h=1}^{p} \left\| U_h;\, V^{j_h+s}_{2;\alpha_{j_h}-s}(R^n) \right\|^2 \right\}^{1/2}. \qquad (2.3.6)$$

Далее вводим p-компонентное гильбертово пространство $[L_{2,\,\delta}(R^n)]^p$ следующим образом: $f \in [L_{2,\,\delta}(R^n)]^p$, если $f = (f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_p)$ и

$$\| f;\, [L_{2,\,\delta}(R^n)]^p \| = \left\{ \sum_{h=1}^{p} \| f_h;\, L_{2;\delta}(R^n) \|^2 \right\}^{1/2} < +\infty.$$

Скалярное произведение в пространстве $[L_{2,\,\delta}(R^n)]^p$ определяется равенством

$$(\hat f,\, \tilde f)_{\delta,p} = \sum_{h=1}^{p} \int d^{2\delta}(x) \hat f_h(x) \overline{\tilde f_h(x)} dx,$$

$$\hat f(x) = \left(\hat f_1(x),\, \ldots,\, \hat f_p(x) \right),\ \tilde f(x) = \left(\tilde f_1(x),\, \ldots,\, \tilde f_p(x) \right).$$

Символом $\mathbb{H}^{s,p}_-$ обозначим пополнение пространства $[L_{2,\,\delta}(R^n)]^p$ по норме

$$\| f;\, \mathbb{H}^{s,p}_- \| = \sup \left\{ \sum_{h=1}^{p} \frac{|(f,\, U_h)_\delta|}{\left\| U_h;\, V^{j_h+s}_{2;\alpha_{j_h}-s}(R^n) \right\|} \right\}, \qquad (2.3.7)$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $U \in \mathbb{H}_{+}^{s,p}$. Элементы из $\mathbb{H}_{-}^{s,p}$ отождествляются с соответствующими антилинейными непрерывными функционалами над $\mathbb{H}_{+}^{s,p}$. Теперь каждому элементу $F \in \mathbb{H}_{-}^{s}$ сопоставим единственный элемент $f \in \mathbb{H}_{-}^{s,p}$ равенством $\langle F, v\rangle = \langle f, v\rangle$. При этом норма $\|F;\, \mathbb{H}_{-}^{s}\|$ эквивалентна норме (2.3.7) элемента $f \in \mathbb{H}_{-}^{s,p}$. Другими словами, элементы $F \in \mathbb{H}_{-}^{s}$, $f \in \mathbb{H}_{-}^{s,p}$ отождествляются.

Пусть F-произвольный элемент из $\mathbb{H}_{-}$ и функция $u \in \mathbb{H}_{+}$ является решением уравнения

$$B[u,\, v] + \lambda(u,\, v)_{\delta} =< F,\, v > \quad \forall v \in C_0^{\infty}(R^n).$$

Тогда для соответствующих элементов $U(x) = (U_1(x),\, U_2(x), \ldots,\, U_p(x))$, $f = (f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_p)$ имеют место следующие равенства

$$B^{*}_{j_h}[U_h,\, v] + \lambda(U_h,\, v)_{\delta} =< f_h,\, v > \quad \forall v \in C_0^{\infty}(R^n); \quad h = 1,\, \ldots,\, p.$$

Пусть выполняются условия (2.1.7), (2.1.8), (2.1.11) и $0 \le m \le m_0$. Применяя теорему 2.3.1, получаем следующие оценки

$$\begin{aligned} &\left\| U_h;\, V^{j_h+m}_{2;\,\alpha_{j_h}-m}(R^n) \right\| \le \\ &\le M \left\{ \left\| U_h;\, V^{j_h}_{2;\,\alpha}(R^n) \right\| + \left\| f_h;\, \left(V^{j_h-m}_{2;\alpha_{j_h}+m}(R^n) \right)' \right\| \right\}, \quad h = 1,\, \ldots,\, p. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

С помощью этих неравенств легко доказывается, что

$$\|U;\, \mathbb{H}_{+}^{m,p}\| \le M \left\{ \left\| U;\, \mathbb{H}_{+}^{0,p} \right\| + \|f;\, \mathbb{H}_{-}^{m,p}\| \right\},$$

где число $M > 0$ не зависит от $U,\, f,\, m,\, p$. Теперь учитывая эквивалентности норм $\|U;\, \mathbb{H}_{+}^{m,p}\|$ и $\|u;\, \mathbb{H}_{+}^{m}\|$; $\left\|U;\, \mathbb{H}_{+}^{0,p}\right\|$ и $\left\|u;\, \mathbb{H}_{+}^{0}\right\|$; $\|f;\, \mathbb{H}_{-}^{m,p}\|$ и $\|F;\, \mathbb{H}_{-}^{m}\|$, получаем

$$\|u;\, \mathbb{H}_{+}^{m}\| \le M \left\{ \left\| u;\, \mathbb{H}_{+}^{0} \right\| + \|F;\, \mathbb{H}_{-}^{m}\| \right\}. \tag{2.3.9}$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 2.3.2. *Пусть выполнены условия (2.1.7), (2.1.8), (2.1.11) и пусть для любого числа* $\nu > 0$ *существует число* $R_\nu > 0$ *такое, что* $|\gamma_h(x) - \gamma_h(y)| < \nu$ *для любого* $h = \overline{1, p}$ *и всех* $x, y \in R^n$ *таких, что* $|x| > R_\nu, |y| > R_\nu$. *Пусть задан элемент* $F \in \mathbb{H}_-^m$, *где целое число* m *такое, что* $0 \le m \le m_0$. *Тогда если функция* $u(x) \in \bigcap_{h=1}^{p} L_{2;\alpha_{j_h}}^r(R^n) \bigcap L_{2;loc}(R^n)$ *является решением уравнения*

$$B[u, v] + \lambda(u, v)_\delta = \langle F, v\rangle \quad (\forall v \in C_0^\infty(R^n)), \tag{2.3.10}$$

то $u \in \bigcap_{h=1}^{p} W_{2;loc}^{j_h+m}(R^n)$ *и при наличии добавочного условия*

$$u(x) \in \bigcap_{h=1}^{p} L_{2;\,\alpha_{j_h}+j_h}(R^n)$$

выполняется неравенство (2.3.9), где число $M > 0$ *не зависит от* $u_h(x)$ *и* F_h.

Теперь, применяя теорему 2.3.2, завершаем доказательству теоремы 2.1.3. Пусть выполнены все условия теоремы 2.1.2 и пусть $F \in \mathbb{H}_-^m$. Так как (см. теорему 2.1.2 и замечание 2.1.1) $\mathbb{H}_-^m \to \mathbb{H}_-^0 = \mathbb{H}_-$, то $F \in \mathbb{H}_-$ и по теореме 2.1.1 при $\lambda \ge \lambda_0$ существует единственное решение $u \in \mathbb{H}_+$ уравнения (2.3.10) (см. задачу $\mathbb{D}_\lambda$ и уравнение (2.1.6)), и выполняется неравенство

$$\|u;\, \mathbb{H}_+\| \le M_0 \, \|F;\, \mathbb{H}_-\|\,, \tag{2.3.11}$$

где число $M_0 > 0$ не зависит от $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$ и функционала F.

Далее заметим, что функция $u \in \mathbb{H}_+$ удовлетворяет условиям

$$u(x) \in \bigcap_{h=1}^{p} L_{2;\alpha_{j_h}}^r(R^n) \bigcap L_{2;\mathrm{loc}}(R^n), \quad u(x) \in \bigcap_{h=1}^{p} L_{2;\,\alpha_{j_h}+j_h}(R^n)$$

теоремы 2.3.2. Поэтому имеет место неравенство (2.3.9). Так как $\mathbb{H}_-^m \to \mathbb{H}_-^0 = \mathbb{H}_-$, то

$$\|F;\, \mathbb{H}_-\| \le M_1 \, \|F;\, \mathbb{H}_-^m\|$$

и из (2.3.11) следует, что

$$\|u;\, \mathbb{H}_+\| \leq M_2 \,\|F;\, \mathbb{H}_-^m\|\,.$$

Отсюда из (2.3.9) следует неравенство (2.1.12) теоремы 2.1.3.

Теорема 2.1.3 доказана.

Заключение

Таким образом, в диссертационной работе найдены достаточные условия существования и единственности решения вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов высшего порядка во всем n-мерном евклидовом пространстве со степенным вырождением на бесконечности, в случае, когда полуторалинейные интегро-дифференциальные формы, порожденные исследуемыми операторами, могут не удовлетворять условию коэрцитивности. Подобные результаты ранее были получены только в случае ограниченной области и примененный метод был основан на конечное разбиение единицы рассматриваемой области. Все оценки вспомогательных операторов были получены в рамках обычного пространства L_2 (т.е. с весом тождественно равен единицы). Применение этого метода в случае всего пространства невозможно. Поэтому в диссертационной работе разработан новый метод, который основан на специальном бесконечном разбиение единицы всего пространства конечной кратности и необходимые оценки вспомогательных операторов установлены в рамках весового пространства L_2, весовая функция которого является степенью функции $d(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{1/2}$.

В диссертационной работе рассмотрены как случай согласованного вырождения коэффициентов исследуемого оператора на бесконечности, так и случай несогласованного вырождения коэффициентов. В случае несогласованного вырождения коэффициентов на бесконечности введено понятие старшей формы и показано, что на весовую функцию пространства решений влияют только степени вырождения коэффициентов старших форм. В работе также изучены дифференциальные свойства исследуемой задачи в зависимости от гладкости коэффициентов и правой части дифференциального уравнения.

Разработанная в диссертационной работе техника может быть использована при исследовании спектральных свойств вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными полуторалинейными интегро-дифференциальными формами, а также при исследовании разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений с такими операторами.

Список литературы

1. Байдельдинов Б.Л. Об одном аналоге первой краевой задачи для эллиптического уравнения порядка $2m$ со степенным вырождением на границе / Б.Л.Байдельдинов // Доклады АН СССР. – 1983.– Т. 270. -№5. – С. 1038 – 1042.
2. Байдельдинов Б.Л. Об аналоге первой краевой задачи для эллиптических уравнений с вырождением. Метод билинейных форм / Б.Л.Байдельдинов // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. – 1984. – Т. 170. – С. 3 – 11.
3. Бесов О.В. Исследование по теории пространств дифференцируемых функций многих переменных / О.В.Бесов, Л.Д.Кудрявцев, П.И.Лизоркин, С.М.Никольский // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. – 1988. – Т. 182. – С. 68 – 127.
4. Бойматов К.Х. О плотности финитных функций в весовых пространствах / К.Х.Бойматов // Доклады АН СССР. – 1989. – Т. 307.– №6. – С. 1296 – 1299.
5. Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка / К.Х.Бойматов // Доклады АН СССР. – 1992. – Т. 327. – №1. – С. 9-15.
6. Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле, порожденная некоэрцитивной формой / К.Х.Бойматов // Доклады АН России. – 1993. – Т. 330. – №3. – С. 285 – 290.
7. Бойматов К.Х. Матричные дифференциальные операторы, порожденные некоэрцитивными формами / К.Х.Бойматов // Доклады АН России. – 1994. – Т. 339. – №1. – С. 5 – 10.
8. Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле для систем вырожденно-эллиптических уравнений, ассоциированных с некоэрцитивными формами / К.Х.Бойматов // Международная конференция "Функ-

циональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ". Сборник тезисов. Москва. – 1995. – С. 54 – 55.

9. Бойматов К.Х. Граничные задачи для некоэрцитивных форм / К.Х.Бойматов // Доклады АН РТ. – 1998. – Т. XLI. – №10. – С. 10-16.
10. Бойматов К.Х. О базисности по Абелю корневых вектор-функций вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов с сингулярными матричными коэффициентами / К.Х.Бойматов // Сибирский математический журнал. – 2006. – Т. 47. – №1. – С. 46-57.
11. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения / К.Х.Бойматов // Труды Математического института АН СССР. – 1984. – Т. 170. – С. 37-76.
12. Бойматов К.Х. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой / К.Х.Бойматов, С.А.Исхоков // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. – 1997. – Т. 214. – С. 107-134.
13. Бойматов К.Х. О собственных значениях и собственных функциях матричных дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами / К.Х.Бойматов, С.А.Исхоков // Вестник Хорогского Университета. Естественные науки. – 2000. – №2. – С. 13 – 24.
14. Вашарин А.А. Граничные свойства функций касса $W^1_{2,\alpha}$ и их приложение к решению одной краевой задачи математической физики / А.А.Вашарин // Известия АН СССР. – Серия математики.– 1959.– Т. 23.– №2.– С. 421-454.
15. Вашарин А.А. Некоторые краевые задачи для эллиптических уравнений с сильным вырождением на границе / А.А.Вашарин, П.И.Лизоркин // Доклады АН СССР. – 1961.– Т. 137. – №5. – С. 1015-1018.
16. Гадоев М.Г., Константинова Т.П. О разрешимости вариационной

задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических операторов / М.Г.Гадоев, Т.П.Константинова // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т. 21. – №2. – С. 8-21.

17. Глушко В.П. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи / В.П.Глушко, Ю.Б.Савченко // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Математический анализ. – 1985. – Т. 23. – С. 125-218.
18. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И.Ц.Гохберг, М.Г.Крейн //– М.:Наука, 1965. – 448 с.
19. Исхоков С.А. О гладкости решений обобщенной задачи Дирихле и задачи на собственные значения для дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами / С.А.Исхоков // Доклады Академии наук (Россия). –1995. – Т. 342. – №1. – С. 20-22.
20. Исхоков С.А. О гладкости решения вырождающихся эллиптических уравнений / С.А.Исхоков // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31. – №4. – С. 641-653.
21. Исхоков С.А. Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов с нестепенным вырождением, порожденных некоэрцитивными формами / С.А.Исхоков // Доклады Академии наук России. – 2003. – Т. 392. – №5. – С. 606-609.
22. Исхоков С.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением / С.А.Исхоков // Математические заметки. – 2010. – Т. 87. – №2. – С. 201-216.
23. Исхоков С.А. Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов с нестепенным вырождением, порожденных некоэрцитивными билинейными формами / С.А.Исхоков // Вторая международная конференция "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования посвященная

80-летию члена-корреспондента РАН, профессора Л.Д.Кудрявцева. Тезисы докладов. –2003. – С. 172 - 174.

24. Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Якушев И.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов высшего порядка с нестепенным вырождением и его приложения / С.А.Исхоков, М.Г.Гадоев, И.А.Якушев // Уфимский математический журнал. – 2016. – Т. 8. – №1. – С. 54-71.

25. Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Константинова Т.П. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными билинейними формами / С.А.Исхоков, М.Г.Гадоев, Т.П.Константинова // Доклады Академии наук России. – 2015. – Т. 462. – №1. – С. 7-10.

26. Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Петрова М.Н. О некоторых спектральных свойствах одного класса вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов / С.А.Исхоков, М.Г.Гадоев, М.Н.Петрова // Математические заметки СВФУ. – 2016. – Т. 23. – №2. – С. 31-50.

27. Исхоков С.А., Каримов А.Г. О гладкости решения вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов, ассоциированных с некоэрцитивными билинейними формами / С.А.Исхоков, А.Г.Каримов // Доклады АН РТ. – 2004. – Т. 47. – №4. – С. 68-74.

28. Исхоков С.А. О гладкости решения вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов, ассоциированных с некоэрцитивными билинейными формами / С.А.Исхоков, А.Г.Каримов // Математические заметки ЯГУ. – 2005. – Т. 12. – №1. – С. 74 – 86.

29. Исхоков С.А. О вариационной задаче Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов / С.А.Исхоков, А.Я.Кужмуратов // Доклады Академии наук (Россия). – 2005. – Т. 403. – №2. – С. 165-168.

30. Исхоков С.А. Об одной вариационной задаче для эллиптического оператора, вырождающегося на границе ограниченной области / С.А.Исхоков, А.Я.Кужмуратов // В сб.: Тезисы докладов IV Между-

народной конференции по мат. моделированию. Якутск. 27-31.07.2004. – С. 19-20.

31. Исхоков С.А. Априорная оценка решений однородной задачи Дирихле для общих эллиптических уравнений с вырождением / С.А.Исхоков, А.Я.Кужмуратов // Материалы международной конференции "Актуальные вопросы математического анализа, дифференциальных уравнений и информатики", посвященной 70-летию академика АН РТ Усманова З.Д., Душанбе 24-25 августа 2007 г. – С. 43-44.
32. Исхоков С.А. О гладкости обобщенного решения вариационной задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения в дивергентной форме / С.А.Исхоков, А.Ё.Куджмуродов // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2008. – Т. 51. – №12. – С. 802-809.
33. Исхоков С.А., Нематуллоев О.А. О разрешимости вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области / С.А.Исхоков, О.А.Нематуллоев // Доклады АН РТ. – 2013. – Т. 56. – №5. – С. 352-358.
34. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т.Като //– М.: Мир. 1972. – 740 с.
35. Кондрашов В.И. Об одной оценке для семейств функций, удовлетворяющих некоторым интегральным неравенствам / В.И.Кондрашов // ДАН СССР. – 1938. – Т. 18. – №4-5. – С. 253-254.
36. Кудрявцев Л.Д. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений / Л.Д.Кудрявцев // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1959. – Т. 55. – С. 1-182.
37. Кудрявцев Л.Д. Теоремы вложения для классов функций, определенных на неограниченных областях / Л.Д.Кудрявцев // ДАН СССР. – 1963. – Т. 153. – С. 530-532.

38. Кудрявцев Л.Д. О вариационном методе отыскания обобщенных решений дифференциальных уравнений в функциональных пространствах со степенным весом / Л.Д.Кудрявцев // Дифференциальные уравнения.– 1983. – Т. 19. – №10. – С. 1723-1740.

39. Кудрявцев Л.Д. О существование и единственности решений вариационных задач / Л.Д.Кудрявцев // Доклады АН СССР. – 1988. – Т. 298. – №5. – С. 1055-1060.

40. Кудрявцев Л.Д. Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения / Л.Д.Кудрявцев, С.М.Никольский // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Совр. пробл. матем. Фундаментальные направления.– 1988. – Т. 26. – С. 5-157.

41. Левендорский С.З. Вырождающиеся эллиптические уравнения и их краевые задачи / С.З.Левендорский, Б.П.Панеях // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – 1990.– Т. 63. – С. 131-200.

42. Лизоркин П.И. К тории вырождающихся эллиптических уравнений / П.И.Лизоркин // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1985. – Т. 172. – С. 235 – 271.

43. Лизоркин П.И. О гладкости решения первой краевой задачи для одного модельного вырождающегося эллиптического оператора второго порядка / П.И.Лизоркин, Н.В.Мирошин // Дифференциальные уравнения. – 1986. – Т. 22. – №11. – С. 1945 – 1951.

44. Лизоркин П.И., Никольский С.М. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением. Вариационный метод / П.И.Лизоркин, С.М.Никольский // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1981. – Т. 157. – С. 90 – 118.

45. Лизоркин П.И., Никольский С.М. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью / П.И.Лизоркин, С.М.Никольский // Труды Математического институ-

та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1983. – Т. 161. – С. 157 – 183.

46. Мирошин Н.В. Вариационная задача Дирихле для вырождающегося на границе эллиптического оператора / Н.В.Мирошин // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т.24. – №3. – С. 455 – 464.

47. Мирошин Н.В. Обобщенная задача Дирихле для одного класса эллиптических дифференциальных операторов, вырождающихся на границе области. некоторые спектральные свойства / Н.В.Мирошин // Дифференциальные уравнения. – 1976. – Т. 12. – №6. – С. 1099 – 1111.

48. Мирошин Н.В. Внешняя задача Дирихле для вырождающегося эллиптического оператора / Н.В.Мирошин // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. – 1979. – Т. 150. – С. 198 – 211.

49. Мирошин Н.В. Спектральные внешние задачи для вырождающегося эллиптического оператора / Н.В.Мирошин // Изв. Вузов. Математика.– 1988. – №8. – С. 47 – 55.

50. Мирошин Н.В. Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора с вырождением / Н.В.Мирошин // Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН. – 1992. – Т. 194. – С. 179 – 195.

51. Никольский С.М. Приближений функций многих переменных и теоремы вложения / С.М.Никольский // 2-е изд. – М.: Наука. – 1977.–455 с.

52. Никольский С.М, Лирозкин П.И, Мирошин Н.В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / С.М.Никольский, П.И.Лирозкин, Н.В.Мирошин // Известия вузов. Математика. – 1988. – №8. – С. 4-30.

53. Олейник О.А. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О.А.Олейник, Е.В.Радкевич // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Математические анализ. – 1971. – С. 7-252.

54. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М.М. Смирнов // – М.: Наука. – 1966. – 292с.

55. Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе / С.А.Терсенов // – Новосибирск. – 1973. – 144с.

56. Пиголькина Т.С. О плотности финитных функций в весовых классах / Т.С.Пиголькина // Матем. заметки. – 1967. – Т. 2. – №1. – С. 53-60.

57. Трибель Х. Теория функциональных пространств / Х.Трибель // –М.: Мир. – 1986. – 448 с.

58. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. / Х.Трибель // М.: Мир. – 1980.

59. Успенский С.В. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям / С.В.Успенский, Г.В.Демиденко, В.Г.Перепелкин // – Новосибирск, Наука. – 1984. – 224с.

60. Chabrowski, J.H. On the Dirichlet problem for a linear elliptic equation with unbounded coefficients / J.H.Chabrowski // Boll. Unione mat. ital. – 1986. – Vol. 85. – No. 1. – P. 71-79.

61. Chabrowski, J.H. On the Dirichlet problem for a degenerate elliptic equation / J.H.Chabrowski // Comm. math. Univ. carol. – 1987. – Vol. 28. – No. 1. – P. 141-155.

62. Chabrowski, J.H. On the Dirichlet problem for degenerate elliptic equations / J.H.Chabrowski // Publ. Res. Inst. Math. Sci. – 1987. – Vol. 23. – No. 1. – P. 1-16.

63. Cavalheiro A.C. Weighted Sobolev Spaces and Degenerate Elliptic Equations / A.C.Cavalheiro // Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.). – 2008. – V. 26. – No. 1-2. – P. 117-132.

64. Chen H. Lower bounds of Dirichlet eigenvalues for some degenerate elliptic operators / H.Chen, P.Luo // Calculus of Variations and Partial

Differential Equations. – 2015. – vol. 53. – No. 3-4. – 23 p.

65. Chen H. Dirichlet problem for semilinear edge-degenerate elliptic equations with singular potential term / H.Chen, X.Liu // Journal of Differential Equations.– 2012. – vol. 252. – P. 4289-4314.
66. Kim D. Elliptic equations with nonzero boundary conditions in weighted Sobolev spaces / D.Kim // Jour. Math. Anal. Appl. – 2008. – Vol. 337. – P. 1465 - 1479.
67. Levendorskii S. Degenerate Elliptic Equations. Mathematics and its applications / S.Levendorskii // (Kluwer Academic Publisher). – 1994. – V. 258. – 442 p.
68. Lototsky S.V. Sobolev spaces with weights in domains and boundary value problems for degenerate elliptic equations / S. V.Lototsky // Methods Appl. Anal. – 2000. – Vol. 7. – No. 1. – P. 195-204.
69. Popivanov P.R. The degenerate oblique derivative problem for elliptic and parabolic equations / P.R.Popivanov, D.K.Palagachev // Mathematical Research, Vol. 93, Akademie Verlag (Wiley-VCH), Berlin (1997). – 153 p.
70. Stredulinsky, E.W. Weighted inequalities and degenerate elliptic partial differential equations / E.W.Stredulinsky // Lect. Notes Math. – vol. 1074. – 1984. – 142 p.

Публикации автора по теме диссертации

71-А. Рахмонов Б.А. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов второго порядка во всем пространстве [Текст] / С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2017. – Т. 60. – №11-12. – С. 555 – 559.

72-А. Рахмонов Б.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов второго порядка во всем пространстве [Текст] / С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан.

– 2018. – Т. 61. – №3. – С. 224 – 230.

73-А. Рахмонов Б.А. Вариационная задача Дирихле, связанная с некоэрцитивной формой во всем пространстве [Текст] / С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отд. физ-мат., хим., геол. и техн. н. – 2018. – №2 (171). – С. 17 – 25.

74-А. Рахмонов Б.А. О гладкости решения вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной формой во всем пространстве [Текст] / Б.А.Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан Республики Таджикистан. – 2018. – Т. 61. – №9-10. – С. 736 – 741.

75-А. Рахмонов Б.А. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов второго порядка во всем пространстве [Текст] / С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов // Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения, математический анализ, и теория чисел», посвященная 25-летию XVI сессии Верховного совета Республики Таджикистан, 27-28 октября 2017 года в г. Курган-Тюбе, С. 90 – 95.

76-А. Рахмонов Б.А. О разрешимости вариационной задачи Дирихле во всем пространстве [Текст] / С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов // Материалы международной научной конференции, посвященной «Современные проблемы математики и её приложений», 70-летию со дня рождения академика АН РТ, доктора физико-математических наук, профессора М.Илолова. Душанбе, 14-15 марта 2018 г. – С. 118 – 120.

77-А. Рахмонов Б.А. Об одном классе вырождающихся эллиптических операторов во все пространстве [Текст] / С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложений», Филиал МГУ им.М.В. Ломоносова в г. Душанбе. Душанбе, 21-22 июня 2018 г. – С. 48 – 50.

78-А. Рахмонов Б.А. Об одном классе вырождающихся эллиптических операторов во все пространстве [Текст] / С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов //

Материалы международной научной конференции «Современные проблемы алгебры и теории чисел», посвященной 90-летию со дня рождения, профессора Г.Б.Бобоева. Душанбе. 27-28 ноября 2018 г. – С. 63 – 65.

79-А. Рахмонов Б.А. Об одной однородной вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов во всем пространстве [Текст] / С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов // Сборник материалов II-ой Международной научно-практической конференции «Наука и инновационные разработки - Северу», Россия. г. Мирный. 14-15 марта 2019 г. – С. 186 – 188.

80-А. Рахмонов Б.А. Об одной априорной оценке решения вариационной задачи Дирихле во всем пространстве / Б.А.Рахмонов // Сборник материалов Республиканской научно-практической конференции «Актуальные вопросы дифференциальных уравнений, математического анализа, алгебры и теории чисел и их приложения», г. Душанбе, Российско-Таджикский (Славянский) университет. 17 мая 2019 г. – С. 271 – 275.