РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.5

На правах рукописи

Шабозова Адолат Аъзамовна

АППРОКСИМАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ КВАДРАТУР

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Душанбе — 2020

Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций Таджикского национального университета

НАУЧНЫЕ РУКОВОДИТЕЛИ: **Юсупов Гулзорхон Амиршоевич,**
доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой математического анализа и теории функций Таджикского национального университета;

Бердышева Елена Евгеньевна,
доктор физико-математических наук,
профессор математики Университета Гиссен (Германия)

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ: **Хасанов Юсуфали Хасанович,**
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры информатики и информационных систем Российско-Таджикского (Славянского) университета

Темурбекова София Давронбековна,
кандидат физико-математических наук,
заведующая кафедрой прикладной информатики в экономике Таджикского государственного финансово-экономического университета

ОППОНИРУЮЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни

Защита состоится *28 февраля 2020 г. в 10:00 часов* на заседании Диссертационного совета 6D.KOA-037 при Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан по адресу: 734063, г.Душанбе, ул. Айни, 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj

Автореферат разослан «_____» «_______________» 2020 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета 6D.KOA-037, кандидат физико-математических наук **Каримов О.Х.**

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. При изучении вопросов аппроксимации кривых более простыми и гладкими функциями нужно иметь их математическое описание, т.е. их аналитический вид. Общеизвестно, что кривые не всегда можно выразить явной формулой, а потому более общим способом задания кривых является их представление в параметрическом виде $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [0, L]$. Если заданные на отрезке $[0, L]$ функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют сложный аналитический вид, то возникает задача их гладкого приближения с заданной точностью.

Аппроксимация параметрически заданных кривых в различных метриках рассматривалась в работах: Сендова Бл.[1]; Завьялова Ю.С., Квасова Б.И., Мирошниченко В.Л.[2]; Мартынюка В.Т.[3]; Назаренко Н.А.[4]; Вакарчука С.Б.[5,6]. В указанных работах в качестве аппарата приближения использовались полиномы или сплайны. В работах С.Б. Вакарчука получены точные оценки приближения плоских кривых через дифференциально-разностные характеристики функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Заметим, что в цитированных выше работ вопрос о приближении кривых, заданных в m-мерном пространстве $\mathbb{R}^m$, ранее не рассматривался.

В данной диссертационной работе рассматривается вопрос о точной оценке погрешности приближения гладких пространственных кривых Γ принадлежащих $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 3$, $m \in \mathbb{N}$), заданных параметрическими уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \cdots, x_m = \varphi_m(t), \quad 0 \leq t \leq L,$$

вписанными в них линейными интерполяционными сплайнами (интерполяционными ломаными) на некоторых классах кривых, заданными модулями непрерывности (Глава I). Даётся приложение полученных в первой главе результатов к вопросу об отыскании точной оценки погрешности квадратурных формул на классах функций, заданных модулями непрерывности (Глава II).

---

[1] Сендов Бл. Хаусдорфовые приближения — София: Изд-во Болгарской АН. 1979. 372 с.

[2] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций — М.: Наука. 1980. 352 с.

[3] Мартынюк В.Т. О приближении ломаными кривых, заданных параметрическими уравнениями // Укр. матем. журнал. 1976. Т.28, №1. С.87-92.

[4] Назаренко Н.А. О приближении плоских кривых параметрическими эрмитовыми сплайнами // Укр. матем. журнал. 1979. Т.31, №3. С.201-215.

[5] Вакарчук С.Б. О приближении кривых, заданных в параметрическим виде, при помощи сплайн-кривых // Укр. матем. журнал. 1983. Т.35, №3. С.352-355.

[6] Вакарчук С.Б. Точные константы приближения плоских кривых полиномиальными кривыми и ломаными // Известия ВУЗов. Математика. 1988, №2. С.14-19.

В завершающем третьем параграфе второй главы приводится решение одной экстремальной задачи в постановке С.М. Никольского о нахождении наилучшей квадратурной формулы для классической формулы Маркова на классах функций одной переменной, задаваемых модулями непрерывности и гладкости.

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней изучены и решены сложные экстремальные задачи теории аппроксимации, не решенные до недавнего времени.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета на 2016-2020 гг. по теме „Теория аппроксимация функций".

Цель и задачи исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в следующем:

- найти точные оценки погрешности приближения гладких кривых, принадлежащих m-мерному пространству $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 3$, $m \in \mathbb{N}$), заданных параметрическими уравнениями, вписанными в них линейными интерполяционными сплайнами, на некоторых классах функций и кривых заданными модулями непрерывности;
- вычислить точные оценки погрешности квадратурных формул для криволинейных интегралов на рассматриваемых классах функций и кривых;
- найти наилучшую квадратурную формулу типа Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности.

Основные методы исследования. В работе используются методы решения экстремальных задач теории аппроксимации функций, базирующихся на идеях функционального анализа, а также метод Корнейчука оценки снизу погрешности квадратур на классах функций, обращающих в нуль квадратурную сумму.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдены точные оценки погрешности приближения пространственных кривых вписанными в них интерполяционными ломаными на различных классах функций, задаваемых модулями непрерывности как в l_p-метрике, так и в L_p-норме при различных значениях параметра p ($p \geq 1$);

- вычислены точные оценки погрешности квадратурных формул для криволинейных интегралов на рассматриваемых классах функций и кривых;
- найдена наилучшая квадратурная формула типа Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности.

Положения, выносимые на защиту:

- основные теоремы о точных оценках погрешности приближения кривых $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$, вписанных в них линейными интерполяционными сплайнами на классах функций и кривых;
- теоремы о точных погрешности квадратурных формул для криволинейных интегралов на классах функций;
- теорема о точной оценки погрешности квадратурной формулы Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит как теоретический, так и практический характер. Результаты диссертационной работы можно применять в теории приближения поверхностей билинейными сплайнами и в теории приближённого вычисления поверхностных интегралов на классах функций малой гладкости.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все результаты диссертационной работы получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры „Математического анализа и теории функций” и кафедры „Функционального анализа и дифференциальных уравнений” Таджикского национального университета под руководством академика АН РТ, профессора М.Ш. Шабозова (Душанбе, 2015-2019 гг.);
- международной научной конференции „Функциональные пространства и теория приближения функций” (Москва, 25-29 мая 2015 г.);
- международной летней математической Школе-Конференции С.Б. Стечкина по теории функций (Душанбе, 15-25 августа 2016 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений” (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.);

- м е ж д у н а р о д н о й научной конференции „Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел” (Душанбе, 29-30 октября 2015 г.);
- международной научной конференции „Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций” (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.);
- республиканской научной конференции „Математический анализ и его приложения” (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.).

Публикации. Основные результаты автора по теме диссертации опубликованы в 11 работах, из них 5 статей опубликованы в научных журналах Российской Федерации и 6 в научных журналах Республики Таджикистан, список которых приведён в конце автореферата. Из 11 работ 7 входят в списки ВАК РТ при Президенте Республики Таджикистан и ВАК РФ, а 4 в других изданиях. Из совместной с Г.А. Юсуповым статья соавтору принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 49 наименований, занимает 75 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Диссертационная работа начинается с введения. В нём освещается актуальность темы диссертации, цель работы, апробация и краткое изложение полученных результатов.

В первой главе диссертации рассматривается вопрос о точной оценке погрешности приближения пространственных кривых, лежащих в m-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$), сплайнами первого порядка (ломаными) в метриках различных пространств, в том числе и в хаусдорфовой метрике.

В первом параграфе первой главы приведено определение классов функций и кривых. Пусть Γ — произвольная спрямляемая кривая, лежащая в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ размерности m, заданная параметрическими уравнениями

$$x_i = \varphi_i(t),\ 0 \le t \le L, \quad i = \overline{1,m}. \tag{1}$$

Через $H^{\omega_1,\dots,\omega_m} := H^{\omega_1,\dots,\omega_m}[0,L]$ обозначим класс кривых $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$, заданных параметрическими уравнениями (1), и таких, у которых $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0,L]$ $(i=\overline{1,m})$, а через $W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m} := W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}[0,L]-$ класс гладких параметрически заданных кривых (1), у которых координатные функции $\varphi_i(t) \in W^{(1)}H^{\omega_i}[0,L]$ $(i=\overline{1,m})$. В случае, когда $\omega_i(t) \equiv \omega(t)$, $i=\overline{1,m}$, соответствующие классы функций обозначим $H^{m,\omega}$ и $W^{(1)}H^{m,\omega}$.

Если $\rho(P,Q)$ — некоторое расстояние между точками $P,Q \in \mathbb{R}^m$, то расстояние между кривыми $\Gamma, G \in H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ определим следующим образом

$$\rho(\Gamma,G) = \sup_{0\le t\le L} \big\{\rho(P(t),Q(t)) :\ P(t)\in\Gamma, Q(t)\in G\big\}, \tag{2}$$

где $P(t) := P\big(\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t)\big)$, $Q(t) := Q\big(\psi_1(t),\dots,\psi_m(t)\big)$ соответствуют одному и тому же значению параметра t $(0 \le t \le L)$. Расстояние (2) можно задавать параметрическими уравнениями кривых

$$\Gamma :\ x_i = \varphi_i(t);\ G :\ y_i = \psi_i(t),\ i=\overline{1,m};\ 0 \le t \le L. \tag{3}$$

Под хаусдорфовым расстоянием между двумя замкнутыми множествами $A \subset \mathbb{R}^m$ и $B \subset \mathbb{R}^m$ будем понимать следующую величину

$$\rho_H(A,B) := \left\{\sup_{P\in A}\inf_{Q\in B}\rho(P,Q), \sup_{P\in B}\inf_{Q\in A}\rho(P,Q)\right\}. \tag{4}$$

Пусть $\Delta_N :\ 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N \le L$ — произвольное разбиение отрезка $[0,L]$ и для координатных функций кривых $\Gamma, G \in H^{\omega_1,\dots,\omega_m}[0,L]$ выполнены равенства

$$\varphi_i(t_k) = \psi_i(t_k),\ i=\overline{1,m};\ k=\overline{1,N}. \tag{5}$$

Требуется найти величину

$$\inf_{\Delta_N} \rho\big(H^{\omega_1,\dots,\omega_m};\Delta_N\big) = \inf_{\Delta_N}\sup\left\{\rho\big(\Gamma,G\big) :\ \Gamma,G \in H^{\omega_1,\dots,\omega_m},\ \Gamma\big|_{\Delta_N} = G\big|_{\Delta_N}\right\},$$

где равенство $\Gamma\big|_{\Delta_N} = G\big|_{\Delta_N}$ означает, что для кривых $\Gamma, G \in H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ условие (5) выполняется. Пусть

$$\overline{\triangle}_N :\ t_k := kL/N,\ k=\overline{0,N}, \tag{6}$$

$$\triangle_N^0 :\ t_k^0 := (2k-1)L/(2N),\ k=\overline{1,N}. \tag{7}$$

Сформулируем основные результаты второго параграфа первой главы.

Теорема 1.2.1. *Каковы бы ни были модули непрерывности* $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m};\ 0 \le t \le L)$, *справедливы равенства*

$$\inf_{\Delta_N} \rho_q \left(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}; \Delta_N\right) = \rho_q \left(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}; \Delta_N^0\right) =$$

$$= 2\rho_{H,q} \left(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}; \Delta_N^0\right) = 2 \begin{cases} \left\{ \sum\limits_{i=1}^{m} \omega_i^q \left(L/(2N)\right) \right\}^{1/q}, & 1 \le q < \infty, \\ \max\limits_{1 \le i \le m} \omega_i \left(\dfrac{L}{2N}\right), & q = \infty, \end{cases} \tag{8}$$

где разбиение Δ_N^0 *определено формулой* (7).

Из этой теоремы при $\omega_i = \omega$ $(i = \overline{1,m})$ вытекает следствие 1.2.1. Доказывается также теорема 1.2.2, когда кривая $\Gamma \in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ приближается вписанной в неё интерполяционной ломаной.

В следующей теореме найдено точное отклонение кривых класса $\Gamma \in W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ от интерполяционных ломаных Γ_N, вписанных в Γ в метрике L_q.

Теорема 1.2.3. *Пусть* $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m})$ *— выпуклые модули непрерывности на отрезке* $[0, L]$. *Тогда для любого* $N \in \mathbb{N}$ $(N \ge 2)$ *справедливы равенства*

$$\mathscr{E}_N \bigl(W^{(1)} H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\bigr)_q := \sup \Bigl\{ \rho_q(\Gamma, \Gamma_N) : \ \Gamma \in W^{(1)} H^{\omega_1,\ldots,\omega_m} \Bigr\} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{cases} \left\{ \sum\limits_{i=1}^{m} \left(\int\limits_0^{L/N} \omega_i(t) dt \right)^q \right\}^{1/q}, & 1 \le q < \infty, \\ \max\limits_{1 \le i \le m} \int\limits_0^{L/N} \omega_i(t) dt, & q = \infty, \end{cases} \tag{9}$$

где Γ_N *— ломаная, вписанная в кривую* $\Gamma \in W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$, *с вершинами в точках* $P_k^* := P\left(\varphi_1(kh), \cdots, \varphi_m(kh)\right)$, $k = \overline{0,N}$, $L = L/N$.

Если же $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m})$ *– произвольные модули непрерывности, то*

$$\mathscr{E}_N\big(W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}\big)_q = \frac{\Theta_\omega}{4}\begin{cases}\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt\right)^q\right)^{1/q}, & 1\le q<\infty,\\ \max\limits_{1\le i\le m}\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt, & q=\infty,\end{cases} \tag{10}$$

где $(2/3)\le\Theta_\omega\le 1$.

Из теоремы 1.2.3 выводится ряд следствий.

В третьем параграфе первой главы рассматривается задача полигональной интерполяции кривых в m-мерном пространстве R^m и нахождение точной оценки полигонального приближения в несколько иных расстояниях, а именно хеммингово расстояние $r_1(\Gamma,G)$, евклидово расстояние $r_2(\Gamma,G)$ и расстояние Минковского $r_\infty(\Gamma,G)$.

Пусть функции $\varphi_i,\psi_i\in C^{(1)}[0,L]$. Через $\Gamma^{(1)}$ и $G^{(1)}$ будем обозначать кривые, координатные функции которых соответственно заданы уравнениями

$$\Gamma^{(1)}:\ x_i'=\varphi_i'(t),\quad i=\overline{1,m},\ 0\le t\le L, \tag{11}$$

$$G^{(1)}:\ y_i'=\psi_i'(t),\quad i=\overline{1,m},\ 0\le t\le L. \tag{12}$$

Пусть Δ_N — произвольное разбиение отрезка $[0,L]$, а Γ_N – вписанная в кривую $\Gamma\in W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ ломаная с вершинами в точках $P_k^*:=P^*\big(\varphi_1(kh),\varphi_2(kh),\dots,\varphi_m(kh)\big)\in\Gamma$ $(k=\overline{0,N})$, $h=L/N$.

Требуется найти точные верхние грани погрешностей приближения $\Gamma^{(1)}$ полигональной кривой $\Gamma_N^{(1)}$:

$$\mathscr{E}_N^{(l)}\big(W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m};\Delta_N;\ r_i\big)=$$
$$=\sup\Big\{\ r_i\big(\Gamma^{(l)},\Gamma_N^{(l)}\big);\Gamma\in W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}\Big\},\quad l=0,1;\ i=1,2,\infty. \tag{13}$$

Величина (13) при $l=0$, когда $\Gamma^{(0)}\equiv\Gamma$, $\Gamma_N^{(0)}\equiv\Gamma_N$, найдена во втором параграфе. Здесь вычислим значение величины (13) при $l=1$.

Основным результатом третьего параграфа является

Теорема 1.3.1. *Пусть* $\Gamma\subset\mathbb{R}^m$ *— произвольная кривая, принадлежащая классу* $W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$. *Если* Γ_N *— вписанная в кривую ломаная с вершинами в точках* $P_k^*\in\Gamma$, *то для произвольных модулей непрерывности* $\omega_i(t)$ $(i=$

$\overline{1,m}; 0 \le t \le L$) *имеют место равенства*

$$\mathscr{E}_N^{(1)}(W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}, \overline{\Delta}_N;\ r_1) = \frac{N}{L}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt, \tag{14}$$

$$\mathscr{E}_N^{(1)}(W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}, \overline{\Delta}_N;\ r_2) = \frac{N}{L}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt\right)^2\right\}^{1/2}, \tag{15}$$

$$\mathscr{E}_N^{(1)}(W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}, \overline{\Delta}_N; r_\infty) = \frac{N}{L}\max_{1\le i\le m}\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt, \tag{16}$$

где разбиение $\overline{\Delta}_N$ *— определено равенством* (6).

Из теоремы 1.3.1 вытекает следствие 1.3.1, когда $\omega_i \equiv \omega \ \ (i = \overline{1,m})$.

В четвёртом параграфе первой главы впервые изучается вопрос нахождения приближения кривых класса $H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$, лежащих в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, вписанными в них ломаными в метрике L_p $(1 \le p \le \infty)$. Отметим, что для явно заданной функции $f(x)$ вопрос об отклонении ломаных в L_p $(1 \le p < \infty)$ рассматривался В.Ф. Сторчаем[7], а случае $p = \infty$ еще ранее изучался В.Н.Малоземовым[8].

Предположим, что кривые $\Gamma, G \in H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ определены параметрическими уравнениями (3), причём всюду далее будем считать, что $\varphi_i, \psi_i \in L_p[0,L] \cap C[0,L]$, $1 \le p \le \infty$, $i = \overline{1,m}$. Определим расстояние между кривыми Γ и G равенством

$$\rho(\Gamma, G)_p := \left\{\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^{L}\left|\varphi_i(t) - \psi_i(t)\right|^p dt\right\}^{1/p}, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{17}$$

Требуется найти величину

$$\mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\dots,\omega_m}\big)_p := \inf_{\Delta_N}\mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\dots,\omega_m}, \Delta_N\big)_p,$$

где

$$\mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\dots,\omega_m}, \Delta_N\big)_p := \sup\Big\{\rho(\Gamma, G)_p :\ \Gamma, G \in H^{\omega_1,\dots,\omega_m},\ \Gamma\big|_{\Delta_N} = G\big|_{\Delta_N}\Big\}.$$

[7]Сторчай В.Ф. Об отклонении ломаных в метрике L_p // Мат. заметки, 1969. Т.5, №1. С.31-37.
[8]Малоземов В.Н. К полигональной интерполяции // Матем. заметки. 1967. Т.1, №5. С.537-540.

Сформулируем один из основных результатов четвёртого параграфа.

Теорема 1.4.1. *Какими бы ни были модули непрерывности* $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m};\ 0 \le t \le L)$, *при всех* $1 \le p \le \infty$ *имеют место равенства*

$$\mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\dots,\omega_m}\big)_p := \inf_{\Delta_N} \mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\dots,\omega_m}, \Delta_N\big)_p = \mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\dots,\omega_m}, \Delta_N^0\big)_p =$$

$$= 2\begin{cases} \left(2N\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t)dt\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1\le i\le m}\omega_i(L/(2N)), & p = \infty, \end{cases} \tag{18}$$

где разбиение Δ_N^0 *определено равенством* (7).

Отметим, что равенство (18) в определённом смысле является распространением известного результата В.Ф. Сторчая[7] об отклонении непрерывных функций, заданных в явном виде ломаными в метрике $L_p[0,1]$ $(1 \le p < \infty)$ на случай отклонения пространственных кривых от вписанных в них интерполяционных ломаных в метрике $L_p[0,L]$ $(1 \le p < \infty)$, а второе равенство (18) есть аналогичное обобщение результата В.Н. Малоземова[8] на случай приближения кривых в $L_\infty[0,L]$.

Во второй главе диссертации точные результаты об аппроксимации кривых на классах функций, полученные в первой главе, применяются к задаче приближённого вычисления криволинейных интегралов первого рода и рассматривается также одна экстремальная задача для квадратурной формулы типа Маркова для обычных определённых интегралов на конечном отрезке $[a,b]$.

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ и функция $f(M) := f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ определена на кривой Γ. Для приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода

$$\int\limits_\Gamma f(M)dt = \int\limits_\Gamma f(x_1, x_2, \dots x_m)dt, \tag{19}$$

где функция $f(M) = f(x_1, x_2, \dots x_m)$ определена и непрерывна вдоль кривой Γ, применим квадратурную формулу

$$\int\limits_\Gamma f(M)dt = \sum_{k=1}^{N} p_k f(M_k) + R_N(f;\Gamma). \tag{20}$$

Предположим, что на кривой Γ установлено положительное направление и положение точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Gamma$ определено длиной дуги $t = \breve{AP}$, отсчитываемой от начальной точки A. В этом случае, как известно, кривая Γ параметрически выразится уравнениями

$$x_i = \varphi_i(t),\ i = \overline{1, m},\ 0 \le t \le L, \tag{21}$$

а функция $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$, заданная в точках кривой Γ, сведётся к сложной функции $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))$ от переменной t. Разобьём отрезок $[0, L]$ на N частичных отрезков $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = \overline{1, N})$ точками

$$0 \le t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N \le L$$

и вычислим значения функции $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))$ в точках разбиения.

Поскольку в этом случае $M_k = M(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \ldots, \varphi_m(t_k))$, то квадратурную формулу (20) можно записать в виде

$$\int\limits_0^L f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))dt =$$

$$= \sum_{k=1}^N p_k f(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \ldots, \varphi_m(t_k)) + R_N(f; \Gamma). \tag{22}$$

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций $\{f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))\}$, интегрируемых на отрезке $[0, L]$, то для каждой функции этого класса остаток формулы (22) имеет вполне определённое числовое значение

$$R_N(f; \Gamma) = \int\limits_0^L f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))dt - \sum_{k=1}^N p_k f(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \ldots, \varphi_m(t_k)).$$

При фиксированных векторах коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ и узлов $T = \{t_k\}_{k=1}^N$ наибольшей погрешностью квадратурной формулы (22) на классе функций $\mathfrak{M}$ является верхняя грань

$$R_N(\mathfrak{M}, \Gamma) := \sup\Big\{|R_N(f; \Gamma)| :\ f \in \mathfrak{M}\Big\}. \tag{23}$$

Очевидно, что верхняя грань (23) зависит от выбора кривой Γ, от вектора коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ и узлов $T = \{t_k\}_{k=1}^N$, то есть

$$R_N(\mathfrak{M}, \Gamma) = R_N(\mathfrak{M}; \Gamma; P, T).$$

Пусть $\mathfrak{N}_L$ — некоторый класс кривых $\{\Gamma\}$, длина каждой из которых равна L. Задача состоит в отыскании величины

$$R_N(\mathfrak{M},\mathfrak{N}_L):=\sup\Big\{R_N(\mathfrak{M},\Gamma):\ \Gamma\in\mathfrak{N}_L\Big\}=$$

$$=\sup\Big\{R_N(\mathfrak{M},\Gamma;P,T):\ \Gamma\in\mathfrak{N}_L\Big\}. \qquad (24)$$

В теоремах 1.2.2 и 1.2.3 для точной оценки величины погрешности, возникающей при приближении кривых, принадлежащих классам $H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ и $W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$, получены неулучшаемые оценки. Полученные в указанных теоремах результаты обеспечивают возможность точно оценить величину погрешности (24) для класса $\mathfrak{M}_\rho^{(p)}$ функций $f(\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t))$, $(0\le t\le L)$, заданных и определённых на множестве кривых из классов $H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ и $W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$, для любых двух точек $P(\varphi_1(t'),\dots,\varphi_m(t'))$, $Q(\varphi_1(t''),\dots,\varphi_m(t''))\in\Gamma,\ t',t''\in[0,L]$, удовлетворяющих условию

$$|f(P)-f(Q)|\le\rho_p(P,Q),$$

где расстояние $\rho_p(P,Q)$ определено равенством

$$\rho_q\big(P,Q\big):=\left(\sum_{i=1}^m\big|x_i-y_i\big|^q\right)^{1/q},\quad 1\le q\le\infty.$$

Для большей наглядности, вычислим верхнюю грань погрешности (24) для квадратурной формулы прямоугольников, имеющей вид:

$$\int\limits_0^L f\left(\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t)\right)dt=$$

$$=\frac{L}{N}\sum_{k=1}^N f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2n}L\right),\dots,\varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right)+R_N(f;\Gamma). \qquad (25)$$

Нижеприведенная теорема является одним из основных результатов первого параграфа второй главы.

Теорема 2.1.1. *Для точной оценки погрешности формулы* (25) *с фиксированными векторами коэффициентов* $P^0=\big\{p_k^0:p_k^0:=L/N\big\}_{k=1}^N$ *и узлов* $T^0:=\big\{t_k^0:t_k^0=(2k-1)L/(2N)\big\}_{k=1}^N$ *на классах* $\mathfrak{M}_\rho^{(p)}$ *и кривых* $H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ *справедливы равенства*

$$R_N\big(\mathfrak{M}_\rho^{(p)},H^{\omega_1,\dots,\omega_m};P^0,T^0\big)=$$

$$
= 2N \begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^{L/(2N)} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p(t) \right\}^{1/p} dt, & 1 \le p < \infty, \\ \displaystyle\max_{1 \le i \le m} \int\limits_0^{L/(2N)} \omega_i(t)dt, & p = \infty. \end{cases} \qquad (26)
$$

Из теоремы 2.1.1 при $\omega_1(t) = \ldots = \omega_m(t) \equiv \omega(t)$ вытекает следствие 2.1.1.

Пусть теперь требуется найти значение величины (24) погрешности квадратурной формулы типа Маркова с равными коэффициентами для криволинейного интеграла (19), имеющей вид

$$
\int\limits_0^L f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))dt = h \Bigg\{ f(\varphi_1(0), \ldots, \varphi_m(0)) + f(\varphi_1(L), \ldots, \varphi_m(L)) +
$$
$$
+ \sum_{k=1}^{N-1} f(\varphi_1(kh), \ldots, \varphi_m(kh)) \Bigg\} + R_N(f; \Gamma), \qquad (27)
$$

где $h = L/N$, на классах функций $\mathfrak{M}_\rho^{(p)}$ и кривых $W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$.

Вторым из основных результатов первого параграфа второй главы является следующая

Теорема 2.1.2. *Для оценки погрешности квадратурной формулы* (27) *с фиксированными векторами коэффициентов* $P^* := \{p_k^* : p_k^* = L/N\}_{k=0}^N$ *и узлов* $T^* := \{t_k^* : t_k^* = kL/N\}_{k=0}^N$ *на классах функций* $\mathfrak{M}_\rho^{(p)}$ *и кривых* $W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *справедлива оценка*

$$
R_N(\mathfrak{M}_\rho^{(p)}; W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}; P^*, T^*) \le
$$

$$
\le \frac{L}{6} \begin{cases} \left\{ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \left(\int\limits_0^{L/N} \omega_i(t)dt \right)^p \right\}^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \displaystyle\max_{1 \le i \le m} \int\limits_0^{L/N} \omega_i(t)dt, & p = \infty, \end{cases} \qquad (28)
$$

где $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m})$ — *произвольные выпуклые на* $[0, L]$ *модули непрерывности.*

Во втором параграфе второй главы для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода построена усложнённая квадратурная формула Симпсона. Для некоторых классов дифференцируемых функций, задаваемых модулями непрерывности, найдена оценка её погрешности. Ради простоты, будем рассматривать двумерный случай, когда подынтегральная функция имеет простой вид $f(M) = f(x, y)$.

Введём в рассмотрение усложнённую квадратурную формулу Симпсона

$$\int_0^L f\left(x(t), y(t)\right) dt =$$

$$= \frac{1}{6N}\Bigg\{ f\left(x(0), y(0)\right) + 4\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), y\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) +$$

$$+2\sum_{k=1}^{N-1} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right) + f\left(x(L), y(L)\right)\Bigg\} + R_N(f, \Gamma). \qquad (29)$$

Для погрешности квадратурной формулы (29) на классах дифференцируемых на отрезке $[0, L]$ сложных функций вида $f\left(x(t), y(t)\right) := F(t)$ одного переменного, задаваемых модулями непрерывности, найдена точная оценка.

С этой целью вводим оператор набла „∇", полагая

$$\nabla f\left(x(t), y(t)\right) := \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = F^{'}(t),$$

$$\nabla^2 f(x(t), y(t)) := \nabla(\nabla f(x(t), y(t)) :=$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = F^{''}(t),$$

и для $k = 3, 4, \ldots$ положим

$$\nabla^k f\left(x(t), y(t)\right) := \nabla\left(\nabla^{k-1} f\left(x(t), y(t)\right)\right). \qquad (30)$$

Через $\mathfrak{M}_Q(L)$ обозначим класс плоских спрямляемых кривых Γ, у которых длина равна L, кривизна кусочно-непрерывна и все они расположены в области $Q = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le L^2\}$. Известно, что параметрические уравнения кривой $\Gamma \in \mathfrak{M}_Q(L)$, отнесённой к длине дуги t как параметру, в прямоугольной системе координат Oxy имеют вид

$$x = x(t),\ y = y(t),\quad 0 \le t \le L. \tag{31}$$

Через $W_Q^{(2)}H^\omega \subset \mathfrak{M}_Q(L)$ обозначим множество функций $f(M) = f(x,y)$, у которых почти всюду в области Q существуют частные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^{2-j}\partial y^j},\ j = 0,1,2,$$

и для любых двух точек $t^{'}, t^{''} \in [0,L]$ функция $\nabla^2 f\,(x(t), y(t))$ удовлетворяет условию

$$\left|\nabla^2 f\,(x(t'), y(t')) - \nabla^2 f\,(x(t''), y(t''))\right| \le \omega\left(|t^{'} - t^{''}|\right), \tag{32}$$

где $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности, то есть непрерывная неубывающая полуаддитивная функция, в нуле равная нулю. Очевидно, что в обозначении сложной функции $F(t) := f\,(x(t), y(t))$ условие (32) означает, что для любых двух точек $t^{'}, t^{''} \in [0,L]$ выполняется условие

$$\left|F^{(2)}(t^{'}) - F^{(2)}(t^{''})\right| \le \omega(|t^{'} - t^{''}|),$$

то есть функция $F(t) \in W_Q^{(2)}H^\omega[0,L]$.

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 2.2.1. *Для погрешности квадратурной формулы Симпсона* (29) *на всём классе $W_Q^{(2)}H^\omega[0,L]$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in W_Q^{(2)}H^\omega} |R_N(f,\Gamma)| = \frac{L^2}{648N^3}\int\limits_0^1 \left\{1 - \cos\left[3\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}Lt - \frac{\pi}{6}\right)\right]\right\}\omega'\left(\frac{Lt}{2N}\right)dt.$$

В заключительном третьем параграфе второй главы рассматривается экстремальная задача отыскания наилучшей квадратурной формулы типа Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности.

Рассматривается квадратурная формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n p_k f(x_k) + R_n(f), \tag{33}$$

задаваемая векторами узлов $X = \Big\{x_k: \; a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b\Big\}$ и коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^n$, $R_n(f) = R_n(f; X; P)$ — погрешность формулы (33) на функции $f(x)$. Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс заданных на отрезке $[a, b]$ интегрируемых в смысле Римана функций $f(x)$, то положим

$$R_n(\mathfrak{M}, X, P) := \sup\Big\{|R_n(f, X, P)|: \; f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Требуется найти величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}) := \inf\Big\{R_n(\mathfrak{M}, X, P): \; (X, P)\Big\} \tag{34}$$

и указать вектор (X^0, P^0) из множества, на котором достигается точная нижняя грань в (34), то есть

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}) = R_n(\mathfrak{M}; X^0, P^0).$$

Квадратурная формула (33) с векторами узлов $X^0 = \big\{x_k^0\big\}$ и коэффициентов $P = \big\{p_k^0\big\}$ даёт наименьшую на всём классе $\mathfrak{M}$ погрешность среди формул, задаваемых множеством векторов (X, P), и в этом смысле является наилучшей для класса $\mathfrak{M}$.

В третьем параграфе второй главы рассматривается задача об отыскании наилучшей для класса $H^\omega[a, b]$ квадратурной формулы типа Маркова[9]

$$\int\limits_a^b f(x)dx = p_0 f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k f(x_k) + p_n f(b) + R_n(f), \tag{35}$$

задаваемой векторами (X, P) узлов $X = \{x_k: \; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ и коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=0}^n$. Таким образом, мы изучаем задачу отыскания наилучшей квадратурной формулы вида (35), когда заранее зафиксированы в качестве узлов концы промежутка: $x_0 = a$, $x_n = b$, а узлы $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и коэффициенты $p_0, p_1, \ldots, p_n$ следует выбрать оптимальным образом.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 2.3.1. *Среди квадратурных формул вида* (35) *наилучшей для класса* $H^\omega[a, b]$ *является формула трапеций*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left\{\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right\} + R_n(f). \tag{36}$$

[9] Никольский С.М. Квадратурные формулы — М.: Наука. 1988. 256 с.

При этом точная оценка погрешности квадратурной формулы (36) *на всём классе* $H^\omega[a,b]$ *равна*

$$\mathcal{E}_n\left(H^\omega[a,b]\right) = 2n \int\limits_0^{(b-a)/(2n)} \omega(t)dt.$$

В частности, для класса KH^α $(K > 0,\ 0 < \alpha \le 1)$

$$\mathcal{E}_n(KH^\alpha) = \frac{K(b-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{(2n)^\alpha}.$$

В конце параграфа приводится обобщение теоремы 2.3.1 на более широких классах функций.

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- найдены точные оценки погрешности приближения пространственных кривых вписанными в них интерполяционными ломаными (линейными сплайнами) на различных классах функций, задаваемых модулями непрерывности как в l_p-метрике, так и в L_p-норме при различных значениях параметра p $(1 \le p \le \infty)$;

- приводятся приложения полученных результатов к вопросу нахождения точной оценки погрешности классических квадратурных формул (прямоугольника, трапеций, Симпсона) для криволинейных интегралов;

- найдена наилучшая квадратурная формула типа Маркова для одномерных регулярных интегралов на классах функций, задаваемых модулями непрерывности.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационной работы можно применять в теории приближения поверхностей билинейными сплайнами и в теории приближённого вычисления поверхностных интегралов на классах функций малой гладкости.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК РТ при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации:

[1-А] Шабозова А.А. Об оценке погрешности усложненной квадратурной формулы прямоугольников для криволинейных интегралов первого рода [Текст] / А.А. Шабозова // ДАН РТ. – 2012. – Т.55. – №12. – С.925-931.

[2-А] Шабозова А.А. Точные оценки приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых [Текст] / Г.А. Юсупов, А.А. Шабозова // ДАН РТ. – 2013. – Т.56. – №7. – С.509-514.

[3-А] Шабозова А.А. К полигональной интерполяции кривых в пространстве $\mathbb{R}^m$ [Текст] / А.А. Шабозова // Известия ТулГУ. – 2015. – №4. – С.107-112.

[4-А] Шабозова А.А. Приближение пространственных кривых ломаными [Текст] / А.А. Шабозова // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2017. – №1(166). – С.19-23.

[5-А] Шабозова А.А. Приложение аппроксимации кривых к приближенному вычислению криволинейных интегралов первого рода [Текст] / А.А. Шабозова // ДАН РТ. – 2017. – Т.60. – №3-4. – С.109-117.

[6-А] Шабозова А.А. Приближение пространственных кривых ломаными в L_p [Текст] / А.А. Шабозова // Труды Института матем. и мех. УрО РАН. – 2017. – Т.23. – №4. – С.311-318.

[7-А] Шабозова А.А. Приближение кривых ломаными в L_p [Текст] / А.А. Шабозова // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. – 2017. – Т.4(62). – Вып.4. – С.622-630.

В других изданиях:

[8-А] Шабозова А.А. О наилучших квадратурных формул типа Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности [Текст] / А.А. Шабозова // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений” (г. Душанбе, 27-28 апреля 2015). – С.68-69.

[9-A] Шабозова А.А. О наилучших квадратурных формул Маркова для классов функций $H^{\omega}[a,b]$ [Текст] / А.А. Шабозова // «*Функциональные пространства и теория приближения функций*» – Материалы международной научной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского (Москва, 25-29 мая 2015 г.). – С.246-247.

[10-A] Шабозова А.А. Об оптимальной кубатурной формуле типа Маркова на классах функций, задаваемых модулями непрерывности [Текст] / А.А. Шабозова // Материалы международной научной конференции „Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел" (г. Душанбе, 29-30 октября 2015). – С.63-65.

[11-A] Шабозова А.А. Оптимальная кубатурная формула Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности [Текст] / А.А. Шабозова // Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016). – С.296-298.

ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИ ТОҶИКИСТОН

УДК 517.5

Бо ҳуқуқи дастхат

Шабозова Адолат Аъзамовна

АППРОКСИМАТСИЯИ ХАТҲОИ КАҶИ ФАЗОӢ ВА ТАТБИҚИ ОНҲО ДАР НАЗАРИЯИ КВАДРАТУР

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси
01.01.01 — таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Душанбе — 2020

Диссертатсия дар кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст

РОҲБАРОНИ ИЛМӢ:	**Юсупов Гулзорхон Амиршоевич,** доктори илмҳои физикаю математика, мудири кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои Донишгоҳи миллии Тоҷикистон;
	Бердышева Елена Евгеньевна, доктори илмҳои физикаю математика, профессори математикаи Донишгоҳи Гиссен (Олмон)
МУҚАРРИЗОНИ РАСМӢ:	**Хасанов Юсуфали Хасанович,** доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи информатика ва системаи информатсионии Донишгоҳи Русӣ-Тоҷикӣ (Славянӣ)
	Темурбекова София Давронбековна, номзади илмҳои физикаю математика, мудири кафедраи информатикаи татбиқӣ дар иқтисодиёти Донишгоҳи давлатии молия ва иқтисоди Тоҷикистон
МУАССИСАИ ТАҚРИЗДИҲАНДА:	Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С. Айни

Ҳимоя *28-уми феврали соли 2020 соати 10:00* дар ҷаласаи Шурои диссертатсионии 6D.КОА-037 дар назди Институти математикаи ба номи А.Ҷураеви Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон аз рӯи нишонаи: 734063, ш.Душанбе, кӯчаи Айнӣ, 299/4, баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи Институти математикаи ба номи А.Ҷураеви Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон ва тавассути сомонаи http://www.mitas.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат саҳнаи «______» «__________________» соли 2020 аз рӯи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шӯрои диссертатсионии 6D.КОА-037, номзади илмҳои физикаю математика **Каримов О.Х.**

Тавсифи умумии кор

Муҳиммияти мавзӯъ. Ҳангоми омӯзиши масъалаҳои наздиккунии хатҳои каҷ бо ёрии функсияҳои содда ва суфта тавсифи математикии онҳо, яъне шакли аналитикии онҳоро донистан лозим аст. Ошкор аст, ки хатҳои каҷро на ҳама вақт бо ёрии формулаи муайян ифода кардан мумкин аст ва аз ин рӯ роҳи осонтар муайян кардани хатҳои каҷ ин дар шакли параметрӣ $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [0, L]$ навиштани онҳо аст. Агар функсияҳои $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$, ки дар порчаи $[0, L]$ дода шудаанд, шакли мураккаби аналитикиро доранд, он гоҳ масъалаи суфта наздиккунии онҳо бо саҳеҳии аниқ ба миён меояд.

Аппроксиматсияи хатҳои каҷи дар намуди параметрӣ додашуда дар метрикаҳои гуногун дар корҳои Сендов Бл.[1], Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.[2], Мартынюк В.Т.[3], Назаренко Н.А.[4], Вакарчук С.Б.[5,6]. дида баромада шудааст. Дар корҳои номбаршуда ба сифати аппарати наздиккунӣ бисёрузваҳо ва ё сплайнҳо истифода бурда шудаанд. Дар нашрияҳои илмии С.Б. Вакарчук баҳои аниқи наздиккунии хатҳои каҷ ба воситаи характеристикаҳои дифференсиалӣ-фарқиятии функсияҳои $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ ёфта шудаанд. Қайд мекунем, ки дар корҳои илмии дар боло номбаршуда масъалаи наздиккунии хатҳои каҷи тааллуқи фазои m-ченакаи $\mathbb{R}^m$ дида баромада нашудааст.

Дар диссертатсияи пешниҳодшуда хати каҷи $\Gamma \in \mathbb{R}^m$ $(m \geq 3,\ m \in \mathbb{N})$ бо муодилаҳои параметрии

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \cdots, x_m = \varphi_m(t), \quad 0 \leq t \leq L,$$

дода шуда, бо сплайнҳои интерполятсионии хаттии дарункашидашуда наздик карда шуда, баҳодиҳии аниқи хаттогии наздиккунӣ барои баъзе синфҳои хати каҷ, ки тавассути модули бефосилагӣ дода шудаанд, ёфта шудааст (Боби I).

[1] Сендов Бл. Хаусдорфовые приближения — София: Изд-во Болгарской АН. 1979. 372 с.

[2] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций — М.: Наука. 1980. 352 с.

[3] Мартынюк В.Т. О приближении ломаными кривых, заданных параметрическими уравнениями // Укр. матем. журнал. 1976. Т.28, №1. С.87-92.

[4] Назаренко Н.А. О приближении плоских кривых параметрическими эрмитовыми сплайнами // Укр. матем. журнал. 1979. Т.31, №3. С.201-215.

[5] Вакарчук С.Б. О приближении кривых, заданных в параметрическим виде, при помощи сплайн-кривых // Укр. матем. журнал. 1983. Т.35, №3. С.352-355.

[6] Вакарчук С.Б. Точные константы приближения плоских кривых полиномиальными кривыми и ломаными // Известия ВУЗов. Математика. 1988, №2. С.14-19.

Татбиқи натиҷаҳои дар боби якум ба даст овардашуда дар масъалаи ёфтани баҳои аниқи хаттогии формулаи квадратурӣ барои баъзе синфи функсияҳое, ки ба воситаи модули бефосилагӣ муайян карда шудаанд, нишон дода шудааст (Боби II).

Дар параграфи сеюми боби дуюм ҳалли як масъалаи экстремалии аз тарафи С.М. Николский пешниҳодшуда оид ба ёфтани формулаи квадратурии беҳтарин барои формулаи классикии Марков барои синфи функсияҳои яктағйирёбанда, ки ба воситаи модули бефосилагӣ ва модули суфтагӣ муайян шудаанд, оварда шудааст. Исбот карда шудааст, ки формулаи квадратурии беҳтарини намуди Марков барои синфи функсияҳои нишондодашуда ин формулаи классикии трапетсия мебошад.

Аҳамият ва мувофиқи мақсад будани рисолаи илмӣ аз он иборат аст, ки дар он масъалаҳои мураккаби экстремалии назарияи наздиккунӣ омӯхта ва ҳал шудаанд, ки то ҳоло ҳал нашуда буданд.

Объекти тадқиқот ва вобастагии кор бо барномаҳои илмӣ (лоиҳаҳо) ва мавзӯъҳои илмӣ. Рисолаи диссертатсионии пешниҳодшуда дар доираи татбиқи нақшаи дарозмуддати корҳои илмию тадқиқотии кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳои Донишгоҳи миллии Тоҷикистон барои солҳои 2016-2020 аз рӯи мавзӯи „Назарияи наздиккунии функсия” иҷро карда шудааст.

Мақсад ва масъалаҳои тадқиқот. Мақсади асосии кори диссертатсионӣ иборат аст аз:

- баҳодиҳии аниқи хаттогии наздиккунии хатҳои каҷи суфтаи тааллуқи фазои m-ченакаи $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 3$, $m \in \mathbb{N}$), ки ба воситаи муодилаҳои параметрӣ дода шуда, бо сплайнҳои интерполятсионии хаттии дарункашидашуда барои баъзе синфи функсияҳо ва хатҳои каҷ наздик карда шудаанд;
- ҳисобкунии баҳои аниқи хаттогии формулаи квадратурӣ барои интегралҳои каҷхаттаи синфи функсияҳо ва хатҳои каҷи дидабаромадашаванда;
- ёфтани формулаи квадратурии беҳтарини намуди Марков барои синфи функсияҳое, ки ба воситаи модули бефосилагӣ дода шудаанд.

Методҳои асосии тадқиқот. Дар кори диссертатсионӣ усулҳои ҳалли масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳо, ки ба ғояҳои таҳлили функсионалӣ такя мекунанд, инчунин усули Корнейчук барои аз поён баҳодиҳии хаттогии квадратурӣ дар синфи функсияҳое, ки суммаи квадратуриро ба нол мубаддал мекунонанд, истифода бурда шудаанд.

Навгониҳои илмии тадқиқот. Дар диссертатсия натиҷаҳои асосии зерин ба даст оварда шудаанд:

- баҳодиҳии аниқи хаттогии наздиккунии хатҳои каҷи фазоӣ бо сплайнҳои интерполятсионии хаттии дарункашидашуда барои синфи функсияҳои гуногун, ки ба воситаи модули бефосилагӣ дар метрикаҳои l_p ва L_p дода мешаванд, барои қиматҳои гуногуни параметри p $(p \geq 1)$ ёфта шудаанд;
- баҳои аниқи хаттогии формулаи квадратурӣ барои интегралҳои каҷхаттаи синфи функсияҳо ва синфи хатҳои каҷ ҳисоб карда шудааст;
- формулаи квадратурии беҳтарини намуди Марков барои синфи функсияҳо, ки ба воситаи модули бефосилагӣ дода шудаанд, ёфта шудааст.

Муҳтавои ҳимояшавандаи диссертатсия:

- теоремаҳои асосӣ оид ба баҳодиҳии аниқи хаттогии наздиккунии хатҳои каҷи $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ бавоситаи сплайнҳои интерполятсионии хаттии дарункашидашудаи онҳо барои синфҳои функсияҳо ва хатҳои каҷ;
- теоремаҳо дар бораи хаттогии аниқи формулаҳои квадратурӣ барои интегралҳои каҷхатта дар синфҳои муоинашаванда;
- теорема оид ба баҳодии аниқи хаттогии формулаи квадратурии Марков барои синфи функсияҳое, ки бавоситаи модули бефосилагӣ дода шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Рисолаи диссертатсионӣ ҳам дорои арзишҳои назариявӣ ва ҳам амалӣ мебошад. Натиҷаҳои кори диссертатсиониро метавонанд дар назарияи наздиккунии сатҳҳо аз рӯи сплайнҳои бихаттӣ ва дар назарияи тақриби ҳисобкунии интегралҳои сатҳӣ дар синфи функсияҳои дорои суфтагии кам истифода бурдан мумкин аст.

Саҳми шахсии муаллиф. Мӯҳтавои рисола ва натиҷаҳои асосии дифоъшаванда саҳми шахсии муаллифро бо асарҳои нашршуда инъикос мекунанд. Ҳамаи натиҷаҳои рисолаи диссертатсиониро шахсан худи муаллиф ба даст овардааст.

Тасвиби кор. Натиҷаҳои асосии рисолаи диссертатсионӣ борҳо дар:

- семинари кафедраи „Таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳо” ва кафедраи „Таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ” -и Донишгоҳи миллии Тоҷикистон таҳти роҳбарии академики АИ ҶТ, профессор М.Ш. Шабозов (Душанбе, солҳои 2015-2019);
- конференсияи илмӣ-байналмилалии „Фазоҳои функсионалӣ ва назарияи наздиккунии функсияҳо” (Москва, 25-29 майи соли 2015);
- хонишҳои тобистонаи Мактаб-Конференсияи математикии С.Б. Стечкин оид ба назарияи функсияҳо (Душанбе, 15-25 августи соли 2016);
- конференсияи илмӣ-байналмилалии „Проблемаҳои муосири таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ” (Душанбе, 27-28 апрели соли 2015);
- конференсияи илмӣ-байналмилалии „Таҳлили математикӣ, муодилаҳои дифференсиалӣ ва назарияи ададҳо” (Душанбе, 29-30 октябри соли 2015);
- конференсияи илмӣ-байналмилалии „Муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегралӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ ва масъалаҳои канории назарияи функсияҳо” (Душанбе, 27-28 феврали соли 2018);
- конференсияи илмӣ-ҷумҳуриявии „Таҳлили математикӣ ва татбиқи он” (Душанбе, 10-11 июни соли 2019)

муҳокима ва мавриди баррасӣ қарор гирифта шудаанд.

Интишорот. Натиҷаҳои асосии муаллиф аз рӯи мавзӯи диссертатсия дар 11 мақола дарҷ гардидаанд, ки аз онҳо 5 мақола дар нашрияҳои илмии Федератсияи Руссия ва 6 мақола дар маҷаллаҳои илмии Ҷумҳурии Тоҷикистон чоп шудаанд, ки рӯйхати онҳо дар охири автореферат оварда шудааст. Аз 11 кори илмӣ 7 мақола ба нашриёҳои тақризшавандаи рӯихати амалкунандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва КОА-и Федератсияи Руссия мансуб буда, 4-тояш дар нашриёҳои дигар чоп шудаанд. Аз натиҷаҳои бо ҳамроҳии Г.А. Юсупов чоп шуда, ба ҳаммуаллиф фақат гузориши масъала ва интихоби усули исботи натиҷаҳо тааллуқ дорад.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, ду боб, феҳристи адабиёти истифодашудаи иборат аз 49 номгӯй ва ҳамагӣ 75 саҳифаи компютериро дар бар гирифта, дар барномаи LaTeX ҳуруфчинӣ шудааст.

Барои осонӣ дар диссертатсия рақамгузории секаратаи теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо истифода шудааст, ки рақами якум бо рақами боб, рақами дуюм бо рақами параграф ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ё формулаҳои ҳамин параграф мутобиқат мекунанд.

Муҳтавои мухтасари диссертатсия

Рисолаи диссертатсионӣ аз муқаддима сар мешавад. Дар он муҳиммияти мавзӯъи диссертатсия, мақсади кор, тасвиби кор ва мӯҳтавои мухтасари натиҷаҳои гирифташуда оварда шудааст.

Дар боби якуми диссертатсияи дидабаромадашаванда масъалаи баҳодиҳии аниқи хаттогии наздиккунии хатҳои каҷи фазои, ки дар фазои евклидии m-ченакаи $\mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N},\, m \geq 3)$ мехобанд бо сплайнҳои тартиби якум (хатҳои шикаста) дар метрикаи фазоҳои гуногун, аз ҷумла дар метрикаи хаусдорф дида баромада шудааст.

Дар параграфи якуми боби якум таърифи синфи функсияҳо ва хатҳои каҷ оварда шудааст. Бигузор Γ хати каҷи ростшаванда бошад, ки дар фазои евклидии $\mathbb{R}^m$-и m-ченака хобида, бо муодилаҳои параметрии

$$x_i = \varphi_i(t),\ 0 \leq t \leq L, \quad i = \overline{1,m} \tag{1}$$

дода шудааст. Бо $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m} := H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0,L]$ синфи хатҳои каҷи $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$–ро ишора мекунем, ки бо муодилаҳои параметрии (1) дода шуда, барояшон $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0,L]$ $(i = \overline{1,m})$ мебошад ва ба воситаи $W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m} := W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0,L]$ синфи хатҳои каҷи суфтаи бо муодилаҳои параметрии (1) дода шударо ишора мекунем, ки функсияҳои координатии онҳо $\varphi_i(t) \in W^{(1)}H^{\omega_i}[0,L]$ $(i = \overline{1,m})$ мебошанд. Дар ҳолати хусусӣ, агар $\omega_i(t) \equiv \omega(t)$, $i = \overline{1,m}$ бошад, он гоҳ синфи функсияҳои мувофиқро бо $H^{m,\omega}$ ва $W^{(1)}H^{m,\omega}$ ишора мекунем.

Агар $\rho(P,Q)$ — дилхоҳ масофаи байни ду нуқтаи $P, Q \in \mathbb{R}^m$ бошад, он гоҳ масофаи байни хатҳои каҷи $\Gamma, G \in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$–ро чунин ишора мекунем:

$$\rho(\Gamma, G) = \sup_{0 \leq t \leq L} \big\{\rho(P(t), Q(t)) :\ P(t) \in \Gamma, Q(t) \in G\big\}, \tag{2}$$

ки дар ин ҷо $P(t) := P\big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)$, $Q(t) := Q\big(\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t)\big)$ ба худи ҳамон як параметри t $(0 \leq t \leq L)$ мувофиқ меоянд. Масофаи (2)-ро ба воситаи муодилаҳои параметрии хатҳои каҷи

$$\Gamma:\ x_i=\varphi_i(t);\ G:\ y_i=\psi_i(t),\ i=\overline{1,m};\ 0\le t\le L \tag{3}$$

муайян кардан мумкин аст.

Ба сифати масофаи хаусдорфи байни ду маҷмӯи сарбасти $A\subset\mathbb{R}^m$ ва $B\subset\mathbb{R}^m$ бузургии зеринро фаҳмидан мумкин аст:

$$\rho_H\left(A,B\right):=\left\{\sup_{P\in A}\inf_{Q\in B}\rho\left(P,Q\right),\sup_{P\in B}\inf_{Q\in A}\rho\left(P,Q\right)\right\}. \tag{4}$$

Бигузор $\Delta_N:\ \ 0\le t_1<t_2<\ldots<t_{N-1}<t_N\le L$ – дилхоҳ тақсимоти порчаи $[0,L]$ бошад ва барои функсияҳои координатии хатҳои каҷи $\Gamma,G\in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0,L]$ баробариҳои зерин ҷой дошта бошанд:

$$\varphi_i(t_k)=\psi_i(t_k),\ i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,N}. \tag{5}$$

Талаб карда мешавад, ки бузургии

$$\inf_{\Delta_N}\rho\big(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m};\Delta_N\big)=\inf_{\Delta_N}\sup\left\{\rho\big(\Gamma,G\big):\ \Gamma,G\in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\ \Gamma\big|_{\Delta_N}=G\big|_{\Delta_N}\right\}$$

ёфта шавад, ки дар ин ҷо аломати баробарии $\Gamma\big|_{\Delta_N}=G\big|_{\Delta_N}$ маънои онро дорад, ки барои хатҳои каҷи $\Gamma,G\in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ шарти (5) иҷро мегардад. Бигузор

$$\overline{\triangle}_N:\ t_k:=kL/N,\ k=\overline{0,N}, \tag{6}$$

$$\triangle_N^0:\ t_k^0:=(2k-1)L/(2N),\ k=\overline{1,N}. \tag{7}$$

Натиҷаҳои асосии параграфи дуюми боби якумро меорем.

Теоремаи 1.2.1. *Барои дилхоҳ модулҳои бефосилагии $\omega_i(t)$ $(i=\overline{1,m};\ 0\le t\le L)$ баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\inf_{\Delta_N}\rho_q\left(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m};\Delta_N\right)=\rho_q\left(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m};\Delta_N^0\right)=$$

$$=2\rho_{H,q}\left(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m};\Delta_N^0\right)=2\begin{cases}\left\{\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\omega_i^q\left(L/(2N)\right)\right\}^{1/q}, & 1\le q<\infty,\\ \displaystyle\max_{1\le i\le m}\omega_i\left(\frac{L}{2N}\right), & q=\infty,\end{cases} \tag{8}$$

ки дар ин ҷо тақсимоти Δ_N^0 аз рӯи формулаи (7) муайян карда мешавад.

Аз ин теорема ҳангоми $\omega_i = \omega$ $(i = \overline{1,m})$ натиҷаи 1.2.1 мебарояд. Инчунин теоремаи 1.2.2 дар ҳолате, ки хати каҷи $\Gamma \in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ ба воситаи хати шикастаи интерполятсионии дарункашидашуда наздик мешавад, исбот карда шудааст.

Дар теоремаи оянда тамоили аниқи хатҳои каҷи синфи $\Gamma \in W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ аз хатҳои шикастаи Γ_N-и дар Γ дарункашидашуда дар метрикаи L_q ёфта шудааст.

Теоремаи 1.2.3. *Бигузор $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m})$ — модулҳои бефосилагии дар порчаи $[0, L]$ барҷаста бошанд. Он гоҳ барои дилхоҳ $N \in \mathbb{N}$ $(N \geq 2)$ баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\mathscr{E}_N\big(W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\big)_q := \sup\Big\{\rho_q(\Gamma,\Gamma_N): \ \Gamma \in W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\Big\} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{cases} \left\{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt\right)^q\right\}^{1/q}, & 1 \leq q < \infty, \\ \max\limits_{1\leq i\leq m}\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt, & q = \infty, \end{cases} \tag{9}$$

ки дар ин ҷо Γ_N — хати шикастаи дар хати каҷи $\Gamma \in W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ дарункашидашуда бо қуллаҳои дар нуқтаҳои $P_k^* := P\left(\varphi_1\left(kh\right), \cdots, \varphi_m\left(kh\right)\right)$, $k = \overline{0,N}$, $L = L/N$ мебошад. Агар $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m})$ — дилхоҳ модулҳои бефосилагӣ бошанд, он гоҳ

$$\mathscr{E}_N\big(W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\big)_q = \frac{\Theta_\omega}{4}\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt\right)\right)^{1/q}, & 1 \leq q < \infty, \\ \max\limits_{1\leq i\leq m}\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt, & q = \infty, \end{cases} \tag{10}$$

ки дар ин ҷо $(2/3) \leq \Theta_\omega \leq 1$.

Аз теоремаи 1.2.3 як қатор натиҷаҳо мебароянд.

Дар параграфи сеюми боби якум масъалаи интерполятсияи полигоналии хатҳои каҷ дар фазои m-ченакаи $\mathbb{R}^m$ ва ёфтани баҳодиҳии аниқи наздиккунии полигоналӣ дар масофаҳои гуногун, ба монанди масофаи хаусдорфӣ $r_1(\Gamma, G)$, масофаи евклидӣ $r_2(\Gamma, G)$ ва масофаи Минковский $r_\infty(\Gamma, G)$ дида баромада мешавад.

Бигузор функсияҳои $\varphi_i, \psi_i \in C^{(1)}[0, L]$ бошанд. Бо $\Gamma^{(1)}$ ва $G^{(1)}$ хатҳои каҷеро ишорат мекунем, ки функсияҳои координатии онҳо бо муодилаҳои зерин дода мешаванд:

$$\Gamma^{(1)}: \ x_i' = \varphi_i'(t), \quad i = \overline{1, m}, \ 0 \le t \le L, \tag{11}$$

$$G^{(1)}: \ y_i' = \psi_i'(t), \quad i = \overline{1, m}, \ 0 \le t \le L. \tag{12}$$

Бигузор Δ_N — дилхоҳ тақсимоти порчаи $[0, L]$ бошад ва Γ_N — хати шикастаи дарункашидашуда дар хати каҷи $\Gamma \in W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ бо қуллаҳои дар нуқтаҳои $P_k^* := P^*\big(\varphi_1(kh), \varphi_2(kh), \dots, \varphi_m(kh)\big) \in \Gamma$ $(k = \overline{0, N})$, $h = L/N$ бошад.

Талаб карда мешавад, ки сарҳади болоии хаттогии наздиккунии $\Gamma^{(1)}$ аз рӯи хати каҷи полигоналии $\Gamma_N^{(1)}$ ёфта шавад:

$$\mathscr{E}_N^{(l)}\big(W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}; \Delta_N; \ r_i\big) =$$
$$= \sup\Big\{ \ r_i\big(\Gamma^{(l)}, \Gamma_N^{(l)}\big); \Gamma \in W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}\Big\}, \quad l = 0, 1; \ i = 1, 2, \infty. \tag{13}$$

Бузургии (13) барои $l = 0$, ҳангоми $\Gamma^{(0)} \equiv \Gamma$, $\Gamma_N^{(0)} \equiv \Gamma_N$ будан, дар параграфи дуюм ёфта шудааст. Дар ин ҷо мо қимати бузургии (13)-ро барои ҳолати $l = 1$ ҳисоб мекунем.

Яке аз натиҷаҳои асосии параграфи сеюм чунин мебошад.

Теоремаи 1.3.1. *Бигузор $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ — дилхоҳ хати каҷ бошад, ки ба синфи $W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ тааллуқ дорад. Агар Γ_N — дар хати каҷ хати шикастаи дарункашидашуда дар нуқтаҳои $P_k^* \in \Gamma$ бошад, он гоҳ барои дилхоҳ модули бефосилагӣ $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1, m}; 0 \le t \le L)$ баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\mathscr{E}_N^{(1)}(W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}, \overline{\Delta}_N; \ r_1) = \frac{N}{L}\sum_{i=1}^{m}\int_0^{L/N}\omega_i(t)dt, \tag{14}$$

$$\mathscr{E}_N^{(1)}(W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}, \overline{\Delta}_N; \ r_2) = \frac{N}{L}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\int_0^{L/N}\omega_i(t)dt\right)^2\right\}^{1/2}, \tag{15}$$

$$\mathscr{E}_N^{(1)}(W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\overline{\Delta}_N;r_\infty)=\frac{N}{L}\max_{1\le i\le m}\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt, \tag{16}$$

ки дар ин ҷо тақсимоти $\overline{\Delta}_N$ — ба воситаи баробарии (6) *муайян шудааст.*

Аз теоремаи 1.3.1 натиҷаи 1.3.1 ҳангоми $\omega_i\equiv\omega\ \ (i=\overline{1,m})$ ҳосил мешавад.

Дар параграфи чоруми боби якум масъалаи ёфтани наздиккунии синфи хатҳои каҷи $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$-и тааллуқи фазои евклидии $\mathbb{R}^m$ бо хатҳои шикастаи дарункашидашуда дар метрикаи L_p $(1\le p\le\infty)$ дида баромада мешавад. Қайд мекунем, ки барои функсияи ошкори $f(x)$ масъалаи тамоили хатҳои шикаста дар L_p $(1\le p<\infty)$ аз тарафи В.Ф. Сторчай[7] ва ҳолати $p=\infty$ пештар дар корҳои илмии В.Н. Малоземов[8] дида баромада шудааст.

Фарз мекунем, ки хатҳои каҷи $\Gamma, G\in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ ба воситаи муодилаҳои параметрии (3) дода шудаанд ва бигузор $\varphi_i,\psi_i\in L_p[0,L]\cap C[0,L],\ 1\le p\le\infty$, $i=\overline{1,m}$ бошанд. Масофаи байни хатҳои каҷи Γ ва G-ро ба воситаи баробариҳои зерин муайян мекунем:

$$\rho(\Gamma,G)_p:=\left\{\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^L\left|\varphi_i(t)-\psi_i(t)\right|^p dt\right\}^{1/p},\quad 1\le p\le\infty. \tag{17}$$

Талаб карда мешавад, ки бузургии

$$\mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\big)_p:=\inf_{\Delta_N}\mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\Delta_N\big)_p$$

ёфта шавад, ки дар ин ҷо

$$\mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\Delta_N\big)_p:=\sup\left\{\rho(\Gamma,G)_p:\ \Gamma,G\in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\ \Gamma\big|_{\Delta_N}=G\big|_{\Delta_N}\right\}$$

мебошад. Яке аз натиҷаҳои асосии параграфи чорумро баён мекунем.

Теоремаи 1.4.1. *Барои дилхоҳ модули бефосилагии* $\omega_i(t)$ $(i=\overline{1,m};\ 0\le t\le L)$, *ҳангоми* $1\le p\le\infty$ *баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\big)_p:=\inf_{\Delta_N}\mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\Delta_N\big)_p=\mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\Delta_N^0\big)_p=$$

[7]Сторчай В.Ф. Об отклонении ломаных в метрике L_p // Мат. заметки, 1969. Т.5, №1. С.31-37.
[8]Малоземов В.Н. К полигональной интерполяции // Матем. заметки. 1967. Т.1, №5. С.537-540.

$$= 2 \begin{cases} \left(2N \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{0}^{L/(2N)} \omega_i^p(t)dt \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1 \le i \le m} \omega_i(L/(2N)), & p = \infty, \end{cases} \tag{18}$$

ки дар ин ҷо тақсимоти Δ_N^0 бо баробарии (7) муайян карда мешавад.

Қайд мекунем, ки баробарии (18) ба маънои томаш ҳамчун ҳолати умумии натиҷаи В.Ф. Сторчай[7] оид ба тамоили функсияҳои бефосила, ки дар намуди ошкор бо хатҳои шикастаи дар метрикаи $L_p[0,1]$ $(1 \le p < \infty)$ додашуда ба ҳолати тамоили хатҳои каҷи фазоӣ аз хатҳои шикастаи интерполятсионии дар метрикаи $L_p[0,L]$ $(1 \le p < \infty)$ додашуда буда, ҳолати $p = \infty$ ҳамчун натиҷаи умумикардашудаи натиҷаи В.Н. Малоземов[8] барои наздиккунии хатҳои каҷ дар $L_\infty[0,L]$ мебошад.

Дар боби дуюми диссертатсия натиҷаҳои аниқ оид ба аппроксиматсияи хатҳои каҷ барои синфи функсияҳое, ки дар боби якум гирифта шудаанд, барои масъалаи ҳисобкунии тақрибии интегралҳои каҷхатаи тартиби якум татбиқ карда мешаванд. Инчунин масъалаи экстремалӣ барои формулаи квадратурии намуди Марков барои интеграли муайян дар порчаи охирноки $[a,b]$ ҳал карда шудааст.

Бигузор $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ ва функсияи $f(M) := f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ дар хати каҷи Γ муайян бошад. Барои ҳисобкунии тақрибии интеграли каҷхатаи тартиби якум

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)dt = \int\limits_{\Gamma} f(x_1, x_2, \ldots x_m)dt, \tag{19}$$

ки функсияи $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ дар нуқтаҳои Γ муайян ва бефосила мебошад, формулаи квадратурии

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)dt = \sum_{k=1}^{N} p_k f(M_k) + R_N(f;\Gamma) \tag{20}$$

истифода мебарем.

Фарз мекунем, ки дар хати каҷи Γ равиши мусбат интихоб карда шудааст ва мавқеи нуқтаи $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Gamma$ бо дарозии камони $t = \smile{AP}$ муайян карда шудааст, ки аз нуқтаи ибтидои A ҳисоб карда мешавад.

Дар ин ҳолат, чи хеле ки маълум аст, хати каҷи Γ бо муодилаҳои параметрии

$$x_i = \varphi_i(t),\ i = \overline{1,m},\ 0 \le t \le L, \tag{21}$$

ифода меёбад ва функсияи $f(M) = f(x_1, x_2, \dots x_m)$, ки дар нуқтаҳои хати каҷи Γ дода шудааст, ба функсияи мураккаби $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t))$ аз тағйирёбандаи t вобаста оварда мешавад. Порчаи $[0, L]$-ро ба N қисм аз рӯи сегментчаҳои $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = \overline{1, N})$ бо нуқтаҳои

$$0 \le t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N \le L$$

ҷудо мекунем ва қимати функсияи $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t))$–ро дар нуқтаҳои тақсимоти порчаи $[0, L]$ ҳисоб мекунем. Дар ин ҳолат $M_k = M(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \dots, \varphi_m(t_k))$, он гоҳ формулаи квадратурии (20)-ро дар намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\int_0^L f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t))dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} p_k f(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \dots, \varphi_m(t_k)) + R_N(f; \Gamma). \tag{22}$$

Агар $\mathfrak{M}$ — дилхоҳ синфи функсияҳои $\{f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t))\}$ дар порчаи $[0, L]$ интегронидашаванда бошад, он гоҳ барои ҳар гуна функсияи ин синф бақияи формулаи (22) қимати муайяни ададиро дорад:

$$R_N(f; \Gamma) = \int_0^L f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t))dt - \sum_{k=1}^{N} p_k f(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \dots, \varphi_m(t_k)).$$

Барои вектор-коэффисиентҳои фиксиронидашудаи $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ ва гиреҳҳои $T = \{t_k\}_{k=1}^N$ хатогии калонтарини формулаи квадратурии (22) дар синфи функсияҳои $\mathfrak{M}$ сарҳади болоии

$$R_N(\mathfrak{M}, \Gamma) := \sup\Big\{|R_N(f; \Gamma)| :\ f \in \mathfrak{M}\Big\} \tag{23}$$

мебошад. Ошкор аст, ки сарҳади болоии (23) аз интихоби хати каҷи Γ, вектор коэффисиентҳои $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ ва гиреҳҳои $T = \{t_k\}_{k=1}^N$ вобаста мебошад, яъне

$$R_N(\mathfrak{M}, \Gamma) = R_N(\mathfrak{M}; \Gamma; P, T)$$

аст. Бигузор $\mathfrak{N}_L$ — дилхоҳ синфи хатҳои каҷи $\{\Gamma\}$ бошад, ки дарозии ҳар яки аз онҳо ба L баробар мебошад. Дар ин ҳолат масъала аз ёфтани бузургии зерин иборат мебошад:

$$R_N(\mathfrak{M},\mathfrak{N}_L):=\sup\Big\{R_N(\mathfrak{M},\Gamma):\ \Gamma\in\mathfrak{N}_L\Big\}=$$
$$=\sup\Big\{R_N(\mathfrak{M},\Gamma;P,T):\ \Gamma\in\mathfrak{N}_L\Big\}. \tag{24}$$

Дар теоремаҳои 1.2.2 ва 1.2.3 барои баҳодиҳии аниқи хатогӣ, ки ҳангоми наздиккунии хатҳои каҷ ҳосил шуда, ба синфҳои $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ ва $W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ тааллуқ дорад, баҳоҳои беҳтарнашаванда ёфта шудаанд. Натиҷаҳои дар ин теоремаҳо ҳосилшуда имконият медиҳанд, ки баҳои аниқи хатогии бузургии (24) – ро барои синфи $\mathfrak{M}_\rho^{(p)}$-и функсияҳои $f(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t))$, $(0\le t\le L)$, ки дар маҷмӯи хатҳои каҷ аз синфҳои $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ ва $W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ муайян ва додашуда, барои дилхоҳ ду нуқтаҳои $P(\varphi_1(t'),\ldots,\varphi_m(t'))$, $Q(\varphi_1(t''),\ldots,\varphi_m(t''))\in\Gamma$, $t',t''\in[0,L]$ ки шарти

$$|f(P)-f(Q)|\le\rho_p(P,Q)$$

– ро қаноат мекунонанд, муайян намоем. Масофаи $\rho_p(P,Q)$ бо баробарии зерин муайян карда мешавад:

$$\rho_q\big(P,Q\big):=\left(\sum_{i=1}^m\big|x_i-y_i\big|^q\right)^{1/q},\quad 1\le q\le\infty.$$

Барои возеҳии бештар, мо ҳудуди болоии хатогии (24)-ро барои формулаи квадратурии росткунҷаҳо ҳисоб мекунем, ки намуди зеринро дорад:

$$\int_0^L f\left(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\right)dt=$$
$$=\frac{L}{N}\sum_{k=1}^N f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2n}L\right),\ldots,\varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right)+R_N(f;\Gamma). \tag{25}$$

Теоремаи зерин яке аз натиҷаҳои асосии параграфи якуми боби дуюм мебошад.

Теоремаи 2.1.1. *Барои баҳои аниқи хаттогии формулаи* (25)*, ки бо вектор-коэффисиентҳои фиксиронидашудаи* $P^0 = \left\{p_k^0 : \ p_k^0 := L/N\right\}_{k=1}^{N}$ *ва гиреҳҳои* $T^0 := \left\{t_k^0 : \ t_k^0 = (2k-1)L/(2N)\right\}_{k=1}^{N}$ *дода шудааст, барои синфи* $\mathfrak{M}_\rho^{(p)}$ *ва хатҳои каҷи* $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$R_N\big(\mathfrak{M}_\rho^{(p)}, H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}; P^0, T^0\big) =$$

$$= 2N \begin{cases} \displaystyle\int_0^{L/(2N)} \left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i^p(t)\right\}^{1/p} dt, & 1 \le p < \infty, \\ \displaystyle\max_{1\le i\le m} \int_0^{L/(2N)} \omega_i(t)dt, & p = \infty. \end{cases} \tag{26}$$

Аз теоремаи 2.1.1 ҳангоми $\omega_i(t) \equiv \omega(t)$ $(i = \overline{1,m})$ натиҷаи 2.1.1 бармеояд.

Акнун фарз мекунем талаб карда шудааст, ки қимати бузургии (24) хаттогии формулаи квадратурии намуди Марков бо коэффисиентҳои баробар барои интеграли каҷхаттаи (19)-и намуди

$$\int_0^L f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))dt = h\Bigg\{ f(\varphi_1(0), \ldots, \varphi_m(0)) + f(\varphi_1(L), \ldots, \varphi_m(L)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} f(\varphi_1(kh), \ldots, \varphi_m(kh))\Bigg\} + R_N(f;\Gamma), \quad h = L/N \tag{27}$$

барои синфи функсияҳои $\mathfrak{M}_\rho^{(p)}$ ва хатҳои каҷи $W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ ёфта шавад.

Дуввумин натиҷаи асосии параграфи якуми боби дуюм теоремаи зерин мебошад.

Теоремаи 2.1.2. *Барои баҳодиҳии хаттогии формулаи квадратурии* (27) *бо вектор-коэффисиентҳои фиксиронидашудаи* $P^* := \{p_k^* : p_k^* = L/N\}_{k=0}^{N}$ *ва гиреҳҳои* $T^* := \{t_k^* : \ t_k^* = kL/N\}_{k=0}^{N}$ *додашуда, барои синфи функсияҳои* $\mathfrak{M}_\rho^{(p)}$ *ва хатҳои каҷи* $W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *баҳои*

$$R_N(\mathfrak{M}_\rho^{(p)}; W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}; P^*, T^*) \le$$

$$\leq \frac{L}{6}\begin{cases} \left\{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\int\limits_{0}^{L/N}\omega_i(t)dt\right)^p\right\}^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max\limits_{1\leq i\leq m}\int\limits_{0}^{L/N}\omega_i(t)dt, & p = \infty, \end{cases} \tag{28}$$

ҷой дорад, ки дар ин ҷо $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m})$ *— дилхоҳ модулҳои бефосилагии барҷаста дар порчаи* $[0, L]$ *мебошанд.*

Дар параграфи дуюми боби дуюм барои ҳисобкунии тақрибии интегралҳои качхаттаи ҷинси якум формулаи квадратурии мураккаби Симпсон сохта шудааст. Барои баъзе синфи функсияҳои дифференсиронидашаванда, ки бавоситаи модули бефосилгаӣ дода мешаванд, баҳои хаттогии онҳо ёфта шудааст. Барои осонӣ ҳолати функсияи дутағйирёбандаро дида мебароем, ки функсияи зеринтегралӣ намуди соддаи $f(M) = f(x, y)$-ро дорад. Формулаи мураккаби квадратурии Симпсонро дида мебароем

$$\int\limits_{0}^{L} f\left(x(t), y(t)\right) dt =$$

$$= \frac{1}{6N}\left\{f\left(x(0), y(0)\right) + 4\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), y\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + \right.$$

$$\left. +2\sum_{k=1}^{N-1} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right) + f\left(x(L), y(L)\right)\right\} + R_N(f, \Gamma). \tag{29}$$

Барои хаттогии формулаи квадратурии (29) барои синфи функсияҳои дар порчаи $[0, L]$ дифференсиронидашавандаи яктағйирёбандаи намуди $f\left(x(t), y(t)\right) := F(t)$, ки бавоситаи модули бефосилагӣ муайян карда мешаванд, баҳои аниқ ёфта шудааст.

Бо ин мақсад оператори набла „∇"–ро дохил мекунем:

$$\nabla f\left(x(t), y(t)\right) := \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = F^{'}(t),$$

$$\nabla^2 f(x(t),y(t)) := \nabla(\nabla f(x(t),y(t)) :=$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = F^{''}(t)$$

ва барои $k = 3, 4, \ldots$ формулаи реккурентии зерин менависем:

$$\nabla^k f\left(x(t),y(t)\right) := \nabla\left(\nabla^{k-1} f\left(x(t),y(t)\right)\right). \tag{30}$$

Ба воситаи $\mathfrak{M}_Q(L)$ синфи хатҳои каҷи Γ-и ҳамвори ростшавандаро ишорат мекунем, ки дарозиашон L буда, каҷиашон қисм-қисм суфта ва ҳамаи онҳо дар соҳаи $Q = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq L^2\}$ ҷойгиранд. Ошкор аст, ки муодилаҳои хатҳои каҷи $\Gamma \in \mathfrak{M}_Q(L)$ ки аз дарозии камони t, ҳамчун параметр вобастаанд, дар системаи координатаи декартии Oxy намуди зеринро доранд:

$$x = x(t),\ y = y(t),\quad 0 \leq t \leq L. \tag{31}$$

Ба воситаи $W_Q^{(2)} H^\omega \subset \mathfrak{M}_Q(L)$ маҷмӯи фуксияҳои $f(M) = f(x,y)$, ки барояшон дар тамоми соҳаи Q ҳосилаҳои хусусии зерин мавҷуданд:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^{2-j}\partial y^j},\ j = 0, 1, 2$$

ва барои дилхоҳ ду нуқтаи $t^{'}, t^{''} \in [0, L]$ функсияи $\nabla^2 f\left(x(t),y(t)\right)$ шарти

$$\left|\nabla^2 f\left(x(t'),y(t')\right) - \nabla^2 f\left(x(t''),y(t'')\right)\right| \leq \omega\left(|t^{'} - t^{''}|\right) \tag{32}$$

– ро қаноат мекунонад, ки дар ин ҷо $\omega(\delta)$ — модули бефосилагии додашуда, яъне функсияи нимхатии бефосилаи камнашаванда буда, дар нуқтаи нол баробари нол аст. Ошкор аст, ки дар ишораи функсияи мураккаб $F(t) := f\left(x(t),y(t)\right)$ шарти (32) маънои онро дорад, ки барои дилхоҳ ду нуқтаи $t^{'}, t^{''} \in [0, L]$ нобаробарии зерин иҷро мегардад:

$$\left|F^{(2)}(t^{'}) - F^{(2)}(t^{''})\right| \leq \omega(|t^{'} - t^{''}|),$$

яъне функсияи $F(t) \in W_Q^{(2)} H^\omega[0, L]$ мебошад.

Натиҷаи асосии ин параграфро меорем.

Теоремаи 2.2.1. *Барои баҳодиҳии хаттогии формулаи квадратурии Симпсон* (29) *дар тамоми синфи* $W_Q^{(2)}H^\omega[0,L]$ *баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f\in W_Q^{(2)}H^\omega} |R_N(f,\Gamma)| = \frac{L^2}{648N^3}\int\limits_0^1 \left\{1-\cos\left[3\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}Lt-\frac{\pi}{6}\right)\right]\right\}\omega'\left(\frac{Lt}{2N}\right)dt.$$

Дар параграфи сеюми боби дуюм масъалаи экстремалии ёфтани формулаи квадратурии намуди Марков барои синфи функсияҳое, ки ба воситаи модули бефосилагӣ муайян шудаанд, дида баромада шудааст. Формулаи квадратурии

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n p_k f(x_k) + R_n(f) \tag{33}$$

муоина мешавад, ки ба воситаи вектор гиреҳҳои $X = \left\{x_k:\ a\le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b\right\}$ ва коэффисиентҳои $P = \{p_k\}_{k=1}^n$ дода шудааст, $R_n(f) = R_n(f;X;P)$ — хаттогии формулаи (33) барои функсияи $f(x)$ мебошад. Агар $\mathfrak{M}$ — дилхоҳ синфи функсияҳои $f(x)$-и дар порчаи $[a,b]$ дода шуда ва дар маънои Риман интегронидашаванда бошад, он гоҳ

$$R_n(\mathfrak{M},X,P) := \sup\left\{|R_n(f,X,P)|:\ f\in\mathfrak{M}\right\}$$

мегузорем. Талаб карда мешавад, ки бузургии

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}) := \inf\left\{R_n(\mathfrak{M},X,P):\ (X,P)\right\} \tag{34}$$

ёфта шуда, вектори (X^0,P^0) аз маҷмӯи (X,P) нишон дода шавад, ки барояш сарҳади аниқи поёнӣ дар (34) қабул карда мешавад:

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}) = R_n(\mathfrak{M};X^0,P^0).$$

Формулаи квадратурии (33) бо вектор гиреҳҳои $X^0 = \left\{x_k^0\right\}$ ва коэффисиентҳои $P = \left\{p_k^0\right\}$ хаттогии хурдтаринро дар тамоми синфи $\mathfrak{M}$ дорост.

Дар параграфи сеюми боби дуюм масъалаи ёфтани формулаи квадратурии беҳтарин барои синфи $H^\omega[a,b]$ дар намуди Марков[9] дида баромада ме-

[9]Никольский С.М. Квадратурные формулы — М.: Наука. 1988. 256 с.

шавад:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = p_0 f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k f(x_k) + p_n f(b) + R_n(f), \tag{35}$$

ки ба воситаи векторҳои (X, P) гиреҳҳои $X = \big\{x_k : \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\big\}$ ва коэффисиентҳои $P = \{p_k\}_{k=0}^{n}$ дода мешавад. Ҳамин тариқ, мо масъалаи ёфтани формулаи квадратурии беҳтарини намуди (35)-ро дида мебароем, ки пешаки ба сифати гиреҳҳо охирҳои порча $x_0 = a$, $x_n = b$ қайд карда шуда, гиреҳҳои $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ва коэффисиентҳои $p_0, p_1, \ldots, p_n$ ба таври оптималӣ интихоб карда мешаванд. Натиҷаи асосии ин параграф теоремаи зерин мебошад.

Теоремаи 2.3.1. *Дар байни формулаҳои квадратурии намуди* (35) *беҳтарин барои синфи функсияҳои* $H^\omega[a, b]$ *формулаи трапетсия мебошад:*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left\{\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right\} + R_n(f). \tag{36}$$

Дар ин ҳолат баҳои аниқи хаттогии формулаи квадратурии (36) *дар тамоми синфи функсияхои* $H^\omega[a, b]$ *ба*

$$\mathcal{E}_n\left(H^\omega[a, b]\right) = 2n \int\limits_0^{(b-a)/(2n)} \omega(t)dt$$

баробар аст. Дар ҳолати хусусӣ, барои синфи KH^α $(K > 0,\ 0 < \alpha \leq 1)$ *ҳосил мекунем:*

$$\mathcal{E}_n(KH^\alpha) = \frac{K(b-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{(2n)^\alpha}.$$

Дар охири ин параграф теоремаи умумикардашудаи теоремаи 2.3.1 барои синфи функсияҳои васеътар оврда мешавад.

Хулоса

Натиҷаҳои асосии илмии диссертатсия

Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсионӣ инҳоянд:

- баҳодиҳии аниқи хаттогии наздиккунии хатҳои каҷи фазоӣ бо хатҳои шикастаи интерполятсионии дарункашидашуда (сплайнҳои интерполятсионии хаттии дарункашидашуда) барои синфи функсияҳои гуногун, ки ба воситаи модули бефосилагӣ дар метрикаҳои l_p ва L_p дода шудаанд, барои қиматҳои гуногуни параметри p $(1 \leq p \leq \infty)$ ёфта шудааст;
- татбиқи натиҷаҳои гирифташуда ба масъалаи ёфтани баҳои аниқи хаттогии формулаҳои квадратурии классикӣ (росткунҷаҳо, трапетсия, Симпсон) барои интегралҳои каҷхатта оварда шудаанд;
- формулаи квадратурии намуди Марков барои интегралҳои регулярии якченака барои синфи функсияҳое, ки ба воситаи модули бефосилагӣ дода шудаанд, ёфта шудааст.

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Натиҷаҳои кори диссертатсиониро дар назарияи наздиккунии сатҳҳо бо сплайнҳои бихаттӣ ва дар назарияи тақрибан ҳисобкунии интегралҳои сатҳӣ барои синфи функсияҳои дорои суфтагии кам татбиқ кардан мумкин аст.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ

Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва КОА-и Федератсияи Русия нашр шудаанд:

[1-M] Шабозова А.А. Об оценке погрешности усложненной квадратурной формулы прямоугольников для криволинейных интегралов первого рода [Текст] / А.А. Шабозова // ДАН РТ. – 2012. – Т.55. – №12. – С.925-931.

[2-M] Шабозова А.А. Точные оценки приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых [Текст] / Г.А. Юсупов, А.А. Шабозова // ДАН РТ. – 2013. – Т.56. – №7. – С.509-514.

[3-M] Шабозова А.А. К полигональной интерполяции кривых в пространстве $\mathbb{R}^m$ [Текст] / А.А. Шабозова // Известия ТулГУ. – 2015. – №4. – С.107-112.

[4-M] Шабозова А.А. Приближение пространственных кривых ломаными [Текст] / А.А. Шабозова // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2017. – №1(166). – С.19-23.

[5-M] Шабозова А.А. Приложение аппроксимации кривых к приближенному вычислению криволинейных интегралов первого рода [Текст] / А.А. Шабозова // ДАН РТ. – 2017. – Т.60. – №3-4. – С.109-117.

[6-M] Шабозова А.А. Приближение пространственных кривых ломаными в L_p [Текст] / А.А. Шабозова // Труды Института матем. и мех. УрО РАН. – 2017. – Т.23. – №4. – С.311-318.

[7-M] Шабозова А.А. Приближение кривых ломаными в L_p [Текст] / А.А. Шабозова // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. – 2017. – Т.4(62). – Вып.4. – С.622-630.

Дар дигар нашрияҳо:

[8-M] Шабозова А.А. О наилучших квадратурных формул типа Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности [Текст]

/ А.А. Шабозова // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений” (г. Душанбе, 27-28 апреля 2015). – С.68-69.

[9-М] Шабозова А.А. О наилучших квадратурных формул Маркова для классов функций $H^{\omega}[a,b]$ [Текст] / А.А. Шабозова // «*Функциональные пространства и теория приближения функций*» – Материалы международной научной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского (Москва, 25-29 мая 2015 г.). – С.246-247.

[10-М] Шабозова А.А. Об оптимальной кубатурной формуле типа Маркова на классах функций, задаваемых модулями непрерывности [Текст] / А.А. Шабозова // Материалы международной научной конференции „Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел” (г. Душанбе, 29-30 октября 2015). – С.63-65.

[11-М] Шабозова А.А. Оптимальная кубатурная формула Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности [Текст] / А.А. Шабозова // Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016). – С.296-298.

АННОТАТСИЯ

ба диссертатсияи Шабозова Адолат Аъзамовна дар мавзӯи «Аппроксиматсияи хатҳои каҷи фазоӣ ва татбиқи онҳо дар назарияи квадратур» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физика ва математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 — таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Вожаҳои калидӣ: *аппроксиматсияи хатҳои каҷ, муодилаҳои параметрӣ, фазои m-ченака, интерполятсия, сплайн, модули бефосилагӣ, масъалаи экстремалӣ, формулаи квадратурӣ, сарҳади болоӣ.*

Мақсади кор. Мақсади тадқиқот аз ёфтани баҳодиҳии аниқи хатогии наздиккунии хатҳои фазоии суфта, ки бо муодилаҳои параметрӣ дода шудаанд, ба воситаи сплайнҳои интерполятсионии хаттии дар онҳо дарункашидашуда иборат мебошад. Барои баъзе синфҳои функсияҳо ва синфҳои хати каҷ баҳодиҳии аниқ ёфта шуда, ба масъалаи тақрибан ҳисоб намудани интегралҳои каҷхатта татбиқ карда шудааст.

Усулҳои тадқиқот. Дар кори пешниҳодшуда усулҳои муосири тадқиқи масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳои дорои хосиятҳои вариатсионӣ истифода бурда шудааст. Баҳои хаттогии формулаҳои квадратурӣ усули Корнейчукро барои синфи функсияҳое, ки суммаи квадратуриро ба нол мубаддал мекунанд, истифода бурда шудааст.

Навигариҳои илмӣ. Ҳамаи натиҷаҳои дар диссертатсия оврдашуда нав мебошанд. Натиҷаҳои асосии зерин ҳосил карда шудаанд:

- баҳои аниқи хаттогии наздиккунии хатҳои каҷи фазоӣ, ба воситаи сплайнҳои интерполятсионии хаттӣ барои синфи функсияҳои гуногун тасвир карда шуда, ба воситаи модули бефосилагӣ дар метрикаи l_p ва дар L_p-норма барои қимати гуногуни параметри p $(p \geq 1)$ дода шудаанд, ёфта шудааст;
- баҳои аниқи хаттогии формулаи квадратурӣ барои интегралҳои каҷхаттаи ҷинси якум барои синфи функсияҳо ва синфи хатҳои каҷ дидабаромадашаванда ҳисоб карда шудааст;
- формулаи квадратурии беҳтарини намуди Марков барои синфи функсияҳо, ки бавоситаи модули бефосилагӣ дода шудаанд, ёфта шудааст.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Кори илмии пешниҳодшуда ҳам характери назариявӣ ва ҳам амалиро дорад. Натиҷаҳои дар он бадастовардаро дар назарияи наздиккунии сатҳҳо ва тақрибан ҳисоб намудани интегралҳои сатҳӣ, барои синфи функсияҳои камсуфта истифода кардан мумкин аст.

АННОТАЦИЯ

диссертации Шабозовой Адолат Аъзамовны на тему «Аппроксимация пространственных кривых и её приложения в теории квадратур», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: *аппроксимация кривых, параметрические уравнения, m-мерное пространство, интерполяция, сплайн, модуль непрерывности, экстремальная задача, квадратурная формула, верхняя грань.*

Цель работы. Целью исследования является нахождение точных оценок погрешности приближения гладких пространственных кривых, заданных параметрическими уравнениями, вписанными в них интерполяционными ломаными в различных метриках на некоторых классах функций и кривых и их приложение в приближённом вычислении криволинейных интегралов.

Методы исследования. В работе применялись современные методы исследования экстремальных задач теории аппроксимации функций вариационного содержания. При оценке погрешности квадратурных формул использовался метод Корнейчука оценки снизу погрешности квадратур на классах функций, обращающих в нуль квадратурную сумму.

Научная новизна. Все полученные в диссертационной работе результаты являются новыми. Получены следующие результаты:

- найдены точные оценки погрешности приближения пространственных кривых вписанными в них интерполяционными ломаными на различных классах функций, задаваемых модулями непрерывности как в l_p-метрике, так и в L_p-норме при различных значениях параметра p $(p \geq 1)$;
- вычислены точные оценки погрешности квадратурных формул для криволинейных интегралов первого рода на рассматриваемых классах функций и кривых;
- найдена наилучшая квадратурная формула типа Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит как теоретический, так и практический характер. Результаты диссертационной работы можно применять в теории приближения поверхностей билинейными сплайнами и в теории приближённого вычисления поверхностных интегралов на классах функций малой гладкости.

SUMMARY

of the dissertation Shabozova Adolat Azamovna on the topic «Approximation of spatial curves and its application in the theory of quadrature» submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.01 — real, complex and functional analysis

Key words: *approximation of curves, parametric equations, m-dimensional spaces, interpolation, spline, modulus of continuity, extremal problem, quadrature formula, upper bound.*

Work objectives. The aim of the study is to find accurate estimates of the error of approximation of smooth spatial curves given by parametric equations inscribed in them by interpolation broken lines in various metrics on some classes of functions and curves and their application in the approximate calculation of curvilinear integrals.

Research methods. The work used modern methods for studying extreme problems in the theory of approximation of variational content functions. When estimating the error of quadrature formulas, the Korneychuk method was used to estimate from below the error of quadratures on classes of functions that vanish the quadrature sum.

Scientific novelty. All the results obtained in the thesis are new. The following results were obtained:

- Exact estimates of the error of the approximation of spatial curves by the interpolation lines broken in them on various classes of functions defined by the moduli of continuity both in the l_p metric and in the L_p norm for various values of the parameter p ($p \geq 1$);
- The exact error estimates of quadrature formulas for curvilinear integrals of the first kind on the classes of functions and curves under consideration are calculated;
- The best quadrature Markov-type formula is found for classes of functions defined by moduli of continuity.

Theoretical and practical value. The work comprises of both theoretical and practical nature. The results can be applied in the theory of approximation of surfaces and in the approximate calculation of surface integrals on classes of functions and classes of surfaces of small smoothness.