Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

УДК 517.5

На правах рукописи

Шабозова Адолат Аъзамовна

АППРОКСИМАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ КВАДРАТУР

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук
Г.А. Юсупов;
доктор физико-математических
наук, профессор математики
Университета Гиссен (Германия)
Е.Е. Бердышева

Д У Ш А Н Б Е – 2019

Оглавление

Введение

В инженерных задачах строительной механики часто приходится иметь дело с кривыми и поверхностями, имеющими достаточно сложный вид. При этом возникает задача замены подобных сложных объектов более простыми таким образом, чтобы они в приложении дали минимальную погрешность.

Традиционные методы аналитической геометрии позволяют работать лишь с такими хорошими объектами, как прямые и плоскости или кривые и поверхности второго порядка с гладкой кривизной.

Если же рассматриваются кривые и поверхности сложной геометрической формы, например корпуса судов или лопасти турбин, то для них нужно уметь строить гладкие приближения и притом с высокой точностью. По существу, только методы, основанные на интерполяционных сплайнах, позволяют решать подобные задачи.

В диссертационной работе в качестве погрешности приближения кривой параметрическим сплайном выбираются интерполяционные ломаные (сплайны первой степени) и оценки погрешности на заданных классах функций изучаются в различных нормированных пространствах (Глава 1). Полученные результаты применяются в теории квадратурных формул для криволинейных интегралов с целью нахождении их точной оценки погрешности на классах функций, задаваемых модулями непрерывности (Глава 2).

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. При изучении вопросов аппроксимации кривых более простыми и гладкими функциями нужно иметь их математическое описание, т.е. их аналитический вид. Общеизвестно, что кривые не всегда можно выразить явной формулой, а потому более общим способом задания кривых является их представление в параметрическом виде. Если заданные на отрезке $[0, L]$ функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют сложный аналитический вид, то возникает задача их гладкого приближения с заданной точностью.

Аппроксимация параметрически заданных кривых в различных метриках рассматривалась в работах: Сендова Бл. [30]; Завьялова Ю.С., Квасова Б.И., Мирошниченко В.Л. [9]; Мартынюка В.Т. [21,22]; Назаренко Н.А. [24,25]; Вакарчука С.Б. [2–5]; Сендова Бл., Попова В.А. [29]; Скороспелова В.А. [31]. В указанных работах в качестве аппарата приближения использовались полиномы или сплайны. В работах С.Б. Вакарчука [2–5] получены точные оценки приближения плоских кривых через дифференциально-разностные характеристики функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Заметим, что ни в одной из цитированных выше работ вопрос о приближении кривых, заданных в m-мерном пространстве $\mathbb{R}^m$, ранее не рассматривался.

В данной диссертационной работе рассматривается вопрос о точной оценке погрешности приближения гладких пространственных кривых Γ, принадлежащих $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 3,\ m \in \mathbb{N})$, заданных параметрическими уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \cdots, x_m = \varphi_m(t), \quad 0 \leq t \leq L,$$

вписанными в них линейными интерполяционными сплайнами (интерполяционными ломаными) на некоторых классах кривых, заданными модулями непрерывности (Глава 1). Даётся приложение полученных в первой главе результатов к вопросу об отыскании точной оценки погрешности квадратурных формул на классах функций, заданных модулями непрерывности (Глава 2).

В завершающем третьем параграфе второй главы приводится решение одной экстремальной задачи в постановке С.М. Никольского о нахождении наилучшей квадратурной формулы для классической формулы Маркова на классах функций одной переменной, задаваемых модулями непрерывности и гладкости. Доказывается, что наилучшая квадратурная формула типа Маркова для указанных классов функций является классическая формула трапеция.

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней изучены и решены сложные экстремальные задачи теории аппроксимации, не решенные до недавнего времени.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета на 2016-2020 гг. по теме «Теория аппроксимация функций».

Цель и задачи исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в следующем:

- найти точные оценки погрешности приближения гладких кривых, принадлежащих m-мерному пространству $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 3,\, m \in \mathbb{N})$, заданных параметрическими уравнениями, вписанными в них линейными интерполяционными сплайнами, на некоторых классах функций и кривых заданными модулями непрерывности;
- вычислить точные оценки погрешности квадратурных формул для криволинейных интегралов на рассматриваемых классах функций и кривых;
- найти наилучшую квадратурную формулу типа Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности.

Основные методы исследования. В диссертационной работе используются методы решения экстремальных задач теории аппроксимации функций, базирующихся на идеях функционального анализа, а также метод Корнейчука оценки снизу погрешности квадратур на классах функций, обращающих в нуль квадратурную сумму.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдены точные оценки погрешности приближения пространственных кривых вписанными в них интерполяционными ломаными на различных классах функций, задаваемых модулями непрерывности как в l_p-метрике, так и в L_p-норме при различных значениях параметра p $(p \geq 1)$;
- вычислены точные оценки погрешности квадратурных формул для криволинейных интегралов на рассматриваемых классах функций и кривых;
- найдена наилучшая квадратурная формула типа Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности.

Положения, выносимые на защиту:

- основные теоремы о точных оценках погрешности приближения кривых $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$, вписанных в них линейными интерполяционными сплайнами на классах функций и кривых;
- теоремы о точных погрешности квадратурных формул для криволинейных интегралов на классах функций;
- теорема о точной оценки погрешности квадратурной формулы Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит как теоретический, так и практический характер. Результаты диссертационной работы можно применять в теории приближения поверхностей билинейными сплайнами и в теории приближённого вычисления поверхностных интегралов на классах функций малой гладкости.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора а опубликованные работы. Все результаты диссертационной работы получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры „Математического анализа и теории функций" и кафедры „Функционального анализа и дифференциальных уравнений" Таджикского национального университета под руководством академика АН РТ М.Ш. Шабозова (Душанбе, 2015-2019 гг.);
- международной научной конференции „Функциональные пространства и теория приближения функций" (Москва, 25-29 мая 2015 г.);
- международной летней математической Школе-Конференции С.Б. Стечкина по теории функций (Душанбе, 15-25 августа 2016 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.);

- международной научной конференции „Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел" (Душанбе, 29-30 октября 2015 г.);
- международной научной конференции „Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций" (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.);
- республиканской научной конференции „Математический анализ и его приложения" (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.).

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 11 работах [39-А — 49-А]. Из них 5 статей опубликованы в научных журналах Российской Федерации и 6 в научных журналах Республики Таджикистан. Из 11 работ 7 входят в списки ВАК РТ при Президенте Республики Таджикистан и ВАК РФ, а 4 в других изданиях. Из совместной с Г.А. Юсуповым работы [40-А], соавтору принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 49 наименований, занимает 75 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

ГЛАВА 1. Приближение пространственных кривых ломаными (сплайнами первого порядка)

При приближение кривых более простыми, но гладкими функциями, нужно иметь их математическое описание. Как известно, кривые не всегда могут быть представлены явной функциональной зависимостью вида $y = f(x)$. Более общим способом является параметрическое задание их координат в виде функций

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

некоторого параметра t в координатной системе Oxy. При этом предполагают, что параметр t меняется в некотором конечном промежутке $[0, L]$.

Когда функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют сложный аналитический вид, возникает потребность гладкого приближения их с высокой степенью точности.

Аппроксимация параметрически заданных кривых в различных метриках рассматривались в работах Сендова Бл. [30], Завьялова Ю.С., Квасова Б.И., Мирошниченко В.Л. [9], Мартынюка В.Т. [21,22], Назаренко Н.А. [24,25], Вакарчука С.Б. [2–5], Сендова Бл., Попова В.А. [29], Скороспелова В.А. [31]. В указанных работах в качестве аппарата приближения использовались полиномы или сплайны. В работах С.Б. Вакарчука [2–5] получены точные оценки приближения через дифференциально-разностные характеристики функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$.

Но поскольку кривые аппроксимируются как геометрические объекты, то более естественным является выражение оценок погрешности через дифференциально-геометрические характеристики длины дуги кривых.

В данной главе рассматривается вопрос о точной оценке погрешности приближения пространственных кривых, лежащих в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$) сплайнами первого порядка (ломаными) в метриках различных пространств, в том числе и в хаусдорфовой метрике.

§ 1.1. Классы функций и кривых

Приведем нужные нам в дальнейшем определения классов функций и кривых.

Пусть $C[a,b]$ — пространство непрерывных на $[a,b]$ функции $f(t)$ с чебышевской нормой $\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \le t \le b} |f(x)|$.

Как обычно, через $C^{(r)}[a,b]$ обозначим класс функций $f(t)$, имеющих на отрезке $[a,b]$ непрерывные производные вплоть до порядка r ($r \in \mathbb{N}$).

Всюду далее $H^{\omega}[0,L]$ — класс функций $f \in C[a,b]$, для любых двух точек $t', t'' \in [0,L]$ удовлетворяющих условию

$$\bigl|f(t') - f(t'')\bigr| \le \omega\bigl(|t' - t''|\bigr),$$

где $\omega(t)$ — заданный на отрезке $[0,L]$ модуль непрерывности, то есть непрерывная, неубывающая и полуаддитивная на $[0,L]$ функция, в нуле равная нулю. Если $\omega = Kt^{\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$, $K > 0$, то класс $H^{\omega}[0,L]$ называют классом Гёльдера порядка α с константой K и пишут $H^{\omega}[0,L] = KH^{\alpha}[0,L]$.

Через $L_p[0,L]$ $(1 \le p \le \infty)$ обозначим пространство суммируемых на $[0,L]$ в p-й $(1 \le p < \infty)$ степени или измеримых существенно ограниченных $(p = \infty)$ на $[0,L]$ функций $f(t)$ с конечной нормой, соответственно

$$\bigl\|f\bigr\|_p := \bigl\|f\bigr\|_{L_p} := \left(\int\limits_0^L |f(t)|^p dt\right)^{1/p} < \infty \quad (1 \le p < \infty),$$

$$\bigl\|f\bigr\|_{\infty} := \bigl\|f\bigr\|_{L_p} := \underset{0 \le t \le L}{\operatorname{supvrai}} \bigl|f(t)\bigr|.$$

Функцию $S_1(x)$ называют сплайном первой степени на сетке

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

если она непрерывна на $[a,b]$ и совпадает с линейной функцией на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = \overline{0, n-1})$.

Сформулируем некоторые результаты о приближении интерполяционными сплайнами первой степени, на которые будем опираться в дальнейшем. Пусть функция $f(x) \in C[0,1]$ и сплайн $S_1(x) \in C[0,1]$ интерполирует её в узлах $x_k = k/n, k = \overline{0,n}$. Тогда имеют место следующие утверждения

Теорема 1.1.1 (В.Н. Малозёмов [17]) *Если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, то*

$$\sup_{f\in H^\omega[0,1]}\|f(x)-S_1(x)\|_{C[0,1]}=\omega\left(\frac{1}{2n}\right), \tag{1.1.1}$$

$$\sup_{f\in W^{(1)}H^\omega[0,1]}\|f(x)-S_1(x)\|_{C[0,1]}=\frac{1}{4}\int\limits_0^{1/n}\omega(t)dt. \tag{1.1.2}$$

Теорема 1.1.2 (В.Н. Малозёмов [18]). *Для произвольного модуля непрерывности $\omega(t)$*

$$\sup_{f\in W^{(1)}H^\omega[0,1]}\sup_{0\le x\le 1}|f'(x)-S'(x)|=n\int\limits_0^{1/n}\omega(t)dt. \tag{1.1.3}$$

Обобщение равенства (1.1.1) в пространстве $L_p[0,L]$ дано В.Ф. Сторчаем.

Теорема 1.1.3 (В.Ф. Сторчай [33]). *Если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, то*

$$\sup_{f\in H^\omega[0,1]}\|f(x)-S_1(x)\|_{L_p[0,1]}=\left\{2n\int\limits_0^{1/(2n)}\omega^p(t)dt\right\}^{1/p}, \quad 1\le p<\infty. \tag{1.1.4}$$

Равенство (1.1.1) получается из (1.1.4) при $p\to\infty$.

Пусть Γ — произвольная спрямляемая кривая, лежащая в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ размерности m, заданная параметрическими уравнениями

$$x_i=\varphi_i(t),\quad 0\le t\le L,\ i=\overline{1,m}. \tag{1.1.5}$$

Через $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}:=H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0,L]$ обозначим класс кривых $\Gamma\subset\mathbb{R}^m$, заданных параметрическими уравнениями (1.1.5) и таких, у которых $\varphi_i(t)\in H^{\omega_i}[0,L]$ $(i=\overline{1,m})$, а через $W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}:=W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0,L]$ — класс гладких параметрически заданных кривых (1.1.1), у которых $\varphi_i(t)\in W^{(1)}H^{\omega_i}[0,L]$ $(i=\overline{1,m})$. В случае, когда $\omega_i(t)\equiv\omega(t)$ $(i=\overline{1,m})$, соответствующие классы функций обозначим $H^{m,\omega}$ и $W^{(1)}H^{m,\omega}$.

В первой главе мы дадим обобщение равенств (1.1.2) – (1.1.5) на случай приближение кривых из $\mathbb{R}^m$, принадлежащих классами $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0,L]$ и $W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0,L]$, вписанными в них интерполяционными ломанными.

§ 1.2. Приближение пространственных кривых, принадлежащих $\mathbb{R}^m$, вписанными в них ломаными

Выше мы отметили, что для параметрически заданных кривых и поверхностей экстремальные задачи аппроксимационного характера изучены намного меньше, чем для явно задаваемых функций. Отметим, что вопрос о приближении параметрически заданных кривых изучался в работах [2–5, 9, 21, 22]. В частности, точные оценки отклонения плоских кривых от параметрически заданных сплайнов первого порядка (ломаных) приведены в работах [2–5], а от параметрических эрмитовых сплайнов в [24] и [25]. Эти задачи рассматриваются также в монографиях [9] и [30], где приведены порядковые оценки погрешности приближения кривых различными сплайнами. Более общие вопросы приближения, восстановления и оптимального кодирования гладких кривых в m-мерном пространстве $\mathbb{R}^m$ изучены Н.П.Корнейчуком [14, 15].

В данном параграфе приводим решение экстремальной задачи приближения пространственных кривых, заданными параметрическими уравнениями (1.1.5), параметрическими интерполяционными ломаными для некоторых классов функций малой гладкости. Полученные результаты в большинство случаев являются окончательными на рассматриваемых классах функций и кривых. Известно [13, с.276-279], что интерполяционные ломаные в ряде случаев представляют собой наилучший аппарат приближения. Точные оценки приближения явно заданной функций $f \in H^{\omega}[a,b]$ и $f \in W^{(1)}H^{\omega}[a,b]$ интерполяционными ломаными были найдены В.Н.Малоземовым [17, 18]. Отметим также работу [6], где решена более общая задача отыскания верхних граней наилучших приближений классов $H^{\omega}[a,b]$ и $W^{(1)}H^{\omega}[a,b]$ интерполяционными ломаными.

Рассмотрим вопрос о точной оценке величины погрешности, возникающей при приближении кривых $\Gamma \in H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ вписанными в них ломаными. Если $\rho(P,Q)$ — некоторое расстояние между точками $P, Q \in \mathbb{R}^m$, то расстояние между кривыми $\Gamma, G \in H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ определим следующим образом

$$\rho(\Gamma, G) = \sup_{0\le t\le L} \big\{\rho(P(t),Q(t)) :\ P(t)\in\Gamma, Q(t)\in G\big\}, \tag{1.2.1}$$

где $P(t) := P\big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)$, $Q(t) := Q\big(\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t)\big)$ соответствуют одному и тому же значению параметра $t\,(0 \le t \le L)$. Если, например, $P(t) \in \Gamma, Q(t) \in G$, то введем $l_q\,(1 \le q \le \infty)$-расстояние между точками $P, Q \in \mathbb{R}^m$ равенством

$$\rho_q\left(P(t), Q(t)\right) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^q\right)^{1/p}, & 1 \le q < \infty, \\ \max\limits_{1\le i\le m} |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|, & q = \infty. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

С геометрической точкой зрения, расстояние (1.2.1) между кривыми

$$\Gamma: \ x_i = \varphi_i(t), \quad i = \overline{1, m},\ 0 \le t \le L, \tag{1.2.3}$$

и

$$G: \ y_i = \psi_i(t), \quad i = \overline{1, m},\ 0 \le t \le L, \tag{1.2.4}$$

не всегда точно характеризует внутренную структуру кривых, посколько оно в общем зависит от способа параметризации и не полностью отражает степень геометрической близости кривых. Поэтому вводят в рассмотрение хаусдорфово расстояние [30], которое свободно от этого недостатка.

Если $A \subset \mathbb{R}^m$ и $B \subset \mathbb{R}^m$ два замкнутых множества, то расстояние $\rho(P, B)$ между фиксированной точкой $P \in A$ и множеством $B \in \mathbb{R}^m$ определим формулой

$$\rho\left(P, B\right) = \inf\left\{\rho(P, Q) : Q \in B\right\}.$$

Под хаусдорфовым расстоянием между двумя замкнутыми множествами $A \subset \mathbb{R}^m$ и $B \subset \mathbb{R}^m$ понимают величину (см., напр., [14, с.737-738])

$$\rho_{\scriptscriptstyle H}(A, B) = \Big\{\sup_{P\in A}\inf_{Q\in B}\rho_q(P, Q), \sup_{P\in B}\inf_{Q\in A}\rho_q(P, Q)\Big\}. \tag{1.2.5}$$

Из определений (1.2.1) и (1.2.5) следует, что для кривых Γ и G, определённых равенствами (1.2.3) и (1.2.4), при любом способе параметризации выполняется неравенства

$$\rho_{\scriptscriptstyle H}(\Gamma, G) \le \rho(\Gamma, G). \tag{1.2.6}$$

Отметим, что частными случаями введённого расстояния (1.2.2) являются:

расстояние Минковского

$$\rho_\infty(\Gamma, G) = \max_{1\le i\le m} \sup_{0\le t\le L} \Big\{ \big|\varphi_i(t) - \psi_i(t)\big| :\ \varphi_i \in \Gamma,\ \psi_i \in G \Big\}; \tag{1.2.7}$$

хеммингово расстояние

$$\rho_1(\Gamma, G) = \sup_{0\le t\le L} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \big|\varphi_i(t) - \psi_i(t)\big|,\ \varphi_i \in \Gamma,\ \psi_i \in G \right\}; \tag{1.2.8}$$

евклидово расстояние

$$\rho_2(\Gamma, G) = \sup_{0\le t\le L} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \big|\varphi_i(t) - \psi_i(t)\big|^2 \right\}^{1/2},\ \varphi_i \in \Gamma,\ \psi_i \in G. \tag{1.2.9}$$

Пусть $\Delta_N :\ 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N \le L$ — произвольное разбиение отрезка $[0, L]$ и для координатных функций кривых $\Gamma, G \in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0, L]$ выполнены равенства

$$\varphi_i(t_k) = \psi_i(t_k),\ i = \overline{1, m},\ k = \overline{1, N}. \tag{1.2.10}$$

Если $P(t) = P\big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) \in \Gamma$, $Q(t) := Q\big(\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t)\big) \in G$ — точки, определяемые одними и теми же значениями параметра t, то точки $P(t_k) = P\big(\varphi_1(t_k), \ldots, \varphi_m(t_k)\big)$, $Q(t_k) := Q\big(\psi_1(t_k), \ldots, \psi_m(t_k)\big)$, $k = \overline{1, N}$, совпадают. Если $\rho(\Gamma, G)$ — какое нибудь расстояние между заданными кривыми $\Gamma, G \in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$, для которых выполняются равенства (1.2.10), то требуется найти величину

$$\inf_{\Delta_N} \rho\big(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}; \Delta_N\big) =$$
$$= \inf_{\Delta_N} \sup \Big\{ \rho\big(\Gamma, G\big) :\ \Gamma, G \in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\ \Gamma\big|_{\Delta_N} = G\big|_{\Delta_N} \Big\},$$

где равенство $\Gamma\big|_{\Delta_N} = G\big|_{\Delta_N}$ означает, что для кривых $\Gamma, G \in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ условие (1.2.10) выполняется.

Далее, положим

$$\overline{\Delta}_N : t_k := kL/N, \quad k = \overline{0, N}; \tag{1.2.11}$$

$$\Delta_N^0 : t_k := t_k^0 = (2k-1)L/(2N), \quad k = \overline{1, N}. \tag{1.2.12}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.2.1. *Каковы бы ни были модули непрерывности* $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m};\ 0 \le t \le L)$, *справедливы равенства*

$$\inf_{\Delta_N} \rho_q\left(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m};\Delta_N\right) = \rho_q\left(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m};\Delta_N^0\right) =$$

$$= 2\rho_{H,q}\left(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m};\Delta_N^0\right) = 2\begin{cases}\left\{\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i^q\left(L/(2N)\right)\right\}^{1/q}, & 1 \le q < \infty,\\ \max\limits_{1\le i\le m}\omega_i\left(\dfrac{L}{2N}\right), & q = \infty,\end{cases} \tag{1.2.13}$$

где разбиение Δ_N^0 *определено формулой* (1.2.12).

Доказательство. В самом деле, если для координатных функций кривых $\Gamma, G \in H^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$ выполняются равенства (1.2.10), то, пользуясь совпадением точек $P(t_k)$ и $Q(t_k)$ при всех $k = \overline{1,N}$, для любых двух точек $P(t) \in \Gamma$ и $Q(t) \in G$ используя неравенство треугольника для расстояния $\rho_q(P,Q)$ запишем

$$\rho_q(P(t),Q(t)) \le \rho_q(P(t),P(t_k)) + \rho_q(P(t_k),Q(t)) =$$

$$= \rho_q(P(t),P(t_k)) + \rho_q(Q(t_k),Q(t)) =$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_i(t)-\varphi_i(t_k)\right|^q\right\}^{1/q} + \left\{\sum_{i=1}^{m}\left|\psi_i(t)-\psi_i(t_k)\right|^q\right\}^{1/q} \le$$

$$\le \left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^q\big(|t-t_k|\big)\right\}^{1/q} + \left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^q\big(|t-t_k|\big)\right\}^{1/q} =$$

$$= 2\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^q\big(|t-t_k|\big)\right\}^{1/q}, \quad 1 \le q < \infty,\ 0 \le t \le L. \tag{1.2.14}$$

Так как полученная оценка (1.2.14) верна для любого t_k, то из него следует, что

$$\rho_q(P(t),Q(t)) \le$$

$$\le 2\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^q\big(\min_k|t-t_k|\big)\right\}^{1/q},\ 1\le q<\infty,\ 0\le t\le L. \tag{1.2.15}$$

В самом деле, возведя неравенство (1.2.14) в степень q, запишем

$$\rho_q^q(P(t),Q(t)) \le 2^q\sum_{i=1}^{m}\omega_i^q\big(|t-t_k|\big),$$

откуда вытекает, что

$$\rho_q^q(P(t),Q(t)) \le 2^q\min_k\sum_{i=1}^{m}\omega_i^q\big(|t-t_k|\big) =$$

$$= 2^q\sum_{i=1}^{m}\min_k\omega_i^q\big(|t-t_k|\big) = 2^q\sum_{i=1}^{m}\omega_i^q\big(\min_k|t-t_k|\big).$$

Последнее неравенство оправдано, тем, что функции $\omega_i(\delta)$ $(i=\overline{1,m})$ являются непрерывными неубывающими по $\delta\in[0,L]$ функциями и при любом $q\ge 1$ имеет место равенство

$$\inf\omega_i^q\big(|t-t_k|\big) = \omega_i^q\big(\inf_k|t-t_k|\big),\quad i=\overline{1,m},$$

а потому имеет место (1.2.15).

Заметим, что оценка (1.2.15) точна на классе кривых $H^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$, в чём легко убедиться, рассмотрев кривые Γ_0 и G_0 с координатами соответственно

$$\varphi_i(t) = -\psi_i(t) =$$

$$= \min_k\omega_i\big(|t-t_k|\big) = \omega_i\big(\min_k|t-t_k|\big),\quad 0\le t\le L,\ i=\overline{1,m}. \tag{1.2.16}$$

Поэтому из (1.2.15) следует, что

$$\rho_q\big(H^{\omega_1,\cdots,\omega_m};\Delta_N\big) = \rho_q\big(\Gamma_0,G_0\big) =$$

$$= 2\sup_{0\le t\le L}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^q\big(\inf_k|t-t_k|\big)\right\}^{1/q}. \tag{1.2.17}$$

Расстояние (1.2.17) между кривыми $\Gamma_0, G_0 \in H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ зависит от выбора узлов интерполирования t_k и имеет минимальное значение, если

$$\Delta_N = \Delta_N^0 : \ t_k := t_k^0 = (2k-1)L/(2N); \ k = \overline{1,N},$$

(см., например, работу [14, с.739]), где доказано, что

$$\sup_{0\le t\le L} \omega_i\big(\inf_k |t-t_k|\big) = \sup_{0\le t\le L} \omega_i\big(|t-t_k^0|\big) = \omega_i\big(L/(2N)\big), \quad i = \overline{1,m}. \quad (1.2.18)$$

В силу равенства (1.2.18) из (1.2.17) сразу получаем

$$\inf_{\Delta_N} \rho_q\left(H^{\omega_1,\dots,\omega_m}; \Delta_N\right) = \rho_q\left(H^{\omega_1,\cdots,\omega_m}; \Delta_N^0\right) =$$

$$= 2\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^q\left(L/(2N)\right)\right\}^{1/q}, \quad (1.2.19)$$

откуда и следует соотношение (1.2.13).

В случае хаусдорфовой метрики вытекающая из неравенства (1.2.6) и равенства (1.2.19) точная оценка оказывается завышенной вдвое. Действительно, если для кривых Γ и G из $H^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$ выполнено условие (1.2.10) при $t_k = t_k^0$, то для любой точки кривой Γ существует точка P_k с координатами $\varphi_1(t_k^0), \varphi_2(t_k^0), \dots, \varphi_m(t_k^0)$, такая, что $|t-t_k^0| \le L/(2N)$. Так как точка P_k принадлежит и кривой G, то имеем:

$$\rho_q(P,G) := \inf\big\{\rho_q(P,Q): \ Q \in G\big\} \le \rho_q(P,P_k) =$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^m \big|\varphi_i(t) - \varphi_i(t_k^0)\big|^q\right\}^{1/p} \le \left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^q\big(|t-t_k^0|\big)\right\}^{1/q} \le$$

$$\le \left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^q\left(\frac{L}{2N}\right)\right\}^{1/q}. \quad (1.2.20)$$

Очевидно, что такую же оценку получим и для $\rho_q(\Gamma,Q)_q, \ Q \in G$, причём знак равенства везде будет иметь место для кривых с координатными функциями (1.2.16). Это значит, что

$$\rho_{H,q}\left(H^{\omega_1,\cdots,\omega_m}; \Delta_N^0\right) = \left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^q\left(L/(2N)\right)\right\}^{1/q}. \quad (1.2.21)$$

Из (1.2.19) и (1.2.21) следует равенство (1.2.13), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.1.

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы* 1.2.1 *при* $\Gamma, G \in H^{m,\omega}[0,L]$ *справедливо равенство*

$$\inf_{\Delta_N} \rho_q\left(H^{m,\omega};\Delta_N\right) = \rho_q\left(H^{m,\omega};\Delta_N^0\right) =$$

$$= 2\rho_{H,q}\left(H^{m,\omega};\Delta_N^0\right) = 2\begin{cases} \sqrt[q]{m}\cdot\omega\left(\dfrac{L}{2N}\right), & 1 \le q < \infty, \\ \omega\left(\dfrac{L}{2N}\right), & q = \infty. \end{cases}$$

Теорема 1.2.2. *Пусть* Γ_N *– вписанная в кривую* Γ *ломаная с вершинами в точках* $P_k^* := P\left(\varphi_1(kh), \varphi_2(kh), \cdots, \varphi_m(kh)\right)$, $k = \overline{0,N}$, $h = L/N$. *В предположении, что* $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m};\ 0 \le t \le L)$ *– выпуклые вверх модули непрерывности, справедливы равенства*

$$\mathscr{E}_N\left(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)_q := \sup\left\{\rho_q(\Gamma,\Gamma_N):\ \Gamma \in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\right\} =$$

$$= \begin{cases} \left\{\sum\limits_{i=1}^{m} \omega_i^q\left(\dfrac{L}{2N}\right)\right\}^{1/q}, & 1 \le q < \infty, \\ \max\limits_{1\le i\le m} \omega_i\left(\dfrac{L}{2N}\right), & q = \infty. \end{cases} \qquad (1.2.22)$$

В частности, если все кривые $\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_m = \omega$, *то имеет место точная оценка*

$$\mathscr{E}_N\left(H^{m,\omega}\right)_q := \begin{cases} \sqrt[q]{m}\,\omega\left(\dfrac{L}{2N}\right), & 1 \le q < \infty, \\ \omega\left(\dfrac{L}{2N}\right), & q = \infty. \end{cases} \qquad (1.2.23)$$

Доказательство. Фиксируем разбиение

$$\overline{\Delta}_N : t_k = kh, \quad k = \overline{0,N},\ h = L/N.$$

Пусть Γ_N – вписанная в кривой Γ ломаная с вершинами

$$P_k^* := P\left(\varphi_1\left(kh\right), \varphi_2\left(kh\right), \cdots, \varphi_m\left(kh\right)\right), \quad k = \overline{0, N}.$$

Параметрическое уравнение звена ломаной Γ_N, стягивающей дугу $P_k\overset{\smile}{P}_{k+1}$ имеет вид

$$S\big(\varphi_i; t\big) := \varphi_i(t_k) + (t - t_k)h^{-1}\big[\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)\big], \quad i = \overline{1, m}, \tag{1.2.24}$$

где $t_k \le t \le t_{k+1},\ k = \overline{0, N-1}$. Используя равенство (1.2.24), получаем

$$\varphi_i(t) - S\big(\varphi_i; t\big) =$$

$$= (t_{k+1} - t)h^{-1}\big[\varphi_i(t) - \varphi_i(t_k)\big] + (t - t_k)h^{-1}\big[\varphi_i(t) - \varphi_i(t_{k+1})\big].$$

В [17] для произвольного выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega_i(t)$ доказана оценка

$$\big\|\varphi_i - S\left(\varphi_i\right)\big\|_{C[0,L]} \le \omega_i\big(L/(2N)\big), \quad i = \overline{1, m},$$

пользуясь которой будем иметь

$$\rho_q(\Gamma, \Gamma_N) = \sup_{0 \le t \le L}\left\{\sum_{i=1}^{m}\big|\varphi_i(t) - S\big(\varphi_i; t\big)\big|^q\right\}^{1/q} \le$$

$$\le \left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\sup_{0 \le t \le L}\big|\varphi_i(t) - S\big(\varphi_i; t\big)\big|\right)^q\right\}^{1/q} =$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{m}\big\|\varphi_i - S\big(\varphi_i\big)\big\|^q_{C[0,L]}\right\}^{1/q} \le \left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^q\left(\frac{L}{2N}\right)\right\}^{1/q}, \quad 1 \le q < \infty. \tag{1.2.25}$$

Построим экстремальную кривую $\Gamma^* \subset H^{\omega_1, \ldots, \omega_m}$, для которой неравенство (1.2.25) обращается в равенство. Для $t \in [t_k, t_{k+1}]$ $(k = \overline{0, N-1})$ и $i = \overline{1, m}$ координатные уравнения кривой Γ^* определим равенствами

$$\varphi_i^*(t) = \begin{cases} \omega_i\big(t - t_k\big), & t_k \le t \le t_k + L/(2N), \\ \omega_i\big(t_{k+1} - t\big), & t_k + L/(2N) \le t \le t_{k+1}, \end{cases} \tag{1.2.26}$$

а соответствующую вписанную в Γ^* ломаную обозначим через Γ^*_N. Легко проверить, что $\varphi_i^* \in H^{\omega_i}$, а значит кривая $\Gamma^* \in H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$. Далее, так как $\varphi_i^*(t_k) \equiv 0$, $k = \overline{0, N-1}$, то из (1.2.24) следует, что

$$S\big(\varphi_i^*; t\big) = \varphi_i^*(t_k) + (t - t_k)h^{-1}\big[\varphi_i^*(t_{k+1}) - \varphi_i^*(t_k)\big] \equiv 0, \quad i = \overline{1, m},$$

а потому получаем

$$\rho_q(\Gamma^*, \Gamma^*_N) = \sup_{0 \le t \le L} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_i^*(t) - S\big(\varphi_i^*; t\big) \right|^q \right\}^{1/q} =$$

$$= \sup_{0 \le t \le L} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_i^*(t) \right|^q \right\}^{1/q} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_i^* \left(\frac{t_{k+1} + t_k}{2} \right) \right|^q \right\}^{1/q} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left\| \varphi_i^* \right\|^q_{C[0,L]} \right\}^{1/q} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^q \left(\frac{L}{2N} \right) \right\}^{1/q}. \tag{1.2.27}$$

Таким образом, из (1.2.27) следует, что

$$\mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\dots,\omega_m}\big)_q = \rho_q\big(\Gamma^*, \Gamma^*_N\big) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^q \left(\frac{L}{2N} \right) \right\}^{1/q},$$

откуда сразу следуют равенства (1.2.22) и (1.2.23). Теорема 1.2.2 доказана.

Из теоремы 1.2.2 вытекает

Следствие 1.2.2. *В условиях теоремы* 1.2.2 *при* $\omega_i(t) = K_i t^{\alpha_i}$ ($K_i > 0$, $0 < \alpha_i \le 1$, $i = \overline{1, m}$) *получаем:*

$$\mathscr{E}_N\big(H^{K_1 t^{\alpha_1},\dots,K_m t^{\alpha_m}}\big)_q := \begin{cases} \left\{ \sum\limits_{i=1}^{m} K_i^q \left(\dfrac{L}{2N} \right)^{\alpha_i q} \right\}^{1/q}, & 1 \le q < \infty, \\ \max\limits_{1 \le i \le m} K_i \left(\frac{L}{2N}\right)^{\alpha_i}, & q = \infty. \end{cases}$$

В частности, в случае $K_i t^{\alpha_i} \equiv K t^{\alpha}$ $(K > 0, 0 < \alpha \le 1)$ *:*

$$\mathscr{E}_N\big(H^{K t^{\alpha}}\big)_q := \begin{cases} \sqrt[q]{m} K \left(\dfrac{L}{2N} \right)^{\alpha}, & 1 \le q < \infty, \\ K \left(\dfrac{L}{2N} \right)^{\alpha}, & q = \infty. \end{cases}$$

Теорема 1.2.3. *Пусть* $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m})$ *— выпуклые модули непрерывности на отрезке* $[0, L]$. *Тогда для любого* $N \in \mathbb{N}$ $(N \geq 2)$ *справедливы равенства*

$$\mathscr{E}_N\big(W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\big)_q := \sup\Big\{\rho_q(\Gamma,\Gamma_N):\ \Gamma \in W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\Big\} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{cases} \left\{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt\right)^q\right\}^{1/q}, & 1 \leq q < \infty, \\ \max\limits_{1\leq i\leq m}\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt, & q = \infty, \end{cases} \tag{1.2.28}$$

где Γ_N *— ломаная, вписанная в кривую* $\Gamma \in W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *с вершинами в точках* $P_k^* := P\left(\varphi_1\left(kh\right), \cdots, \varphi_m\left(kh\right)\right)$, $k = \overline{0,N}$, $L = L/N$.

Если же $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m})$ *— произвольные модули непрерывности, то*

$$\mathscr{E}_N\big(W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\big)_q = \frac{\Theta_\omega}{4}\begin{cases} \left\{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt\right)^q\right\}^{1/q}, & 1 \leq q < \infty, \\ \max\limits_{1\leq i\leq m}\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt, & q = \infty, \end{cases} \tag{1.2.29}$$

где $(2/3) \leq \Theta_\omega \leq 1$.

Доказательство. Пользуясь равенством (1.2.24), можно доказать, что для произвольной кривой $\Gamma \in W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ координатные функции $\varphi_i(t)$ $(i = \overline{1,m})$ которой принадлежат классу $W^{(1)}H^{\omega_i}[0, L]$, при условии выпуклости $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m})$ выполняется неравенство (см. например, В.Н. Молоземова [17])

$$\big\|\varphi_i - S\left(\varphi_i; t\right)\big\|_{C[0,L]} \leq \frac{1}{4}\int\limits_0^{L/N}\omega_i(\tau)d\tau, \quad i = \overline{1,m}. \tag{1.2.30}$$

Хорошо известно [13, с.156, предложение 4.2.3], что если $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m})$ — выпуклые модули непрерывности, то функции $\varphi_i^*(t)$ $(i = \overline{1,m})$, определённые равенствами (1.2.24), принадлежат классами $H^{\omega_i}[0,L]$ $(i=\overline{1,m})$, причём

$$\omega\left(\varphi_i^*,t\right)=\omega_i(t)\ (i=\overline{1,m};\ 0\le t\le L/N).$$

В силу неравенства (1.2.30) для расстояния $\rho_q(\Gamma,\Gamma_N)$ между кривой $\Gamma\in W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ и вписанной в нее ломаной Γ_N при выпуклых модулях непрерывности $\omega_i(t)$ $(i=\overline{1,m})$ получаем неулучшаемые на классе кривых $W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ оценки

$$\rho_q(\Gamma,\Gamma_N)=\sup_{0\le t\le L}\left\{\sum_{i=1}^m\left|\varphi_i(t)-S(\varphi_i;t)\right|^q\right\}^{1/q}\le$$

$$\le\left\{\sum_{i=1}^m\left\|\varphi_i-S\varphi_i\right\|_{C[0,L]}^q\right\}^{1/q}\le\frac{1}{4}\left\{\sum_{i=1}^m\left(\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt\right)^q\right\}^{1/q}. \qquad (1.2.31)$$

Докажем неулучшаемость неравенства (1.2.31). С этой целью зададим на отрезке $[0,L/N]$ функции $f_i(t),\ i=\overline{1,m}$, равенствами

$$f_i(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\omega_i\left(\dfrac{L}{N}-2t\right), & 0\le t\le L/(2N),\\ -\dfrac{1}{2}\omega_i\left(2t-\dfrac{L}{N}\right), & L/(2N)\le t\le L/N.\end{cases} \qquad (1.2.32)$$

Полагая

$$f_i(t)=f_i\left(\frac{L}{N}-2t\right),\quad (i=\overline{1,m})$$

для $t\in[L/N,2L/N]$, распространим функции $f_i(t)$ периодически с периодом $2L/N$ на всю ось. Введём теперь экстремальную кривую Γ^{**} со следующими параметрическими уравнениями:

$$\Gamma^{**}:\ \varphi_i^{**}(t):=\int\limits_0^t f_i(\tau)d\tau,\quad i=\overline{1,m},\ 0\le t\le L.$$

Элементарно проверяется, что $\varphi_i^{**}(t)\in W^{(1)}H^{\omega_i}[0,L],\ i=\overline{1,m}$, а это означает, что $\Gamma^{**}\in W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$. Кроме того, учитывая, что при любом $k\in\mathbb{N}$, $0\le h\le L/N$, имеет место соотношение

$$\varphi_i^{**}(kh) = \int\limits_0^{kh} f_i(\tau)d\tau = \int\limits_0^{kL/N} f_i(\tau)d\tau = k\int\limits_0^{L/N} f_i(\tau)d\tau =$$

$$= k\left\{\frac{1}{2}\int\limits_0^{L/(2N)} \omega_i\left(\frac{L}{N}-2\tau\right)d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_{L/(2N)}^{L/N} \omega_i\left(2\tau-\frac{L}{N}\right)d\tau\right\} =$$

$$= k\left\{\int\limits_0^{L/N} \omega_i(\tau)d\tau - \int\limits_0^{L/N} \omega_i(\tau)d\tau\right\} = 0, \quad k=\overline{1,N}, \tag{1.2.33}$$

из равенства (1.2.24) будем иметь $S(\varphi_i^{**},t)=0$ $(i=\overline{1,m})$ а потому

$$\rho_q(\Gamma^{**},\Gamma_N^{**}) = \sup_{0\le t\le L}\left\{\sum_{i=1}^m \left|\varphi_i^{**}(t)-S(\varphi_i^{**},t)\right|^q\right\}^{1/q} =$$

$$= \sup_{0\le t\le L}\left\{\sum_{i=1}^m \left|\varphi_i^{**}(t)\right|^q\right\}^{1/q} = \left\{\sum_{i=1}^m \left\|\varphi_i^{**}\right\|_{C[0,L]}^q\right\}^{1/q} =$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^m \left\|\int\limits_0^t f_i(\tau)d\tau\right\|_{C[0,L]}^q\right\}^{1/q} = \left\{\sum_{i=1}^m \left(\int\limits_0^{L/(2N)} f_i(\tau)d\tau\right)^q\right\}^{1/q} =$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{L/(2N)} \omega_i\left(\frac{L}{N}-2\tau\right)d\tau\right)^q\right\}^{1/q} = \frac{1}{4}\left\{\sum_{i=1}^m \left(\int\limits_0^{L/N} \omega_i(t)dt\right)^q\right\}^{1/q},$$

откуда и следует точность неравенства (1.2.31). Тем самым доказано требуемое равенство (1.2.28). Отметим, что точное значение величины (1.2.28) получено благодаря условию выпуклости модулей непрерывности $\omega_i(t), (i=\overline{1,m})$, однако в общем случае для произвольных модулей непрерывности

$\omega_i(t), (i = \overline{1,m})$ равенство (1.2.28) не выполняется, хотя оценка сверху в (1.2.27) сохраняется. При этом кривая Γ уже не обязательно находится в классе $W^{(1)}H^{\omega_i,\dots,\omega_m}$. С другой стороны известно (см.,напр., [32, с.24]), что функции $f_i^*(t) := \dfrac{2}{3}f_i(t), (i = \overline{1,m})$, где $f_i(t)$ определены равенствами (1.2.32), принадлежат классу $W^{(1)}H^{\omega_i}, (i = \overline{1,m})$, а потому в этом случае легко проверить, что кривая $\widetilde{\Gamma}$, параметрические уравнение которой определены равенствами

$$\widetilde{f}_i(t) := \int\limits_0^t f_i^*(\tau)d\tau = \frac{2}{3}\int\limits_0^t f_i(\tau)d\tau, \quad i = \overline{1,m}, \quad 0 \le t \le L,$$

принадлежит классу кривых $W^{(1)}H^{\omega_i,\dots,\omega_m}$. Но так как из равенства (1.2.32) следует, что при любом $k = \overline{1,N}, \widetilde{f}_i(kh) = 0$, то в силу (1.2.24) получаем, что $S(\widetilde{f}_i, t) \equiv 0$ и непосредственное вычисление приводит к неравенству

$$\mathscr{E}_N\big(W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}\big)_q \ge \rho_q\big(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{\Gamma_N}\big) =$$

$$= \sup_{0\le t\le L}\Big\{\sum_{i=1}^m \Big|\widetilde{f}_i(t) - S(\widetilde{f}_i, t)\Big|^q\Big\}^{1/q} = \sup_{0\le t\le L}\Big\{\sum_{i=1}^m \Big|\widetilde{f}_i(t)\Big|^q\Big\}^{1/q} =$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^m \left\|\widetilde{f}_i\right\|^q_{C[a,b]}\right\}^{1/q} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\left\{\sum_{i=1}^m \left(\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt\right)^q\right\}^{1/q}. \qquad (1.2.34)$$

Равенство (1.2.28) вытекает из сопоставления неравенств (1.2.31) и (1.2.34). Объединяя оба полученных неравенства, запишем

$$\frac{2}{3}\mathscr{J}_{m,N}(\omega)_q \le \mathscr{E}_N\big(W^{(1)}H^{\omega_1,\dots,\omega_m}\big)_q \le \mathscr{J}_{m,N}(\omega)_q, \quad 1 \le q \le \infty,$$

где ради краткости обозначено:

$$\mathscr{J}_{m,N}(\omega)_q = \frac{1}{4}\begin{cases}\left\{\sum\limits_{i=1}^m \left(\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt\right)^q\right\}^{1/q}, & 1 \le q < \infty,\\ \max\limits_{1\le i\le m}\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt, & q = \infty.\end{cases}$$

§ 1.3. О полигональной интерполяции кривых в пространстве $\mathbb{R}^m$. Оценки погрешности в разных метриках

Пусть кривые Γ и G из $\mathbb{R}^m$ соответственно заданы параметрическими уравнениями (1.2.3) и (1.2.4), т.е функции $\varphi_i(t)$ $(i=\overline{1,m})$, $\psi_i(t)$ $(i=\overline{1,m})$ — координатные функции Γ и G. Определим расстояние между этими кривыми одной из следующих формул:

а) $r_1(\Gamma, G) = \sum\limits_{i=1}^{m} \left\|\varphi_i - \psi_i\right\|_{C[0,L]}$ — хеммингово расстояние;

б) $r_2(\Gamma, G) = \left\{\sum\limits_{i=1}^{m} \left\|\varphi_i - \psi_i\right\|^2_{C[0,L]}\right\}^{1/2}$ — евклидово расстояние;

в) $r_\infty(\Gamma, G) = \max\limits_{1\le i\le m} \left\|\varphi_i - \psi_i\right\|_{C[0,L]}$ — расстояние Минковского.

Условимся, что если кривые Γ и G соответственно определены параметрическими уравнениями

$$\Gamma: \ x_i = \varphi_i(t), \quad i=\overline{1,m},\ 0\le t\le L,$$

$$G: \ y_i = \psi_i(t), \quad i=\overline{1,m},\ 0\le t\le L,$$

и функции $\varphi_i, \psi_i \in C^{(1)}[0,L]$, то через $\Gamma^{(1)}$ и $G^{(1)}$ будем обозначать кривые, координатные функции которых соответственно заданы уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i'(t), \quad i=\overline{1,m},\ 0\le t\le L,$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \psi_i'(t), \quad i=\overline{1,m},\ 0\le t\le L,$$

то есть положим

$$\Gamma^{(1)}: \ x_i' = \varphi_i'(t), \quad i=\overline{1,m},\ 0\le t\le L, \tag{1.3.1}$$

$$G^{(1)}: \ y_i' = \psi_i'(t), \quad i=\overline{1,m},\ 0\le t\le L. \tag{1.3.2}$$

Пусть

$$\overline{\Delta}_N: \ t_k := kh,\ h = L/N, \quad k=\overline{0,N},$$

— равномерное разбиение отрезка $[0,L]$, Γ — вписанная в кривую $\Gamma \in W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ ломаная в точках $P_k^* := P^*\big(\varphi_1(kh),\varphi_2(kh),\ldots,\varphi_m(kh)\big) \in \Gamma$ $(k=\overline{0,N})$; $h=L/N$.

Требуется найти точные верхние грани погрешности приближения $\Gamma^{(1)}$ полигональной кривой $\Gamma_N^{(1)}$:

$$\mathscr{E}_N^{(l)}\big(W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m};\Delta_N;r_i\big)=$$

$$=\sup\Big\{r_i\big(\Gamma^{(l)},\Gamma_N^{(l)}\big);\Gamma\in W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\Big\},\quad l=0,1;\ i=1,2,\infty. \tag{1.3.3}$$

Величина (1.3.3) при $l=0$, когда $\Gamma^{(0)}\equiv\Gamma$, $\Gamma_N^{(0)}\equiv\Gamma_N$, найдена в предыдущем параграфе. Здесь мы вычислим значение величины (1.3.3) при $l=1$. Нам понадобится следующее хорошо известное утверждение

Лемма 1.3.1. (В.Н. Малозёмов [18]). *Пусть* $H_0^\omega[a,b]$ *— класс функций* $\varphi\in H^\omega[a,b]$, *для которых* $\int\limits_a^b\varphi(t)dt=0$. *Тогда*

$$\sup\Big\{\big\|\varphi\big\|_{C[a,b]}:\ \varphi\in H_0^\omega[a,b]\Big\}=\frac{1}{b-a}\int\limits_0^{b-a}\omega(t)dt.$$

Теорема 1.3.1. *Пусть* $\Gamma\subset\mathbb{R}^m$ *— произвольная кривая, принадлежащая классу* $W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$. *Если* Γ_N *— вписанная в кривую* Γ *ломаная с вершинами в точках* $P_k^*\in\Gamma$, *то для произвольных модулей непрерывности* $\omega_i(t)$ $(i=\overline{1,m}; 0\le t\le L)$ *имеют место равенства*

$$\mathscr{E}_N^{(1)}(W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\overline{\Delta}_N;r_2)=\frac{N}{L}\left\{\sum_{i=1}^m\left(\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt\right)^2\right\}^{1/2}, \tag{1.3.4}$$

$$\mathscr{E}_N^{(1)}(W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\overline{\Delta}_N;r_\infty)=\frac{N}{L}\max_{1\le i\le m}\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt, \tag{1.3.5}$$

$$\mathscr{E}_N^{(1)}(W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\overline{\Delta}_N;r_1)=\frac{N}{L}\sum_{i=1}^m\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt. \tag{1.3.6}$$

Доказательство. Не умаляя общности, докажем соотношение (1.3.6) для хэммингова расстояния $r_1(\Gamma^{(1)}, \Gamma_N^{(1)})$, поскольку доказательства равенств (1.3.4) и (1.3.5) основаны на практически аналогичных соображениях. Так как Γ_N – ломаная с вершинами в точках $P_k^* \in \Gamma$, то параметрические уравнения звена ломаной Γ_N, соединяющего точки P_k^* и P_{k+1}^*, $k = \overline{0, N-1}$, имеют вид (см., формулу (1.2.21)):

$$S(\varphi_i; t) = \varphi_i(t_k) + h^{-1}(t - t_k)[\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)], \quad i = \overline{1, m}, \tag{1.3.7}$$

где $t_k \le t \le t_{k+1}, k = \overline{0, N-1}$. Следуя В.Н.Малозёмову [20], доопределим производную $S'(\varphi_i; t_k)$ звена ломаной (1.3.7) в точках интерполяции $t_k = kh$, $k = \overline{0, N}$, следующим образом

$$S'(\varphi_i; t_k) := \frac{N}{L}\big[\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)\big], \quad k = \overline{0, N-1}; \ i = \overline{1, m},$$

$$S'(\varphi_i; L) := \frac{N}{L}\big[\varphi_i(L) - \varphi_i(t_{N-1})\big], \quad i = \overline{1, m}.$$

Таким образом, далее полагаем

$$S'(\varphi_i; t) = \frac{N}{L}\big[\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)\big], \quad \text{если} \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \ k = \overline{0, N-2}, \ i = \overline{1, m},$$

и

$$S'(\varphi_i; t) = \frac{N}{L}\big[\varphi_i(L) - \varphi_i(t_{N-1})\big], \quad \text{если} \quad t \in [t_{N-1}, L], \ i = \overline{1, m}.$$

При выполнении этих условий при $t \in [t_k, t_{k+1}), \ k = \overline{0, N-2}$, имеет место равенство

$$\varphi_i'(t) - S'(\varphi_i; t) = \varphi_i'(t) - \frac{N}{L}\big[\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)\big], \quad i = \overline{1, m}.$$

Положим

$$\psi_i(t) \equiv \varphi_i'(t) - \frac{N}{L}\big[\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)\big], \quad i = \overline{1, m}.$$

Очевидно, что функция $\psi_i \in H_0^{\omega_i}[t_k, t_{k+1}], \ i = \overline{1, m}$, и в силу вышеприведённой леммы 1.3.1 имеем:

$$\big\|\psi_i\big\|_{C[0,L]} \le \frac{N}{L} \int\limits_0^{L/N} \omega_i(t)dt, \quad i = \overline{1, m},$$

или, что то же,

$$\left\|\varphi_i' - S'(\varphi_i)\right\|_{C[0,L]} \leq \frac{N}{L}\int\limits_0^{L/N} \omega_i(t)dt, \quad i = \overline{1,m}, \tag{1.3.8}$$

откуда сразу вытекает, что

$$\sup\left\{r_1\big(\Gamma^{(1)}, \Gamma_N^{(1)}\big) :\ \Gamma \in W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\right\} =$$

$$= \sup_{\varphi_i \in W^{(1)}H^{\omega_i}} \sum_{i=1}^{m} \left\|\varphi_i' - S'(\varphi_i)\right\|_{C[0,L]} \leq \frac{N}{L}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^{L/N} \omega_i(t)dt. \tag{1.3.9}$$

Построим теперь экстремальную кривую $\Gamma_0 \in W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$, для которой неравенство (1.3.9) обращается в равенство. Для определения экстремальных координатных функций кривой Γ_0 положим

$$\varphi_i^{(0)}(t) = \begin{cases} \omega_i\left(\dfrac{L}{N} - t\right) - \dfrac{N}{L}\displaystyle\int\limits_0^{L/N} \omega_i(\tau)d\tau, & 0 \leq t \leq L/N, \\ \omega_i\left(t - \dfrac{L}{N}\right) - \dfrac{N}{L}\displaystyle\int\limits_0^{L/N} \omega_i(\tau)d\tau, & L/N \leq t \leq 2L/N, \end{cases}$$

$$\varphi_i^{(0)}\left(t + \frac{2L}{N}\right) = \varphi_i^{(0)}(t), \quad i = \overline{1,m}.$$

Определим координатные функции кривой Γ_0 равенствами

$$\Gamma_0 :\ f_i^{(0)}(t) = \int\limits_0^t \varphi_i^{(0)}(\tau)d\tau, \ \ 0 \leq t \leq L,\ i = \overline{1,m}.$$

Легко проверить, что $\varphi_i^{(0)} \in H_0^{\omega_i}$, $f_i^{(0)} \in W^{(1)}H^{\omega_i}$, а, значит, $\Gamma_0 \in W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$, и тогда, согласно утверждению вышеприведённой леммы 1.3.1 Малозёмова, имеем:

$$\left\|\big(f_i^{(0)}\big)' - S'(f_i^{(0)})\right\|_{C[0,L]} = \left\|\big(f_i^{(0)}\big)'\right\|_{C[0,L]} =$$

$$= \left\|\varphi_i^{(0)}\right\|_{C[0,L]} = \frac{N}{L}\int\limits_0^{L/N} \omega_i(t)dt. \tag{1.3.10}$$

Учитывая равенство (1.3.10), получаем

$$\mathscr{E}_N^{(1)}(W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\overline{\Delta}_N;r_1)\geq\rho_1(\Gamma_0^{(1)},\Gamma_{0N}^{(1)})=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left\|\left(f_i^{(0)}\right)'-S'(f_i^{(0)})\right\|_{C[0,L]}=\frac{N}{L}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^{L/N}\omega_i(t)dt. \tag{1.3.11}$$

Требуемое равенство (1.3.6) получаем из сравнения оценки сверху (1.3.9) с оценкой снизу (1.3.11), чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.1.

Из доказанной теоремы 1.3.1 вытекает

Следствие 1.3.1. *В условиях теоремы* 1.3.1 *справедливы равенства*

$$\mathscr{E}_N^{(1)}(W^{(1)}H^{m,\omega},\overline{\Delta}_N;r_2)=\frac{N}{L}\sqrt{m}\int\limits_0^{L/N}\omega(t)dt, \tag{1.3.12}$$

$$\mathscr{E}_N^{(1)}(W^{(1)}H^{m,\omega},\overline{\Delta}_N;r_\infty)=\frac{N}{L}\int\limits_0^{L/N}\omega(t)dt, \tag{1.3.13}$$

$$\mathscr{E}_N^{(1)}(W^{(1)}H^{m,\omega},\overline{\Delta}_N;r_1)=\frac{N}{L}m\int\limits_0^{L/N}\omega(t)dt. \tag{1.3.14}$$

В частности, если $\omega(t)=Kt^\alpha$ $(K>0,\ 0<\alpha\leq 1)$, *то из равенств* (1.3.12) – (1.3.14) *получаем*

$$\mathscr{E}_N^{(1)}(W^{(1)}KH^{m,Kt^\alpha},\overline{\Delta}_N;r_2)=\frac{K\sqrt{m}}{\alpha+1}\left(\frac{L}{N}\right)^\alpha,$$

$$\mathscr{E}_N^{(1)}(W^{(1)}KH^{m,Kt^\alpha},\overline{\Delta}_N;r_\infty)=\frac{K}{\alpha+1}\left(\frac{L}{N}\right)^\alpha,$$

$$\mathscr{E}_N^{(1)}(W^{(1)}KH^{m,Kt^\alpha},\overline{\Delta}_N;r_1)=\frac{Km}{\alpha+1}\left(\frac{L}{N}\right)^\alpha.$$

§ 1.4. Приближение пространственных кривых ломаными в пространстве L_p $(1 \le p < \infty)$

В этом параграфе изучается вопрос отыскания точных значений оценки погрешности приближения кривых, лежащих в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, вписанными в них ломаными в метрике L_p $(1 \le p \le \infty)$. Отметим, что в известных нам работах по приближении кривых указанный вопрос в пространстве L_p $(1 \le p < \infty)$ не рассматривался.

В предыдущих параграфах рассмотрен вопрос о точной верхней грани оценки погрешности приближения кривых $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$, заданных параметрическими уравнениями

$$x_i = \varphi_i(t), \quad 0 \le t \le L, \ i = \overline{1, m},$$

вписанными в них ломаными на некоторых классах кривых, координатные функций которых задаются модулями непрерывности, в норме (0.0.9) − −(0.0.11). Здесь мы изучаем аналогичную экстремальную задачу в норме пространства $L_p[0, L]$ $(1 \le p < \infty)$.

Предположим, что кривые $\Gamma, G \in H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ определены параметрическими уравнениями (1.2.3) и (1.2.4)

$$\Gamma: \ x_i = \varphi_i(t), \quad i = \overline{1, m}, \ 0 \le t \le L,$$

$$G: \ y_i = \psi_i(t), \quad i = \overline{1, m}, \ 0 \le t \le L,$$

причём всюду далее будем считать, что $\varphi_i, \psi_i \in L_p[0, L] \cap C[0, L], \ 1 \le p \le \infty$, $i = \overline{1, m}$. Определим расстояние между кривыми Γ и G равенством

$$R(\Gamma, G)_p :=$$

$$:= \begin{cases} \left\{ \sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_0^L \left|\varphi_i(t) - \psi_i(t)\right|^p dt \right\}^{1/p}, & \text{если} \quad 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1 \le i \le m} \operatorname*{supvrai}\limits_{0 \le t \le L} \left|\varphi_i(t) - \psi_i(t)\right|, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Убедимся, что формула (1.4.1) обладает необходимыми свойствами расстояния. Пусть сначала $1 \le p < \infty$. Имеем:

а) $R(\Gamma, G)_p \ge 0$, причём $R(\Gamma, G)_p = 0$, тогда и только тогда, когда $\Gamma \equiv G$, или, что то же, $\varphi_i \equiv \psi_i$ $(i = \overline{1, m})$;

б) $R(\Gamma, G)_p = R(G, \Gamma)_p$;

в) если нам даны следующие кривые с параметрическими уравнениями

$$\Gamma : \ x_i = \varphi_i(t), \quad i = \overline{1, m}, \ 0 \le t \le L,$$

$$G : \ y_i = \psi_i(t), \quad i = \overline{1, m}, \ 0 \le t \le L,$$

$$\mathcal{T} : \ z_i = \chi_i(t), \quad i = \overline{1, m}, \ 0 \le t \le L,$$

у которых координатные функции

$$\varphi_i, \psi_i, \chi_i \in L_p[0, L] \cap C[0, L], \quad 1 \le p < \infty, \quad i = \overline{1, m},$$

то

$$R(\Gamma, \mathcal{T})_p \le R(\Gamma, G)_p + R(G, \mathcal{T})_p. \tag{1.4.2}$$

В самом деле, свойства а) и б) сразу вытекают из формулы (1.4.1), а неравенство треугольника (1.4.2) следует из нижеприведённой леммы 1.4.1, согласно которой для $1 \le p < \infty$ сразу запишем

$$R(\Gamma, \mathcal{T})_p := \left(\sum_{i=1}^{m} \int_0^L \left| \varphi_i(t) - \chi_i(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{m} \int_0^L \left| \varphi_i(t) - \psi_i(t) \right|^p dt \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} \int_0^L \left| \psi_i(t) - \chi_i(t) \right|^p dt \right)^{1/p} :=$$

$$= R(\Gamma, G)_p + R(G, \Gamma)_p.$$

Если же $p = \infty$, то в этом случае имеем:

$$R\big(\Gamma, G\big)_\infty = \max_{1\le i\le m} \operatorname*{supvrai}_{0\le t\le L} \big|\varphi_i(t) - \chi_i(t)\big| \le$$

$$\le \max_{1\le i\le m} \operatorname*{supvrai}_{0\le t\le L} \big|\varphi_i(t) - \psi_i(t)\big| + \max_{1\le i\le m} \operatorname*{supvrai}_{0\le t\le L} \big|\varphi_i(t) - \chi_i(t)\big| =$$

$$= R\big(\Gamma, G\big)_\infty + R\big(G, \Gamma\big)_\infty. \tag{1.4.3}$$

Пусть, по прежнему,

$$\Delta_N: \ 0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N \le L \ \ (N \ge 2,\ N \in \mathbb{N})$$

— произвольное разбиение отрезка $[0, L]$. Напомним, что во втором параграфе мы равномерное разбиение отрезка $[0, L]$ обозначили через

$$\overline{\Delta}_N := \Big\{\bar{t}_k: \ \bar{t}_k = kL/N\Big\}_{k=0}^{N},$$

а через Δ_N^0 — разбиение отрезка $[0, L]$ точками $t_k^0 := (2k-1)L/(2N),\ k = \overline{1, N}$.

Требуется найти величину

$$\mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\big)_{L_p} := \inf_{\Delta_N} \mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}, \Delta_N\big)_{L_p},$$

где

$$\mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}, \Delta_N\big)_{L_p} :=$$

$$:= \sup\Big\{R(\Gamma, G)_p: \ \Gamma, G \in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\ \Gamma\big|_{\Delta_N} = G\big|_{\Delta_N}\Big\}.$$

Последнее соотношение означает, что верхняя грань берётся только по тем кривым Γ и G из класса $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$, которые совпадают на сетке узлов Δ_N.

Имеет место следующая вспомогательная

Лемма 1.4.1. *Пусть* $\varphi_i, \psi_i \in L_p[0, L]$ $(i = \overline{1, m},\ 1 \le p < \infty)$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \int_0^L \big|\varphi_i(t) + \psi_i(t)\big|^p dt\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{m} \int_0^L \big|\varphi_i(t)\big|^p dt\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} \int_0^L \big|\psi_i(t)\big|^p dt\right)^{1/p}. \tag{1.4.4}$$

Доказательство. Вполне вероятно, что неравенство (1.4.4) известно, однако мы в существующей литературе его не обнаружили, а потому приводим здесь прямое доказательство. Так как $\varphi_i, \psi_i \in L_p[0, L]$, то в силу неравенство Минковского для интегралов запишем

$$\|\varphi_i + \psi_i\|^p_{L_p[0,L]} = \int\limits_0^L |\varphi_i(t) + \psi_i(t)|^p dt \le$$

$$\le \left[\left(\int\limits_0^L |\varphi_i(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int\limits_0^L |\psi_i(t)|^p dt \right)^{1/p} \right]^p =$$

$$= \left(\|\varphi_i\|_{L_p[0,L]} + \|\psi_i\|_{L_p[0,L]} \right)^p.$$

Пользуясь этим неравенством и неравенством Минковского для конечных сумм, будем иметь

$$\left(\sum_{i=1}^m \int\limits_0^L |\varphi_i(t) + \psi_i(t)|^p dt \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^m \|\varphi_i + \psi_i\|^p_{L_p[0,L]} \right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^m \left(\|\varphi_i\|_{L_p[0,L]} + \|\psi_i\|_{L_p[0,L]} \right)^p \right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^m \|\varphi_i\|^p_{L_p[0,L]} \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^m \|\psi_i\|^p_{L_p[0,L]} \right)^{1/p} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^m \int\limits_0^L |\varphi_i(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^m \int\limits_0^L |\psi_i(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

чем и завершаем доказательство леммы 1.4.1.

Сформулируем и докажем основной результат данного параграфа.

Теорема 1.4.1. *Каким бы ни были модули непрерывности* $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1, m};\ 0 \le t \le L)$, *при всех* $1 \le p \le \infty$ *имеют место равенства*

$$\mathscr{E}_N\left(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)_p := \inf_{\Delta_N} \mathscr{E}_N\left(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}, \Delta_N\right)_p =$$

$$= \mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\dots,\omega_m}, \Delta_N^0\big)_p = 2\begin{cases} \left(2N\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t)dt\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1\le i\le m} \omega_i\left(\dfrac{L}{2N}\right), & p = \infty. \end{cases} \tag{1.4.5}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала $1 \le p < \infty$. Пользуясь формулой расстояния (1.4.1) между кривыми $\Gamma, G \in H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$, имеем

$$R(\Gamma, G)_p = \left(\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^L \big|\varphi_i(t) - \psi_i(t)\big|^p dt\right)^{1/p}.$$

Возведя обе части полученного равенство в степень p $(1 \le p < \infty)$, запишем

$$\Big[R(\Gamma, G)_p\Big]^p = \sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^L \big|\varphi_i(t) - \psi_i(t)\big|^p dt. \tag{1.4.6}$$

Докажем, что

$$\Big[R(\Gamma, G)_p\Big]^p \le 2^p \sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^L \Big[\min_{1\le k\le N} \omega_i^p\big(|t-t_k|\big)\Big] dt. \tag{1.4.7}$$

Разложим интеграл в формуле (1.4.6) по отдельным отрезкам:

$$\Big[R(\Gamma, G)_p\Big]^p = \sum_{i=1}^{m}\Bigg\{\int\limits_0^{t_1} \big|\varphi_i(t) - \psi_i(t)\big|^p dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N-1}\int\limits_{t_j}^{t_{i+1}} \big|\varphi_i(t) - \psi_i(t)\big|^p dt + \int\limits_{t_N}^{L} \big|\varphi_i(t) - \psi_i(t)\big|^p dt\Bigg\}.$$

Оценим сверху одно слагаемое

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \big|\varphi_i(t) - \psi_i(t)\big|^p dt. \tag{1.4.8}$$

Положим $\varphi_i(t)-\psi_i(t)=h_i(t)$ $(i=\overline{1,m},\ 0\le t\le L)$. Тогда ясно, что

$$h_i\in L_p[0,L]\cap C[0,L],\quad 1\le p<\infty,\ h_i\in H^{2\omega_i}[0,L].$$

Кроме того, $h_i(t_j)=0$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{0,N+1})$. Пусть $t\in[t_k,t_{k+1}]$. Поскольку $h_i(t_k)=h_i(t_{k+1})=0$, то получаем

$$\big|h_i(t)\big|\le 2\omega_i\big(|t-t_k|\big),\quad \big|h_i(t)\big|\le 2\omega_i\big(|t-t_{k+1}|\big),$$

а потому в силу монотонности ω_i имеем

$$\big|h_i(t)\big|\le \min_{l=k,k+1}2\omega_i\big(|t-t_l|\big)=2\omega_i\big(\min_{l=k,k+1}|t-t_l|\big),\quad i=\overline{1,m}.$$

Так как все остальные точки t_l лежат дальше от t, чем t_k и t_{k+1}, то можно брать минимум и по этим точкам тоже. В итоге получаем

$$\big|h_i(t)\big|\le 2\omega_i\big(\min_{1\le l\le N}|t-t_l|\big).$$

Но тогда из (1.4.8) следует, что

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\big|\varphi_i(t)-\psi_i(t)\big|^p dt=\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\big|h_i(t)\big|^p dt\le$$

$$\le\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\Big[2\omega_i\big(\min_{1\le l\le N}|t-t_l|\big)\Big]^p dt,\quad j=1,\overline{N-1}.$$

Аналогичные рассуждения приводят нас к таким же неравенствам для двух других слагаемых

$$\int\limits_{0}^{t_1}\big|\varphi_i(t)-\psi_i(t)\big|^p dt\le\int\limits_{0}^{t_1}\Big[2\omega_i\big(\min_{1\le l\le N}|t-t_l|\big)\Big]^p dt,$$

$$\int\limits_{t_N}^{L}\big|\varphi_i(t)-\psi_i(t)\big|^p dt\le\int\limits_{t_N}^{L}\Big[2\omega_i\big(\min_{1\le l\le N}|t-t_l|\big)\Big]^p dt.$$

Используя все эти оценки, в итоге мы получим, что

$$\Big[R(\Gamma,G)_p\Big]^p\le 2^p\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^L\Big[\min_{1\le k\le N}\omega_i^p\big(|t-t_k|\big)\Big]dt,$$

и тем самым требуемое равенство (1.4.7) доказано.

Неравенство (1.4.7) точно на классе кривых $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$, в чём легко убедиться, если как и в параграфе 1.2 (формула (1.2.16)) рассмотреть кривые Γ_0 и G_0 из этого класса с координатными функциями соответственно

$$\varphi_i^0(t) = -\psi_i^0(t) = \omega_i\big(\min_{1\le k\le N}|t-t_k|\big), \quad i=\overline{1,m}.$$

Таким образом, мы нашли точную верхнюю грань уклонения для произвольной сетки Δ_N :

$$\mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\Delta_N\big)_p := \sup\Big\{R(\Gamma,G)_p:\ \Gamma,G\in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\ \Gamma\big|_{\Delta_N}=G\big|_{\Delta_N}\Big\} =$$

$$= R(\Gamma_0,G_0)_p = 2\left\{\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^L \omega_i^p\big(\min_{1\le k\le N}|t-t_k|\big)dt\right\}^{1/p}. \qquad (1.4.9)$$

Для минимизации правой части равенства (1.4.9) по узлам t_k $(k=\overline{1,N})$ далее нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1.4.2. [12, с.369]. *Пусть $\psi(t)$ — неубывающая и неотрицательная для $0\le t\le b-a$ функция. При фиксированном $N=1,2,3,\ldots$ вектору $T=\big\{t_1,t_2,\ldots,t_N\big\}$ $(a\le t_1<t_2<\ldots<t_N\le b)$ сопоставим функцию*

$$\Phi(T,t)=\psi\Big(\min_{1\le k\le N}\big|t-t_k\big|\Big).$$

Тогда

$$\int\limits_a^b \Phi(T,t)dt \ge \int\limits_a^b \Phi(T_0,t)dt, \qquad (1.4.10)$$

где вектор T_0 определяется координатами

$$t_k^0 = a+(2k-1)(b-a)/(2N), \quad k=\overline{1,N}.$$

Продолжим доказательство теоремы 1.4.1. Заметим, что при всех $k=\overline{1,N}$

$$\omega_i^p\big(\min_{1\le k\le N}|t-t_k^0|\big) = \omega_i^p\left(\Big|\,t-\frac{(2k-1)L}{2N}\,\Big|\right), \quad \frac{(k-1)L}{N}\le t\le \frac{kL}{N},$$

из соотношения (1.4.9) в силу (1.4.10) получаем

$$\mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\big)_p = \inf_{\Delta_N}\mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\Delta_N\big)_p = \mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\Delta_N^0\big)_p =$$

$$
= 2\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{(k-1)L/N}^{kL/N}\omega_i^p\left(\left|\,t-\frac{(2k-1)L}{2N}\,\right|\right)dt\right)^{1/p} =
$$

$$
= 2\Bigg\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{N}\Bigg[\int\limits_{(k-1)L/N}^{(2k-1)L/(2N)}\omega_i^p\left(\frac{(2k-1)L}{2N}-t\right)dt+
$$

$$
+\int\limits_{(2k-1)L/(2N)}^{kL/N}\omega_i^p\left(t-\frac{(2k-1)L}{2N}\right)dt\Bigg]\Bigg\}^{1/p} =
$$

$$
= 2\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{N}\left(2\int\limits_{0}^{L/(2N)}\omega_i^p(t)dt\right)\right\}^{1/p} = 2\left(2N\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{L/(2N)}\omega_i^p(t)dt\right)^{1/p},
$$

откуда и следует первое равенство справа в (1.4.5). Второе равенство получаем в пределе при $p\to\infty$, чем и завершаем доказательство теоремы 1.4.1.

Следствие 1.4.1. *В условиях теоремы* 1.4.1 *справедливы равенства*

$$
\mathscr{E}_N(H^{m,\omega})_p = \begin{cases} 2\left(2mN\int\limits_{0}^{L/(2N)}\omega^p(t)dt\right)^{1/p}, & 1\le p<\infty, \\ 2\omega\left(\dfrac{L}{2N}\right), & p=\infty. \end{cases}
$$

В частности, если $\omega(t)=Kt^{\alpha}$ $(K>0,\ 0<\alpha\le 1)$, *то*

$$
\mathscr{E}_N\big(H^{m,Kt^{\alpha}}\big)_p = 2\begin{cases} \dfrac{\sqrt[p]{m}\,KL^{\alpha+1/p}}{\sqrt[p]{\alpha p+1}\,(2N)^{\alpha}}, & 1\le p<\infty, \\ K\left(\dfrac{L}{2N}\right)^{\alpha}, & p=\infty. \end{cases}
$$

Теорема 1.4.2. *Пусть кривая* $\Gamma\in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$, *а* Γ_N *есть вписанная в кривую* Γ *ломаная с вершинами в точках* $P_k := P\big(\varphi_1(kh),\ldots,\varphi_m(kh)\big)$, $k=\overline{0,N}$, $h=L/N$, *соответствующих точкам равномерного разбиения* $\overline{\Delta}_N$

отрезка $[0, L]$. *В предположении, что* $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1, m},\ 0 \le t \le L)$ — *выпуклые вверх модули непрерывности, справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}, \overline{\Delta}_N\big)_{L_p} =$$

$$= \sup\Big\{R(\Gamma, \Gamma_N)_p :\ \Gamma \in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\ \Gamma\big|_{\overline{\Delta}_{N+1}} = \Gamma_N\big|_{\overline{\Delta}_{N+1}}\Big\} =$$

$$= \begin{cases} \left(2N \sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_{0}^{L/(2N)} \omega_i^p(t)dt\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1 \le i \le m} \omega_i\left(\dfrac{L}{2N}\right), & p = \infty. \end{cases} \tag{1.4.11}$$

Доказательство. Докажем первое соотношение справа в (1.4.11), так как второе из него получается в пределе при $p \to \infty$. Воспользуемся параметрическом уравнением звеньев $S(\varphi_i, t)$, $t \in [\bar{t}_k, \bar{t}_{k+1}]$, ломаной Γ_N, соединяющих точки P_k и P_{k+1} из (1.2.24):

$$S(\varphi_i, t) = \varphi_i(\bar{t}_k) + (t - \bar{t}_k)h^{-1}\big[\varphi_i(\bar{t}_{k+1}) - \varphi_i(\bar{t}_k)\big], \quad i = \overline{1, m},\ t \in [\bar{t}_k, \bar{t}_{k+1}].$$

В [33] доказано, что при любом $t \in [\bar{t}_k, \bar{t}_{k+1}]$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{\bar{t}_k}^{\bar{t}_{k+1}} \big|\varphi_i(t) - S(\varphi_i, t)\big|^p dt \le 2 \int\limits_{0}^{L/(2N)} \omega_i^p(t)dt, \quad 1 \le p < \infty,$$

воспользовавшись которым получаем

$$R(\Gamma, \Gamma_N)_p = \left(\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{0}^{L} \big|\varphi_i(t) - S(\varphi_i, t)\big|^p dt\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{\bar{t}_k}^{\bar{t}_{k+1}} \big|\varphi_i(t) - S(\varphi_i, t)\big|^p dt\right)^{1/p} \le \left(2N \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{0}^{L/(2N)} \omega_i^p(t)dt\right)^{1/p}.$$

Пользуясь последнем неравенством, запишем

$$\mathscr{E}_N\big(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\overline{\Delta}_N\big)_p=$$

$$=\sup\Big\{R(\Gamma,\Gamma_N)_p:\ \Gamma\in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\ \Gamma\big|_{\overline{\Delta}_N}=\Gamma_N\big|_{\overline{\Delta}_N}\Big\}\le$$

$$\le\left(2N\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{L/(2N)}\omega_i^p(t)dt\right)^{1/p}. \tag{1.4.12}$$

Докажем, что существует кривая $\Gamma^*\in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$, для которой неравенство (1.4.12) обращается в равенство. Пусть $\widetilde{\Gamma}^*$ — кривая, у которой координатные функции определены на отрезке $[0,L]$ равенствами

$$\varphi_i^*(t)=\begin{cases}\omega_i(t-\bar t_k), & \bar t_k\le t\le \bar t_k+L/(2N),\\ \omega_i(\bar t_k-t), & \bar t_k+L/(2N)\le t\le \bar t_k, \quad k=\overline{0,N+1}.\end{cases}$$

Очевидно, что $\varphi_i^*\in H^{\omega_i}[0,L]$, а значит кривая $\widetilde{\Gamma}^*\in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$. Поскольку $\varphi_i^*(\bar t_k)=0$, $k=\overline{0,N-1}$, $i=\overline{1,m}$, то $S(\varphi_i^*,t)\equiv 0$, $k=\overline{0,N-1}$, $i=\overline{1,m}$, а потому при всех $p\in[1,\infty)$ имеем

$$R(\widetilde{\Gamma}^*,\widetilde{\Gamma}^*_N)_p=\left(\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^L\big|\varphi_i^*(t)-S(\varphi_i^*,\bar t_k)\big|^p dt\right)^{1/p}=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^L\big|\varphi_i^*(t)\big|^p dt\right)^{1/p}=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\bar t_k}^{\bar t_{k+1}}\big|\varphi_i^*(t)\big|^p dt\right)^{1/p}=$$

$$=\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\int\limits_{\bar t_k}^{\bar t_{k+1}+L/(2N)}\omega_i^p\big(t-\bar t_k\big)dt+\int\limits_{\bar t_{k+1}+L/(2N)}^{\bar t_k}\omega_i^p\big(\bar t_k-t\big)dt\right)\right\}^{1/p}=$$

$$=\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{N-1}\left(2\int\limits_0^{L/(2N)}\omega_i^p\big(t\big)dt\right)\right\}^{1/p}=\left(2N\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^{L/(2N)}\omega_i^p(t)dt\right)^{1/p},$$

откуда и следует равенство (1.4.11). Теорема 1.4.2 доказана.

Отметим, что равенство (1.4.11) в определённом смысле является распространением известного результата В.Ф. Сторчая [33] об отклонении ломаных в метрике $L_p[0,1]$ $(1 \le p < \infty)$ на случай отклонения пространственных кривых от вписанных в них интерполяционных ломаных в метрике $L_p[0,L]$ $(1 \le p < \infty)$.

Следствие 1.4.2. *В условиях теоремы* 1.4.2 *имеют место равенства*

$$\mathscr{E}_N(H^{m,\omega}, \Gamma_N, \overline{\Delta}_N)_p = \begin{cases} \left(2mN \int\limits_0^{L/(2N)} \omega^p(t)dt\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \omega\left(\dfrac{L}{2N}\right), & p = \infty, \end{cases}$$

и, в частности, когда $\omega(t) = Kt^\alpha$ $(K > 0,\ 0 < \alpha \le 1)$, *то*

$$\mathscr{E}_N\big(H^{m,Kt^\alpha}, \Gamma_N, \overline{\Delta}_N; \rho\big)_p = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[p]{m}\, K L^{\alpha+1/p}}{\sqrt[p]{\alpha p + 1}\,(2N)^\alpha}, & 1 \le p < \infty, \\ K\left(\dfrac{L}{2N}\right)^\alpha, & p = \infty. \end{cases}$$

§ 1.5. Замечание о приближение кривых в $L_p[0, L]$

В предыдущем параграфе мы рассмотрели вопрос о приближение кривых $\Gamma, G \in H^{\omega_1,\dots,\omega_m}[0, L]$ при условии, что эти кривые удовлетворяют условиями $\Gamma\big|_{\Delta_N} = G\big|_{\Delta_N}$, то есть на сетке

$$\Delta_N: \ 0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N \le L \ \ (N \ge 2, \ N \in \mathbb{N})$$

их координатные функции $\varphi_i(t)$ и $\psi_i(t)$ обязательно удовлетворяют условиям $\varphi_i(t_k) = \psi_i(t_k)$ $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, N}$. При этом приближение кривых осуществляли в метрике

$$R_1(\Gamma, G)_p := \left\{ \sum_{i=1}^{m} \int_0^L \left|\varphi_i(t) - \psi_i(t)\right|^p dt \right\}^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty, \tag{1.5.1}$$

где $\varphi_i, \psi \in L_p[0, L] \cap C[0, L]$, $(i = \overline{1, m})$.

Очевидно, что расстояние между кривыми Γ, G в $L_p[0, L]$ $(1 \le p < \infty)$ также можно задавать одним из следующих равенств

$$R_2(\Gamma, G)_p := \sum_{i=1}^{m} \left(\int_0^L \left|\varphi_i(t) - \psi_i(t)\right|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty, \tag{1.5.2}$$

$$R_3(\Gamma, G)_p := \max_{1 \le i \le m} \left(\int_0^L \left|\varphi_i(t) - \psi_i(t)\right|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty. \tag{1.5.3}$$

Легко заметить, что все эти три нормы (1.5.1) – (1.5.3) эквивалентны. Это можно показать, пользуясь векторными обозначениями. С этой целью для $i = \overline{1, m}$ положим

$$a_i = \left\|\varphi_i - \psi_i\right\|_{L_p[0,L]} = \begin{cases} \left(\int_0^L \left|\varphi_i(t) - \psi_i(t)\right|^p dt \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max_{t \in [0,L]} \left|\varphi_i(t) - \psi_i(t)\right|, & p = \infty. \end{cases} \tag{1.5.4}$$

Определим вектор $\vec{a} := (a_1, a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$. Введём следующее расстояние между кривыми Γ и G :

$$R_{p,r}(\Gamma, G) = \left\|\vec{a}\right\|_r = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^r\right)^{1/r}, & \text{если} \quad 1 \le r < \infty, \\ \max\limits_{1\le i\le m} a_i, & \text{если} \quad r = \infty. \end{cases} \tag{1.5.5}$$

Из (1.5.5) получаем следующие соотношения

$$R_1(\Gamma, G)_p = R_{p,p}(\Gamma, G), \tag{1.5.6}$$

$$R_2(\Gamma, G)_p = R_{p,1}(\Gamma, G) \tag{1.5.7}$$

$$R_3(\Gamma, G)_p = R_{p,\infty}(\Gamma, G). \tag{1.5.8}$$

Так как при $1 \le s < r \le \infty$ между соответствующими нормами вектора $\vec{a}$ хорошо известно неравенство

$$\left\|\vec{a}\right\|_r \le \left\|\vec{a}\right\|_s \le m^{1/s-1/r}\left\|\vec{a}\right\|_r,$$

то между вышеприведёнными расстояниями (1.5.1) — (1.5.3) при фиксированном p выполняется неравенство

$$R_{p,r}(\Gamma, G) \le R_{p,s}(\Gamma, G) \le m^{1/s-1/r} R_{p,r}(\Gamma, G).$$

Из последнего неравенства, в частности, вытекает, что все расстояния (1.5.6) — (1.5.8) при фиксированном p между собой эквивалентны, а результаты приближения кривых в этих метриках могут отличаться только лишь постоянными.

ГЛАВА 2. Приложения аппроксимации кривых к приближенному вычислению криволинейных интегралов и об одной экстремальной задаче теории квадратур

Во второй главе рассматривается задача отыскания точной оценки погрешности приближённого вычисления криволинейных интегралов первого рода в первом и втором параграфе, а также задача отыскания наилучшей (оптимальной) квадратурной формулы типа Маркова для определённого интеграла Римана в третьем параграфе для классов функций, задаваемых модулями непрерывности.

В первом параграфе второй главы точные результаты об аппроксимации кривых на классах функций, полученные в предыдущей главе, применяются к задаче приближённого вычисления криволинейных интегралов первого рода. Найдена точная оценка погрешности аналога классической формулы прямоугольников на классах функций и классах кривых, задаваемых модулями непрерывности. Во втором параграфе второй главы для приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода построена усложнённая квадратурная формула Симпсона и для некоторых классов дифференцируемых функций, задаваемых модулями непрерывности, найдена точная оценка погрешности на всем исследуемым классе функций. В третьем параграфе доказано, что среди всевозможных квадратурных формул типа Маркова для приближённого вычисления определённого интеграла оптимальной на классе $H^{\omega}[a,b]$ является классическая формула трапеций, и найдена ёе точная оценка погрешности оптимальной квадратурной формулы на указанном классе функций $H^{\omega}[a,b]$. Полученный результат обобщён на более широкие классы функций $H_2^{\omega}[a,b]$ и $H_{2-\alpha}^{\omega}[a,b]$ $(0 \le \alpha \le 1)$, удовлетворяющие включению

$$H^{\omega}[a,b] \subset H_{2-\alpha}^{\omega}[a,b] \subset H_2^{\omega}[a,b], \quad (0 < \alpha \le 1).$$

§ 2.1. Применение результатов первой главы к задаче приближенного вычисления криволинейных интегралов

Пусть для приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода

$$\int_{\Gamma} f(M)dt = \int_{\Gamma} f(x_1, x_2, \ldots x_m)dt,$$

где Γ — некоторая спрямляемая кривая, функция $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ определена и непрерывна вдоль кривой Γ, применена квадратурная формула

$$\int_{\Gamma} f(M)dt = \sum_{k=1}^{N} p_k f(M_k) + R_N(f; \Gamma). \tag{2.1.1}$$

Здесь $M_k \in \Gamma$ — произвольные точки — узлы, p_k — произвольные числовые коэффициенты, $R_n(f, \Gamma) := R_N(f; \Gamma, p_k, M_k)$ — погрешность формулы (2.1.1) на функции $f(M)$. Следуя монографии [28], сумму $\sum\limits_{k=1}^{N} p_k f(M_k)$, использующую линейную комбинацию N значений подынтегральной функции, будем называть квадратурной суммой, а векторы $P = \{p_k\}_{k=1}^{N}$ и $M = \{M_k\}_{k=1}^{N}$ — соответственно коэффициентами и узлами квадратурной формулы (2.1.1). Предположим, что на кривой Γ установлено положительное направление и положение точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Gamma$ может быть определено длиной дуги $t = \smile{AM}$, отсчитываемой от начальной точки A. В этом случае, как известно, кривая Γ параметрически выразится уравнениями

$$x_i = \varphi_i(t),\ i = \overline{1, m},\ 0 \leq t \leq L, \tag{2.1.2}$$

а функция $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$, заданная в точках кривой Γ, сведётся к сложной функции $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))$ от переменной t . Разобьём отрезок $[0, L]$ на N частичных отрезков $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = \overline{1, N})$ точками

$$0 \leq t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N \leq L$$

и вычислим значения $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))$ в точках разбиения. Поскольку в этом случае $M_k = M(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \ldots, \varphi_m(t_k))$, то квадратурная формула (2.1.1) приобретает вид:

$$\int_0^L f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} p_k f(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \ldots, \varphi_m(t_k)) + R_N(f; \Gamma). \qquad (2.1.3)$$

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций $\{f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))\}$, интегрируемых на отрезке $[0, L]$, то для каждой функции этого класса остаток формулы (2.1.3) имеет вполне определённое числовое значение

$$R_N(f; \Gamma) = \int_0^L f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))dt - \sum_{k=1}^{N} p_k f(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \ldots, \varphi_m(t_k)).$$

При фиксированных векторах коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ и узлов $T = \{t_k\}_{k=1}^N$ наибольшей погрешность остатка квадратурной формулы (2.1.3) на классе функций $\mathfrak{M}$ является верхняя грань

$$R_N(\mathfrak{M}, \Gamma) = \sup \Big\{ |R_N(f; \Gamma)| : \ f \in \mathfrak{M} \Big\}. \qquad (2.1.4)$$

Очевидно, что верхняя грань (2.1.4) зависит от выбора кривой Γ, от вектора коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ и узлов $T = \{t_k\}_{k=1}^N$, то есть

$$R_N(\mathfrak{M}, \Gamma) = R_N(\mathfrak{M}; \Gamma; P, T).$$

Пусть $\mathfrak{N}_L$ — некоторый класс кривых $\{\Gamma\}$, длина каждой из которых равна L. Тогда, кроме величины (2.1.4) требуется найти

$$R_N(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_L) = \sup \big\{ R_N(\mathfrak{M}, \Gamma) : \Gamma \in \mathfrak{N}_L \big\} =$$

$$= \sup \Big\{ R_N(\mathfrak{M}, \Gamma; P, T) : \Gamma \in \mathfrak{N}_L \Big\}. \qquad (2.1.5)$$

В этом параграфе мы вычисляем величину (2.1.5) для некоторых конкретных квадратурных формул, пользуясь точными оценками приближения классов кривых интерполяционными ломаными, полученными нами во втором параграфе первой главы.

Пусть $\Delta_N : 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N \le L$ — произвольное разбиение $[0, L]$, а Γ_N — вписанная в кривую Γ ломаная с вершинами в точках $P_k := P(\varphi_1(t_k), \ldots, \varphi_m(t_k)), k = \overline{1, N}$. Параметрические уравнения звена ломаной Γ_N, стягивающей дугу $t = \smile{P_k P_{k+1}}$, имеют вид (1.2.24):

$$\widetilde{x_i} = S(\varphi_i; t),\ i = \overline{1, m};\ t_{k-1} \le t \le t_k,\ k = \overline{1, N}. \qquad (2.1.6)$$

В теоремах 1.2.2 и 1.2.3 для точной оценки величины погрешности, возникающей при приближении кривых, принадлежащих классам $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ и $W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$, получены неулучшаемые оценки.

Полученные в указанных теоремах результаты обеспечивают возможность точно оценить величину погрешности (2.1.5) для класса $\mathfrak{M}_\rho^{(p)}$ функций $f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))$, $(0 \le t \le L)$, заданных и определённых на множестве кривых из классов $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ и $W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ и таких, что для любых двух точек $P(\varphi_1(t'), \ldots, \varphi_m(t'))$, $Q(\varphi_1(t''), \ldots, \varphi_m(t'')) \in \Gamma, t', t'' \in [0, L]$ выполняется неравенство

$$|f(P) - f(Q)| \le \rho_p(P, Q),$$

где расстояние $\rho_p(P, Q)$ определено следующим равенством

$$\rho_p(P, Q) = \left\{ \sum_{i=0}^{m} |\varphi_i(t') - \varphi_i(t'')|^p \right\}^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Вычислим верхнюю грань погрешности (2.1.5) для квадратурной формулы прямоугольников, имеющей вид :

$$\int_0^L f\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\right) dt =$$

$$= \frac{L}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2n} L\right), \ldots, \varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N} L\right)\right) + R_N(f; \Gamma). \qquad (2.1.7)$$

Справедлива следующая

Теорема 2.1.1. *Для точной оценки погрешности формулы* (2.1.7) *с фиксированными векторами коэффициентов* $P^0 = \left\{p_k^0 : p_k^0 = L/N\right\}_{k=1}^N$ *и узлов* $T^0 := \left\{t_k^0 : t_k^0 = (2k-1)L/(2N)\right\}_{k=1}^N$ *на классах* $\mathfrak{M}_\rho^{(p)}$ *и кривых* $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *справедливы равенства*

$$R_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{(p)}, H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}; P^0, T^0\right) =$$

$$= 2N \begin{cases} \int\limits_0^{L/(2N)} \left\{\sum\limits_{i=1}^m \omega_i^p(t)\right\}^{1/p} dt, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1\le i\le m} \int\limits_0^{L/(2N)} \omega_i(t)dt, & p = \infty. \end{cases} \tag{2.1.8}$$

Доказательство. Ради простоты вычислений и изложений, далее введём обозначение $h = L/N$. Тогда формула (2.1.7) запишется в виде

$$\int\limits_0^L f\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\right) dt =$$

$$= h\sum_{k=1}^N f\left(\varphi_1\left(kh - \frac{h}{2}\right), \ldots, \varphi_m\left(kh - \frac{h}{2}\right)\right) + R_N(f;\Gamma). \tag{2.1.9}$$

Отсюда для погрешности квадратурной формулы (2.1.9) получаем

$$R_N(f) =$$

$$= \int\limits_0^L f\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\right) dt - h\sum_{k=1}^N f\left(\varphi_1\left(kh - \frac{h}{2}\right), \ldots, \varphi_m\left(kh - \frac{h}{2}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^N \Bigg\{ \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \left[f\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\right) - \right.$$

$$\left. - f\left(\varphi_1\left(kh - \frac{h}{2}\right), \ldots, \varphi_m\left(kh - \frac{h}{2}\right)\right) \right] \Bigg\} dt. \tag{2.1.10}$$

Оценивая правую часть равенства (2.1.10) для произвольной функции $f \in \mathfrak{M}_\rho^{(p)}$ и кривой $\Gamma \subset H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$, сразу получаем

$$\left|R_n(f;\Gamma;P^0,T^0)\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \sqrt[p]{\left|\varphi_1(t)-\varphi_1\left(kh-\frac{h}{2}\right)\right|^p+\ldots+\left|\varphi_m(t)-\varphi_m\left(kh-\frac{h}{2}\right)\right|^p}\,dt \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \sqrt[p]{\omega_1^p\Big(\Big|t-\Big(k-\frac{1}{2}\Big)h\Big|\Big)+\ldots+\omega_m^p\Big(\Big|t-\Big(k-\frac{1}{2}\Big)h\Big|\Big)}\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left\{ \int\limits_{(k-1)h}^{(k-(1/2))h} \left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i^p\Big(\Big(k-\frac{1}{2}\Big)h-t\Big)\right\}^{1/p} dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{(k-(1/2))h}^{kh} \left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i^p\Big(t-\Big(k-\frac{1}{2}\Big)h\Big)\right\}^{1/p} dt \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left\{ -\int\limits_{h/2}^{0} \left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i^p(t)\right\}^{1/p} dt + \int\limits_{0}^{h/2} \left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i^p(t)\right\}^{1/p} dt \right\} =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{0}^{h/2} \left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i^p(t)\right\}^{1/p} dt = 2N \int\limits_{0}^{L/(2N)} \left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i^p(t)\right\}^{1/p} dt,$$

откуда сразу следует, что

$$R_N(\mathfrak{M}_\rho^{(p)}; H^{\omega_1,\dots,\omega_m}; P^0, T^0) \le 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p(t) \right\}^{1/p} dt. \qquad (2.1.11)$$

Легко проверить, что для кривой $\Gamma_0 \subset H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$, определённой параметрическими уравнениями

$$\Gamma_0 : x_i = \varphi_i^0(t),$$

где

$$\varphi_i^0(t) = \begin{cases} \omega_i\left(kh - \dfrac{h}{2} - t\right), & (k-1)h \le t \le (k-1)h + h/2, \\ \omega_i\left(t - kh + \dfrac{h}{2}\right), & (k-1)h + h/2 \le t \le kh, i = \overline{1,m}; k = \overline{1,N}, \end{cases}$$

и функция

$$f_0\big(\varphi_1^0(t), \dots, \varphi_m^0(t)\big) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^m \omega_i^p\left(\left|kh - \frac{h}{2} - t\right|\right)},$$

$$i = \overline{1,m}; (k-1)h \le t \le kh,\ k = \overline{1,N}$$

принадлежащая классу $\mathfrak{M}_\rho^{(p)}$ выполняются соотношения

$$f_0\left(\varphi_1^0\left(kh - \frac{h}{2}\right), \dots, \varphi_m^0\left(kh - \frac{h}{2}\right)\right) \equiv 0, \quad k = \overline{1,N},$$

неравенство (2.1.11) обращается в равенство. В самом деле, простые вычисления показывают, что

$$R_N\left(f_0; \Gamma_0; P_0, T^0\right) = \int\limits_0^L f_0\left(\varphi_1^0(t), \dots, \varphi_m^0(t)\right) dt -$$

$$- h \sum_{k=1}^N f_0\left(\varphi_1^0\left(kh - \frac{h}{2}\right), \dots, \varphi_m^0\left(kh - \frac{h}{2}\right)\right) = \int\limits_0^L f_0\left(\varphi_1^0(t), \dots, \varphi_m^0(t)\right) dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{(k-1)h}^{kh} f_0\left(\varphi_1^0(t), \ldots, \varphi_m^0(t)\right) dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left\{ \int\limits_{(k-1)h}^{(k-1)h+\frac{h}{2}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p\Big(kh - \frac{h}{2} - t\Big) \right\}^{1/p} dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{(k-1)h+\frac{h}{2}}^{kh} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p\Big(t - kh + \frac{h}{2}\Big) \right\}^{1/p} dt \right\} =$$

$$= 2N \int\limits_{0}^{L/(2N)} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p(t) \right\}^{1/p} dt, \qquad (2.1.12)$$

а потому

$$R_N(\mathfrak{M}_\rho^{(p)}, H^{\omega_1, \ldots, \omega_m}; P_0, T^0) \geq R_N(f_0; \Gamma_0; P_0, T^0) =$$

$$= 2N \int\limits_{0}^{L/(2N)} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p(t) \right\}^{1/p} dt. \qquad (2.1.13)$$

Требуемое равенство (2.1.8) получаем из сопоставления оценки сверху (2.1.11) и оценки снизу (2.1.13). Случай $p = \infty$ из (2.1.13) получается предельным переходом, чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.1.

Из доказанной теоремы при $\omega_1(t) = \ldots = \omega_m(t) \equiv \omega(t)$ вытекает

Следствие 2.1.1. *В условиях теоремы* 2.1.1 *справедливы равенства*

$$R_N(\mathfrak{M}_\rho^{(p)}; H^{m,\omega}; P_0, T_0) = 2N \begin{cases} \sqrt[p]{m} \displaystyle\int\limits_0^{L/(2N)} \omega(t) dt, & 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\int\limits_0^{L/(2N)} \omega(t) dt, & p = \infty. \end{cases}$$

Пусть теперь требуется найти значение величины (2.1.5) для квадратурной формулы типа Маркова с равными коэффициентами

$$\int_0^L f\big(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)dt$$

$$=h\Bigg\{f\big(\varphi_1(0),\varphi_2(0),\ldots,\varphi_m(0)\big)+f\big(\varphi_1(L),\varphi_2(L),\ldots,\varphi_m(L)\big)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1} f\big(\varphi_1(kh),\varphi_2(kh),\ldots,\varphi_m(kh)\big)\Bigg\}+R_N(f;\Gamma), \qquad (2.1.14)$$

где $h=L/N$. Предположим, что квадратурная формула (2.1.14) точна на множестве интерполяционных сплайнов первой степени, т.е., если заменить координатные функции $\varphi_i(t)$ $(i=\overline{1,m})$ на соответствующих интерполяционных ломаных $S_1(\varphi_i,t)$ $(i=\overline{1,m})$, то получим равенство

$$\int_0^L f\big(S_1(\varphi_1,t),S_1(\varphi_2,t),\ldots,S_1(\varphi_m,t)\big)dt=$$

$$=h\Bigg\{f\big(\varphi_1(0),\varphi_2(0),\ldots,\varphi_m(0)\big)+f\big(\varphi_1(L),\varphi_2(L),\ldots,\varphi_m(L)\big)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1} f\big(\varphi_1(kh),\varphi_2(kh),\ldots,\varphi_m(kh)\big)\Bigg\}+R_N(f;\Gamma),$$

где $h=L/N$. В этом случае для оценки погрешности квадратурной формулы (2.1.14) на классах функций $\mathfrak{M}_\rho^{(p)}$ и кривых $W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ справедлива следующая

Теорема 2.1.2. *Пусть квадратурная формула* (2.1.14) *точна на множестве интерполяционных сплайнов первой степени. Тогда для оценки погрешности квадратурной формулы* (2.1.14) *с фиксированными векторами* *коэффициентов* $P^* := \{p_k^* : p_k^* = L/N\}_{k=0}^N$ *и узлов* $T^* := \{t_k^* : t_k^* = kL/N\}_{k=0}^N$ *на классах функций* $\mathfrak{M}_\rho^{(p)}$ *и кривых* $W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *справедлива оценка*

$$R_N(\mathfrak{M}_\rho^{(p)}; W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}; P^*, T^*) \le$$

$$\le \frac{L}{6}\begin{cases} \left\{\sum\limits_{i=1}^m \left(\int\limits_0^{L/N} \omega_i(t)dt\right)^p\right\}^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1\le i\le m} \int\limits_0^{L/N} \omega_i(t)dt, & p = \infty, \end{cases} \tag{2.1.15}$$

где $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m})$ *— произвольные выпуклые на* $[0, L]$ *модули непрерывности.*

Доказательство. В самом деле, погрешность квадратурной формулы (2.1.14) представим в виде

$$R_N(f, \Gamma; P^*, T^*) =$$

$$= \sum_{k=1}^N \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \Big[f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)) - f\big(S_1(\varphi_1, t), \ldots, S_1(\varphi_m, t)\big)\Big]dt. \tag{2.1.16}$$

Отсюда, оценивая по абсолютной величине равенство (2.1.16) получаем

$$\Big|R_N(f, \Gamma; P^*, T^*)\Big| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^N \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \left\{\sum_{i=1}^m \big|\varphi_i(t) - S_1(\varphi_i, t)\big|\right\} dt. \tag{2.1.17}$$

Если теперь предполагать, что функция $f \in \mathfrak{M}_\rho^{(p)}$, а $\Gamma \in W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$, то из неравенство (2.1.17) в силу работы [17] и теоремы 1.2.3 получаем

$$R_N\big(\mathfrak{M}_\rho^{(p)}, W^{(1)}H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}; P^*, T^*\big) \le$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \left\{ \big[(t_{k-1}-t)(t-t_{k-1})\big]^p h^{-2p} \sum_{i=1}^{m} \left(\int\limits_0^h \omega_i(\tau)d\tau \right)^p \right\}^{1/p} dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{(k-1)h}^{kh} (t_k-t)(t-t_k)h^{-2}dt \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left(\int\limits_0^h \omega_i(\tau)d\tau \right)^p \right\} =$$

$$= \frac{Nh}{6} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left(\int\limits_0^h \omega_i(t)dt \right)^p \right\}^{1/p} = \frac{L}{6} \begin{cases} \left\{ \sum\limits_{i=1}^{m} \left(\int\limits_0^{L/N} \omega_i(t)dt \right)^p \right\}^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max\limits_{1\leq i\leq m} \int\limits_0^{L/N} \omega_i(t)dt, & p = \infty, \end{cases}$$

откуда и следует неравенство (2.1.14). Теорема 2.1.2 доказана.

Следствие 2.1.2. *В условиях теоремы 2.1.2 справедлива оценка*

$$R_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{(p)}, W^{(1)}H^{m,\omega}; P^*, T^*\right) \leq \frac{L}{6} \begin{cases} \sqrt[p]{m} \int\limits_0^{L/N} \omega(t)dt, & 1 \leq p < \infty, \\ \int\limits_0^{L/N} \omega(t)dt, & p = \infty. \end{cases}$$

В частности, когда $\omega(t) = Kt^\alpha$ $(K > 0;\ 0 < \alpha \leq 1)$, *то*

$$R_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{(p)}, W^{(1)}H^{m,Kt^\alpha} P^*, T^*\right) \leq \frac{L}{6} \begin{cases} \dfrac{\sqrt[p]{m}K}{(\alpha+1)} \left(\dfrac{L}{N}\right)^{\alpha+1}, & 1 \leq p < \infty, \\ \dfrac{K}{(\alpha+1)} \left(\dfrac{L}{N}\right)^{\alpha+1}, & p = \infty. \end{cases}$$

§ 2.2. Об оценке погрешности усложненной квадратурной формулы Симпсона для приближенного вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых

В этом параграфе для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода построена усложнённая квадратурная формула Симпсона и для некоторых классов дифференцируемых функций, задаваемых модулями непрерывности, найдена оценка её погрешности. Ради простоты будем рассматривать двумерный случай, когда подынтегральная функция имеет вид $f(M) = f(x, y)$.

Рассмотрим задачу приближённого интегрирования криволинейного интеграла первого рода в форме линейной комбинации конечного числа значений подынтегральной функции

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds = \sum_{k=0}^{N} p_k f(M_k) + R_N(f, \Gamma), \tag{2.2.1}$$

где Γ — некоторая плоская простая кривая, $f(M) = f(x, y)$ — определённая на плоской кривой Γ функция, $M_k \in \Gamma$ — узлы, p_k — коэффициенты, $R_N(f, \Gamma)$ — погрешность квадратурной формулы на функции $f(M)$.

Через $\mathfrak{M}_Q(L)$ обозначим класс плоских спрямляемых кривых Γ, у которых длина равна L, кривизна кусочно-непрерывна и все они расположены в области $Q = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq L^2\}$. Известно [34], что параметрические уравнения кривой $\Gamma \in \mathfrak{M}_Q(L)$, отнесённой к длине дуги t как параметру, в прямоугольной системе координат Oxy имеют вид

$$x = x(t),\ y = y(t), \quad 0 \leq t \leq L. \tag{2.2.2}$$

Обозначим через $t_k \in [0, 1],\ k = \overline{0, N}$, значения длины дуги t кривой Γ, которые соответствуют точкам $M_k \in \Gamma$, и перепишем формулу (2.2.1) в виде

$$\int\limits_{0}^{L} f\left(x(t), y(t)\right) dt = \sum_{k=0}^{N} p_k f\left(x(t_k), y(t_k)\right) + R_N(f, \Gamma),$$

где $x = x(t),\ y = y(t)$ — параметрические уравнения кривой Γ, представленные в виде (2.2.2).

В этом параграфе будем рассматривать усложнённые квадратурные формулы [28, с.36], которые строятся следующим образом. Отрезок $[0, L]$ делят на N равных частей точками $t_k = kh,\ h = L/N,\ k = \overline{0, N}$ и на каждом отрезке $[t_{k-1}, t_k],\quad k = \overline{0, N}$, применяют заранее квадратурную формулу с узлами $t_{k-1} \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leq t_k$ и коэффициентами p_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$. В результате получим усложнённую квадратурную формулу

$$\int\limits_0^L f\left(x(t), y(t)\right) dt = \sum_{k=1}^{N} L\left(t_{k-1}, t_k : f\right) + R_N(f),$$

где

$$L\left(t_{k-1}, t_k : f\right) = \sum_{i=1}^{m} p_i f\left(x(t_i), y(t_i)\right).$$

В этом параграфе мы дадим оценку погрешности усложнённой квадратурной формулы Симпсона, имеющей вид:

$$\int\limits_0^L f\left(x(t), y(t)\right) dt =$$

$$= \frac{1}{6N}\Bigg\{ f\left(x(0), y(0)\right) + 4\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), y\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) +$$

$$+2\sum_{k=1}^{N-1} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right) + f\left(x(L), y(L)\right)\Bigg\} + R_N(f, \Gamma) \qquad (2.2.3)$$

для классов дифференцируемых на отрезке $[0, L]$ сложных функций $f\left(x(t), y(t)\right) \overset{def}{=} F(t)$ одного переменного, задаваемых модулями непрерывности. С этой целью вводим оператор набла „∇", полагая

$$\nabla f = \nabla f\left(x(t), y(t)\right) := \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = F^{'}(t),$$

$$\nabla^2 f = \nabla(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = F^{''}(t),$$

и для $k = 3, 4, \ldots$ положим

$$\nabla^k f = \nabla\left(\nabla^{k-1} f\right). \tag{2.2.4}$$

Через $W_Q^{(k)} H^\omega := W_Q^{(k)} H^\omega[0, L], k \in \mathbb{N}$, обозначим множество функций $f(M) = f(x, y)$, у которых почти всюду в области Q существуют частные производные

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j} \partial y^j},\ j = 0, 1, \cdots, k,$$

и для любых двух точек $t', t'' \in [0, L]$ функция (2.2.4) удовлетворяет условию

$$\left|\nabla^k f_{|t=t'} - \nabla^k f_{|t=t''}\right| \leq \omega(|t' - t''|), \tag{2.2.5}$$

где $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности, то есть непрерывная неубывающая полуаддитивная функция, в нуле равная нулю.

В принятых обозначениях имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.2.1. *Для погрешности квадратурной формулы Симпсона* (2.2.3) *на всём классе* $W_Q^{(2)} H^\omega[0, L]$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in W_Q^{(2)} H^\omega} |R_N(f, \Gamma)| = \frac{L^2}{648 N^3} \int\limits_0^1 \left\{1 - \cos\left[3\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} Lt - \frac{\pi}{6}\right)\right]\right\} \omega'\left(\frac{Lt}{2N}\right) dt.$$

Доказательство. Очевидно, что в обозначении сложной функции $F(t) {=} f\left(x(t), y(t)\right)$ производные $F^{(k)}(t) \overset{def}{=} \nabla^k f\left(x(t), y(t)\right)$, а условие (2.2.5) означает, что

$$\left|F^{(k)}(t') - F^{(k)}(t'')\right| \leq \omega(|t' - t''|),\ \ \forall\ t', t'' \in [0, L],$$

то есть функция $F(t) \in W^{(k)} H^\omega[0, L]$ (см., например, [28, с.19]). Записав для произвольной функции $f \in W_Q^{(2)} H^\omega$ как функции одного переменного $f\left(x(t), y(t)\right)$ формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши

$$f(x(t), y(t)) = f(x(0), y(0)) +$$

$$
+\nabla f(x(t),y(t))\big|_{t=0}\cdot t+\int\limits_0^L (t-\tau)_+\nabla^2 f\left(x(\tau),y(\tau)\right)d\tau,
$$

и принимая во внимание, что формула Симпсона точна для всех многочленов третьей степени, остаток квадратурной формулы (2.2.3) запишем в виде

$$
R_N(f,\Gamma)=\frac{1}{2}\int\limits_0^L \nabla^2 f\left(x(t),y(t)\right)g_2(t)dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^L F''(t)g_2(t)dt,
$$

где для $k=1,2,\cdots,N-1$ положено

$$
g_2(t)=\begin{cases}(t-kh)\left(t-kh-\dfrac{h}{3}\right), & kh\le t\le kh+h/2,\ h=L/N,\\[2ex] (t-(k+1)h)\left(t-(k+1)h+\dfrac{h}{3}\right), & (k+1)h-h/2\le t\le (k+1)h.\end{cases}
$$

Так как

$$
g_2\left(kh+t\right)=g_2(t),\ 0\le t\le h,\ k=1,2,\cdots,N-1,
$$

то для любого $f\in W_Q^{(2)}H^\omega$ имеем:

$$
|R_N(f,\Gamma)|\le N\sup_{f\in W_Q^{(2)}H^\omega}\left|\int\limits_0^{h/2}\nabla^2 f\left(x(t),y(t)\right)g_2(t)dt\right|=
$$

$$
=N\sup_{\varphi\in H^\omega}\left|\int\limits_0^{h/2}\varphi(t)g_2(t)dt\right|. \qquad (2.2.6)
$$

Следуя схеме рассуждения работы [1], положим

$$
g_3(t)=\int\limits_0^t g_2(t)dt=\frac{1}{3}t^2\left(t-\frac{h}{2}\right),\quad 0\le t\le\frac{h}{2}, \qquad (2.2.7)
$$

и заметим, что $g_3(t)$ строго убывает на $[0, h/3)$ и строго возрастает на $(h/3, h/2]$, причём $g_3(h/2) = 0$. Введём в рассмотрение функцию $\rho(t)$, которая определяется равенством:

$$g_3(t) = g_3((\rho(t)),\ (0 \le t \le h/3,\ h/3 \le \rho(t) \le h/2).$$

Используя лемму 5.1 из [11], будем иметь

$$\sup_{\varphi \in H^\omega} \left| \int\limits_0^{L/(2N)} g_2(t)\varphi(t)dt \right| \le \int\limits_0^{L/(3N)} |g_2(t)| \omega\left(\rho(t) - t\right) dt. \tag{2.2.8}$$

Из (2.2.6) и (2.2.8) следует, что для любой функции $f \in W_Q^{(2)} H^\omega$

$$|R_N(f, \Gamma)| \le N \int\limits_0^{L/(3N)} |g_2(t)| \omega\left(\rho(t) - t\right) dt,$$

где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности.

Если $\omega(t)$ выпуклый вверх модуль непрерывности, то в классе $H^\omega[0, L]$ существует возрастающая на $[0, h/2]$ функция $\varphi_0(t)$, которая реализует в (2.2.8) точную верхнюю грань. Она имеет вид:

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} -\int\limits_t^{h/2} \omega'\left(\rho(t) - t\right) dt, & 0 \le t \le h/3, \\ \int\limits_{h/2}^{t} \omega'\left(t - \rho^{-1}(t)\right) dt, & h/3 \le t \le h/2, \end{cases}$$

где $\rho^{-1}(x)$ – функция, обратная к $\rho(x)$.

С помощью равенств

$$\varphi_0\left(\frac{h}{2} + t\right) = \varphi_0\left(\frac{h}{2} - t\right),\ \ 0 \le t \le \frac{h}{2},$$

$$\varphi_0\left(kh+t\right)=\varphi_0(t),\quad 0\le t\le h,\ k=1,2,\cdots,N-1,$$

продолжим $\varphi_0(t)$ на весь отрезок $[0,L]$. Очевидно, что $\varphi_0\in H^{\omega}[0,L]$.

Пусть $f_0\left(x(t),y(t)\right)=F_0(t)$ — функция, у которой

$$F_0^{''}(t)=\nabla^2 f_0\left(x(t),y(t)\right)=\varphi_0(t),\ 0\le t\le L.$$

Тогда, используя схему рассуждений работы [1], нетрудно подсчитать, что

$$R_N(f_0,\Gamma)=N\int\limits_0^{h/2} f_0(t)g_2(t)dt=N\int\limits_0^{h/3} t\left(\frac{h}{3}-t\right)\omega\left(\rho(t)-t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{27N^2}\int\limits_0^{1} t(1-t)\omega\left(\rho\left(\frac{t}{3N}\right)-\frac{t}{3N}\right)dt.$$

Последний интеграл можно записать несколько в ином виде, не содержащем функцию $\rho(t)$. Если $\rho(t)$ удовлетворяет соотношению $g_3(t)=g_3(\rho(t))=z$, то, учитывая (2.2.7), нетрудно подсчитать, что (см. [1])

$$\rho(t)=\frac{1}{3n}\cos\frac{1}{3}\arccos(1+324n^3z)+\frac{1}{6n},$$

$$t=-\frac{1}{3n}\cos\frac{1}{3}\left[\pi+\arccos(1+324n^3z)\right]+\frac{1}{6n}.$$

Отсюда

$$\rho(t)-t=\frac{\sqrt{3}}{3n}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos(1+324n^3z)+\frac{\pi}{6}\right]$$

и, обозначив $x=\rho(t)-t$, будем иметь

$$z=z(x)=\frac{1}{324n^3}\left\{\cos\left[3\left(\arccos\sqrt{3}nx-\frac{\pi}{6}\right)\right]-1\right\}.$$

Если $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, то в силу леммы 5.2 из [11] имеем:

$$\sup_{f\in W_Q^{(k)}H^{\omega}}\left|\int\limits_0^{h/2}\nabla^2 f\left(x(t),y(t)\right)g_2(t)dt\right|=\int\limits_0^{h/2}\bar{\psi}(t)\omega'(t)dt,$$

где $\overline{\psi}(t)$ — убывающая перестановка функции $|g_3(t)|$. В нашем случае $\overline{\psi}(t) = |z(t)|$ $(0 \le t \le h/2)$ и для любой $f \in W_Q^{(2)} H^{\omega}$

$$|R_N(f,\Gamma)| \le N \left| \int\limits_0^{h/2} \nabla^2 f\,(x(t), y(t))\, g_2(t) dt \right| \le$$

$$\le N \int\limits_0^{h/2} |z(t)| \omega'(t) dt = \frac{L}{2} \int\limits_0^1 \left| z\left(\frac{tL}{2N}\right) \right| \omega'\left(\frac{Lt}{2N}\right) dt. \qquad (2.2.9)$$

Для введённой выше функции $f_0\,(x(t), y(t))$ здесь имеет место знак равенства. Если учесть (2.2.9), то получим окончательно для выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$:

$$\sup_{f \in W_Q^{(2)} H^{\omega}} |R_N(f,\Gamma)| = \frac{L^2}{648 N^3} \int\limits_0^1 \left\{ 1 - \cos\left[3\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} Lt - \frac{\pi}{6} \right) \right] \right\} \omega^{'}\left(\frac{Lt}{2N} \right) dt.$$

Оценку сверху для $R_N(f,\Gamma)$, удобную для практического использования, можно получить таким образом. В силу монотонности $z(x)$ из (2.2.9) имеем

$$\int\limits_0^{h/2} |z(t)|\, \omega'(t) dt \le |z(0)| \int\limits_0^{a} \omega'(t) dt, \qquad (2.2.10)$$

где a определяется из равенства:

$$a|z(0)| = \int\limits_0^{h/2} |z(t)| dt.$$

Легко подсчитать, что $a = \dfrac{9L}{32N}$, $|y(0)| = \max\limits_{0 \le t \le L/(2N)} |g_3(t)| = \dfrac{L^3}{162 N^3}$. Тогда для любой $f \in W_Q^{(2)} H^{\omega}$ из неравенства (2.2.10) следует, что

$$|R_N(f,\Gamma)| \le \frac{L^3}{162 N^2} \cdot \omega\left(\frac{9L}{32N} \right).$$

§ 2.3. Наилучшая квадратурная формула типа Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности

В теории приближённого вычисления определённых интегралов экстремальная задача отыскания наилучшей квадратурной формулы на заданном классе функций является наиболее важной. Постановка этой задачи принадлежит А.Н.Колмогорову, а первые результаты были получены С.М.Никольским [26, 27]. Решение экстремальной задачи отыскания наилучшей для заданного класса функций квадратурной формулы и получение точной оценки её остатка требует привлечения современных методов функционального анализа вариационного содержания. Наиболее важные результаты, полученные по экстремальным задачам теории квадратур до конца восьмидесятых годов прошлого века, подытожены Н.П.Корнейчуком в дополнении к монографии С.М.Никольского [28]. Из добавления видно, что хотя в этом направлении получен ряд существенных результатов, однако немало задач такого рода до сих пор не решено.

Напомним постановку общей экстремальной задачи для функции одной переменной ([26], см. также [28, с.144-145]). Рассматривается квадратурная формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) + R_n(f), \tag{2.3.1}$$

задаваемая векторами узлов $X = \Big\{x_k : \ a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b\Big\}$ и коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^{n}$, $R_n(f) = R_n(f; X; P)$ – погрешность формулы (2.3.1) на функции $f(x)$. При фиксированных натуральных $n \ge 1$ через $\mathcal{A}$ обозначим множество всех векторов (X, P), либо некоторое его подмножество, определяемое теми или иными ограничениями на узлы и коэффициенты (например, требованием точности формулы (2.3.1), положительность коэффициентов p_k и т.д.).

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс заданных на отрезке $[a, b]$ интегрируемых в смысле Римана функций $f(x)$, то положим

$$R_n(\mathfrak{M}, X, P) = \sup\Big\{|R_n(f, X, P)| : f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Требуется найти величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}) = \inf\{R_n(\mathfrak{M}, X, P) : (X, P) \in \mathcal{A}\} \tag{2.3.2}$$

и указать вектор (X^0, P^0) из множества $\mathcal{A}$, на котором достигается точная нижняя грань в (2.3.2), то есть что

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}) = R_n(\mathfrak{M}; X^0, P^0).$$

Квадратурная формула (2.3.1) с векторами узлов $X^0 = \left\{x_k^0\right\}$ и коэффициентов $P = \left\{p_k^0\right\}$ даёт наименьшую на всём классе $\mathfrak{M}$ погрешность среди формул, задаваемых множеством $\mathcal{A}$ векторов (X, P), и в этом смысле является наилучшей для класса $\mathfrak{M}$. В этом параграфе в качестве $\mathfrak{M}$ будем рассматривать класс $H^\omega[a, b]$ функций $f(x)$ таких, которые для любых двух точек $x', x'' \in [a, b]$ удовлетворяют условию

$$|f(x') - f(x'')| \leq \omega\bigl(|x' - x''|\bigr),$$

где $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности, то есть непрерывная неубывающая полуаддитивная функция, в нуле равная нулю. В частном случае, когда $\omega(\delta) = K\delta^\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1, K > 0)$, класс $H^\omega[a, b] := KH^\alpha[a, b]$ есть класс Гёльдера порядка α с константой K.

В хорошо известной работе Н.П. Корнейчука [10], в частности, доказано, что среди всех квадратурных формул вида (2.3.1) наилучшей для класса $H^\omega[a, b]$ квадратурной формулой является формула прямоугольников

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{2k-1}{2n}(b-a)\right) + R_n(f).$$

При этом для погрешности этой формулы имеет место равенства

$$\mathcal{E}_n(H^\omega[a, b]) = 2n \int\limits_0^{(b-a)/(2n)} \omega(x)dx. \tag{2.3.3}$$

Отметим, что для классов $W^{(r)}H^\omega := W^{(r)}H^\omega[0, 2\pi]$ $(r = 0, 1, 2, \ldots;$ $W^{(0)}H^\omega = H^\omega)$ 2π-периодических дифференцируемых функций $f(x)$, производные r-ых порядков которых удовлетворяют неравенству

$$|f^{(r)}(x') - f^{(r)}(x'')| \leq \omega\big(|x' - x''|\big), \quad x', x'' \in [0, 2\pi],$$

точная оценка погрешности квадратурной формулы прямоугольников непосредственным вычислением найдена В.Н.Малозёмовым [19, 20]. В последствии В.П.Моторный [23] решая экстремальной задачи (2.3.2) для класса $W^{(r)}H^\omega[0, 2\pi]$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $W^{(0)}H^\omega[0, 2\pi] = H^\omega[0, 2\pi]$) с привлечением глубоких фактов теории сплайнов доказал, что на указанном классе функций квадратурная формула прямоугольников является наилучшей. Аналогичный факт в непериодическом случае для класса $W^{(r)}L_p[a, b]$ $(1 \leq p \leq \infty)$ доказал А.А. Женсыкбаев [7, 8].

Здесь рассматривается задача об отыскании наилучшей для класса $H^\omega[a, b]$ квадратурной формулы типа Маркова [28, с.156]

$$\int\limits_a^b f(x)dx = p_0 f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k f(x_k) + p_n f(b) + R_n(f), \tag{2.3.4}$$

задаваемой векторами (X, P) узлов $X = \{x_k : \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ и коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=0}^n$. Таким образом, мы изучаем задачу отыскания наилучшей квадратурной формулы вида (2.3.4), когда заранее зафиксированы в качестве узлов концы промежутка: $x_0 = a$, $x_n = b$, а узлы $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и коэффициенты $p_0, p_1, \ldots, p_n$ следует выбрать оптимальным образом.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.3.1. *Среди квадратурных формул вида* (2.3.4) *наилучшей для класса* $H^\omega[a, b]$ *является формула трапеций*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left\{\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right\} + R_n(f). \tag{2.3.5}$$

При этом точная оценка погрешности квадратурной формулы (2.3.5) *на всём классе* $H^\omega[a,b]$ *равна*

$$\mathcal{E}_n\left(H^\omega[a,b]\right) = 2n \int\limits_0^{(b-a)/(2n)} \omega(t)dt.$$

В частности, для класса KH^α $(K>0,\ 0<\alpha\le 1)$

$$\mathcal{E}_n(KH^\alpha) = \frac{K(b-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{(2n)^\alpha}.$$

Доказательство. Оценку снизу величины $\mathcal{E}_n(H^\omega[a,b])$ получим известным методом Н.П.Корнейчука [10]. При каждом фиксированном векторе узлов $X=\{x_k:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b\}$ через $H^\omega_X[a,b]$ обозначим подмножество функций $f\in H^\omega[a,b]$, таких, что $f(x_k)=0,\ k=\overline{0,n}$. Если $f\in H^\omega_X[a,b]$, то в формуле (2.3.4) квадратурная сумма обращается в нуль, а потому погрешность $R_n(f)$ не зависит от вектора коэффициентов $P=\{p_k\}$:

$$\Big|R_n(f)\Big| := \Big|R_n(f,X)\Big| = \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|.$$

В силу включения $H^\omega_X[a,b]\subset H^\omega[a,b]$ для каждого вектора узлов $X\subset\mathcal{A}$ выполняется неравенство:

$$R_n\big(H^\omega[a,b],X\big) \ge \sup\Big\{\,|R_n(f)|:\ f\in H^\omega_X[a,b]\Big\} =$$

$$= R_n\left(H^\omega_X[a,b]\right) = \sup_{f\in H^\omega_X[a,b]}\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|,$$

откуда сразу получаем

$$\mathcal{E}_n\left(H^\omega[a,b]\right) = \inf\Big\{\,R_n(H^\omega[a,b];X,P):\ (X,P)\in\mathcal{A}\Big\} \ge$$

$$\ge \inf\Big\{\,R_n(H^\omega_X[a,b];X):\ X\subset\mathcal{A}\,\Big\} = \inf_X \sup_{f\in H^\omega_X[a,b]}\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|.$$

Теперь заметим, что если $f\in H^\omega_X[a,b]$, то для любой точки $x\in[a,b]$ и любого узла $x_k \in [a,b]$ будем иметь

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_k)| \le \omega\big(|x - x_k|\big),$$

а потому

$$|f(x)| \le \min_{x_k} \omega\big(|x - x_k|\big) := \Psi(x). \tag{2.3.6}$$

Исходя из неравенств $x_k < x_{k+1}$, $k = \overline{0, n-1}$, а также монотонного возрастания модуля непрерывности $\omega(\delta)$, функцию $\Psi(x) = \Psi_X(x)$ можно записать в виде

$$\Psi(x) = \Psi_X(x) = \omega(\min_k |x - x_k|),$$

причём в силу свойства полуаддитивности модуля непрерывности ω для любых двух точек $x', x'' \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$|\Psi(x') - \Psi(x'')| = |\omega\big(\min_k |x' - x_k|\big) - \omega\big(\min_k |x'' - x_k|\big)| \le$$
$$\le \omega\big(\big|\min_k |x' - x_k|\big) - \omega\big(\min_k |x'' - x_k|\big|\big)| \le \omega\big(|x' - x''|\big).$$

Поскольку, кроме того, $\Psi(x_k) = 0$, то $\Psi \in H_X^\omega[a,b]$. Это с учётом правой части неравенства (2.3.6) приводит к соотношению

$$R_n\Big(H_X^\omega[a,b] : X\Big) = \sup_{f \in H_X^\omega[a,b]} \left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| = \int\limits_a^b \Psi_X(x)dx = R_n(\Psi_X).$$

Полагая $X^0 = \left\{ x_k^0 : \ \ x_k^0 = a + k(b-a)/n; \ k = \overline{0, n} \right\}$, покажем, что для произвольного вектора узлов вида

$$X = \{x_k : \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

с фиксированными узлами $x_0 = a$ и $x_n = b$ выполняется неравенство

$$R_n(\Psi_X) = \int\limits_a^b \Psi_X(x)dx \ge \int\limits_a^b \Psi_{X^0}(x)dx = R_n(\Psi_{X^0}). \tag{2.3.7}$$

Будем следовать схеме рассуждений из монографии [12, с.369-370]. Введём обозначение

$$\Phi(s) = \int\limits_0^s \Psi_X(x)dx.$$

Если теперь положить

$$t_0 = x_0 = a, \quad t_k = (x_{k-1} + x_k)/2, \quad k = \overline{1, n}; \;\; t_{n+1} = x_n = b,$$

то в силу монотонности модуля непрерывности ω запишем

$$\Psi_X(x) = \omega(|x - x_k|), \quad t_k < x < t_{k+1}, \;\; k = \overline{0, n}.$$

Учитывая последнее соотношение, будем иметь

$$\int\limits_a^b \Psi_X(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \omega(|x - x_k|)dx = \int\limits_a^{t_1} \omega(x-a)dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} \left(\int\limits_{t_k}^{x_k} \omega(x_k - x)dx + \int\limits_{x_k}^{t_{k+1}} \omega(x - x_k)dx \right) + \int\limits_{t_n}^{b} \omega(b-x)dx =$$

$$= \int\limits_0^{(x_1-a)/2} \omega(x)dx + \int\limits_0^{(b-x_{n-1})/2} \omega(x)dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} \left(\int\limits_0^{(x_k-x_{k-1})/2} \omega(x)dx + \int\limits_0^{(x_{k+1}-x_k)/2} \omega(x)dx \right) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^{(x_k-x_{k-1})/2} \omega(x)dx := 2\sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^{\beta_k} \omega(x)dx \stackrel{def}{=} 2\sum_{k=1}^{n} \Phi(\beta_k), \tag{2.3.8}$$

причём $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = (b-a)/2$. Так как $\Phi(s)$ выпукла вниз, то в силу неравенства Йенсена [35, с.92] для выпуклых функций из правой части равенства (2.3.8), получаем

$$2\sum_{k=1}^{n} \Phi(\beta_k) \geq 2n\,\Phi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_k\right) =$$

$$= 2n\,\Phi\left(\frac{b-a}{2n}\right) = 2n \int\limits_0^{(b-a)/(2n)} \omega(x)dx. \qquad (2.3.9)$$

Таким образом, из равенства (2.3.8) и неравенства (2.3.9) следует, что

$$\int\limits_a^b \Psi_X(x)dx \geq 2n \int\limits_0^{(b-a)/(2n)} \omega(x)dx. \qquad (2.3.10)$$

Для установления неравенства (2.3.7) простыми вычислениями достаточно убедиться, что

$$\int\limits_a^b \Psi_{X^0}(x)dx = 2n \int\limits_0^{(b-a)/(2n)} \omega(x)dx. \qquad (2.3.11)$$

Учитывая неравенства (2.3.7), (2.3.10) и равенство (2.3.11), приходим к оценке снизу

$$\mathcal{E}_n(H^\omega[a,b]) \geq 2n \int\limits_0^{(b-a)/(2n)} \omega(x)dx. \qquad (2.3.12)$$

Для получения оценки сверху рассмотрим квадратурную формулу (2.3.4), заданную векторами узлов

$$X^0 = \left\{x_k^0 :\ x_k^0 = a + kh,\ k = \overline{0,n}\right\} \qquad (2.3.13)$$

и коэффициентов

$$P^0 = \left\{p_k^0 :\ p_k^0 = h,\ k = \overline{1,n-1};\ p_0 = p_n = h/2\right\}, \qquad (2.3.14)$$

где $h = (b-a)/n$, и полагая

$$t_0^0 = a,\ t_k^0 = a + (2k-1)h/2,\ k = \overline{1,n};\ t_{n+1}^0 = b,$$

для произвольной функции $f \in H^\omega[a,b]$ получаем

$$\left|R_n(f, X^0, P^0)\right| = \left|\int\limits_a^b f(x)dx - h\left\{\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k^0)\right\}\right| \leq$$

$$\le \int\limits_a^{t_1^0} |f(x)-f(a)|\,dx + \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{t_k^0}^{t_{k+1}^0} \left|f(x)-f(x_k^0)\right| dx + \int\limits_{t_n^0}^{b} |f(x)-f(b)|\,dx \le$$

$$\le \int\limits_a^{a+h/2} \omega(x-a)dx + \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{x_k^0-h/2}^{x_k^0+h/2} \omega(|x-x_k^0|)dx + \int\limits_{b-h/2}^{b} \omega(b-x)dx =$$

$$= 2\int\limits_0^{h/2} \omega(x)dx + 2(n-1)\int\limits_0^{h/2} \omega(x)dx = 2n \int\limits_0^{(b-a)/(2n)} \omega(x)dx,$$

откуда сразу следует, что

$$\mathcal{E}_n\left(H^\omega[a,b]\right) \le R_n\left(H^\omega[a,b];X^0,P^0\right) \le 2n \int\limits_0^{(b-a)/(2n)} \omega(x)dx. \qquad (2.3.15)$$

Сравнивая оценку снизу (2.3.12) и оценку сверху (2.3.15), приходим к равенству

$$\mathcal{E}_n\left(H^\omega[a,b]\right) = R_n\left(H^\omega[a,b];X^0,P^0\right) = 2n \int\limits_0^{(b-a)/(2n)} \omega(x)dx,$$

чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.1.

Приведём обобщение доказанной теореме 2.3.1 для более широких классов функций. Пусть $H_2^\omega[a,b]$ — класс функций $f(x)$, определённых на отрезке $[a,b]$ и для любых точек $x, x\pm t \in [a,b]$ удовлетворяющих условию

$$\left|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\right| \le 2\omega(|t|).$$

Так как

$$\left|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\right| = \left|[f(x+t)-f(x)]+[f(x-t)-f(x)]\right| \le$$

$$\le \left|f(x+t)-f(x)\right| + \left|f(x-t)-f(x)\right| \le 2\omega(|t|),$$

то $H^\omega[a,b] \subset H_2^\omega[a,b]$, то есть класс $H_2^\omega[a,b]$ шире, чем класс $H^\omega[a,b]$. Тем не менее справедлива следующая

Теорема 2.3.2. *Среди всех квадратурных формул вида* (2.3.4) *с произвольными векторами узлов и коэффициентов* (P, X) *наилучшей для класса* $H_2^\omega[a,b]$ *является формула трапеций* (2.3.5). *При этом для погрешности формулы* (2.3.5) *на классе функций* $H_2^\omega[a,b]$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_n\left(H_2^\omega[a,b]\right) = 2n \int\limits_0^{(b-a)/(2n)} \omega(x)dx. \tag{2.3.16}$$

Доказательство. В самом деле, для квадратурной формулы вида (2.3.4), заданной векторами узлов (2.3.13) и коэффициентов (2.3.14), оценка погрешности представима в виде

$$R_n(f; X^0, P^0) = \int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} p_k^0 f(x_k^0) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Big[f(a \pm x) - f(a)\Big]dx + \frac{1}{2}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Big[f(b \pm x) - f(b)\Big]dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Big[f(x_k^0 \pm x) - f(x_k^0)\Big]dx.$$

Из полученного равенства сразу получаем

$$\mathcal{E}_n\left(H_2^\omega[a,b]\right) \le R_n(H_2^\omega[a,b]; X^0, Y^0) \le$$

$$\le 2n\int\limits_0^{h/2}\omega(x)dx = 2n \int\limits_0^{(b-a)/(2n)} \omega(x)dx := \mathcal{E}_n\left(H^\omega[a,b]\right). \tag{2.3.17}$$

С другой стороны, учитывая включение $H_2^\omega[a,b] \supset H^\omega[a,b]$, приходим к неравенству

$$\mathcal{E}_n\left(H_2^\omega[a,b]\right) \ge \mathcal{E}_n\left(H^\omega[a,b]\right) = 2n \int\limits_0^{(b-a)/(2n)} \omega(x)dx. \tag{2.3.18}$$

Требуемое равенство (2.3.16) получим из сопоставления неравенств (2.3.17) и (2.3.18), откуда и следует утверждение теоремы 2.3.2.

Заметим, что между классами $H^{\omega}[a,b]$ и $H_2^{\omega}[a,b]$ можно определить промежуточный класс $H_{2-\alpha}^{\omega}[a,b],\ 0 \le \alpha \le 1$ функций $f(x)$, определённых на отрезке $[a,b]$ и для любых точек $x,\ x \pm t \in [a,b]$ удовлетворяющих условию

$$\left|(1+\alpha)f(x+t)+(1-\alpha)f(x-t)-2f(x)\right| \le 2\omega(|t|). \tag{2.3.19}$$

Теорема 2.3.3. *Среди всевозможных квадратурных формул типа Маркова* (2.3.4) *наилучшей формулой на классе функций* $H_{2-\alpha}^{\omega}[a,b]$ *при любых* α $(0 \le \alpha \le 1)$ *является формула трапеций* (2.3.5). *При этом точная оценка погрешности квадратурной формулы* (2.3.5) *на всём классе* $H_{2-\alpha}^{\omega}[a,b]$ *равна*

$$\mathcal{E}_n\big(H_{2-\alpha}^{\omega}\big) = 2n \int\limits_0^{(b-a)/(2n)} \omega(x)dx. \tag{2.3.20}$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (2.3.19) очевидно, что при $\alpha = 1$ класс $H_{2-\alpha}^{\omega}[a,b]$ совпадает с классом $H^{\omega}[a,b]$, а при $\alpha = 0$ с классом $H_2^{\omega}[a,b]$, причём при всех $0 \le \alpha \le 1$ в работе [16] доказано, что

$$H^{\omega}[a,b] \subset H_{2-\alpha}^{\omega}[a,b] \subset H_2^{\omega}[a,b]. \tag{2.3.21}$$

Из утверждений теорем 2.3.1 и 2.3.2, а также двойного включения (2.3.21) получаем неравенство

$$\mathcal{E}_n\left(H^{\omega}[a,b]\right) \le \mathcal{E}_n\left(H_{2-\alpha}^{\omega}[a,b]\right) \le \mathcal{E}_n\left(H_2^{\omega}\right),$$

откуда сразу вытекает, что квадратурная формула трапеций (2.3.5) для класса $H_{2-\alpha}^{\omega}[a,b],\ 0 \le \alpha \le 1$, также является наилучшей и для погрешности формулы на всём классе функций справедливо равенство (2.3.20). Теорема 2.3.3 полностью доказана.

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- найдены точные оценки погрешности приближения пространственных кривых вписанными в них интерполяционными ломаными (линейными сплайнами) на различных классах функций, задаваемых модулями непрерывности как в l_p-метрике, так и в L_p-норме при различных значениях параметра p $(1 \leq p \leq \infty)$;
- приводятся приложения полученных результатов к вопросу нахождения точной оценки погрешности классических квадратурных формул (прямоугольника, трапеций, Симпсона) для криволинейных интегралов;
- найдена наилучшая квадратурная формула типа Маркова для одномерных регулярных интегралов на классах функций, задаваемых модулями непрерывности.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационной работы можно применять в теории приближения поверхностей билинейными сплайнами и в теории приближённого вычисления поверхностных интегралов на классах функций малой гладкости.

Список литературы

А) Список использованных источников

[1] Бусарова Т.Н. Точные оценки приближенного интегрирования на некоторых классах дифференцируемых функций — В сб.: Вопросы теории приближений функций и её приложений // ИМ АН УССР. – Киев. – 1976. – С.40-45.

[2] Вакарчук С.Б. О приближении гладких кривых ломаными // Геометрическая теория функций и топология — Киев: ИМ АН УССР. – 1981. – С.15-19.

[3] Вакарчук С.Б. О приближении плоских параметрических заданных кривых ломаными // В кн.: Моногенные функции и отображения — Киев: ИМ АН УССР. – 1982. – С.107-113.

[4] Вакарчук С.Б. О приближении кривых, заданных в параметрическим виде, при помощи сплайн-кривых // Укр. матем. журнал. – 1983. – Т.35. – №3. – С.352-355.

[5] Вакарчук С.Б. Точные константы приближения плоских кривых полиномиальными кривыми и ломаными // Известия ВУЗов. Математика. – 1988. – №2. – С.14-19.

[6] Вершик А.М., Малоземов В.Н., Певный А.Б. Наилучшая кусочно-полиномиальная аппроксимация // Сибирский матем. журнал. – 1975. – Т.XVI. – №5. – С.925-938.

[7] Женсыкбаев А.А. О наилучшей квадратурной формуле на классе $W^r L_p$ // ДАН СССР. – 1976. – Т.227. – №2. – С.277-279.

[8] Женсыкбаев А.А. О наилучших квадратурных формулах для некоторых классов непериодических функций // ДАН СССР. – 1977. – Т.236. – №3. – С.531-534.

[9] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций — М.: Наука. – 1980. – 352 с.

[10] Корнейчук Н.П. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Матем. заметки. – 1968. – Т.3. – №5. – С.565-576.

[11] Корнейчук Н.П. Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1971. – Т.35. – №1. – С.93-124.

[12] Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения — М.: Наука. – 1987. – 424 с.

[13] Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения – М.: Наука. – 1984. – 320 с.

[14] Корнейчук Н.П. Об оптимальном кодировании вектор-функций // Укр. матем. журнал. – 1988. – Т.40. – №6. – С.737-743.

[15] Корнейчук Н.П. Приближение и оптимальное кодирование гладких плоских кривых // Укр. матем. журнал. – 1989. – Т.41. – №4. – С.492-499.

[16] Лебедь Г.К. О квадратурных формулах с наименьшей оценкой остатка на некоторых классах функций. II // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1970. – Т.34. – С.639-661.

[17] Малоземов В.Н. Об отклонении ломаных // Вестник ЛГУ. Серия матем. и мех. – 1966. – №7. – Вып.2. – С.150-153.

[18] Малоземов В.Н. К полигональной интерполяции // Матем. заметки. – 1967. – Т.1. – №5. – С.537-540.

[19] Малоземов В.Н. Оценка точности одной квадратурной формулы для периодических функций // Вестник ЛГУ. Математика, механика, астрономия. – 1967. – №1. – С.52-59.

[20] Малоземов В.Н. О точности квадратурной формулы прямоугольников // Матем. заметки. – 1967. – Т.2. – №4. – С.357-360.

[21] Мартынюк В.Т. О приближении ломаными кривых, заданных параметрическими уравнениями // Укр. матем. журнал. – 1976. – Т.28. – №1. – С.87-92.

[22] Мартынюк В.Т. Некоторые вопросы приближения линий и поверхностей // Теория приближения функций — М.: Наука. – 1987. – С.282-287.

[23] Моторный В.П. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1974. – Т.38. – №3. – С.583-614.

[24] Назаренко Н.А. О приближении плоских кривых параметрическими эрмитовыми сплайнами // Украинский матем. журнал. – 1979. – Т.31. – №3. – С.201-215.

[25] Назаренко Н.А. О локальном восстановлении кривых с помощью параметрических сплайнов // В кн.: Геометрическая теория функций и топология — Киев: ИМ АН УССР. – 1981. – С.55-62.

[26] Никольский С.М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // Успехи матем. наук. – 1950. – Т.5. – №2(36). – С.165-177.

[27] Никольский С.М. Квадратурные формулы // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1952. – №16. – С.181-196.

[28] Никольский С.М. Квадратурные формулы — М.: Наука. – 1988. – 256 с.

[29] Сендов Бл., Попов В.А. Точная асимптотика наилучшего приближения алгебраическими и тригонометрическими многочленами в метрике Хаусдорфа // Матем. сб. – 1972. – Т.89(131). – №1(9). – С.138-147.

[30] Сендов Бл. Хаусдорфовые приближения — София: Изд-во Болгарской АН. – 1979. – 372 с.

[31] Скороспелов В.А. Кубическая сплайн-интерполяция как средство приближения пространственных кривых // Вычисл. системы: Сборник научных трудов. — ИМ СО РАН Новосибирск. – 1978. – №75. – С.36–44.

[32] Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами — Киев: «Наукова думка». – 1981. – 340 с.

[33] Сторчай В.Ф. Об отклонении ломаных в метрике L_p // Матем. заметки. – 1969. – Т.5. – №1. – С.31-37.

[34] Фиников С.П. Курс дифференциальной геометрии — М.: Гостехиздат. – 1952. – 343 с.

[35] Hardy G.G., Littlewood J.E., Polya G. Inequality. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press. – 1952. – 346 p.

[36] Шабозов М.Ш., Мирпоччоев Ф.М. Оптимизация приближённого интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2010. – Т.53. – №6. – С.415-419.

[37] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности // Вестник СПбГУ. – 2015. – Серия 1. – Т.2. – №4. – С.563-575.

[38] Шабозов М.Ш. О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых // Матем. заметки. – 2014. – Т.96. – №4. – С.637-640.

Б) Список публикаций соискателя учёной степени

[39-А] Шабозова А.А. Об оценке погрешности усложненной квадратурной формулы прямоугольников для криволинейных интегралов первого рода [Текст] / А.А. Шабозова // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2012. – Т.55. – №12. – С.925-931.

[40-А] Шабозова А.А. Точные оценки приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых [Текст] / Г.А. Юсупов, А.А. Шабозова // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2013. – Т.56. – №7. – С.509-514.

[41-А] Шабозова А.А. О наилучших квадратурных формул Маркова для классов функций $H^{\omega}[a,b]$ [Текст] / А.А. Шабозова // *«Функциональные пространства и теория приближения функций»* – Материалы международной научной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского (Москва, 25-29 мая 2015 г.). – С.246-247.

[42-А] Шабозова А.А. К полигональной интерполяции кривых в пространстве $\mathbb{R}^m$ [Текст] / А.А. Шабозова // Известия ТулГУ. – 2015. – Вып.4. – С.107-112.

[43-А] Шабозова А.А. О наилучших квадратурных формул типа Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности [Текст] / А.А. Шабозова // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (г. Душанбе, 27-28 апреля 2015). – С.68-69.

[44-А] Шабозова А.А. Об оптимальной кубатурной формуле типа Маркова на классах функций, задаваемых модулями непрерывности [Текст] / А.А. Шабозова // Материалы международной научной конференции „Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел" (г. Душанбе, 29-30 октября 2015). – С.63-65.

[45-А] Шабозова А.А. Оптимальная кубатурная формула Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности [Текст] / А.А. Шабозова // Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016). – С.296-298.

[46-А] Шабозова А.А. Приближение пространственных кривых ломаными [Текст] / А.А. Шабозова // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2017. – №1(166). – С.19-23.

[47-А] Шабозова А.А. Приложение аппроксимации кривых к приближенному вычислению криволинейных интегралов первого рода [Текст] / А.А. Шабозова // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2017. – Т.60. – №3-4. – С.109-117.

[48-А] Шабозова А.А. Приближение пространственных кривых ломаными в L_p [Текст] / А.А. Шабозова // Труды Института матем. и мех. УрО РАН. – 2017. – Т.23. – №4. – С.311-318.

[49-А] Шабозова А.А. Приближение кривых ломаными в L_p [Текст] / А.А. Шабозова // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. – 2017. – Т.4(62). – Вып.4. – С.622-630.