

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ТАДЖИКИСТАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. А.ДЖУРАЕВА

УДК 517.518

На правах рукописи

Талбаков Фарходдjon Махмадшоевич

**ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ
РАВНОМЕРНЫХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И
НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИХ АППРОКСИМАЦИИ**

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Душанбе – 2020

Работа выполнена в Институте математики им. А.Джураева
НАН Таджикистана

Научный руководитель:

Хасанов Юсуфали,

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры информатики и
информационных технологий Российско-
Таджикского (Славянского) университета

Официальные оппоненты:

Юсупов Гулзорхон Амиршоевич,

доктор физико-математических наук,
ректор Хорогского государственного
университета им. М. Назаршоева

Сафаров Джумабой,

доктор физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений,
Бохтарского государственного университета
им. Н. Хусрава

Оппонирующая организация: Таджикский национальный университет

Защита состоится 09 апреля 2021 г. в 12 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета 6D.КOA-037 при Институте математики имени А. Джураева НАН Таджикистана по адресу: 734063, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики имени А. Джураева НАН Таджикистана, а также на сайте <http://www.mitas.tj>

Автореферат разослан «___» «_____» 2021 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета 6D. КOA-037,

кандидат физико-математических наук, доцент



Каримов О.Х.

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Теория почти-периодических функций возникла в 20-30-х годах XX века, благодаря исследованиям датского математика Г.Бора и в настоящее время существует достаточно много разнообразных результатов по различным вопросам этой теории.

Дальнейшее развитие теории почти-периодических функций было продолжено рижскими математиками П. Боль и Эсклангоном.

В теории почти-периодических функций важную роль играют исследования необходимых и достаточных условий абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье таких функций.

Однако, в отличие от периодических функций, проблемы, касающиеся установления признаков абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций исследованы слабо. Это связано с тем, что показатели Фурье таких функций могут лежать всюду плотно.

В исследованиях Ю. Муселиака¹, Б.М.Левитана², Н.П. Купцова³, Я.Г. Притулы⁴, Е.А. Бредихиной⁵, А.С. Джафарова и Г.А. Мамедова⁶, Ю.Х. Хасанов⁷ получены некоторые необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических в смысле Бора, Безиковича и Степанова функций.

¹Musielak J. O bezwzględnej zbieżności szeregow Fouriera pewnych funkcji prawie okresowych. // Bull. Acad. Polon. Sci. si., 1957, v.3, № 5, pp.9-17.

²Левитан Б.М. Почти-периодические функции. -М.: ГИТТЛ, 1953, 396 с.

³Купцов Н.П. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций // Математический сборник, 1956, т. 40(82), № 2, с. 157-178.

⁴Притула Я.Г. Про абсолютну збіжність рядів Фурье майже періодичних функцій // Вісник Львів. ун-ту, сер. мехмат, 1971, т. 137, № 5, с. 72-80.

⁵Бредихина Е.А. Некоторые оценки отклонений частных сумм рядов Фурье от почти-периодических функций - Матем. сборник, 1960, т. 50(92), №3, с. 369-382.

⁶Джафаров А.С и Мамедов Г. А. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций Безиковича // Известия АН Азерб. ССР, серия физ-тех и мат., 1983, №5 с. 8-13.

⁷Хасанов Ю.Х. Абсолютной сходимостью рядов Фурье почти-периодических функций // Мат. заметки. 2013. Т. 94. № 5. С. 745-756.

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней изучены и исследованы новые условия абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных почти-периодических функций и рассмотрены приближения таких функций некоторыми частными суммами и интегралами.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы института математики им. А. Джураева НАН Таджикистана 2016-2020 гг. по теме «Поведение тригонометрических сумм, их приложения в аддитивных проблемах теории чисел, избранные задачи теории приближения функций».

Цель и задачи исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в следующем:

- выявить необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных классов почти-периодических функций, когда: а) их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности; б) их спектр имеет единственную предельную точку в нуле;
- получить признаки абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций с малыми пропусками;
- исследовать вопросы о приближении равномерных почти-периодических функций частными суммами и интегралами Фурье;
- нахождение условий принадлежности класса целых функций к классу почти-периодических функций в равномерной метрике.

Объекты исследования. Объектами исследования являются теория равномерных почти-периодических функций, сходимость и суммируемость рядов Фурье таких функций, а также некоторые вопросы их приближения частными суммами и интегралами.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы теории функций и функционального анализа аппроксимативного характера, методы решения задач гармонического анализа для функций, теории рядов Фурье, теории суммирования рядов Фурье и теории приближения функций тригонометрическими полиномами.

Научная новизна исследований. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- найдены достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных почти-периодических функций, когда: а) их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности; б) их спектр имеет единственную предельную точку в нуле, при этом в качестве структурной характеристики функций, используется величина, построенная на базе преобразования Лапласа;
- аналогичные результаты получены для рядов Фурье равномерных почти-периодических функций с малыми пропусками;
- установлены условия отклонения функций $f(x) \in \mathbf{B}$ от сумм типа Марцинкевича, частных сумм и интеграла Фурье в равномерной метрике;
- доказаны условия принадлежности целых функций ограниченной степени к классу почти-периодических функций.

Положения, выносимые на защиту:

- выявление признаков абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций в равномерной метрике, имеющих предельную точку в бесконечности и в нуле;
- установление достаточных условий абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций, имеющих ограниченную вариацию;
- нахождение достаточных условий сходимости рядов Фурье с малыми пропусками в равномерной метрике;

- нахождение оценок отклонения равномерных почти-периодических функций от частных сумм и интегралов Фурье и их принадлежности к классу целых функций.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, которые выносятся на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все результаты диссертационной работы получены лично автором.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа носит как теоретический, так и практический характер. Результаты диссертационной работы могут быть применены в теории рядов Фурье и специальных разделах теории функций.

Степень достоверности результатов проведенных исследований. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений и вспомогательных предложений, приведенных в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах: международная научная конференция «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел», посвященная 75-летию профессора Т.С. Собирова, г. Душанбе, 29-30 октября 2015 г.; 18-я международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функции и их приложения», Саратов, 27 января – 3 февраля 2016 г.; вторая международная научно-практическая конференция «Актуальность проблемы физико-математического образования», г. Набережные Челны, 20-22 октября 2017 г.; международная конференция, посвященная 60-летию академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора З.Х. Рахмонова и члена-корреспондента НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора С.А. Исхокова, г. Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.; семинары отдела теории функций и функционального анализа (2015-2020

гг.) и общеинститутские семинары (2015-2020 гг.) в Институте математики им. А. Джураева НАН Таджикистана.

Публикации. Основные результаты автора по теме диссертации опубликованы в 12 работах, список которых приведен в конце автореферата. Работы [1-А, 2-А, 3-А, 4-А] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК РТ при Президенте Республики Таджикистан. В работе, написанной совместной с Ю. Хасановым, соавтору принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 63 наименований и занимает 84 страницы машинописного текста. Главы диссертации разбиты на отдельные параграфы. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм или формул в данном параграфе.

Основные содержание работы

Диссертационная работа состоит из введения и двух глав. Во введении даётся краткий исторический обзор результатов по затрагиваемым проблемам, обосновывается актуальность темы.

Первая глава состоит из четырёх параграфов и посвящена изучению абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных почти-периодических функций.

Первый параграф носит вспомогательный характер, приведены основные определения и понятия, которые используются для получения результатов работы.

Во втором параграфе первой главы исследуются достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных почти-

периодических функций, в случае, когда показатели Фурье имеют единственную предельную точку в нуле.

Определение 1.2.1. *Непрерывная на всей действительной оси функция $f(x)$ называется равномерной почти-периодической, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $l = l(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины l найдется хотя бы одно число τ , для которого*

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon \quad (-\infty < x < \infty).$$

Через \mathbf{B} обозначим пространство всех равномерных почти-периодических функций с нормой

$$\|f(x)\|_{\mathbf{B}} = \sup_x |f(x)|. \quad (1)$$

Пусть функция $f(x) \in \mathbf{B}$ и ее ряд Фурье имеет вид $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k x}$,

где $c_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) \exp(-i\lambda_k x) dx$ – коэффициенты Фурье, $\Lambda\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – показатели Фурье (спектр функции). Под спектром $\Lambda\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ для функции $f(x)$ понимается множество ее показателей Фурье.

При исследовании вопросов абсолютной сходимости рядов Фурье таких функций, в зависимости от поведения их спектров, используются следующие разнообразные их структурные характеристики:

1. Модуль непрерывности порядка k функции $f(x) \in \mathbf{B}$

$$\omega(fh; h)_{\mathbf{B}} = \sup_{|t| \leq h} \sup_{x \in \mathbf{R}} |\Delta_t^k f(x)|,$$

$$\Delta_t^k f(x) = \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \binom{k}{r} f(x + rt) \quad (h > 0, k \in \mathbf{N})$$

- разность k – го порядка функции $f(x)$ в точке x с шагом t ;

2. Вариация порядка k функции $f(x) \in \mathbf{B}$ на заданном конечном отрезке $[a, b]$

$$V_k[a, b] = \sup \sum_{r=0}^{n-1} |\Delta_{h_r}^k f(x_r)|, \quad (2)$$

где $k \in N$, $h_r = \frac{x_{r+1} - x_r}{k}$, верхняя грань берётся по всевозможным разбиениям

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Пусть ряд Фурье функции $f(x) \in \mathbf{B}$ имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x}, \quad (3)$$

где A_k - коэффициенты Фурье этого ряда и числа $\{\lambda_k\}$ – показатели Фурье, которые имеют единственную предельную точку в нуле, то есть

$$\lambda_k > 0 (k > 0), \lambda_{-k} = -\lambda_k, |\lambda_k| < |\lambda_{k-1}|, (k = 1, 2, \dots), \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = 0. \quad (4)$$

В работе исследуем некоторые достаточные условия сходимости ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k|^\beta |k|^\gamma (\gamma > 0, \beta > 0). \quad (5)$$

При $\theta > 0$ введем в рассмотрение величину

$$\Omega(f; \theta) = \theta \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| \int_0^\infty e^{-\theta t} f(x-t) dt \right|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Теорема 1.2.1. Если для функции $f(x) \in \mathbf{B}$, спектр которой удовлетворяет условий (4) и

$$\sum_{v=0}^{\infty} 2^{v(\gamma + \frac{q-\beta}{q})} \Omega(f; \lambda_{2^v}) < \infty,$$

где

$$1 < p \leq 2, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 0 < \beta < q, \quad \gamma > 0,$$

то ряд (5) сходится.

Для формулировки дальнейшего результата введем обозначения:

$$G_n = \{k: 2^{-(n+1)} \leq \lambda_k < 2^{-n}\};$$

$$G_{-n} = \{k: -2^{-(n+1)} \leq \lambda_k < -2^{-n}\};$$

$$M_n = \max_{k \in G_n} |k|; \quad \mu(a) = \sum_{\lambda_k \geq a} 1.$$

Теорема 1.2.2. Пусть $f(x) \in \mathbf{B}$ и ее спектр $\Lambda\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (4). Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n^\gamma \{\mu(2^{-n-1}) - \mu(2^{-n})\}^{1-\frac{\beta}{q}} \Omega^\beta \left(f; \frac{1}{2^n}\right) < \infty,$$

то ряд (5) сходится.

В третьем параграфе первой главы изучается вопрос об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций, имеющих предельную точку в бесконечности.

Определение 1.3.1. Функцию $f(x)$ называют B_p - почти-периодической, или почти-периодической в смысле Безиковича ($p \geq 1$), если

1. $f(x)$ измерима и $|f(x)|^p$ интегрируема в смысле Лебега на любом конечном отрезке;

$$2. D_{B_p} \{f(x)\} = \left\{ \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^p \right\}^{1/p} < \infty;$$

3. Существует последовательность тригонометрических сумм $\{P_n(x)\}$

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k x},$$

для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_{B_p} \{f(x) - P_n(x)\} = 0.$$

Теорема 1.3.1. Пусть $f(x) \in \mathbf{B}_2$ ограниченная функция. Предположим, что функция $\Phi(u)$ неубывающая такая, что $\Phi(u) > 0$ при $u > 0$ и $\frac{u^2}{\Phi(u)}$ также неубывающая функция. Если при $0 < \gamma < 1$ выполняется

$$\sum_{v=1}^{\infty} [\mu(2^v \pi) - \mu(2^{v-1} \pi) + 1]^{1-\frac{\gamma}{2}} \omega^\gamma(f; 2^{-v}) \omega_{\Phi}^{\frac{\gamma}{2}}(f; 2^{-v}) \Phi^{-\frac{\gamma}{2}}[\omega(f; 2^{-v})] < \infty,$$

где

$$\omega(f; h) = \operatorname{vraisup}_{\infty < x < \infty} |f(x + \delta) - f(x)| \quad (|\delta| \leq h),$$

$$\omega_{\Phi}(f; h) = \sup_{|\delta| \leq h} \bar{M}\{\Phi[|f(x + \delta) - f(x)|]\}, \bar{M}\{g(x)\} = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(x) dx,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^{\gamma} + |b_n|^{\gamma}) < \infty. \quad (6)$$

Теорема 1.3.3. Пусть $f(x) \in \mathbf{B}_2$ и задана неубывающая функция $\Phi(u)$ такая, что $\Phi(u) > 0$ и для $u > 0$, $\Phi(0) \geq 0$. Если при $0 < \gamma < 2$,

$$V_{\Phi}(f) = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sup_{\theta} \sum_{n=1}^N \Phi[|f(x_n) - f(x_{n-1})|] dx < \infty,$$

и выполнено условие

$$\sum_{v=1}^{\infty} [\mu(2^v \pi) - \mu(2^{v-1} \pi) + 1]^{1-\frac{\gamma}{2}} 2^{-\frac{\gamma v}{2}} \omega^{\gamma}(f; 2^{-v}) \Phi^{-\frac{\gamma}{2}}[\omega(f; 2^{-v})] < \infty,$$

тогда ряд (6) сходится.

В четвертом параграфе первой главы рассматриваются достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных почти-периодических функций с малыми пропусками.

Пусть $f(x)$ – интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$ периодическая функция, с рядом Фурье вида

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (7)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Определение 1.4.1. Говорят, что ряд (7) имеет пропуски, если для коэффициентов этого ряда выполняются следующие условия

$$a_n^2 + b_n^2 > 0, \quad (n = n_k, \quad k = 1, 2 \dots),$$

где n_1, n_2, \dots, n_k – натуральные числа, для которых

$$1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k.$$

Основным результатом данного параграфа является следующая

Теорема 1.4.1. Пусть $f(x) \in \mathbf{B}$ имеет ряд Фурье (3) с показателями, удовлетворяющими условиям (4). Если этот ряд допускает малые пропуски вида $n_{k+1} - n_k \geq \frac{4\pi}{\eta}$ и

$$\int_1^{\infty} \omega\left(f; \frac{1}{t}\right)_{\mathbf{B}} \chi^{\frac{1}{2}}(t) \frac{dt}{t} < \infty,$$

где $\omega\left(f; \frac{1}{t}\right)_{\mathbf{B}}$ - модуль непрерывности функции $f(x) \in \mathbf{B}$, а $\chi(t) = \sum_{\lambda_v \leq t} 1$,

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < \infty.$$

Вторая глава диссертационной работы посвящена исследованию приближения равномерных почти-периодических функций некоторыми суммами и интегралами, а также принадлежности этого класса функций к классу целых функций ограниченной степени.

В первом параграфе этой главы изучаются вопросы приближения равномерных почти-периодических функций суммами типа Марцинкевича.

Пусть $f(x) \in \mathbf{B}$ и ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp(i\lambda_k x), \quad A_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) \exp(-i\lambda_k x) dx,$$

где числа $\{\lambda_k\}$ – показатели Фурье, имеющие единственную предельную точку в бесконечности, то есть

$$\lambda_0 = 0, \lambda_{-n} = -\lambda_n, |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

Теорема 2.1.1. Пусть $f(x) \in \mathbf{B}$, показатели Фурье которой имеют единственную предельную точку в бесконечности. Тогда справедлива оценка

$$\left\| f(x) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f; x) \right\|_{\mathbf{B}} \leq \frac{M}{n+1} \sum_{k=0}^n E_k(f)_{\mathbf{B}},$$

где $S_k(f; x)$ – частная сумма ряда Фурье функции $f(x) \in \mathbf{B}$, а

$$E_k(f)_{\mathbf{B}} = \inf_{A(\lambda_n)} \left\| f(x) - \sum_{\lambda_n \leq k} e^{i\lambda_n x} \right\|_{\mathbf{B}}.$$

Во втором параграфе второй главы изучены вопросы приближения равномерных почти-периодических функций целыми функциями, а также принадлежности функций $f(x) \in \mathbf{B}$ к классу целых функций.

Через G_σ ($\sigma > 0$) обозначим класс ограниченных на всей действительной оси целых функций степени не выше σ .

Пусть $f(x)$ – равномерная почти-периодическая функция и имеет ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_k A_k e^{i\lambda_k \beta x},$$

где λ_k – рациональные числа, β – действительное число, то среди функций $g_\sigma(x) \in G_\sigma$ ($\sigma > 0$), для которых существует наилучшее равномерное приближение функции $f(x)$

$$A_\sigma(f) = \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x) - g_\sigma(x)|, \quad (8)$$

найдется тригонометрический полином степени $\leq \sigma$.

Теорема 2.2.1. Если $f(x) \in \mathbf{B}$ со спектром $\{\lambda_k\}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то среди функций $g_\sigma(x) \in G_\sigma$, для которых существует равномерное наилучшее приближение (8), найдется функция $Q_\sigma(f; x) \in \mathbf{B}$ с соответствующим рядом Фурье

$$\sum_{|\lambda_k| \leq \sigma} A_k e^{i\lambda_k x}.$$

Заключение

Основные результаты и выводы

Основными научными результатами диссертационной работы являются следующие:

1. найдены достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных почти-периодических функций, когда, а) их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности; б) их спектр имеет единственную предельную точку в нуле, при этом в качестве структурной характеристики функций, используется величина, построенная на базе преобразование Лапласа [3-А, 4-А, 8-А, 10-А, 11-А];
2. аналогичные результаты получены для рядов Фурье равномерных почти-периодических функций с малыми пропусками [5-А, 6-А, 9-А];
3. установлены условия отклонения функций $f(x) \in \mathbf{B}$ от сумм типа Марцинкевича, частных сумм и интегралов Фурье в равномерной метрике [1-А, 2-А, 3-А, 7-А];
4. доказаны условия принадлежности целых функций ограниченной степени к классу почти-периодических функций [7-А, 12-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов:

Результаты, полученные в диссертационной работе, носят теоретический и практический характеры, и они могут быть использованы в теории рядов Фурье различных классов почти-периодических функций и теории приближения. Материалы диссертации могут использоваться при чтении специальных курсов для студентов, магистрантов и докторантов в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

ПУБЛИКАЦИЯ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации:

- [1-А]. Талбаков Ф.М. Аналог теоремы С.Н. Бернштейна о наилучшем приближении почти-периодических функций [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // ДАН РТ. – 2016. – Т.59. – №1-2. – С.11-18.
- [2-А]. Талбаков Ф.М. О некоторых оценках частичных сумм ряда Фурье функций Бора [Текст] / Ф.М. Талбаков // Вестник ТНУ. – 2018. – №2. – С.28-34.
- [3-А]. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций Безиковича [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // ДАН РТ. – 2018. – Т.61. - №1-2. – С.813-821.
- [4-А]. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций в равномерной метрике [Текст] / Ф.М. Талбаков // ДАН РТ. – 2019. – Т.63. - №5-6. – С.288-292.

В других изданиях:

- [5-А]. Талбаков Ф.М. О некоторых условиях сходимости рядов Фурье с малыми пропусками [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы международной научной конференции «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел», посвященной 75-летию профессора Т.С. Собирова, (г. Душанбе, 29-30 октября 2015). – С.61-63.
- [6-А]. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций с малыми пропусками [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории

- функций и их приложения» (Саратов, 27 января – 3 февраля 2016 г.). – С.300-303.
- [7-А]. Талбаков Ф.М. Об одном аналоге теоремы Пели для почти-периодических функций [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы II Международной научно–практической конференции «Актуальные проблемы физико-математического образования», (Набережные Челны, 20-22 октября 2017 г.). – С. 58-60.
- [8-А]. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы 19-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения», посвященной 90-летию со дня рождения академика П. Л. Ульянова (Саратов, 29 января – 2 февраля 2018 г.). – С.330-332.
- [9-А]. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функции с малыми пропусками [Текст] / Ф.М. Талбаков Ф.М. // Материалы XII научно-практической конференции молодых ученых и студентов с международным участием, посвященной, ТГМУ имени Абуали ибни Сино, (Душанбе, 27 апреля 2018 г.). – С. 34-35.
- [10-А]. Талбаков Ф.М. О некоторых достаточных условиях сходимости рядов Фурье почти-периодических функций [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы молодежной школы-конференции (Лобачевские чтения, 23-28 ноября 2018 г.). С.307-309.
- [11-А]. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач» (3-9 мая 2019 г.). – С.289-290.

[12-А]. Талбаков Ф.М. Об аппроксимации почти-периодических функций Бора целыми функциями конечной степени [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы международной конференции, посвященной 60-летию академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора З.Х. Рахмонова и члена-корреспондента НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора С.А. Исхокова (Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.). – С.270-273.

АКАДЕМИЯИ МИЛЛИИ ИЛМҲОИ
ТОҶИКИСТОН
ИНСТИТУТИ МАТЕМАТИКАИ ба номи А.ҶҮРАЕВ

УДК 517.518

Бо ҳуқуқи дастхат

Талбаков Фарҳодҷон Маҳмадшоевич

**ДАР БОРАИ НАЗДИКШАВИИ МУТЛАҚИ ҚАТОРҲОИ ФУРЬЕИ
ФУНКСИЯҲОИ ҚАРИБ ДАВРИИ МУНТАЗАМ ВА БАЪЗЕ
МАСЪАЛАҲОИ НАЗДИКШАВИИ ОНҲО**

Автореферати

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси
01.01.01-таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функционалӣ

Душанбе – 2020

Қор дар Институти математикаи ба номи А. Қӯраеви
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон иҷро шудааст

Роҳбари илмӣ:

Ҳасанов Юсуфали,

доктори илмҳои физикаю математика,
профессори кафедраи информатика ва
технологияҳои иттилоотии Донишгоҳи
(Славянии) Россияву Тоҷикистон

Муқаризони расмӣ:

Юсупов Гулзорхон Амиршоевич,

доктори илмҳои физикаю математика,
ректори Донишгоҳи давлатии Хоруғ ба номи
М. Назаршоев

Сафаров Қумабой,

доктори илмҳои физикаю математика,
дотсенти кафедраи таҳлили математики ва
муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи
давлатии Бохтар ба номи Н. Хусрав

Муассисаи тақриздиханда: Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Ҳимоя 09 апрели соли 2021 соати 12:00 дар ҷаласаи Шӯрои
диссертатсионии 6D.КOA-037 дар назди Институти математикаи ба
номи А. Қӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон аз рӯи нишонаи
734063, ш. Душанбе, кӯчаи Айни, 299/4 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи Институти математикаи ба номи А.
Қӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон ва тавассути сомонаи
<http://www.mitas.tj> шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «____» «_____» соли 2021 аз рӯи феҳристи
пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шӯрои диссертатсионии

6D. КOA-037, номзоди илмҳои

физикаю математика, дотсент



Каримов О.Х.

Тавсифи умумии қор

Мухимияти мавзӯ. Назарияи функсияҳои қариб даврӣ дар солҳои 20-30 – юми асри ХХ, ба шарофати тадқиқотҳои математики Дания Г.Бор ба вучуд омадааст ва ҳоло натиҷаҳои гуногун оид ба масъалаҳои ин назария ба даст омадаанд.

Инкишофи минбаъдаи назарияи функсияҳои қариб даврӣро математикон П.Бол ва Эсклангон идома доданд.

Дар назарияи функсияҳои қариб даврӣ тадқиқи шартҳои зарурӣ ва кифоягии мутлақ наздикшавии қаторҳои Фурье ва суммиронии онҳо нақши муҳим мебозад.

Аммо, дар муқоиса бо функсияҳои даврӣ, масъалаҳои муқаррар намудани шартҳои мутлақ наздикшавии қаторҳои Фурьеи функсияҳои қариб даврӣ кам омӯхта шудаанд. Зеро нишондиҳандаҳои Фурьеи чунин функсияҳо дар ҳама порчаҳои муоинашаванда метавонанд зич ҷойгир бошанд.

Дар тадқиқотҳои Ю. Муселиак¹, Б.М.Левитан², Н.П. Купцов³, Я.Г. Притул⁴, Е.А. Бредихина⁵, А.С. Чаъфаров ва Г.А. Мамедов⁶, Ю.Х. Хасанов⁷ баъзе шартҳои зарурӣ ва кифоягии мутлақ наздикшавии қаторҳои Фурьеи функсияҳои қариб даврии Бор, Безикович ва Степанов ба даст оварда шудаанд.

¹Musielak J. O bezwzględnej zbieżności szeregów Fouriera pewnych funkcji prawie okresowych. // Bull. Acad. Polon. Sci. si., 1957, v.3, № 5, pp.9-17.

²Левитан Б.М. Почти-периодические функции. -М.: ГИТТЛ, 1953, 396 с.

³Купцов Н.П. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций // Математический сборник, 1956, т. 40(82), № 2, с. 157-178.

⁴Притула Я.Г. Про абсолютну збіжність рядів Фурье майже періодичних функцій // Вісник Львів. ун-ту, сер. мехмат, 1971, т. 137, № 5, с. 72-80.

⁵Бредихина Е.А. Некоторые оценки отклонений частных сумм рядов Фурье от почти-периодических функций - Матем. сборник, 1960, т. 50(92), №3, с. 369-382.

⁶Джафаров А.С и Мамедов Г. А. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций Безиковича // Известия АН Азерб. ССР, серия физ-тех и мат., 1983, №5 с. 8-13.

⁷Хасанов Ю.Х. Абсолютной сходимостью рядов Фурье почти-периодических функций // Мат. заметки. 2013. Т. 94. № 5. С. 745-756.

Аҳамият ва мувофиқи мақсад будани кори диссертационӣ бо он муайян карда мешавад, ки дар он шартҳои нави мутлақ наздикшавии қаторҳои Фурйеи функцияҳои қариб даврии мунтазамро омӯхта, тадқиқ мекунад ва наздикшавии чунин функцияҳоро барои баъзе суммаҳо ва интегралҳои Фурйе баррасӣ мекунад.

Алоқаи кор бо барномаҳои илмӣ (лоихаҳо), мавзӯҳо. Рисолаи диссертационии пешниҳодшуда дар доираи татбиқи нақшаи дарозмуддати корҳои илмию тадқиқотии Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон барои солҳои 2016-2020 аз рӯи мавзӯи «Рафтори суммаҳои тригонометрӣ, татбиқи онҳо дар масъалаҳои иловагии назарияи ададҳо, масъалаҳои мунтахаби назарияи наздикшавии функцияҳо» таҳия шудааст.

Мақсад ва вазифаҳои кор. Мақсади асосии кори диссертационӣ иборат аст аз:

- муайян кардани шартҳои кифоягии мутлақ наздикшавии қаторҳои Фурйеи функцияҳои қариб даврии мунтазам, ҳангоми: а) спектри онҳо нуқтаи ягонаи ҳудудиро дар беохирӣ дорад; б) спектри онҳо нуқтаи ягонаи ҳудудиро дар сифр дорад;
- ба даст овардани нишонаҳои мутлақ наздикшавии қаторҳои Фурйеи функцияҳои қариб даврӣ бо фосилаҳои хурд;
- тадқиқи масъалаҳо оид ба наздикшавии функцияҳои қариб даврии мунтазам ба суммаҳои хусусӣ ва интегралҳои Фурйе;
- дарёфти шартҳои ба синфи функцияҳои қариб даврӣ мансуб будани синфи функцияҳои бутун дар метрикаи мунтазам.

Объектҳои тадқиқот. Объектҳои тадқиқот аз назарияи функцияҳои қариб даврии мунтазам, наздикшавӣ ва суммиронии қаторҳои Фурйеи чунин функцияҳо, баъзе масъалаҳои наздикшавии онҳо бо суммаҳои хусусӣ ва интегралҳои Фурйе иборат мебошанд.

Усулҳои тадқиқот. Дар кори диссертационӣ усулҳои назарияи функцияҳо ва таҳлили функционалиҳои характери аппроксимативӣ,

усулҳои ҳалли масъалаҳои таҳлили функсияҳои гармоникӣ, назарияи қаторҳои Фурйе, суммиронии қаторҳои Фурйе ва наздиккунии бисёраъзогиҳои тригонометрӣ ба ин функсияҳо истифода шудаанд.

Навигарии илми тадқиқот. Натиҷаҳои диссертатсия нав буда, муаллиф онҳоро мустақилона ба даст овардааст ва чунинанд:

- барои мутлақ наздикшавии функсияҳои қариб даврии мунтазами қаторҳои Фурйе шартҳои кифоягӣ ёфта мешаванд, агар а) спектри онҳо дар беохирӣ нуқтаи ягонаи ҳудудӣ дорад; б) спектри онҳо нуқтаи ягонаи ҳудудӣ дар сифр дорад ва дар ин ҳолат табдилдиҳии Лаплас истифода шудааст, ки хусусияти сохтори $f(x) \in \mathbf{B}$ - ро муайян мекунад;
- натиҷаҳои болоӣ барои қаторҳои Фурйеи функсияҳои қариб даврии мунтазам дар фосилаҳои хурд ба даст оварда шуданд;
- шартҳои наздикшавии функсияҳои $f(x) \in \mathbf{B}$ ба суммаҳои навъи Марсинкевич, суммаҳои хусусӣ ва интегралҳои Фурйе дар метрикаи мунтазам муқаррар карда шудаанд;
- шартҳои тааллуқ доштани функсияҳои бутуни дараҷаи маҳдуд ба синфи функсияҳои қариб даврӣ исбот карда шудаанд.

Муҳтавои Ҳимояшавандаи диссертатсия:

- ошкор намудани нишонаҳои мутлақ наздикшавии қаторҳои Фурйеи функсияҳои қариб даврӣ дар метрикаи мунтазам, ки нуқтаи ягонаи ҳудудӣ дар беохирӣ ва ё дар сифр доранд;
- муқаррар намудани шартҳои кифоягӣ барои мутлақ наздикшавии қаторҳои Фурйеи функсияҳои қариб даврӣ бо вариатсияи маҳдуд;
- ёфтани шартҳои кифоягӣ барои наздикшавии қаторҳои Фурйе бо фосилаҳои хурд дар метрикаи мунтазам;
- ҷустуҷӯи баҳодиҳии наздикшавии функсияҳои қариб даврии мунтазам ба суммаҳои хусусӣ ва интегралҳои Фурйе ва мансубияти онҳо ба синфи функсияҳои бутун.

Саҳми шахсии муаллиф. Муҳтавои диссертатсия ва натиҷаҳои асосии барои дифоъ пешниҳодшуда саҳми шахсии муаллифро бо асарҳои нашршуда инъикос мекунад. Ҳамаи натиҷаҳои кори диссертатсиониро муаллиф шахсан ба даст овардааст.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Натиҷаҳои рисолаи диссертатсионӣ дорои ҳам арзишҳои назариявӣ ва ҳам амалӣ мебошанд. Натиҷаҳои кори диссертатсияро дар назарияи қаторҳои Фурье ва бахшҳои махсуси назарияи функсияҳо истифода бурдан мумкин аст.

Эътимоднокии ва асоснокии натиҷаҳои илмии тадқиқот. Эътимоднокии натиҷаҳои кори диссертатсионӣ бо исботҳои қатъии математикии ҳамаи тасдиқотҳо таъмин карда шуда, аз тарафи тадқиқотҳои муаллифони дигар асоснок карда мешаванд.

Тасвиби кор. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар конференсиҳо ва семинарҳои зерин баррасӣ шудаанд: конференси байналмиллалии “Таҳлили математикӣ, муодилаҳои дифференциалӣ ва назарияи ададҳо”, бахшида ба 75 - солагии профессор Т.С. Собиров (Душанбе, 29-30 октябри 2015); конференси байналмиллалии 18-уми мактаби зимистонаи Саратов “Проблемаҳои муосири назарияи функсияҳо ва татбиқи онҳо”, (Саратов, 27 январ – 3 феввали соли 2016); конференси дуввуми байналмиллалии илмӣ ва амалӣ "Аҳамияти проблемаи таълими физика ва математика", Набережные Челны, 20-22 октябри 2017; конференси байналхалқии “Муаммоҳои муосир ва татбиқи алгебра, назарияи ададҳо ва таҳлили математикӣ”, бахшида ба 60-солагии академики АМИ Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор Раҳмонов З.Ҳ. ва узви вобастаи АМИ Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор Исҳоқов С.А., Душанбе, 13-14 декабри соли 2019; семинарҳои шӯъбаи алгебра, назарияи ададҳо ва топология (солҳои 2015-2020) дар институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви АМИ Тоҷикистон.

Интишорот. Натиҷаҳои асосии муаллиф аз рӯи мавзӯи диссертатсия дар 12 мақола дарҷ гардидаанд, ки рӯйхати онҳо дар охири автореферат оварда шудааст. Корҳои [1-А, 2-А, 3-А, 4-А] дар маҷаллаҳои

тақризшаванда, ки ба рӯйхати амалкунандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон тааллуқ доранд, чоп шудаанд. Дар мақолаҳое, ки бо ҳамроҳии Ю. Ҳасанов чоп шудаанд, ба ҳаммуаллиф гузориши масъала ва интихоби усули исботи натиҷаҳо тааллуқ доранд.

Соҳтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, ду боб, феҳристи адабиёти истифодашуда, ки 63 номгӯйро ташкил медиҳад, иборат буда, ҳаҷми умумии он 93 саҳифаи компютериро дарбар мегирад. Дар диссертатсия рақамгузориҳои секаратаи теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо истифода шудааст, ки рақами аввал ба боб, рақами дуюм ба параграф ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ё формулаҳои ҳамин параграф мутобиқат мекунад.

Муҳтавои асосии диссертатсия

Рисолаи диссертатсионӣ аз муқаддима ва ду боб иборат аст. Дар муқаддима шарҳи кӯтоҳи таърихи натиҷаҳо оид ба муаммоҳои дахлдори мавзӯ оварда шуда, актуалӣ будани мавзӯҳоро асоснок мекунад.

Боби якуми диссертатсия аз чор параграф иборат буда, ба омӯзиши мутлақ наздикшавии қаторҳои Фурйеи функцияҳои қариб даврии мунтазам бахшида шудааст.

Параграфи якуми ин боб характери ёрирасон дошта, дар он таърифҳо ва мафҳумҳои асосие, ки барои ҳосил намудани натиҷаҳо истифода мешаванд, оварда шудаанд.

Дар параграфи дуоми ин боб шартҳои кифоягии мутлақ наздикшавии қаторҳои Фурйеи функцияҳои қариб даврии мунтазам исбот карда шудааст, ки нишондиҳандаҳои Фурйе нуктаи ҳудудии ягонаи бо сифр баробар доранд.

Таърифи 1.2.1. *Функцияи бефосилаи $f(x)$ дар тамоми тӯри ҳақиқӣ функцияи қариб даврии мунтазам номида мешавад, ки агар барои ҳар як адади $\varepsilon > 0$, ҳамин гуна адади мусбати $l=l(\varepsilon)$ мавҷуд бошад, ки дар ҳар*

интервал дарозии l чунин адади τ мавҷуд аст, ки барои он нобаробарии $|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$ ҷой дорад.

Бо \mathbf{B} фазои ҳамаи функсияҳои қариб даврии мунтазамро ишора мекунем, ки дорони норми зерин мебошанд

$$\|f(x)\|_{\mathbf{B}} = \sup_x |f(x)|. \quad (1)$$

Бигзор $f(x) \in \mathbf{B}$ ва қатори Фурйеи он намуди $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k x}$ дорад, ки дар ин ҷо $c_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) \exp(-i\lambda_k x) dx$ аст, $\Lambda\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ - нишондиҳандаи Фурйе (спектри функсия). Спектри $\Lambda\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ барои $f(x)$ маҷмӯи нишондиҳандаҳои Фурйеро муайян мекунад.

Ҳангоми тадқиқоти масъалаҳои мутлақ наздикшавии қаторҳои Фурйеи функсияҳои $f(x) \in \mathbf{B}$, вобаста аз нишондиҳандаҳои Фурйе бузургҳои зерин истифода бурда мешаванд:

3. Модули бефосилагии тартиби k барои функсияҳои $f(x) \in \mathbf{B}$

$$\omega(fh; h)_{\mathbf{B}} = \sup_{|t| \leq h} \sup_{x \in \mathbf{R}} |\Delta_t^k f(x)|,$$

$$\Delta_t^k f(x) = \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \binom{k}{r} f(x + rt) \quad (h > 0, k \in \mathbf{N});$$

4. Вариатсияи тартиби k барои функсияҳои $f(x) \in \mathbf{B}$ дар порчаи додашудаи охириноки $[a, b]$

$$V_k[a, b] = \sup \sum_{r=0}^{n-1} |\Delta_{h_r}^k f(x_r)|, \quad (2)$$

ки дар ин ҷо $k \in \mathbf{N}$, $h_r = \frac{x_{r+1} - x_r}{k}$, ҳудуди болоӣ аз r -и тақсимои $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ гирифта мешавад.

Бигзор қатори Фурйеи функсияи $f(x) \in \mathbf{B}$ дар намуди

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x} \quad (3)$$

дода шуда бошад, ки дар ин ҷо A_k - коэффитсиенти Фурйеи ин қатор ва ададҳои $\{\lambda_k\}$ – нишондиҳандаҳои Фурйе буда, нуктаи ягонаи ҳудудии он ба сифр баробар аст, яъне

$$\lambda_k > 0 (k > 0), \lambda_{-k} = -\lambda_k, |\lambda_k| < |\lambda_{k-1}|, (k = 1, 2, \dots), \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = 0. \quad (4)$$

Шарти кифоягии наздикшавии қатори зеринро нишон медиҳем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k|^\beta |k|^\gamma (\gamma > 0, \beta > 0). \quad (5)$$

Ҳангоми $\theta > 0$ бузургии зеринро ворид мекунем

$$\Omega(f; \theta) = \theta \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| \int_0^\infty e^{-\theta t} f(x-t) dt \right|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Теоремаи 1.2.1. Агар барои функсияи $f(x) \in \mathbf{B}$, спектри он шарти (4)-ро қонеъ кунад ва

$$\sum_{v=0}^{\infty} 2^{v(\gamma + \frac{q-\beta}{q})} \Omega(f; \lambda_{2^v}) < \infty,$$

бошад, ки дар ин ҷо $1 < p \leq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $0 < \beta < q$, $\gamma > 0$ аст, он гоҳ қатори (5) наздикшаванда мебошад.

Барои натиҷаҳои минбаъда чунин ишораҳоро ворид мекунем:

$$G_n = \{k: 2^{-(n+1)} \leq \lambda_k < 2^{-n}\};$$

$$G_{-n} = \{k: -2^{-(n+1)} \leq \lambda_k < -2^{-n}\};$$

$$M_n = \max_{k \in G_n} |k|; \quad \mu(a) = \sum_{\lambda_k \geq a} 1.$$

Теоремаи 1.2.2. Бигузур $f(x) \in \mathbf{B}$ ва спектри он $\Lambda\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ шарти (4)-ро қонеъ мекунад. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n^\gamma \{\mu(2^{-n-1}) - \mu(2^{-n})\}^{1-\frac{\beta}{q}} \Omega^\beta \left(f; \frac{1}{2^n} \right) < \infty,$$

бошад, он гоҳ қатори (5) наздикшаванда аст.

Дар параграфи сеюми боби якум шартҳои кифоягии мутлақ наздикшавии қаторҳои Фурйе функцияҳои қариб даврӣ тадқиқ шудаанд,

ки нишондиҳандаи Фурье нуқтаи ягонаи ҳудудии ба беохир баробар дорад.

Таърифи 1.3.1. *Функсияи $f(x)$ B_p - қариб даврӣ, ё қариб даврии Безикович ($p \geq 1$) номида мешавад, агар*

1. $f(x)$ ченшаванда ва $|f(x)|^p$ интегронидашаванда ба маънои Лебег дар порчаи ихтиёри охиринок бошад;

$$2. D_{B_p}\{f(x)\} = \left\{ \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^p \right\}^{1/p} < \infty;$$

3. Пайдарпаии бисёраъзогиҳои тригонометрии $P_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k x}$ мавҷуд аст, ки барои он $\lim_{n \rightarrow \infty} D_{B_p}\{f(x) - P_n(x)\} = 0$ мешавад.

Теоремаи 1.3.1. *Бигузор $f(x) \in B_2$ функсияи маҳдуд буда, функсияи $\Phi(u)$ камнашаванда, яъне чунин аст, ки ҳангоми $u > 0$ будан $\Phi(u) > 0$ ва $\frac{u^2}{\Phi(u)}$ низ функсияи камнашаванда аст. Агар ҳангоми $0 < \gamma < 1$ шарти*

$$\sum_{v=1}^{\infty} [\mu(2^v \pi) - \mu(2^{v-1} \pi) + 1]^{1-\frac{\gamma}{2}} \omega^\gamma(f; 2^{-v}) \omega_\Phi^{\frac{\gamma}{2}}(f; 2^{-v}) \Phi^{-\frac{\gamma}{2}}[\omega(f; 2^{-v})] < \infty,$$

$$\omega(f; h) = \text{vraisup}_{\infty < x < \infty} |f(x + \delta) - f(x)| \quad (|\delta| \leq h),$$

$$\omega_\Phi(f; h) = \sup_{|\delta| \leq h} \bar{M}\{\Phi[|f(x + \delta) - f(x)|]\}, \bar{M}\{g(x)\} = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(x) dx,$$

иҷро шавад, он гоҳ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^\gamma + |b_n|^\gamma) < \infty. \quad (6)$$

Теоремаи 1.3.3. *Бигузор $f(x) \in B_2$ ва функсияи камнашавандаи $\Phi(u)$ чунин бошад, ки $\Phi(u) > 0$ ва барои $u > 0$, $\Phi(0) \geq 0$ аст. Агар ҳангоми $0 < \gamma < 2$,*

$$V_\Phi(f) = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sup_{\theta} \sum_{n=1}^N \Phi[|f(x_n) - f(x_{n-1})|] dx < \infty,$$

ва шарти

$$\sum_{v=1}^{\infty} [\mu(2^v \pi) - \mu(2^{v-1} \pi) + 1]^{1-\frac{\gamma}{2}} 2^{-\frac{\gamma v}{2}} \omega^\gamma(f; 2^{-v}) \Phi^{-\frac{\gamma}{2}}[\omega(f; 2^{-v})] < \infty,$$

ичро шавад, он гоҳ қатори (6) наздикшаванда аст.

Дар параграфи чоруми боби якум шarti кифоягии наздикшавии мутлақи қаторҳои Фурйеи функцияҳои қариб даврии мунтазами дорои фосилаи хурд дида баромада шудааст.

Бигузор $f(x)$ функцияи даврий ва интегронидашуда дар порчаи $[-\pi, \pi]$ бошад ва қатори Фурйе намуди

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (7)$$

дорад, ки дар ин чо $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$ аст.

Таърифи 1.4.1. Мегӯянд, ки қатори (7) дорои фосила мебошад, агар барои коэффитсиентҳои он шarti $a_n^2 + b_n^2 > 0$, ($n = n_k$, $k = 1, 2, \dots$) ичро гардад, ки дар ин чо n_1, n_2, \dots, n_k - ададҳои натуралӣ буда, барои онҳо $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k$ аст.

Теоремаи 1.4.1. Бигузор $f(x) \in \mathbf{B}$ дорои қатори Фурйеи (3) буда, нишондиҳандаҳои шarti (4)-ро қаноат кунад. Агар ин қатор фосилаи хурди $n_{k+1} - n_k \geq \frac{4\pi}{\eta}$ дошта бошад ва

$$\int_1^{\infty} \omega\left(f; \frac{1}{t}\right)_{\mathbf{B}} \chi^{\frac{1}{2}}(t) \frac{dt}{t} < \infty$$

бошад, ки дар ин чо $\omega\left(f; \frac{1}{t}\right)_{\mathbf{B}}$ - модули бифосилагии функцияи $f(x) \in \mathbf{B}$ ва $\chi(t) = \sum_{\lambda_v \leq t} 1$ аст, он гоҳ $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < \infty$.

Боби дууми диссертатсия ба омӯзиши наздикунии функцияҳои қариб даврии мунтазам ба баъзе суммаҳо ва интегралҳои Фурйе ва тааллуқ доштани функцияҳои бутун ба синфи функцияҳои $f(x) \in \mathbf{B}$, бахшида шудааст.

Дар параграфи якуми ин боб наздикунии функцияҳои қариб даврии мунтазам ба суммаҳои навъи Марсинкевич тадқиқ карда шудааст.

Бигузор $f(x) \in \mathbf{B}$ ва қатори Фурйе он намуди зерин дошта бошад:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp(i\lambda_k x), \quad A_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) \exp(-i\lambda_k x) dx,$$

- коэффитсиентҳои Фурйе, $\{\lambda_k\}$ - нишондиҳандаи Фурйе, ки нуқтаи ҳудудии ягонааш дар беохирӣ аст.

Теоремаи 2.1.1. Бигузор $f(x) \in \mathbf{B}$ ва нишондиҳандаи Фурйеи он дорои нуқтаи ҳудудии ягона дар беохир бошад. Он гоҳ нобаробарии

$$\left\| f(x) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f; x) \right\|_{\mathbf{B}} \leq \frac{M}{n+1} \sum_{k=0}^n E_k(f)_{\mathbf{B}},$$

ҷой дорад, ки дар ин ҷо $S_k(f; x)$ – суммаҳои хусуси қатори Фурйеи $f(x) \in \mathbf{B}$ ва

$$E_k(f)_{\mathbf{B}} = \inf_{A(\lambda_n)} \left\| f(x) - \sum_{\lambda_n \leq k} e^{i\lambda_n x} \right\|_{\mathbf{B}}$$

аст.

Дар параграфи дуоми боби дуюм мутааллиқи функцияҳои бутун ба синфи функцияҳои $f(x) \in \mathbf{B}$ тадқиқ карда шудааст.

Бо G_σ ($\sigma > 0$) синфи функцияҳои бутуни нишондиҳандааш $\leq \sigma$ -ро дар тамоми тири ҳақиқӣ ишора мекунем.

Бигузор $f(x)$ - функцияи қариб даври мунтазам ва қатори Фурйе $f(x) \sim \sum_k A_k e^{i\lambda_k \beta x}$ бошад, ки дар ин ҷо λ_k – ададҳои ратсионалӣ, β – адади ҳақиқӣ аст. Он гоҳ дар байни функцияҳои $g_\sigma(x) \in G_\sigma$ ($\sigma > 0$), ки барои онҳо

$$A_\sigma(f) = \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x) - g_\sigma(x)|. \quad (8)$$

аст, бисёраъзогии тригонометрии дараҷааш $\leq \sigma$ мавҷуд аст.

Теоремаи 2.2.1. Агар $f(x) \in \mathbf{B}$ ва $\{\lambda_k\}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) спектри он бошад, он гоҳ дар байни функцияҳои $g_\sigma(x) \in G_\sigma$, барои он баробарии (8) мавҷуд аст, чунин функцияи $Q_\sigma(f; x) \in \mathbf{B}$ ёфт мешавад, ки қатори Фурйеи он намуди $\sum_{|\lambda_k| \leq \sigma} A_k e^{i\lambda_k x}$ – ро дорад.

Хулоса

Натиҷаҳои асосӣ ва хулосаҳо

Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсионӣ инҳоянд:

1. барои мутлақ наздикшавии функцияҳои қариб даврии мунтазами қаторҳои Фурйе шартҳои кифоягӣ ёфта мешаванд, агар а) спектри онҳо дар беохирӣ нуқтаи ягонаи ҳудудӣ дошта бошад; б) спектри онҳо нуқтаи ягонаи ҳудудӣ сифр дорад ва дар ин ҳолат табдилдиҳии Лаплас истифода шудааст, ки хусусияти сохтори функцияҳоро муайян мекунад, [3-М, 4-М, 8-М, 10-М, 11-М];
2. натиҷаҳои болоӣ барои қаторҳои Фурйеи функцияҳои қариб даврии мунтазам бо фосилаҳои хурд ба даст оварда шудаанд [5-М, 6-М, 9-М];
3. шартҳои наздикшавии функцияҳои $f(x) \in \mathbf{B}$ ба суммаҳои навъи Марсинкевич, суммаҳои хусусӣ ва интегралҳои Фурйе дар метрикаи мунтазам муқаррар карда шудаанд [1-М, 2-М, 3-М, 7-М];
4. шартҳои тааллуқ доштани функцияҳои бутуни дараҷаи маҳдуд ба синфи функцияҳои қариб даврӣ исбот карда шудаанд [7-М, 12-М].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амали натиҷаҳо

Натиҷаҳои, ки дар диссертатсия ҳосил карда шудаанд, ҳам аҳамияти назариявӣ ва ҳам аҳамияти амалӣ доранд ва онҳоро дар назарияи қаторҳои Фурйеи функцияҳои қариб даврии гуногун ва назарияи майлқунии чунин функцияҳо истифода бурдан мумкин аст. Маводҳои диссертатсияро ҳамчунин дар хондани курсҳои махсус барои донишҷӯён, магистрҳо ва докторантҳо дар муассисаҳои таҳсилоти олии касбӣ бо таҳассуси “Математика” истифода бурдан имконпазир аст.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗЌИ ДИССЕРТАТСИЯ

**Мақолаҳое, ки дар маҷалаҳои тақризшавандаи ҚОА-и назди
Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва ҚОА-и Федератсияи Руссия нашр
шудаанд:**

- [1-М]. Талбаков Ф.М. Аналог теоремы С.Н. Бернштейна о наилучшем приближении почти-периодических функций [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // ДАН РТ. – 2016. – Т.59. – № 1-2. – С.11-18.
- [2-М]. Талбаков Ф.М. О некоторых оценках частичных сумм ряда Фурье функций Бора [Текст] / Ф.М. Талбаков // Вестник ТНУ. – 2018. – №2. – С. 28-34.
- [3-М]. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций Безиковича [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // ДАН РТ. – 2018. – Т.61. - №1-2. – С.813-821.
- [4-М]. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций в равномерной метрике [Текст] / Ф.М. Талбаков // ДАН РТ. – 2019. – Т.63. - №5-6. – С.288-292.

Дар дигар нашрияҳо:

- [5-М]. Талбаков Ф.М. О некоторых условиях сходимости рядов Фурье с малыми пропусками [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы международной научной конференции «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел», посвященной 75-летию профессора Т.С. Собирова, (г. Душанбе, 29-30 октября 2015). – С.61-63.
- [6-М]. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций с малыми пропусками [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы 18-й международной

- Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 27 января – 3 февраля 2016 г.). – С.300-303.
- [7-М]. Талбаков Ф.М. Об одном аналоге теоремы Пели для почти-периодических функций [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы II Международной научно–практической конференции «Актуальные проблемы физико-математического образования», (Набережные Челны, 20-22 октября 2017 г.). – С.58-60.
- [8-М]. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы 19-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения», посвященной 90-летию со дня рождения академика П. Л. Ульянова (Саратов, 29 января – 2 февраля 2018 г.). – С.330-332.
- [9-М]. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функции с малыми пропусками [Текст] / Ф.М. Талбаков Ф.М. // Материалы XII научно-практической конференции молодых ученых и студентов с международным участием, посвященной, ТГМУ имени Абуали ибни Сино, (Душанбе, 27 апреля 2018 г.). – С.34-35.
- [10-М]. Талбаков Ф.М. О некоторых достаточных условиях сходимости рядов Фурье почти-периодических функций [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы молодежной школы-конференции (Лобачевские чтения, 23-28 ноября 2018 г.). – С.307-309.
- [11-М]. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач» (3-9 мая 2019 г.). – С.289-290.

[12-М]. Талбаков Ф.М. Об аппроксимации почти-периодических функций Бора целыми функциями конечной степени [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы международной конференции, посвященной 60-летию академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора З.Х. Рахмонова и члена-корреспондента НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора С.А. Исхокова (Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.). – С.270-273.

АННОТАЦИЯ

диссертации Талбакова Фарходжона Махмадшоевича на тему “Об абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных почти-периодических функций и некоторые вопросы их аппроксимации”, представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: почти-периодические функции, ряды Фурье, спектр функции, коэффициенты Фурье, показатели Фурье, модуль непрерывности, единственная предельная точка.

Цель работы. Целью исследования является получения достаточных условий абсолютной сходимости рядов Фурье некоторых классов почти-периодических функций. А также устанавливать оценки отклонения почти-периодических функций от частных сумм и интегралов Фурье в равномерной метрике и принадлежности класса целых функций к классу почти-периодических функций.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы теории функций и функционального анализа, теории рядов Фурье, теории суммирования рядов Фурье и теории приближения функций тригонометрическими полиномами.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем: найдены достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных почти-периодических функций; аналогичные результаты получены для рядов Фурье равномерных почти-периодических функций с малыми пропусками; установлены условия отклонения функций $f(x) \in \mathbf{B}$ от сумм типа Марцинкевича, частных сумм и интегралов Фурье в равномерной метрике; доказаны условия принадлежности целых функций ограниченной степени к классу почти-периодических функций.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа носит как теоретический, так и практический характер. Результаты диссертационной работы могут быть применены в теории рядов Фурье и специальных разделах теории функций.

АННОТАТСИЯ

ба диссертатсияи Талбаков Фарҳодҷон Махмадшоевич дар мавзӯи “Дар бораи наздикшавии мутлақи қаторҳои Фурйеи функцияҳои қариб давриимунтазам ва баъзе масъалаҳои наздикшавии онҳо” барои дарёфти дараҷаи илмӣ номзади илмҳои физика ва математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01 – таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функционалӣ

Вожаҳои калидӣ: функцияҳои қариб даврӣ, қаторҳои Фурйе, спектри функция, коэффисиентҳои Фурйе, нишондиҳандаҳои Фурйе, модули бифосилагӣ, нуқтаи ҳудудии ягона.

Мақсади тадқиқот. Мақсади асосии кори диссертатсионӣ аз муайян кардани шартҳои кифоягии мутлақ наздикшавии қаторҳои Фурйеи функцияҳои қариб даврии мунтазам ва наздикшавии чунин функцияҳо ба суммаҳои хусусӣ ва интегралҳои Фурье, ҳамчунин дарёфти шартҳои ба синфи функцияҳои қариб даврӣ мансуб будани функцияҳои бутун дар метрикаи мунтазам, мебошад.

Усулҳои тадқиқот. Дар кори диссертатсионӣ усулҳои назарияи функцияҳо ва таҳлили функционалӣ, назарияи қаторҳои Фурйе, назарияи суммиронии қаторҳои Фурье ва назарияи ба бисёраъзогиҳои тригонометрӣ наздик кардани ин функцияҳо истифода шудаанд.

Навигариҳои илмӣ. Натиҷаҳои диссертатсия нав буда, муаллиф мустақилона ба даст овардааст ва аз инҳо иборатанд: барои наздикшавии мутлақи қаторҳои Фурйеи функцияҳои қариб даврии мунтазами шартҳои кифоягӣ ёфта шудаанд; натиҷаҳои болоӣ барои қаторҳои Фурйеи функцияҳои қариб даврии мунтазам бо фосилаҳои хурд ба даст оварда шуданд; шартҳои наздикшавии функцияҳои $f(x) \in \mathbf{B}$ ба суммаҳои навъи Марсинкевич, суммаҳои хусусӣ ва интегралҳои Фурье дар метрикаи мунтазам муқаррар карда шудаанд; шартҳои тааллуқ доштани функцияҳои бутуни дараҷаи маҳдуд ба синфи функцияҳои қариб даврӣ исбот карда шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Кори диссертатсионӣ дорои аҳамияти ҳам назариявӣ ва ҳам амалӣ мебошад. Натиҷаҳои онро дар назарияи қаторҳои Фурье ва бахшҳои махсуси назарияи функцияҳо истифода бурдан мумкин аст.

SUMMARY

of the thesis of Talbakov Farhodjon Makhmadshoevich “On the absolute convergence of Fourier series of uniform almost periodic functions and some problems of their approximation”, presented for the scientific degree of candidate of physical and mathematical sciences in specialty 01.01.01 - real, complex and functional analysis

Keywords: almost-periodic functions, Fourier series, spectrum of a function, Fourier coefficients, Fourier exponents, modulus of continuity, unique limit point.

Work objective. The aim of the study is to obtain sufficient conditions for the absolute convergence of the Fourier series of some classes of almost-periodic functions. And also to establish estimates for the deviation of almost-periodic functions from partial sums and Fourier integrals in the uniform metric and the belonging of the class of entire functions to the class of almost-periodic functions.

Research methods. The dissertation work uses methods of the theory of functions and functional analysis, the theory of Fourier series, the theory of summation of Fourier series and the theory of approximation of functions by trigonometric polynomials.

Scientific novelty. The results of the thesis are new, obtained by the author independently and are as follows: sufficient conditions for the absolute convergence of the Fourier series of uniform almost periodic functions are found when: a) their spectrum has a unique limit point at infinity; b) their spectrum has a single limit point at zero, while the value constructed on the basis of the Laplace transform is used as a structural characteristic of the functions; similar results were obtained for the Fourier series of uniform almost periodic functions with small gaps; conditions for the deviation of functions $f(x) \in \mathbf{B}$ from sums of Marcinkiewicz type, partial sums, and the Fourier integral in the uniform metric are established; conditions are proved for entire functions of bounded degree to belong to the class of almost periodic functions.

Theoretical and practical value. The work is both theoretical and practical. The results of the dissertation work can be applied in the theory of Fourier series and special sections of the theory of functions.

Ба матбаа 28.12.2020 супорида шуд.
Ба чопаш 11.01.2021 имзо шуд.
Қоғаз офсет. Андозаи 60×84 1/16.
Супориши №01. Теъдод 100 нусха.

Дар КВД «Матбаа» аз чоп бароварда шуд.
ш. Душанбе кӯчаи Г. Ҷануби 52.