Национальная Академия наук Таджикистана
Институт математики им. А.Джураева

УДК 517.518 На правах рукописи

ТАЛБАКОВ ФАРХОДДЖОН МАХМАДШОЕВИЧ

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ РАВНОМЕРНЫХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИХ АППРОКСИМАЦИИ

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 - Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук Хасанов Юсуфали

Душанбе – 2020

Оглавление

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Теория почти-периодических функций возникла в 20-30-х годах XX века, благодаря исследованиям датского математика Г. Бора и в настоящее время существует достаточно много разнообразных результатов по различным вопросам этой теории.

Дальнейшее развитие теории почти-периодических функций было продолжено рижскими математиками П. Боль и Эскалангоном.

В теории почти-периодических функций важную роль играют исследования необходимых и достаточных условий абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье таких функций.

Однако, в отличие от периодических функций, проблемы, касающиеся установления признаков абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций исследованы слабо. Это связано с тем, что показатели Фурье таких функций могут лежать всюду плотно.

В исследованиях Ю. Муселиака [21], Б.М. Левитана [18], Н.П. Купцова [17], Я.Г. Притулы [23], Е.А. Бредихиной [5]-[8], А.С. Джафарова и Г.А. Мамедова [12], Ю.Х. Хасанова [43]-[51] получены некоторые необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических в смысле Бора, Безиковича и Степанова функций.

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней изучены и исследованы новые условия абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных почти-периодических функций и рассмотрены приближения таких функций некоторыми частными суммами и интегралами.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы института математики им. А. Джураева НАН Таджикистана 2016-2020 гг. по теме

«Поведение тригонометрических сумм, их приложения в аддитивных проблемах теории чисел, избранные задачи теории приближения функций».

Цель и задачи исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в следующем:

- выявить необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных классов почти-периодических функций, когда: а) их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности; б) их спектр имеет единственную предельную точку в нуле;
- получить признаки абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций с малыми пропусками;
- исследовать вопросы о приближении равномерных почти-периодических функций частными суммами и интегралами Фурье;
- нахождение условий принадлежности класса целых функций к классу почти-периодических функций в равномерной метрике.

Объекты исследования. Объектами исследования являются теория равномерных почти-периодических функций, сходимость и суммируемость рядов Фурье таких функций, а также некоторые вопросы их приближения частными суммами и интегралами.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы теории функций и функционального анализа аппроксимативного характера, методы решения задач гармонического анализа для функций, теории рядов Фурье, теории суммирования рядов Фурье и теории приближения функций тригонометрическими полиномами.

Научная новизна исследований. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- найдены достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных почти-периодических функций, когда: а) их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности; б) их спектр имеет единственную предельную точку в нуле, при этом в качестве структурной характеристики функций, используется величина, построенная на базе преобразования Лапласа;

- аналогичные результаты получены для рядов Фурье равномерных почти-периодических функций с малыми пропусками;
- установлены условия отклонения функций $f(x) \in \boldsymbol{B}$ от сумм типа Марцинкевича, частных сумм и интеграла Фурье в равномерной метрике;
- доказаны условия принадлежности целых функций ограниченной степени к классу почти-периодических функций.

Положения, выносимые на защиту:

- выявление признаков абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций в равномерной метрике, имеющих предельную точку в бесконечности и в нуле;
- установление достаточных условий абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций, имеющих ограниченную вариацию;
- нахождение достаточных условий сходимости рядов Фурье с малыми пропусками в равномерной метрике;
- нахождение оценок отклонения равномерных почти-периодических функций от частных сумм и интегралов Фурье и их принадлежности классу целых функций.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, которые выносятся на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все результаты диссертационной работы получены лично автором.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа носит как теоретический так и практический характер. Результаты диссертационной работы могут быть применены в теории рядов Фурье и специальных разделах теории функций

Степень достоверности результатов проведенных исследований. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений и вспомогательных предложений, приведенных в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах: международная научная конференция «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел», посвященная 75-летию профессора Т.С. Собирова, г. Душанбе, 29-30 октября 2015 г.; 18-я международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функции и их приложения», Саратов, 27 января –3 февраля 2016 г.; вторая международная научно–практическая конференция «Актуальность проблемы физико-математического образования», г. Набережные Челны, 20-22 октября 2017 г.; международная конференция посвященная 60-летию академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора З.Х. Рахмонова и члена-корреспондента НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора С.А. Исхокова, г. Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.; семинары отдела теории функций и функционального анализа (2015-2020 гг.) и общеинститутские семинары (2015-2020 гг.) в Институте математически им. А. Джураева НАН Таджикистана.

Публикации. Основные результаты автора по теме диссертации опубликованы в 12 работах, список которых приведен в конце автореферата. Работы [1-А, 2-А, 3-А, 4-А] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК РТ при Президенте Республики Таджикистан. В работе, написанной совместной с Ю. Хасановым, соавтору принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 63 наименований и занимает 84 страницы машинописного текста. Главы диссертации разбиты на отдельные параграфы. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм или формул в данном параграфе.

Глава 1. Об условиях абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных почти-периодических функций

§ 1.1. Основные понятия и обзор литературы

Пусть $f(x)$ интегрируемая со степенью $p\,(1 \leq p \leq \infty)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция, с нормой

$$\|f(x)\|_p = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\, dx\right\}^{1/p} < \infty \quad (1 \leq p < \infty),$$

а при $p = \infty$

$$\|f(x)\|_p = vrai \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x)| < \infty\,,$$

и имеет ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)\,, \tag{1.1.1}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx;\, b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\, dx$$

- коэффициенты Фурье функции $f \in L_p[-\pi,\pi]$.

Исследованию признаков абсолютной и равномерной сходимостей рядов Фурье вида (1.1.1) посвящено много работ. Так например, в работах С.Н. Бернштейна [2], [3], С.В. Бочкарева [11], А. Зигмунда [14], А.А. Конюшкова [16], Р. Салема [25], С.Б. Стечкина [26], [27], [28], О. Саса [29], М.Ф. Тимана [32], [33], [34], [35] для периодических функций достаточно полно изучены необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma}\left(|a_n|^{\beta} + |b_n|^{\beta}\right)(\gamma > -1, \beta > 0). \tag{1.1.2}$$

Аналогичным вопросам, то есть установлению признаков абсолютной сходимости рядов вида (1.1.2) для различных классов почти-периодических функций, посвящены исследования А. Безиковича [4], Е.А. Бредихиной [5], [6], Б.М. Левитана [18], Н. П. Купцова [17], А.С. Муселиака [21], Я.Г. Притулы [23], М.Ф. Тимана [39], А.С. Джафарова и Г.А. Мамедова [12], Ю. Хасанова [43], [46], [49], [45], [50]. Однако, в отличие от периодических случаев остается ещё много неясных вопросов, которые связаны со спецификой спектров таких функций, т.е. от поведения показателей Фурье.

Вначале приводим основные определения и понятия классов таких функций и структурные характеристики их свойств, которые необходимы для формулировки полученных результатов.

Определение 1.1.1. *Непрерывная на всей действительной оси функция* $f(x)$ *называется равномерной почти-периодической, если для каждого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое положительное число* $l = l(\varepsilon)$*, что в каждом интервале длины* l *найдется хотя бы одно число* τ*, для которого*

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon(-\infty < x < \infty).$$

С определениями и свойствами класса таких функций можно ознакомиться, например, в монографиях Б.М. Левитана [18], Г. Бора [10] и А.С. Безиковича [4].

Пространство всех равномерных почти–периодических функций обозначим через $\boldsymbol{B}$, в котором норма рассматриваемой функции определяется следующей формулой

$$\|f(x)\|_{\boldsymbol{B}} = \sup_{x \in R} |f(x)|. \qquad (1.1.3)$$

Каждой функции $f(x) \in \boldsymbol{B}$ можно отнести ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}, \qquad (1.1.4)$$

где

$$A_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\lambda_n x} dx$$

- коэффициенты Фурье функции $f(x) \in \boldsymbol{B}$.

Множество действительных чисел $\Lambda\{\lambda_n\}$, для которых выполняется условие

$$\lambda(A) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\lambda_n x} \neq 0$$

является счётной и принято их называть спектром функции $f(x) \in \boldsymbol{B}$ или показателями Фурье.

При исследовании вопросов абсолютной сходимости рядов Фурье функций $f(x) \in \boldsymbol{B}$, в зависимости от поведения показателей Фурье используются следующие характеристики их свойства:

1. Модуль непрерывности порядка k функции $f(x) \in \boldsymbol{B}$

$$\omega(f; h)_{\boldsymbol{B}} = \sup_{|t|\leq h} \sup_{x\in R} \left| \Delta_t^k f(x) \right|, \tag{1.1.5}$$

где

$$\Delta_t^k f(x) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} f(x + rt) (h > 0, k \in N)$$

- разность $k -$ го порядка функции $f(x)$ в точке x с шагом t.

2. Характеристика, определяющаяся с помощью преобразования Лапласа

$$\Omega(f; \delta; \theta) = \delta \sup_{x\in R} \left| \int_0^\infty f(x - t) e^{-\delta t + i\theta t} dt \right|, \tag{1.1.6}$$

где $\delta > 0,\ \theta \in R$;

3. Модуль усреднения порядка k функции $f(x) \in \boldsymbol{B}$ на $(-\infty, \infty)$

$$W_k(f; H)_{\boldsymbol{B}} = \sup_{T\geq h} \sup_{x\in R} \left| f_{T^k}(x) \right|, \tag{1.1.7}$$

где $H > 0,\ k \in N$,

$$f_{T^k}(x) = \frac{1}{(2T)^k} \int_{x-T}^{x+T} dt_1 \int_{t_1-T}^{t_1+T} dt_2 \ldots \int_{t_{k-2}-T}^{t_{k-2}+T} dt_{k-1} \int_{t_{k-1}-T}^{t_{k-1}+T} f(t_k) dt_k \,;$$

4. Вариация порядка k функции $f(x) \in \boldsymbol{B}$ на заданном конечном отрезке $[a,\ b]$

$$V_k[a,b] = sup \sum_{r=0}^{n-1} \left| \Delta_{h_r}^k f(x_r) \right|, \tag{1.1.8}$$

где $k \in N,\ h_r = \frac{x_{r+1}-x_r}{k}$, верхняя грань берётся по всевозможным разбиениям

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

В случае, если вариация порядка k функции $f(x) \in \boldsymbol{B}$ заданана конечном отрезке $[a,b]$, то класс таких функций$f(x) \in \boldsymbol{B}$ обозначим через $\boldsymbol{B}V_k$.

Величина $W_k(f;H)_{\boldsymbol{B}}$ обладает следующими свойствами [46], аналогичные свойствам модуля непрерывности $k-$ го порядка

1) $W_k(f;H)_{\boldsymbol{B}}$ монотонно убывает при $H \to \infty$;

2) Если n целое число, то

$$W_k(f;nH)_{\boldsymbol{B}} \leq nW_k(f;H)_{\boldsymbol{B}},$$

а если λ любое положительное число, то

$$W_k(f;\lambda H)_{\boldsymbol{B}} \leq (\lambda+1)W_k(f;H)_{\boldsymbol{B}};$$

3) Функция $W_k(f;H)_{\boldsymbol{B}}$ полуаддитивна, т.е. для любых $T_1 > 0,\ T_2 > 0$

$$W_k(f;T_1+T_2)_{\boldsymbol{B}} \leq W_k(f;T_1)_{\boldsymbol{B}} + W_k(f;T_2)_{\boldsymbol{B}};$$

4) Функция $W_k(f;H)_{\boldsymbol{B}}$ непрерывна на отрезке $0 < H < \infty$.

Определение 1.1.2 ([4]). *Функцию* $f(x)$ *называют* B_p *- почти-периодической, или почти-периодической в смысле Безиковича* $(p \geq 1)$, *если*

1. $f(x)$ *измеримая и* $|f(x)|^p$ *интегрируема в смысле Лебега на любом конечном отрезке;*

2. $D_{\boldsymbol{B}_p}\{f(x)\} = \left\{\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} < \infty;$ (1.1.9)

3. Существует последовательность тригонометрических сумм

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k\, exp(i\lambda_k x),$$

для которой

$$\lim_{n\to\infty} D_{\boldsymbol{B}_p}\{f(x) - P_n(x)\} = 0. \qquad (1.1.10)$$

Пространство таких функций, которые удовлетворяют всем условиям определения 1.1.2, называют $\boldsymbol{B}_p$ – пространством, или пространством Безиковича, в котором за норму функции $f(x) \in \boldsymbol{B}_p$ $(p \geq 1)$ принимается величина

$$\|f(x)\|_{\boldsymbol{B}_p} = \left\{\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^p\, dx\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty. \qquad (1.1.11)$$

Как видно из определения 1.1.2, с каждой функцией из пространства $\boldsymbol{B}_p$ $(p \geq 1)$ связана последовательность чисел $\Lambda\{\lambda_n\}$, являющаяся спектром этой функций. Под спектром $\Lambda\{\lambda_n\}$ для функции $f(x) \in \boldsymbol{B}_p$ понимается множество ее показателей Фурье, с помощью которого можно поставить в соответствие ряд Фурье вида (1.1.4).

Определение 1.1.3 ([41]). *Пусть на* $[a,\ b]$ *задана функция* $f(x)$. *Разобьем этот отрезок* $[a,\ b]$ *на части с помощью точек деления*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b.$$

Из абсолютных величин приращений функции образуем следующую сумму

$$\sigma(n) = \sum_{j=1}^{n-1} \left|f(x_{j+1}) - f(x_j)\right|. \qquad (1.1.12)$$

Если суммы(1.1.12) в их совокупности ограничены сверху, то говорят, что функция $f(x)$ *на отрезке* $[a,\ b]$ *имеет ограниченное изменение (ограниченную вариацию). Точную верхнюю границу этих сумм принято называть полным изменением (полной вариацией) функции в этом отрезке и обозначается символом*

$$\sup_n\{\sigma(n)\} = \bigvee_a^b f(x).$$

Сначала сформулируем ряд результатов, которые ранее получены другими авторами.

Теорема 1.1.1. [18]. *Если коэффициенты Фурье* $A_k = lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\, exp(-i\lambda_k x)\, dx$ *функции* $f(x) \in \boldsymbol{B}$ *положительны, то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ *сходится.*

В условиях теоремы 1.1.1 показатели Фурье функции $f(x) \in \boldsymbol{B}$содержат единственную предельную точку в нуле.

Следующий результат Б.М. Левитана [18] получен в случае, когда показатели Фурье являются линейно независимыми.

Напомним, что показатели Фурье функции

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k}$$

называются линейно независимыми, если из равенства

$$k_1\lambda_{n_1} + k_2\lambda_{n_2} + \cdots + k_r\lambda_{n_r} = 0,$$

следует, что $k_1 = k_2 =\ldots= k_r = 0$, где $k_1, k_2, \ldots, k_r$ - целые числа.

Теорема 1.1.2. [18]. *Если показатели Фурье функции* $f(x) \in \boldsymbol{B}$ *линейно независимы, то ряд Фурье этой функции сходится абсолютно.*

Следующий результат принадлежит польскому математику Ю. Муселиаку [20], в котором в качестве структурной характеристики функций $f(x) \in B_2$ использована модуль непрерывности

$$\omega_1(f;h) = \sup_{0\le h\le\delta} \inf_{x} |f(x+h) - f(x)|.$$

Теорема 1.1.1. [21]. *Пусть для функции* $f(x) \in B_2$ *спектр* $\lambda_n \to \infty$ $(n = 1,2, \ldots)$ *и при* $\alpha > 0$ $n^{\alpha} = O\{\lambda_n\}$. *Если при* $0 < \beta < 2$ *выполнено условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1-\frac{\beta}{2}}{\alpha}-1}\, \omega_1^{\beta}(f;\frac{1}{n})_{\boldsymbol{B}_2} < \infty\,, \tag{1.1.16}$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{\beta} < \infty. \tag{1.1.17}$$

Н.П. Купцов [17] показал, что для функций $f(x) \in \boldsymbol{B}$ условие (1.1.16) при $\alpha = 1,\ \beta = 1$ с заменой величины $\omega_1(f;\frac{1}{n})_{\boldsymbol{B}_1}$ на $\omega_2(f;\frac{1}{n})_{\boldsymbol{B}_2}$ обеспечивает справедливость соотношения (1.1.17).

В работе [46] замечено, что при $\beta = 1$, $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ выполнение условия (1.1.16) влечет за собой то, что функция $f(x)$ почти всюду превращается в константу.

Теорема 1.1.2 [17]. *Пусть $f(x) \in \boldsymbol{B}$ и $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \dots -$ показатели Фурье этой функции. Если выполнены следующие условия:*

1) Множество $\{\lambda_n\}$ функции $f(x) \in \boldsymbol{B}$ имеет конечное число конечных предельных точек b_n $(n = \overline{1,s})$, причём ни одно из чисел λ_n не совпадает с b_n $(n = \overline{1,s})$;

2) Существует такая постоянная C, что для всякого n можно найти $j(j = \overline{1,s})$, подчиняющееся условию $-\frac{C}{n} \leq \lambda_n - b_j \leq \frac{C}{n}$;

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\, \Omega_2^{1/2}(f;\frac{1}{n})_{\boldsymbol{B}} < \infty,$$

где

$$\Omega_2(f;\delta)_{\boldsymbol{B}} = \max_j \delta^2 M_x \left\{ \left| \int_0^{\infty} f(x-t)e^{-\delta + ib_j}\,dt \right|^2 \right\},$$

то ряд, составленный из абсолютных величин коэффициентов Фурье функции $f(x) \in \boldsymbol{B}$, сходится.

Далее в работе Н.П. Купцова [17]доказано, что при выполнении условий1) и 2) теоремы 1.1.2, если существуют положительные постоянные A и εтакие, что

$$\left| \int_0^t f(\mathrm{x} - \tau)\exp(ib_j\tau)\,d\tau \right| \leq \frac{A\sqrt{t}}{t^{\varepsilon}}, \qquad (1.1.18)$$

где $t > 0$ и $j = \overline{1,s}$, то ряд, составленный из абсолютных величин коэффициентов Фурье функции $f(x) \in \boldsymbol{B}$, сходится**.**

В этой же работе [17] установлены некоторые достаточные условия равномерной сходимости рядов Фурье, когда спектр функции $f(x) \in$ $\boldsymbol{B}$ имеет единственность предельную точку в бесконечности. То, что условие (1.1.18) обеспечивает абсолютную сходимость ряда Фурье функции $f(x) \in \boldsymbol{B}$, установил ранее Б.М. Левитан [18].

Теорема 1.1.3 [21]**.** *Пусть для функции* $f(x) \in \boldsymbol{B}_2$ *спектр* $\lambda_n \to \infty$ $(n = 1,2,\dots)$ *и при* $\alpha > 0$

$$n^{\alpha} = O\{\lambda_n\}.$$

Если при $0 < k < 2$ *и при* $0 < \beta < 2$ *выполнено условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1-\frac{\beta}{2}}{\alpha}-\frac{\beta}{2}-1}\, \omega_1^{\left(1-\frac{k}{2}\right)\beta}(f;\frac{1}{n})_{\boldsymbol{B_2}} < \infty\,, \tag{1.1.19}$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{\beta}$$

сходится.

Теорема 1.1.4 [21]**.** *Пусть для функции* $f(x) \in \boldsymbol{B}_2$ *спектр* $\lambda_n \to \infty$ $(n = 1,2,\dots)$

$$n^{\alpha} = O\{\lambda_n\},\ \ \lambda_n \to \infty,\ \ (n \to \infty)\,.$$

Если при $p > 0$ и $0 < k < 2\omega_1(f;h)_{\boldsymbol{B_2}} = O\{h^p\}$, где $V_k(f)$ означает k - вариацию функции $f(x)$, то ряд составленный из абсолютных величин коэффициентов Фурье функции $f(x) \in \boldsymbol{B_2}$, сходится.

Замечание 1.1.1. *В случае, когда* $k > 1, \beta = \frac{2}{2-k}$ *и* $\alpha \le \frac{1-k}{3-k}$, *условие (1.1.19) приводит к тому, что функция* $f(x) \in \boldsymbol{B_2}$ *почти всюду константа.*

Теорема 1.1.5 [23]**.** *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \dots -$ *показатели Фурье функции*$f(x) \in \boldsymbol{B_p}$ $(1 < p \le 2)$ *имеет единственную предельную точку на бесконечности* $(\lambda_n \to \infty$ *при* $n \to \infty)$.

Если при $0 < \beta < q$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ \ 1 < p \le 2\right),\ \gamma > 0$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2^\nu}}{\lambda_{2^{\nu-1}}}\right)^{\beta}\omega_1^{\beta}\,(f;\lambda_{2^\nu}^{-1})_{\boldsymbol{B}_p}2^{\nu\left(\gamma+\frac{q-\beta}{q}\right)}<\infty,$$

то

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|A_n|^{\beta}n^{\beta}<\infty. \qquad (1.1.20)$$

В работе А. С. Джафарова и Г. А. Мамедова [12] рассматривается функция $f(x)\in\boldsymbol{B_p}$ $(1<p\leq 2)$, спектр $\Lambda\{\lambda_n\}$ которой имеет единственную предельную точку в нуле, то есть

$$\lambda_0=0,\lambda_{-n}=-\lambda_n\,,|\lambda_n|<|\lambda_{n-1}|,\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty.$$

Исследуется признаки сходимости ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|A_n|^{\beta}\varphi(n), \qquad (1.1.21)$$

где $\varphi(n)$ – чётная, положительная функция, определенная во множестве целых чисел посредством величины (1.1.6) при $\theta=0$.

Теорема 1.1.6 [12]. *Пусть* $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_n,\dots-$ *показатели Фурьефункции* $f(x)\in\boldsymbol{B_p}$ $(1<p\leq 2,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ *имеют единственную предельную точку на бесконечности* $(\lambda_n\to 0$ при $n\to\infty)$. Если *при* $0<\beta<q$ *выполняется условие*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi(2^\nu)\Omega_2^{\beta}(f;\lambda_{2^\nu})_{\boldsymbol{B}_p}<\infty,$$

то ряд (1.1.21) сходится, и справедливо соотношение

$$\sum_{n\geq 2}|A_n|^{\beta}\varphi(n)\ll\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi(2^\nu)\Omega_2^{\beta}(f;\lambda_{2^\nu})_{\boldsymbol{B}_p},$$

где

$$\psi(2^\nu)=\left\{\sum_{n=2^{\nu-1}-1}^{2^\nu}[\varphi(n)]^{\frac{q}{q-\beta}}\right\}^{1-\frac{\beta}{q}}.$$

§ 1.2.Об условиях абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций в равномерной метрике, имеющих предельную точку в нуле

Пусть $f(x) \in \boldsymbol{B}$. Запишем ряд Фурье этой функции в симметричной форме

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp(i\lambda_k x),$$

где

$$A_k = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) \exp(-i\lambda_k x)\, dx$$

- коэффициенты Фурье, а числа $\{\lambda_k\}$ – показатели Фурье, которые имеют единственную предельную точку в нуле, т.е.

$$\lambda_k > 0\ (k > 0), \lambda_{-k} = -\lambda_k, |\lambda_k| < |\lambda_{k-1}|,\ \ (k = 1,2,\dots), \lim_{k\to\infty} |\lambda_k| = 0. \quad (1.2.1)$$

Устанавливаем некоторые достаточные условия сходимости ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k|^{\beta}\, |k|^{\gamma} (\gamma > 0, \beta > 0). \qquad (1.2.2)$$

Для функции $f(x) \in \boldsymbol{B}$ рассмотрим величину

$$F(x) = \theta \int_0^{\infty} e^{-t\theta} f(x-t) dt \quad (\theta > 0).$$

Из теоремы о неопределенном интеграле равномерных почти-периодических функций следует, что $F(x) \in \boldsymbol{B}$ (см. [18], с. 29).

При $\theta > 0$ введем в рассмотрение величину

$$\Omega(f;\theta) = \theta \left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| \int_0^{\infty} e^{-\theta t} f(x-t) dt \right|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Заметим, что величина $\Omega(f;\theta)$ в случае, когда спектр функции $f(x) \in \boldsymbol{B}$ удовлетворяют условий (1.2.1) является аналогом модуля непрерывности.

Установлению необходимых и достаточных признаков абсолютной сходимости рядов вида (1.2.2) для различных классов почти-периодических функций посвящены исследования Е.А. Бредихиной [5], [6], А.С. Джафарова и Г.А. Мамедова [12], Н.П. Купцова [17], Б.М. Левитана [18], А.С. Муселиака [21], А.Г. Притулы [23], Ю. Хасанова [46] - [49].

Результаты, приводимые здесь являются аналогами некоторых результатов работ [46] и [49] для класса равномерных почти-периодических функций.

Теорема 1.2.1. *Если для функции $f(x) \in \boldsymbol{B}$, спектр которой удовлетворяет условий (1.2.1) выполнено условие*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu\left(\gamma+\frac{q-\beta}{q}\right)} \Omega^{\beta}\left(f; \lambda_{2^{\nu}}\right) < \infty, \tag{1.2.3}$$

где

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \quad 1<p \leq 2, \qquad 0<\beta<q, \qquad \gamma>0,$$

то ряд (1.2.2) сходится.

Доказательство. Покажем, что для функции $F(x)$ рядом Фурье будет

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\theta A_k}{\theta+i\lambda_k} e^{\mathrm{i}\lambda_k x}.$$

Действительно,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} F(x)\, e^{-\mathrm{i}\lambda_k x} dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \theta \int_{0}^{\infty} e^{-\theta t} f(x-t) dt e^{-\mathrm{i}\lambda_k x} dx =$$

$$= \theta \int_{0}^{\infty} \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x-t)\, e^{-\mathrm{i}\lambda_k x} dx\right] e^{-\theta t} dt = \theta A_k \int_{0}^{\infty} e^{-(\theta+i\lambda_k)t} dt = \frac{\theta A_k}{\theta+i\lambda_k}.$$

В силу неравенства Хаусдорфа-Юнга, доказательство которого верно и для функций $f(x) \in \boldsymbol{B}$, будем иметь

$$\Omega(f;\theta)=\theta\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\int_{0}^{\infty}e^{-\theta t}f(x-t)dt\right|^{p}dx\right\}^{1/p}\geq$$

$$\geq\left\{\theta^{q}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\frac{A_k}{\theta+i\lambda_k}\right|^{q}\right\}^{1/q}\ (1<p\leq 2). \qquad (1.2.4)$$

Подставляя в (1.2.4) $\theta=\lambda_{2^{\nu-1}}$, получим

$$2^{-\frac{q}{2}}\sum_{k=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}}|A_k|^{q}<\Omega^{q}(f;\lambda_{2^{\nu-1}}). \qquad (1.2.5)$$

Используя неравенство Гёльдера и (1.2.5), имеем

$$\sum_{k=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}}|A_k|^{\beta}|k|^{\gamma}\leq\left\{\sum_{k=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}}|A_k|^{q}\right\}^{\frac{\beta}{q}}\left\{\sum_{k=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}}k^{\frac{\gamma q}{q-\beta}}\right\}^{1-\frac{\beta}{q}}\leq$$

$$\leq 2^{\frac{\beta}{2}}\Omega^{\beta}(f;\lambda_{2^{\nu-1}})\cdot\left(2^{\frac{\nu\gamma q}{q-\beta}}\cdot 2^{\nu-1}\right)^{\frac{q-\beta}{q}}=2^{\frac{\beta}{2}}\Omega^{\beta}(f;\lambda_{2^{\nu-1}})\cdot 2^{\nu\gamma+\frac{(\nu-1)(q-\beta)}{q}}=$$

$$=2^{\frac{\beta}{2}+\gamma}2^{(\nu-1)(\gamma+\frac{q-\beta}{q})}\Omega^{\beta}(f;\lambda_{2^{\nu-1}}).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}}|A_k|^{\beta}k^{\gamma}<C2^{(\nu-1)(\gamma+\frac{q-\beta}{q})}\Omega^{\beta}(f;\lambda_{2^{\nu-1}}), \qquad (1.2.6)$$

где константа C зависит от β и γ. Суммируя по ν неравенство (1.2.6), получим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}}|A_k|^{\beta}k^{\gamma}<C\sum_{\nu=1}^{\infty}2^{(\nu-1)(\gamma+\frac{q-\beta}{q})}\Omega^{\beta}(f;\lambda_{2^{\nu-1}}),$$

или

$$\sum_{k=2}^{\infty}|A_k|^{\beta}|k|^{\gamma}<C\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{\nu(\gamma+\frac{q-\beta}{q})}\Omega^{\beta}(f;\lambda_{2^{\nu-1}}). \qquad (1.2.7)$$

Так как $\lambda_{-k}=-\lambda_k$, то приняв $\theta=|\lambda_{-2^{\nu-1}}|$ в неравенстве (1.2.4), будем иметь

$$2^{-\frac{q}{2}}\sum_{k=-2^{\nu}}^{-(2^{\nu-1}+1)}|A_k|^q \le \Omega^{q}(f;|\lambda_{-2^{\nu-1}}|)=\Omega^{q}(f;\lambda_{2^{\nu-1}}).$$

Аналогично, как было установлено (1.2.7), можно получить, что

$$\sum_{k=-2}^{\infty}|A_k|^{\beta}k^{\gamma}<C\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{\nu\left(\gamma+\frac{q-\beta}{q}\right)}\Omega^{\beta}(f;\lambda_{2^{\nu}}). \qquad (1.2.8)$$

Из неравенств (1.2.7) и (1.2.8) следует утверждение теоремы 1.2.1.

Для формулировки дальнейшего результата введём обозначания:

$$G_n=\{k\colon 2^{-n-1}\le\lambda_k<2^{-n}\};$$

$$G_{-n}=\{k\colon -2^{-n-1}\le\lambda_k<-2^{-n}\};$$

$$M_n=\max_{k\in G_n}|k|;\;\; \mu(a)=\sum_{\lambda_k\ge a}1.$$

Теорема 1.2.2. *Пусть* $f(x)\in \boldsymbol{B}$ *и ее спектр* $\Lambda\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ *удовлетворяет условий (1.2.1). Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty}M_n^{\gamma}\{\mu(2^{-n-1})-\mu(2^{-n})\}^{1-\frac{\beta}{q}}\Omega^{\beta}\left(f;\frac{1}{2^n}\right)<\infty,$$

то ряд (1.2.2) сходится.

Доказательство. Подставляя $\theta=\frac{1}{2^n}$, в неравенстве (1.2.5), получим

$$\sum_{k\in G_n}|A_k|^q<2^{\frac{q}{2}}\Omega^{q}\left(f;\frac{1}{2^n}\right).$$

Отсюда, с помощью неравенство Гельдёра, будем иметь

$$\sum_{k\in G_n}|A_k|^{\beta}k^{\gamma}\le\left\{\sum_{k\in G_n}|A_k|^q\right\}^{\frac{\beta}{q}}\cdot\left\{\sum_{k\in G_n}k^{\gamma\frac{q}{q-\beta}}\right\}^{1-\frac{\beta}{q}}\le$$

$$\le M_n^{\gamma}[\mu(2^{-n-1})-\mu(2^{-n})]^{1-\frac{\beta}{q}}\cdot 2^{\frac{\beta}{2}}\Omega^{\beta}\left(f;\frac{1}{2^n}\right).$$

Суммируя по n последнее неравенство, находим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\in G_n}|A_k|^{\beta}k^{\gamma}\le 2^{\frac{\beta}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}M_n^{\gamma}[\mu(2^{-n-1})-\mu(2^{-n})]^{1-\frac{\beta}{q}}\Omega^{\beta}\left(f;\frac{1}{2^n}\right) \qquad (1.2.9).$$

Если принимать во внимание $G_{-n} = -G_n$ (это следует из равенства $\lambda_{-k} = -\lambda_k$) и сходимость элементов множеств G_{-n} и G_n, то, подобно неравенству (1.2.9), приходим к следующему неравенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in B_{-n}} |A_k|^{\beta} \, |k|^{\gamma} \leq 2^{\frac{\beta}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} M_n^{\gamma} [\mu(2^{-n-1}) - \mu(2^{-n})]^{1-\frac{\beta}{q}} \Omega^{\beta}\left(f; \frac{1}{2^n}\right).$$

Из последнего неравенства и (1.2.9) следует утверждение теоремы 1.2.2.

Пусть функция $f(x) \in \boldsymbol{B}$ для некоторого числа $\alpha\,(0 < \alpha \leq 1)$ выполняются условия

$$\left| \int_0^u f(x-t)dt \right| \leq C|u|^{1-\alpha}. \tag{1.2.10}$$

Покажем, что справедливо следующее соотношение

$$\Omega(f; \theta) \leq I(t)\theta^{\alpha}, \tag{1.2.11}$$

где $I(t) = C\int_0^{\infty} e^{-t} t^{1-\alpha} dt$ (C - константа). Действительно, интегрируя по частям внутренний интеграл в левой части (1.2.11), получим

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-\theta t} f(x-t)dt \right| = \left| \int_0^{\infty} e^{-\theta t} d\left(\int_0^t f(x-t_1)dt_1 \right) \right| =$$

$$= \left| e^{-\theta t} \int_0^t f(x-t_1)dt_1 \right|_0^{\infty} + \left| \theta \int_0^{\infty} e^{-\theta t} \left(\int_0^t f(x-t_1)dt_1 \right) dt \right| \leq$$

$$\leq C\theta \int_0^{\infty} e^{-\theta t} t^{1-\alpha} dt = C\theta^{\alpha-1} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1-\alpha} dt = I(t)\theta^{\alpha-1}.$$

Отсюда заключаем, что из условия (1.2.10) вытекает соотношение (1.2.11). Из теорем 1.2.1 и 1.2.2 вытекают ряд следствий.

Следствие 1.2.1. *Пусть функция $f(x) \in \boldsymbol{B}$ удовлетворяет условию (1.2.10) и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-\frac{\beta}{q}} \lambda_n^{\alpha\beta} < \infty, \tag{1.2.12}$$

тогда ряд (1.2.2) сходится.

В самом деле, так как из условий (1.2.10) следует неравенство (1.2.11), то

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu\left(\gamma+\frac{q-\beta}{q}\right)} \Omega^{\beta}(f;\lambda_{2^{\nu}}) \leq \mathrm{I}^{\beta}(\mathrm{t}) \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu\left(\gamma+\frac{q-\beta}{q}\right)} \lambda_{2^{\nu}}^{\alpha\beta}.$$

В силу монотонности последовательности $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходимость ряда в правой части последнего неравенства эквивалентна сходимости ряда (1.2.12).

Следствие 1.2.2. *Если функция* $f(x) \in \boldsymbol{B}$ *удовлетворяет условиям (1.2.10) и*

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} G_n^{\gamma} [\mu(2^{-n-1}) - \mu(2^{-n})]^{1-\frac{\beta}{q}} 2^{-\mathrm{n}\alpha} < \infty,$$

то ряд (1.2.2) сходится.

Заметим, что если в неравенстве (1.2.11) полагать $\gamma = 0,\ \beta = 1, p = 2$, $\lambda_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, то при $\gamma > \frac{1}{2}$ ряд Фурье сходится абсолютно. Такой результат установлен Н.П. Купцовым [17]. А для функции Безиковича аналогичные результаты получены в работах Ю.Х. Хасанова (см. напр. [46]), но вместо величины $\Omega(f;h)$ использован модуль усреднения порядка k

$$W_k(f;H)_{\boldsymbol{B_p}} = \sup_{T\geq H}\sup_{x\in R}\left|f_{T^k}(x)\right|_{\boldsymbol{B_p}} (\mathrm{H} > 0, k \in N),$$

где

$$f_{T^k}(x) = \frac{1}{(2T)^k} \int_{x-T}^{x+T} dt_1 \int_{t_1-T}^{t_1+T} dt_2 \ldots \int_{t_{k-2}-T}^{t_{k-2}+T} dt_{k-1} \int_{t_{k-1}-T}^{t_{k-1}+T} f(t_k)\, dt_k.$$

§ 1.3. Исследование признаков абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций, имеющих предельную точку в бесконечности

Пусть $\boldsymbol{B}_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ – линейное пространство, состоящее из функций $f(x)$, для которых $|f(x)|^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ интегрируема по Лебегу на любом конечном отрезке действительной оси и удовлетворяющих условию

$$\|f(x)\|_{\boldsymbol{B}_p} = \left\{\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^p dx\right\}^{1/p} < \infty \quad (1 \le p < \infty),$$

а при $p = \infty$ условию

$$\|f(x)\|_{\boldsymbol{B}_p} = vrai \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)| < \infty.$$

При $1 \le p \le \infty$, следуя А. Безиковичу [4], вводится следующее понятие $\boldsymbol{B}_p$ – почти-периодической функции.

Определение 1.3.1. Функция $f(x) \in \boldsymbol{B}_p$ $(1 \le p \le \infty)$ называется $\boldsymbol{B}_p$ - почти-периодической, если существует последовательность конечных тригонометрических полиномов $\{P_n(x)\}$ вида

$$P_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \exp(i\lambda_k x),$$

где (λ_k) - некоторое счётное множество действительных чисел, для которых

$$\lim_{n\to\infty} \overline{M}\{f(x) - P_n(x)\} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \|f(x) - P_n(x)\|_{\boldsymbol{B}_p} = 0.$$

Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\lambda_n x + b_n sin\lambda_n x) \tag{1.3.1}$$

где $\lambda_n < \lambda_{n+1},\ \lambda_n = \infty\ (n \to \infty)$;

$$a_0 = M\{f(x)\}, a_n = M\{f(x)cos\lambda_n x\},$$

$$b_n = M\{f(x)sin\lambda_n x\}(n = 1,2, \dots.);$$

$$M\{g(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g(x)dx\,.$$

В работах Е.А. Бредихиной [5, 6], А.С. Джафарова и Г.А. Мамедова [12], Н.П. Купцова [17], Б.М. Левитана [18], Ю. Муселиака [21], Я.Г. Притулы [23], получены некоторые достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических в смысле Бора и Безиковича функций. А в исследованиях Ю.Х. Хасанова [46] найдены не только достаточные, но и необходимые условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций в смысле Безиковича функций, которые не только дополняют, но и в ряде случаев усиливают результаты работ [5], [6], [12] [17], [18], [20], [21], [23].

Далее приводим некоторые новые результаты, которые относятся к вопросам абсолютной сходимости рядов вида (1.3.1) с известными коэффициентами. Если, в частности, функция $f(x)$ интегрируема в $(0;2\pi)$ и 2π –периодическая, кроме того λ_n целые, то ряд (1.3.1) является ее рядом Фурье.

Докажем следующую теорему, относящуюся к абсолютной сходимости ряда (1.3.1) с известными коэффициентами.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $f \epsilon \boldsymbol{B}_2$ *ограниченная функция. Предположим, что функция* $\Phi(u)$ *неубывающая, такая, что* $\Phi(u) > 0$ *при* $u > 0$ *и* $\frac{u^2}{\Phi(u)}$ *также неубывающая функция. Если при* $0 < \gamma < 1$ *выполняется условие*

$$\sum_{v=1}^{\infty}[\mu(2^v\pi) - \mu(2^{v-1}\pi) + 1]^{1-\frac{\gamma}{2}}\omega^\gamma(f;2^{-v})\omega_\Phi^{\frac{\gamma}{2}}(f;2^{-v})\Phi^{-\frac{\gamma}{2}}[\omega(f;2^{-v})] < \infty, \tag{1.3.2}$$

где

$$\omega(f;h) = \underset{\infty<x<\infty}{\text{vraisup}}|f(x+\delta) - f(x)| \quad (|\delta| \le h),$$

$$\omega_\Phi(f;h) = \sup_{|\delta|\le h} \bar{M}\{\Phi[|f(x+\delta) - f(x)|]\},$$

$$\bar{M}\{g(x)\} = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g(x)dx\,,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^\gamma + |b_n|^\gamma) \tag{1.3.3}$$

сходится.

Доказательство. Предварительно докажем следующее неравенство

$$\sum_{n\epsilon A_v}(|a_n|^2+|b_n|^2)\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}||f(x+2^{-v-1})-f(x-2^{-v-1})|^2|dx, \qquad (1.3.4)$$

где A_v - совокупность всех n, для которых $2^{v-1}\pi\leq\lambda_n\leq 2^v\pi$ $(v\geq 1)$.

Для любого $h>0$ рассмотрим функцию

$$F_h(x)=f(x+h)-f(x-h).$$

Коэффициенты Фурье функции $F_h(x)$ определяются следующим образом:

$$\overline{a_0}=M\{F_h(x)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[f(x+h)-f(x-h)]dx=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[f(x)-f(x)]dx=0.$$

$$\overline{a_n}=M\{F_h(x)cos\lambda_n x\}=M\{[f(x+h)-f(x-h)]cos\lambda_n x\}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left\{\int_{-T+h}^{T+h}f(t)cos\lambda_n(t-h)dt-\int_{-T-h}^{T-h}f(t)cos\lambda_n(t+h)dt\right\}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left\{\int_{-T}^{T}f(t)\,[cos\lambda_n tcos\lambda_n h+sin\lambda_n tsin\lambda_n h]dt-\right.$$

$$\left.-\int_{-T}^{T}f(t)\,[cos\lambda_n tcos\lambda_n h-sin\lambda_n tsin\lambda_n h]dt\right\}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)[cos\lambda_n tcos\lambda_n h+sin\lambda_n tsin\lambda_n h-cos\lambda_n tcos\lambda_n h+$$

$$+sin\lambda_n tsin\lambda_n h]dt=2sin\lambda_n h\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)\,sin\lambda_n tdt=$$

$$=2sin\lambda_n h\;M\{f(t)sin\lambda_n t\}=2b_n sin\lambda_n h.$$

Аналогично имеем

$$\overline{b_n} = -2a_n sin\lambda_n h.$$

Тогда в силу неравенства Бесселя получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)sin^2\lambda_n h = \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n sin\lambda_n h|^2 + |b_n sin\lambda_n h|^2) =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(|2a_n sin\lambda_n h|^2 + |2b_n sin\lambda_n h|^2) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(\left|\overline{b_n}\right|^2 + |\overline{a_n}|^2) \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x+h) - f(x-h)|^2 dx.$$

При $n \in A_v$ рассмотрим

$$2^{v-1}\pi h \leq \lambda_n h < 2^v \pi h.$$

Положим $h = 2^{-v-1}$. Тогда при $n \in A_v$ имеем

$$2^{v-1}\pi 2^{-v-1} \leq \lambda_n h < 2^v \pi 2^{-v-1} \text{ или } \frac{\pi}{4} \leq \lambda_n h < \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, $sin^2\lambda_n 2^{-v-1} \geq \frac{1}{2}$.

Отсюда, после использования этих выкладок, вытекает неравенство (1.3.4)

$$\sum_{n\in A_v}(|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq 2\sum_{n\in A_v}(|a_n|^2 + |b_n|^2)\, sin^2\lambda_n 2^{-v-1} \leq$$

$$\leq 2\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)sin^2\lambda_n 2^{-v-1} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x+2^{-v-1}) - f(x-2^{-v-1})|^2\, dx.$$

Далее, обозначим через $\Psi(u)$ функцию $\frac{u^2}{\Phi(u)}$, которая также является неубывающей. Так как функция $f(x)$ является ограниченной, то $\omega(f; 2^{-v}) < \infty$. Значит, если $\Phi(u) \equiv u^2$, то $\Psi(u) \equiv 1$ и предположение об ограниченности функции $f(x)$ будет излишним.

Умножив и разделив правую часть (1.3.4) на $\Phi[\omega(f; 2^{-v})]$, будем иметь

$$\sum_{n\in A_v}(|a_n|^2+|b_n|^2)\le$$

$$\le\frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x+2^{-v-1})-f(x-2^{-v-1})|^2dx\frac{\Phi[\omega(f;2^{-v})]}{\Phi[\omega(f;2^{-v})]}\le$$

$$\le\frac{1}{2}\frac{\omega^2(f;2^{-v})}{\Phi[\omega(f;2^{-v})]}\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Phi[\omega(f;2^{-v})]dt=$$

$$=\frac{1}{2}\omega^2(f;2^{-v})\Phi^{-1}[\omega(f;2^{-v})]\bar{M}\{\Phi[\omega(2^{-v})]\}=$$

$$=\frac{1}{2}\omega^2(f;2^{-v})\omega_{\Phi}(f;2^{-v})\Phi^{-1}[\omega(f;2^{-v})].$$

Пусть $m(A_v)$ - мера множества A_v. Тогда с помощью неравенства Гёльдера из последнего равенства, получим

$$\sum_{n\in A_v}(|a_n|^2+|b_n|^2)^{\frac{\gamma}{2}}\le[m(A_v)]^{1-\frac{\gamma}{2}}\left[\sum_{n\in A_v}(|a_n|^2+|b_n|^2)\right]^{\frac{\gamma}{2}}\le$$

$$\le[m(A_v)]^{1-\frac{\gamma}{2}}\left\{\frac{1}{2}\omega^2(f;2^{-v})\omega_{\Phi}(f;2^{-v})\Phi^{-1}[\omega(f;2^{-v})]\right\}^{\frac{\gamma}{2}}=$$

$$=2^{-\frac{\gamma}{2}}[m(A_v)]^{1-\frac{\gamma}{2}}\omega^{\gamma}(f;2^{-v})\omega_{\Phi}^{\frac{\gamma}{2}}(f;2^{-v})\Phi^{-\frac{\gamma}{2}}[\omega(f;2^{-v})]\le$$

$$\le2^{-\frac{\gamma}{2}}[\mu(2^v\pi)-\mu(2^{v-1}\pi)+1]^{1-\frac{\gamma}{2}}$$

$$\cdot\,\omega^{\gamma}(f;2^{-v})\omega_{\Phi}^{\frac{\gamma}{2}}(f;2^{-v})\Phi^{-\frac{\gamma}{2}}[\omega(f;2^{-v})].\ (1.3.5)$$

Значит при $n_0=min\,n\ (\lambda_n\ge\pi)$ из неравенства (1.3.5), находим, что

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)^{\frac{\gamma}{2}}\le$$

$$\le2^{-\frac{\gamma}{2}}\sum_{v=1}^{\infty}[\mu(2^v\pi)-\mu(2^{v-1}\pi)+1]^{1-\frac{\gamma}{2}}\cdot$$

$$\cdot\,\omega^{\gamma}(f;2^{-v})\omega_{\Phi}^{\frac{\gamma}{2}}(f;2^{-v})\Phi^{-\frac{\gamma}{2}}[\omega(f;2^{-v})]. \qquad (1.3.6)$$

В силу условия (1.3.2) этот ряд сходится. Теорема 1.3.1 доказана.

Теорема 1.3.2. *Пусть функция* $f \in B_2$. *Если при* $0 < \gamma < 2$ *выполняется условие*

$$\sum_{v=1}^{\infty} [\mu(2^v\pi) - \mu(2^{v-1}\pi) + 1]^{1-\frac{\gamma}{2}} \omega_2^{\gamma}(f; 2^{-v}) < \infty,$$

где

$$\omega_2(f; h) = \left[\sup_{|\delta| \le h} M\{|f(x+\delta) - f(x)|^2\} \right]^{1/2},$$

то ряд (*1.3.3*) *сходится.*

Доказательство. Неравенство (1.3.4) можно записать в следующем виде

$$\sum_{n \in A_v} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \le \frac{1}{2} M\{|f(x + 2^{-v-1}) - f(x - 2^{-v-1})|^2\} \le$$

$$\le \frac{1}{2} \sup_{|\delta| \le 2^{-v}} M\{|f(x+\delta) - f(x)|^2\} = \frac{1}{2}\omega(2^{-v}).$$

Отсюда, пользуясь неравенством (1.3.5), будем иметь

$$\sum_{n \in A_v} (|a_n|^2 + |b_n|^2)^{\frac{\gamma}{2}} \le 2^{-\frac{\gamma}{2}} [\mu(2^v\pi) - \mu(2^{v-1}\pi) + 1]^{1-\frac{\gamma}{2}} [\omega(f; 2^{-v})]^{\frac{\gamma}{2}} =$$

$$= 2^{-\frac{\gamma}{2}} [\mu(2^v\pi) - \mu(2^{v-1}\pi) + 1]^{1-\frac{\gamma}{2}} \omega_2^{\gamma}(f; 2^{-v}).$$

Тогда, на основании условия теоремы из (1.3.6) следует, что

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)^{\frac{\gamma}{2}} \le$$

$$\le 2^{-\gamma/2} \sum_{v=1}^{\infty} [\mu(2^v\pi) - \mu(2^{v-1}\pi) + 1]^{1-\frac{\gamma}{2}} \omega_2^{\gamma}(f; 2^{-v}) < \infty.$$

Теорема 1.3.2 доказана.

Для получения следующих результатов нам понадобиться

Лемма 1.3.1. *Если для неубывающей функции* $\Phi(u) \ge 0$ *при* $u \ge 0$

$$V_{\Phi,T}(f) = \sup_{\pi} \sum_{n=1}^{N} \Phi[|f(x_n) - f(x_{n-1})|],$$

где π *произвольное деление интервала* $(-T; T)$ *точками* $x_0, x_1, \dots, x_N$ *и*

$$V_\Phi(f) = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} V_{\Phi,T}(f)\,dx,$$

то для любого $h > 0$ справедлива оценка

$$\bar{M}\ \{\Phi[|f(x+h) - f(x-h)|\ ]\ \} \leq 2hV\Phi\ (f). \qquad (1.3.7)$$

Доказательство Пусть $V_\Phi(f) < \infty$. Предполжим, что для $\varepsilon > 0$ существует такое число T, что для каждого $T > T_0$ выполняется неравенство

$$V_{\Phi,T+3\mathrm{h}}(f) \leq 2[V_\Phi(f) + \varepsilon](T + 3h). \qquad (1.3.8)$$

Действительно, по определению верхнего предела

$$\frac{1}{2(T+3h)} V_{\Phi,T+3\mathrm{h}}(f) \leq V_\Phi(f) + \varepsilon,$$

отсюда вытекает неравенство (1.3.8).

При фиксированном числе $T > T_0$ определяем такой интервал $(-T-h, T-h)$, в котором точки $x_0, x_1, \dots, x_N$ будут

$$x_n - x_{n-1} \begin{cases} = 2h, & \text{если} \quad n = 1,2,\dots,N-1, \\ \leq 2h, & \text{если} \quad n = N. \end{cases}$$

Тогда, учитывая значения $x_n - x_{n-1}$, для допредельного среднего значения функции $\Phi[|f(x+h) - f(x-h)|]$, получим

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \Phi[|f(x+h) - f(x-h)|]dx = \frac{1}{2T}\sum_{n=1}^{N}\int_{x_{n-1}}^{x_n} \Phi[|f(x+2h) - f(x)|]dx =$$

$$= \frac{1}{2T}\left\{\int_0^{2h}\sum_{n=1}^{N} \Phi[|f(x_n+t) - f(x_{n-1}+t)|]dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{X_N - X_{N-1}} \Phi[|f(X_N + t + 2h) - f(X_N + t)|]dt \right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2T}\int_0^{2h} \sup_{x_n\in[-T+3h,\ T+3h]} \sum_{n=1}^{N} \Phi[|f(x_n) - f(x_{n-1})|]dt =$$

$$= \frac{1}{2T}\int_0^{2h} V_{\Phi,\mathrm{T+h+t}}(f)dt = \frac{1}{2T}V_{\Phi,\mathrm{T+3h}}(f)\int_0^{2h} dt = \frac{h}{T}V_{\Phi,\mathrm{T+3h}}(f) \le$$

$$\le \frac{h}{T}2[V_\Phi(f)+\varepsilon](T+3h) = \left(2h+\frac{6h^2}{T}\right)[V_\Phi(f)+\varepsilon].$$

Отсюда, при $T\to\infty$ переходя к пределу, получим оценку (1.3.7), что и доказывает справедливость леммы 1.3.1.

Теорема 1.3.3. *Пусть* $f\epsilon\boldsymbol{B}_2$ *и задана неубывающая функция* $\Phi(\mathrm{u})$ *такая, что* $\Phi(0)>0$ *и для* $u>0$, $\Phi(0)\ge 0$. Если $V_\Phi(f)<\infty$ *при* $0<\gamma<2$, *и выполнено условие*

$$\sum_{v=1}^{\infty}[\mu(2^v\pi)-\mu(2^{v-1}\pi)+1]^{1-\frac{\gamma}{2}}2^{-\frac{\gamma v}{2}}\omega^\gamma(f;2^{-v})\Phi^{-\frac{\gamma}{2}}[\omega(f;2^{-v})]<\infty, \qquad (1.3.9)$$

то ряд (*1.3.*3) *сходится.*

Доказательство. В силу леммы 1.3.1. имеем

$$\omega_\Phi(2^{-v}) = \sup_{|\delta|\le 2^{-v}}\bar{M}\{\Phi[|f(x+\mathrm{h})-f(x-\mathrm{h})|]\} \le$$

$$\le 2hV_\Phi(f) = \sup_{2^{-v}}\sum_{v=1}^{\infty}\Phi[|f(x+2^{-v})-f(x)|] \le 2^{-v}.$$

Тогда, если в неравенстве (1.3.2) величину $\omega_\Phi^{\gamma/2}(f;2^{-v})$ заменить на 2^{-v}, то получаем неравенство (1.3.9), что и доказывает теорему 1.3.3.

§ 1.4. Об абсолютной сходимости рядов Фурье с малыми пропусками

Пусть $f(x)$ – интегрируемая на отрезке $[-\pi,\pi]$ периодическая функция, которая имеет ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (1.4.1)$$

где коэффициенты Фурье определены с помощью формул

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Определение 1.4.1([**9**]). Говорят, что ряд (1.4.1) *имеет пропуски, если для коэффициентов этого ряда выполняются следующие условия*

$$a_n^2 + b_n^2 > 0, \quad (n = n_k\,, \ k = 1, 2 \dots),$$

где $n_1, \ n_2, \ \dots \ , \ n_k$ *- натуральные числа, для которых*

$$1 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k \, .$$

Пусть на $[a, \ b]$ задана функция $f(x)$. Разобьем этот отрезок $[a, \ b]$ на части с помощью точек деления

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b.$$

Из величин приращений функции образуем следующую сумму

$$\sigma(n) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|. \qquad (1.4.2)$$

Точную верхнюю границу этих сумм принято называть полным изменением (полной вариацией) функции в этом отрезке и обозначается символом

$$\sup_n \{\sigma(n)\} = \bigvee_a^b f(x),$$

где $n -$ произвольные делиния отрезка $[a, b]$.

Такой класс функций будем обозначать через $\bigvee[a, b]$.

Заметим, что в определении 1.4.2 вопрос о непрерывности функции $f(x)$ никакой роли не играет.

Известно [1], что если $f(x) \in \bigvee[-\pi, \pi]$, то для коэффициентов ряда Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k cos\, kx + b_k sin\, kx)$$

выполняются условия

$$a_k = O\left(\frac{1}{k}\right), \ \ b_k = O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Пусть $f(x) \in \bigvee[-\pi, \pi]$. Если

А) $f(x) \in \bigvee[-\pi, \pi]$ для $|x - x_0| \leq \delta$ или

Б) $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α $(0 < \alpha < 1)$ для $|x - x_0| \leq \delta$, то Нобль [22] доказал, что для ряда

$$\sum \left(a_{n_k} cos\, kx + b_{n_k} sin\, kx\right)$$

имеют места следующие оценки

А) $a_{n_k} = O\left(\frac{1}{n_k}\right), \quad b_{n_k} = O\left(\frac{1}{n_k}\right);$

Б) $a_{n_k} = O\left(\frac{1}{n_k^{\alpha}}\right), \quad b_{n_k} = O\left(\frac{1}{n_k^{\alpha}}\right).$

В качестве ограничительных условий Нобль полагает

$$N_k = \min\{n_k - n_{k-1}, \;\; n_{k+1} - n_k\},$$

и требует, чтобы было выполнено

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_k}{\log n_k} = \infty. \tag{1.4.3}$$

В этой же работе Нобль доказал, что

1) если выполнены условия (1.4.3) и функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица при $0 < \alpha < 1$ и $\beta = \frac{2}{2\alpha+1}$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(|a_n|^{\beta} + |b_n|^{\beta}\right) < \infty;$$

2) если $\delta \leq |x| \leq \pi$ и $f(x)$ удовлетворяет условию $|T_n(x)| \leq \frac{K}{\delta}$ и $\beta<\alpha$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta-1/2}(|a_n| + |b_n|) < \infty,$$

где $T_n(x)$ - тригонометрический многочлен степени не выше n, а K - независимая константа.

Для всех лакунарных рядов условие (1.4.3) выполняется. Аналогичные утверждения также имеют место и для рядов, у которых пропуски между членами значительно меньше, чем у лакунарных.

Пусть $f(x) \in \vee[-\eta, \eta]$ $(0 < \eta < \pi)$, а последовательность $\{n_k\}$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ удовлетворяет условию малых пропусков вида

$$n_{k+1} - n_k \geq \frac{4\pi}{\eta}. \qquad (1.4.4)$$

Если $f(x) \in \vee[-\eta, \eta]$ $(0 < \eta < \pi)$ и имеют место малые пропуски вида (1.4.4), то Нобль [22] доказал, что при выполнения следующих условий

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}\omega(m^{-1}, f)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\frac{m_{k+1} - m_k}{\log m_k} \to \infty \qquad (k \to \infty),$$

имеет место

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{m_k} cos\, kx + b_{m_k} sin\, kx\right) < \infty.$$

П.Кеннеди [15] обобщая результат Нобля показал, что для абсолютной сходимости указанного ряда Фурье с малыми пропусками вида (1.4.4) достаточно, чтобы $n_{k+1} - n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$.

Если $f(x)$ имеет ограниченную r - вариацию и удовлетворяет условию Липшица порядка α $(0 < \alpha \leq 1)$ в некотором интервале, то М. Мохаммед [20] доказал, что

$$\sum \left(|a_n|^{\beta} + |\, b|^{\beta}\right) < \infty, \ \left(\beta > \frac{2}{2 + \alpha}\right),$$

или

$$\sum n^{\beta/2}(|a_n| + |b_n|) < \infty, \ (\beta < \alpha).$$

Обобщая результаты Нобля, Кеннеди и Мохаммеда для рядов Фурье с малыми пропусками вида (1.4.4), Р. Боянич и М. Томич [9] доказали, что если этот ряд на отрезке $[-\eta, \eta] \subset [-\pi, \pi]$ $(0 < \eta < \pi)$ имеет модуль непрерывности вида

$$\omega(h, f) = \sup_{|x_1 - x_2| \leq h} |f(x_1) - f(x_2)| \quad (x_1, x_2 \in [-\eta, \eta]),$$

то имеет место следующее утверждение:

Пусть коэффициенты ряда Фурье функции $f(x)$ имеют малые пропуски вида (1.4.4), кроме того выполнены условия

$$\int_{1}^{\infty} \omega\left(\frac{1}{t}, f\right)\left(\sum_{n_{k \le t}} 1\right)^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} < \infty \,,$$

или

$$\int_{-\eta}^{\eta} |df(t)| < \infty, \quad \int_{1}^{\infty} \omega\left(\frac{1}{t}, f\right)\left(\sum_{n_{k \le t}} 1\right)^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} < \infty,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|a_{n_k}\right| + \left|b_{n_k}\right|\right) < \infty.$$

В настоящей работе исследуются достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций с малыми пропусками вида (1.4.4) в равномерной метрике.

Пусть $f(x) \in \boldsymbol{B}$, спектр которой имеет единственную предельную точку в∞. Запишем ряд Фурье этой функции в симметричной форме

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp(i\lambda_k x), \tag{1.4.5}$$

где

$$A_k = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) \exp(-i\lambda_k x)\, dx,$$

- коэффициент Фурье ряда (1.4.5) и числа $\{\lambda_n\}$ – показатели Фурье, которые имеет единственную предельную точку в бесконечности (см. например [46] или [49]), то есть

$$\lambda_k > 0 \ \ (k > 0); \ \ \lambda_{-k} = -\lambda_k, |\lambda_k| < |\lambda_{k+1}|, \ \ (k = 1,2,\dots), \lim_{k \to \infty} |\lambda_k| = \infty. \tag{1.4.6}$$

Приводим следующие вспомогательные утверждения, которые используются для получения основного результата данного параграфа.

Лемма 1.3.1. *Пусть функция* $f(x) \in \boldsymbol{B}$ *и*

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{r} A_\nu e^{i\lambda_\nu x}, F^*(x) = \sum_{\nu=1}^{r} A_\nu^* e^{i\lambda_\nu x},$$

где

$$A_\nu = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-T}^{T} f(x)\, e^{-i\lambda_\nu x} dx, \;\; A_\nu^* = sign\, A_\nu$$

$(\nu = \overline{1,r})$. *Если выполнено условие* $l \geq \frac{2\pi}{T}$ $(0 < T < \pi)$ *, то справедлива следующая оценка*

$$\sum_{\nu=1}^{r} |A_\nu| \leq C \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (1 - \frac{|x|}{T})\, F(x)F^*(x)dx, \qquad (1.4.7)$$

где C *- независимая константа.*

Доказательство. Рассмотрим допредельное среднее значение

$$I = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (1 - \frac{|x|}{T})\, F(x)F^*(x)dx. \qquad (1.4.8)$$

Для этой величине справедливы следующие соотношения

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (1 - \frac{|x|}{T})\, e^{i\lambda_\nu x} dx = \frac{1}{2} (\lambda_\nu = 0),$$

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|x|}{T}\right) e^{i\lambda_\nu x} dx = \frac{2}{\lambda_\nu^2 T^2} sin^2 \frac{\lambda_\nu T}{2} (\lambda_\nu \neq 0).$$

Действительно, интегрируя по частям, при $\lambda_\nu \neq 0$ имеем

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (1 - \frac{|x|}{T})\, e^{i\lambda_\nu x} dx = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|x|}{T}\right) (\cos\lambda_\nu x + i\, sin\, \lambda_\nu x) dx =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \left(1 - \frac{x}{T}\right) \cdot \cos\lambda_\nu x\, dx = \left(\lambda_\nu{}^2 T^2\right)^{-1} \int_{0}^{T} \sin\lambda_\nu x\, dx =$$

$$= -\left(\lambda_\nu{}^2 T^2\right)^{-1} \cos\lambda_\nu T - \left(\lambda_\nu{}^2 T^2\right)^{-1} =$$

$$= (\lambda_\nu T)^{-2} (1 - cos\, \lambda_\nu T) = \frac{2sin^2 \frac{\lambda_\nu T}{2}}{\lambda_\nu^2 T^2}.$$

Аналогично, при $\lambda_\nu = 0$ имеем

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(1-\frac{|x|}{T})\,e^{i\lambda_\nu x}dx=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}(1-\frac{|x|}{T})\,dx=\frac{1}{T}\left(T-\frac{T^2}{2T}\right)=\frac{1}{2}.$$

Тогда с помощью этих равенств из (1.4.8) получим

$$I=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(1-\frac{|x|}{T})F(x)F^*(x)dx=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(1-\frac{|x|}{T})\sum_{\nu=1}^{r}A_\nu e^{i\lambda_\nu x}\sum_{\nu=1}^{r}A_\mu^* e^{i\lambda_\nu x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|x|}{T}\right)\sum_{\nu=1}^{r}A_\nu e^{i\lambda_\nu x}\sum_{\mu=1}^{r}A_\mu^* e^{i\lambda_\mu x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|x|}{T}\right)\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{r}A_\nu e^{i\lambda_\nu x}\cdot A_\mu^* e^{i\lambda_\mu x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2T}\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{r}A_\nu A_\mu^*\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|x|}{T}\right)e^{(\lambda_\nu+\lambda_\mu)ix}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{r}|A_k|+\frac{1}{T^2}\sum_{\substack{\nu=1\\(\nu\neq\mu)}}^{r}\sum_{\mu=1}^{r}A_\nu A_\mu^*\frac{1}{(\lambda_\nu-\lambda_\mu)^2}sin^2\frac{1}{2}(\lambda_\nu-\lambda_\mu)+$$

$$+\frac{1}{T^2}\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{r}A_\nu A_\mu^*\frac{1}{(\lambda_\nu+\lambda_\mu)^2}sin^2\frac{1}{2}(\lambda_\nu-\lambda_\mu)=I_1+I_2+I_3$$

Оценим I_2 и I_3.

$$|I_2|\le\left|\frac{1}{T^2}\sum_{\substack{\nu=1\\(\nu\neq\mu)}}^{r}\sum_{\mu=1}^{r}A_\nu A_\mu^*\frac{1}{(\lambda_\nu-\lambda_\mu)^2}sin^2\frac{1}{2}(\lambda_\nu-\lambda_\mu)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{T^2}\sum_{\substack{\nu=1\\(\nu\neq\mu)}}^{r}\sum_{\mu=1}^{r}|A_\nu A_\mu^*|\frac{1}{(\lambda_\nu-\lambda_\mu)^2}\le\frac{1}{T^2}\sum_{\nu=1}^{r}|A_\nu|\sum_{\substack{\mu=1\\(\nu\neq\mu)}}^{\tau}\frac{1}{(\lambda_\nu-\lambda_\mu)^2}.$$

Так как

$$|\lambda_\nu-\lambda_\mu|\ge|\nu-\mu|l$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}, \qquad (A)$$

то для внутренней суммы выполняется неравенство

$$\sum_{\substack{\mu=1\\(\nu\neq\mu)}}^{r}\frac{1}{(\lambda_\nu-\lambda_\mu)^2}\leq\frac{2}{l^2}\sum_{\substack{\mu=1\\(\nu\neq\mu)}}^{r}\frac{1}{(\nu-\mu)^2}\leq\frac{\pi^2}{3l^2}.$$

Следовательно, окончательно имеем

$$|I_2|\leq\frac{\pi^2}{3T^2l^2}\sum_{\nu=1}^{r}|A_\nu|. \qquad (1.4.9')$$

Далее,

$$|I_3|\leq\frac{1}{T^2}\sum_{\nu=1}^{r}|A_\nu|\sum_{\mu=1}^{\tau}\frac{1}{(\lambda_\nu+\lambda_\mu)^2}.$$

Так как $\lambda_\mu\geq\mu l,$ то учитывая равенство (A) для внутренней суммы получаем

$$\sum_{\mu=1}^{r}\frac{1}{(\lambda_\nu+\lambda_\mu)^2}\leq\frac{1}{l^2}\sum_{\mu=1}^{r}\frac{1}{\mu^2}\leq\frac{\pi^2}{6l^2}.$$

Следовательно, имеем

$$|I_3|\leq\frac{\pi^2}{6T^2l^2}\sum_{\nu=1}^{r}|A_\nu|. \qquad (1.4.9'')$$

По условию леммы $l\geq\frac{2\pi}{T}$. Поэтому из неравенства $|\mathrm{I}|\geq|\mathrm{I}_1|-|\mathrm{I}_2|-|\mathrm{I}_3|$ – и оценки I_2 и I_3 следует, что

$$|\mathrm{I}|\geq\left(\frac{1}{4}-\frac{\pi^2}{2T^2l^2}\right)\sum_{\nu=1}^{r}|A_\nu|.$$

Отсюда получаем неравенство (1.4.7) и лемма 1.4.1 доказана.

Пусть показатели Фурье ряда (1.4.5) удовлетворяют условиям (1.4.6). Рассмотрим частичную сумму этого ряда

$$S_m(x)=\sum_{k=0}^{m}A_k\,e^{i\lambda_k x},$$

где

$$S_0(x) = A_0, \qquad S_1(x) = A_0 + A_1 e^{i\lambda_1 x}, \qquad S_2(x) = A_0 + A_1 e^{i\lambda_1 x} + A_2 e^{i\lambda_2 x},$$

$$S_3(x) = A_0 + A_1 e^{i\lambda_1 x} + A_2 e^{i\lambda_2 x} + A_3 e^{i\lambda_3 x}, \ldots,$$

$$S_{m-1} = A_0 + A_1 e^{i\lambda_1 x} + A_2 e^{i\lambda_2 x} + A_3 e^{i\lambda_3 x} + \cdots + A_{m-1} e^{i\lambda_{(m-1)} x}.$$

Простой подсчёт показывает, что последовательность первых арифметических средних ряда имеет следующий вид

$$\sigma_m(x)_{\boldsymbol{B}} = \frac{S_0(x)_{\boldsymbol{B}} + S_1(x)_{\boldsymbol{B}} + S_2(x)_{\boldsymbol{B}} + S_3(x)_{\boldsymbol{B}} + \cdots + S_{m-1}(x)_{\boldsymbol{B}}}{m} =$$

$$= \frac{A_0}{m} + \frac{A_0 + A_1 e^{i\lambda_1 x}}{m} + \frac{A_0 + A_1 e^{i\lambda_1 x} + A_2 e^{i\lambda_2 x}}{m} +$$

$$+ \frac{A_0 + A_1 e^{i\lambda_1 x} + A_2 e^{i\lambda_2 x} + A_3 e^{i\lambda_3 x}}{m} + \cdots +$$

$$+ \frac{A_0 + A_1 e^{i\lambda_1 x} + A_2 e^{i\lambda_2 x} + A_3 e^{i\lambda_3 x} + \cdots + A_{m-1} e^{i\lambda_{(m-1)} x}}{m} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x+t) \frac{sin^2 \frac{m\lambda_k}{2} t}{m sin^2 \frac{\lambda_k t}{2}} dt = \sum_{k=-m}^{m} \left(1 - \frac{|k|}{m}\right) A_k e^{i\lambda_k x}.$$

Лемма 1.4.2. *Если* $l \geq \frac{2\pi}{T} (0 < T < \pi)$*, то имеет место*

$$\sum_{\lambda_\nu \leq m} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{m}\right) \left|A_\nu e^{i\lambda_\nu x}\right| |sin\, \lambda_\nu h| \leq$$

$$\leq \mathrm{C} \left\{ \int_{-T}^{T} (\sigma_m(x+h, f)_{\boldsymbol{B}} - \sigma_m(x-h, f)_{\boldsymbol{B}})^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \chi^{\frac{1}{2}}(m), \qquad (1.4.10)$$

где C*- константа, а* $\chi(t) \leq \sum_{\lambda_\nu \leq t} 1$.

Доказательство. Пусть $f(x) \in \boldsymbol{B}$ и существует ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{i\lambda_\nu x}.$$

Используя обозначения $\tau_{-h} f(x) = f(x-h)$, $\tau_h f(x) = f(x+h)$, имеем

$$S[\tau_h f - \tau_{-h} f](x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{i\lambda_\nu (x+h)} - \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{i\lambda_\nu (x-h)} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \left(e^{i\lambda_\nu (x+h)} - e^{i\lambda_\nu (x-h)}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \left(e^{i\lambda_\nu x} e^{i\lambda_\nu h} - e^{i\lambda_\nu x} e^{-i\lambda_\nu h}\right) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{i\lambda_\nu x} \left(e^{i\lambda_\nu h} - e^{-i\lambda_\nu h}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{i\lambda_\nu x} 2i \sin \lambda_\nu h\,.$$

Аналогично для последовательности арифметических средних находим

$$\sigma_m(x, \tau_h f - \tau_{-h} f)_{\boldsymbol{B}} =$$

$$= \sum_{\lambda_\nu \leq m} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{m}\right) A_\nu e^{i\lambda_\nu (x+h)} - \sum_{\lambda_\nu \leq m} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{m}\right) A_\nu e^{i\lambda_\nu (x-h)} =$$

$$= \sum_{\lambda_\nu \leq m} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{m}\right) A_\nu \left(e^{i\lambda_\nu (x+h)} - e^{i\lambda_\nu (x-h)}\right) =$$

$$= \sum_{\lambda_\nu \leq m} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{m}\right) A_\nu \left(e^{i\lambda_\nu x} e^{i\lambda_\nu h} - e^{i\lambda_\nu x} e^{-i\lambda_\nu h}\right) =$$

$$= \sum_{\lambda_\nu \leq m} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{m}\right) A_\nu e^{i\lambda_\nu x} \left(e^{i\lambda_\nu h} - e^{-i\lambda_\nu h}\right) =$$

$$= \sum_{\lambda_\nu \leq m} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{m}\right) A_\nu e^{i\lambda_\nu x} 2i \sin \lambda_\nu h.$$

В силу леммы 1.4.1, используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\sigma_m(x, \tau_h f - \tau_{-h} f)_{\boldsymbol{B}} =$$

$$= 2i \sum_{\lambda_\nu \leq m} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{m}\right) \left|A_\nu e^{i\lambda_\nu x}\right| |\sin \lambda_\nu h| \leq$$

$$\leq C \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|x|}{T}\right) \sigma_m(x, \tau_h f - \tau_{-h} f)_{\boldsymbol{B}} \sigma_m^*(x, \tau_h f - \tau_{-h} f)_{\boldsymbol{B}} dx \leq$$

$$\leq C \left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sigma_m(x, \tau_h f - \tau_{-h} f)_{\boldsymbol{B}} dx \right| \left| \frac{1}{2T} \int_{T}^{T} \sigma_m^*(x, \tau_h f - \tau_{-h} f)_{\boldsymbol{B}} dx \right| \leq$$

$$\leq C \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (\sigma_m(x, \tau_h f - \tau_{-h} f)_{\boldsymbol{B}})^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(\sigma_m^*(x,\tau_h f-\tau_{-h}f)_{\boldsymbol{B}})^2dx\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{1.4.11}$$

где $\sigma^*(f)=sign\sigma(f)$.

Так как $[T;\ T]\subset[-\pi;\ \pi]$, то

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(\sigma_m^*(x,\tau_h f-\tau_{-h}f)_{\boldsymbol{B}})^2dx\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sigma_m^*(x,\tau_h f-\tau_{-h}f)_{\boldsymbol{B}})^2dx\le$$

$$\le\frac{\pi}{2}\sum_{\lambda_\nu\le m}(A_\nu^*)^2\le\frac{\pi}{2}\sum_{\lambda_\nu\le m}1=\ \chi(m). \tag{1.4.12}$$

Очевидно, что

$$\sigma_m(x,\tau_h f-\tau_{-h}f)_{\boldsymbol{B}}=\sigma_m(x+h,f)_{\boldsymbol{B}}-\sigma_m(x-h,f)_{\boldsymbol{B}}.$$

Подставляя оценку (1.4.12) в (1.4.11) получим неравенство (1.4.10). Лемма 1.4.2 доказана.

Лемма 1.4..3. *Пусть* $\{\sigma_m(f,h)_{\boldsymbol{B}}\}$ *– последовательность первых арифметических средних ряда (1.4.5) и* $|x|\le\frac{T}{2}$,$0<h<\frac{T}{4}$. *Тогда справедлива оценка*

$$|\sigma_m(f,x+h)_{\boldsymbol{B}}-\sigma_m(f,x-h)_{\boldsymbol{B}}|\le 2\omega(f,h)_{\boldsymbol{B}}+C(T)\,, \tag{1.4.13}$$

где

$$C(T)=\ m\left(sin^2\frac{T}{8}\right)^{-1}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt.$$

Доказательство. Рассмотрим арифметические средние ряда (1.4.5)

$$\sigma_m(f,h)_{\boldsymbol{B}}=\frac{S_0(f,h)_{\boldsymbol{B}}+S_1(f,h)_{\boldsymbol{B}}+S_2(f,h)_{\boldsymbol{B}}+\ldots+S_{m-1}(f,h)_{\boldsymbol{B}}}{m}=$$

$$=\sum_{\nu=-m}^{m}\left(1-\frac{|\nu|}{m}\right)A_\nu e^{i\lambda_\nu x}=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x+t)_{\boldsymbol{B}}\frac{sin^2\frac{mt}{2}}{msin\frac{t}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x+t)_{\boldsymbol{B}}\sum_{\nu=-m}^{m}\left(1-\frac{|\nu|}{m}\right)e^{i\lambda_\nu x}\,dt=$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+t)_{\boldsymbol{B}} K_m(t)\,dt \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)_{\boldsymbol{B}} K_m(t)\,dt,$$

где

$$K_m(t) = \frac{sin^2\frac{mt}{2}}{msin\frac{t}{2}} = \sum_{\nu=-m}^{m}\left(1-\frac{|\nu|}{m}\right)e^{i\lambda_\nu t}$$

– ядро Фейера, а при $T \to \infty$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} K_m(t)\,dt = 1.$$

Тогда для последовательности средних арифметических ряда (1.4.5) получим

$$\sigma_m(f, x+h)_{\boldsymbol{B}} - \sigma_m(f, x-h)_{\boldsymbol{B}} \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h+t)_B K_m(t)dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-h+t)_B K_m(t)dt \ =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+h+t)_B - f(x-h+t)_B\right)K_m(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}\left(f(x+h+t)_B - f(x-h+t)_B\right)K_m(t)dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{T}{4}}\left(f(x+h+t)_B - f(x-h+t)_B\right)K(t)dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{T}{4}}^{\pi}\left(f(x+h+t)_B - f(x-h+t)_B\right)K_m(t)dt = I_1 + I_2. \quad (1.4.14)$$

Так как по условиям леммы

$$|x| \le \frac{T}{2}\,, \qquad 0 < h < \frac{T}{4}\,, \qquad t \le \frac{T}{4},$$

то $(x+h+t),\ (x-h+t) \in [-T,\ T]$ и $|(x+h+t)-(x-h+t)| = 2h$.

С помощью следующего свойства модуля непрерывности

$$\omega(f, kh)_{\boldsymbol{B}} \le k\omega(f, h)_{\boldsymbol{B}},$$

где $h \ge 0, k -$ целое число, получим

$$|f(x+h+t)_B - f(x-h+t)_B| \le \omega(f, 2h)_B \le 2\omega(f, h)_B.$$

Следовательно, отсюда следует, что

$$|I_1| \le \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} |f(x+h+t)_B - f(x-h+t)_B| K_m(t) dt \le$$

$$\le 2\omega(f, h)_{\boldsymbol{B}} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} K_m(t) dt \le 2\pi\omega(f, h)_{\boldsymbol{B}}. \qquad (1.4.15)$$

Далее

$$|I_2| \le \frac{1}{T} \int_{-\pi}^{\frac{T}{4}} |f(x+h+t)_B - f(x-h+t)_B| K_m(t) dt +$$

$$+ \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{4}}^{\pi} |f(x+h+t)_B - f(x-h+t)_B| K_m(t) dt \le$$

$$\le \max_{\frac{T}{4} \le t \le \pi} K_m(t) \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \le \left[m \sin^2 \frac{T}{8}\right]^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt. \qquad (1.4.16)$$

Подставляя (1.4.15) и (1.4.16) в (1.4.14) получим неравенство (1.4.13). Отсюда и следует доказательство леммы 1.4.3.

Лемма 1.4.4. *Пусть равнамерная почти-периодическая функция* $f(x) \in V[-T, T]$*и выполнены условия*

$$V[-T, T] f(x, h)_{\boldsymbol{B}} = \int_{-T}^{T} |df(t)| \left(0 \le h \le \frac{T}{4}\right).$$

Тогда

$$\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\sigma_m(f, x+h)_{\boldsymbol{B}} - \sigma_m(f, x-h)_{\boldsymbol{B}}| dx\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \{V[-T, T]\, f(x, h)_{\boldsymbol{B}} \cdot h\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.4.17)$$

Доказательство. В силу леммы 1.4.3 имеем

$$\sigma_m(f, x+h)_{\boldsymbol{B}} - \sigma_m(f, x-h)_{\boldsymbol{B}} =$$

$$= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (f(x+h+t)_{\boldsymbol{B}} - f(x-h+t)_{\boldsymbol{B}}) K_m(t) dt \le$$

$$\le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+h+t)_{\boldsymbol{B}} - f(x-h+t)_{\boldsymbol{B}}) K_m(t) dt,$$

где $K_m(t)$ – ядро Фейера.

Значит

$$\frac{1}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\sigma_m(f, x+h)_{\boldsymbol{B}} - \sigma_m(f, x-h)_{\boldsymbol{B}}| dt \le$$

$$\le \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\pi}^{\frac{T}{4}} |f(x+h+t)_{\boldsymbol{B}} - f(x-h+t)_{\boldsymbol{B}}| K_m(t) dt dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{4}}^{\pi} |f(x+h+t)_{\boldsymbol{B}} - f(x-h+t)_{\boldsymbol{B}}| K_m(t) dt\, dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{\frac{T}{4}}^{\pi} |f(x+h+t)_{\boldsymbol{B}} - f(x-h+t)_{\boldsymbol{B}}| K_m(t) dt\, dx = I_1 + I_2. \qquad (1.4.18)$$

Так как по условиям леммы $|x| \le \frac{T}{2}$,$0 < h < \frac{T}{4}$, $|t| \le \frac{T}{4}$ и функция $f(x) \in B$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-T,\ T]$, то

$$\frac{1}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(x+h+t)_{\boldsymbol{B}}-f(x-h+t)_{\boldsymbol{B}}|dx \le$$

$$\le \frac{1}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(\int_{x-h+t}^{x+h+t} df(v)\right)dx.$$

Последнее неравенство можно записать в следующем виде

$$\frac{1}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(x+h+t)_{\boldsymbol{B}}-f(x-h+t)_{\boldsymbol{B}}|dx \le 2h\frac{1}{2T}\int_{-\frac{T}{2}-h+t}^{\frac{T}{2}+h+t}|df(v)| \le$$

$$\le h\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}|df(v)| = hV[-T,T]f(x,h)_{\boldsymbol{B}}.$$

Оценим I_1 в правой части (1.4.18).

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(x+t+h)_{\boldsymbol{B}}-f(x-t+h)_{\boldsymbol{B}}|\,dx\right)K_m(t)dt \le$$

$$\le 2hV[-T,T]f(x,h)_{\boldsymbol{B}}\frac{1}{2T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}K_m(t)dt \le hV[-T,T]f(x,h)_{\boldsymbol{B}}. \qquad (1.4.19)$$

Пользуясь неравенством (1.4.16) для I_2 получим

$$I_2 \le \left(m\sin^2\frac{T}{8}\right)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\ \ \frac{1}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}dx \le \frac{T}{8}C(T). \qquad (1.4.20)$$

Подставляя (1.4.19) и (1.4.20) в (1.4.18) и используя неравенство $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}$, получим оценку (1.4.17). Лемма 1.4.4 доказана.

Теперь приводим основной результат этого параграфа.

Теорема 1.4.1. *Пусть* $f(x) \in \boldsymbol{B}$ *имеет ряд Фурье (1.4.5) с показателями, удовлетворяющими условиям (1.4.6). Если этот ряд допускает малые пропуски вида (1.4.4) и*

$$\int_{1}^{\infty} \omega\left(f;\frac{1}{t}\right)_{\boldsymbol{B}} \chi^{\frac{1}{2}}(t)\frac{dt}{t} < \infty,$$

где $\omega\left(f;\frac{1}{t}\right)_{\boldsymbol{B}}$ *- модуль непрерывности функции* $f(x) \in \boldsymbol{B}$, *а*

$$\chi(t) = \sum_{\lambda_\nu \le t} 1,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_\nu| < \infty.$$

Доказательство. Пусть $[-T;T] \subset [-\pi,\ \pi]$ и $l = \frac{4\pi}{T}, (0 < T < \pi)$. Тогда согласно оценке (1.4.10) будем иметь

$$\sum_{\lambda_\nu \le m} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{m}\right)|A_\nu||sin\,\lambda_\nu h| \le$$

$$\le \frac{4\sqrt{2\pi}}{T}\left\{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\sigma_m\,(x+h,f)_{\boldsymbol{B}} - \sigma_m(x-h,f)_{\boldsymbol{B}})^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \chi^{\frac{1}{2}}(m). \qquad (1.4.21)$$

Полагая $m = 2\lambda_r$, получим

$$\sum_{\lambda_\nu \le 2\lambda_r} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{2\lambda_r}\right)|A_\nu||sin\,\lambda_\nu h| \ge$$

$$\ge \sum_{\lambda_\nu \le 2\lambda_r + 1} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{2\lambda_r}\right)|A_\nu||sin\,\lambda_\nu h| \ge \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{r} |A_\nu| \sin\lambda_\nu h\,.$$

Следовательно, неравенство (1.4.21) запишется так

$$\sum_{\nu=1}^{r} |A_\nu| \le \frac{8\sqrt{2\pi}}{T}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\sigma_{2\lambda_r}\,(x+h,f)_{\boldsymbol{B}} - \sigma_{2\lambda_r}(x-h,f)_{\boldsymbol{B}})^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \chi^{\frac{1}{2}}(2\lambda_r).$$

Выберем h таким образом, что было выполнено неравенство

$$0 \leq h\lambda_\nu \leq \frac{\pi}{2}.$$

Положим $h = \frac{1}{\lambda_r}$ и в силу неравенства

$$\sin\frac{\lambda_\nu}{\lambda_r} \geq \frac{2}{T} \cdot \frac{\lambda_\nu}{\lambda_r},$$

получим

$$S(r, \lambda_\nu) = \frac{1}{\lambda_r}\sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu |A_\nu| \leq$$

$$\leq \frac{4\pi\sqrt{2\pi}}{T}\left\{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\sigma_{2\lambda_r}\left(x + \frac{1}{\lambda_r}, f\right)_{\boldsymbol{B}})^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \chi^{\frac{1}{2}}(2\lambda_r) -$$

$$-\frac{4\pi\sqrt{2\pi}}{T}\left\{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (-\sigma_{2n_r}(x - \frac{1}{\lambda_r}, f)_{\boldsymbol{B}})^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \chi^{\frac{1}{2}}(2\lambda_r). \qquad (1.4.22)$$

При $r \geq r_0$ найдется такое число r_0, для которое справедливо неравенство $\frac{1}{\lambda_r} < \frac{T}{4}$. Отсюда в силу оценки (1.4.13) для каждого $|x| \leq \frac{T}{2}$ имеет место

$$\left|\sigma_{2\lambda_r}\left(x + \frac{1}{\lambda_r}, f\right)_{\boldsymbol{B}} - \sigma_{2\lambda_r}\left(x - \frac{1}{\lambda_r}, f\right)_{\boldsymbol{B}}\right| \leq 2\omega\left(f, \frac{1}{\lambda_r}\right)_{\boldsymbol{B}} + \frac{C(T)}{2\lambda_r}, \qquad (1.4.23)$$

где $C(T)$ – константа, зависящая от T.

Подставляя оценку (1.4.23) в неравенство (1.4.22), получим

$$S(r, \lambda_\nu) \leq 4\pi\sqrt{\frac{2\pi}{T}}\left(2\omega\left(f, \frac{1}{\lambda_r}\right)_{\boldsymbol{B}} + \frac{C(T)}{2\lambda_r}\right)\chi^{\frac{1}{2}}(2\lambda_r). \qquad (1.1.24)$$

Благодаря оценки (1.4.23), внутренний интеграл в неравенстве (1.4.22) принимает следующий вид

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\sigma_{2\lambda_r}\left(x+\frac{1}{\lambda_r},f\right)_{\boldsymbol{B}} - \sigma_{2\lambda_r}(x-\frac{1}{\lambda_r},f)_{\boldsymbol{B}})^2 dx \leq$$

$$\leq \left(2\omega\left(f,\frac{1}{\lambda_r}\right)_{\boldsymbol{B}} + \frac{C(T)}{2\lambda_r}\right) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|\sigma_{2\lambda_r}\left(x+\frac{1}{\lambda_r},f\right)_{\boldsymbol{B}} - \sigma_{2\lambda_r}\left(x-\frac{1}{\lambda_r},f\right)_{\boldsymbol{B}}\right| dx.$$

Согласно условиям теоремы функция $f(x) \in V[-T,T]$ поэтому, благодаря оценке (1.4.17) получим

$$S(r,\lambda_v) \leq \frac{4\pi\sqrt{\pi}}{T}\left(\sqrt{2}\omega^{1/2}\left(\frac{1}{\lambda_r},f\right)_{\boldsymbol{B}} + \frac{C(T)}{\sqrt{2\lambda_r}}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\sqrt{2}V[-T,T]f(x,\mathrm{h})\mathrm{h} + C\right)\frac{1}{\sqrt{2\lambda_r}}\chi^{\frac{1}{2}}(2\lambda_r). \tag{1.4.25}$$

Так как

$$\frac{1}{\lambda_r} \leq \frac{1}{4} \Longrightarrow 4\omega\left(f,\frac{1}{4}\right)_{\boldsymbol{B}} \leq 2\lambda_r\omega\left(f,\frac{1}{\lambda_r}\right)_{\boldsymbol{B}},$$

то

$$\frac{1}{2\lambda_r} \leq \frac{T}{4}\frac{\omega\left(f,\frac{1}{\lambda_r}\right)_{\boldsymbol{B}}}{\omega\left(f,\frac{T}{4}\right)_{\boldsymbol{B}}}.$$

Тогда при $r \geq r_0$ неравенство (1.4.24) принимает следующий вид

$$S(r,\lambda_v) \leq 4\pi\sqrt{\frac{2\pi}{T}}\left(2\omega\left(f,\frac{1}{\lambda_r}\right)_{\boldsymbol{B}} + C(T)\frac{\omega\left(f,\frac{1}{\lambda_r}\right)_{\boldsymbol{B}}}{\frac{4}{T}\omega\left(f,\frac{T}{4}\right)_{\boldsymbol{B}}}\right)\chi^{\frac{1}{2}}(2\lambda_r) \leq$$

$$\leq C_1(T)\omega\left(f,\frac{1}{\lambda_r}\right)_{\boldsymbol{B}}\chi^{\frac{1}{2}}(2\lambda_r) \tag{1.4.26}$$

Аналогично, неравенство (1.4.25) запишем в виде

$$S(r,\lambda_v) \leq C_2(T)\omega\left(\frac{1}{\lambda_r}\omega\left(f,\frac{1}{\lambda_r}\right)_{\boldsymbol{B}}\right)^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{1}{2}}(2\lambda_r). \tag{1.4.27}$$

Введём в рассмотрение функцию $\overline{\omega}$, которая определяется с помощью неравенства $\overline{\omega}(h) \leq \omega(f,h)_{\boldsymbol{B}}$ или $\overline{\omega}(\mathrm{h}) \leq (h\omega(f,h)_{\boldsymbol{B}})^{1/2}$. Тогда неравенство (1.4.26) и (1.4.27) объединяются в одно неравенство

$$S(r,\lambda_\nu) \leq C_3(T)\overline{\omega}\left(\frac{1}{\lambda_r}\right)_{\boldsymbol{B}} \chi^{\frac{1}{2}}(2\lambda_r). \tag{1.4.28}$$

Далее, из формулы

$$\sum_{\nu=1}^{r}\left|A_{\lambda_\nu}\right| = S(\nu,\lambda_\nu) - S(\nu-1,\lambda_\nu) + \frac{\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}}{\lambda_\nu}S(\nu-1,\ \lambda_\nu) \quad (\nu = 1,2\ldots)$$

следует, что

$$\sum_{\nu=r_0+1}^{r}|A_\nu| = S(\nu,\lambda_\nu) - S(\nu-1,\ \lambda_\nu) + \frac{\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}}{\lambda_\nu} +$$

$$+\sum_{\nu=r_0+1}^{r}\frac{\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}}{\lambda_\nu}S(\nu-1,\lambda_\nu) \ \leq$$

$$\leq S(r,\lambda_\nu) + \sum_{\nu=r_0}^{r}\frac{\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}}{\lambda_\nu}S(\nu,\ \lambda_\nu)$$

Используя неравенство (1.4.28), будем иметь

$$\sum_{\nu=r_0+1}^{r}|A_\nu| = C_3(T)\overline{\omega}\left(\frac{1}{\lambda_r}\right)_{\boldsymbol{B}}\chi^{\frac{1}{2}}(2\lambda_r) + C_3(T)\sum_{\nu=r_0}^{r}\frac{\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}}{\lambda_\nu}\overline{\omega}\left(\frac{1}{\lambda_r}\right)_{\boldsymbol{B}}\chi^{\frac{1}{2}}(2\lambda_r).$$

В силу неравенств

$$\omega(f,kh)_{\boldsymbol{B}} \leq k\omega(f,h)_{\boldsymbol{B}}\,, \frac{1}{h_2}\omega(f,h_2)_{\boldsymbol{B}} \leq \frac{2}{h_1}\omega(f,h_1)_{\boldsymbol{B}} \qquad (0 < h_1 < h_2)$$

заключаем, что функция $\overline{\omega}\left(\frac{1}{\lambda_r}\right)_{\boldsymbol{B}}$ удовлетворяет условиям (1.4.22) и (1.4.23). Следовательно, при $r \geq r_0$ выполняется

$$\sum_{\nu=r_0+1}^{r}|A_\nu| \leq C_3(T)\int_1^\infty \overline{\omega}\left(\frac{1}{\lambda_r}\right)_{\boldsymbol{B}}\chi^{\frac{1}{2}}(t)\frac{dt}{t},$$

и так как по условиям теоремы интеграл в правой части последнего неравенства ограничен, то отсюда следует доказательство теоремы.

Поскольку из неравенства

$$l = \inf_{\lambda_\nu \geq 0} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) \geq \frac{4\pi}{T}$$

следует $\lambda_\nu \geq l\lambda_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots)$, то выполняются следующие соотношения

$$\chi(x) = \sum_{\lambda_\nu \leq x} 1 \leq \sum_{l\lambda_\nu \leq x} 1 \leq \frac{x}{l}.$$

Поэтому можно сделать заключение, что в теореме 1.4.1 содержаться результаты Нобля [22] и Кеннеди [15].

ГЛАВА 2. Аппроксимация равномерных почти-периодических функций некоторыми суммами и интегралами

§ 2.1. О приближении почти-периодических функций некоторыми суммами и интегралами в равномерной метрике

Пусть $L_p (1 \leq p < \infty)$ пространство измеримых периода 2π по каждой из переменных функций $f(x, y)$, с нормой

$$\|f\|_{L_p} = \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|^p \, dxdy \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

а при $p = \infty$

$$\|f\|_{L_p} = \underset{x,y}{vraisup} |f(x, y)| < \infty.$$

Ряд Фурье этой функции имеет вид

$$f(x, y) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_{k,l}(x, y),$$

где коэффициенты этого ряда определены по формулам

$$A_{k,l}(x, y) = a_{k,l} \cos kx \cos ly + \ b_{k,l} \sin kx \cos ly +$$

$$+ c_{k,m} \cos kx \sin ly + \ d_{k,m} \sin kx \sin ly \ (k, l \leq 1),$$

$$A_{k,0}(x, y) = \frac{1}{2} \left(a_{k,0} \cos kx + \ b_{k,0} \sin kx \ \right),$$

$$A_{0,l}(x, y) = \frac{1}{2} \left(a_{0,l} \cos ly + c_{0,l} \sin ly \right),$$

$$A_{0,0} = \frac{1}{4} a_{0,0}.$$

В 1964 г. И. Марцинкевич [19] исследовал вопрос об отклонении сумм вида

$$\sigma_n(f; x, y) = (n + 1)^{-1} \sum_{k=0}^{m} S_{k,k}(f; x, y),$$

где $S_{k,k}(f; x, y)$ – частные суммы порядка k по каждой из переменных ряда Фурье функции $f(x, y) \in L_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$. В частности, он указал, что если $f(x,y)$ непрерывна по совокупности переменных x,y, то справедлива оценка

$$R_n(f)_{L_\infty} = \|f(x,y) - \sigma_n(f;x,y)\|_{L_\infty} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

В работе Л.В. Жижиашвили [13] были получены некоторые оценки о скорости стремления к нулю величины

$$R_n(f)_{L_p} = \|f(x,y) - \sigma_n(f;x,y)\|_{L_p} (1 < p \le \infty).$$

Поведения отклонения функции двух переменных $f(x,y) \in L_p$ $(1 \le p \le \infty)$ от сумм вида

$$W_r(f;x,y) = (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k S_{k,k}(f;x,y)$$

при $0 < r < 1$ и $r \to \infty$, иисследованы в работе Р. Таберского [30]. Некоторые уточняющие оценки результатов Л.В. Жижиашвили и Р. Таберского приведены в работе М.Ф. Тимана и Г. Гаймназарова [36] в 1972 г.

М.Ф. Тиман и В.Г.Пономаренко [38] исследовали вопрос о поведении величины

$$R_n(f;\nu)_{L_p} = \left\| f(x,y) - \sum_{k=0}^{n} \nu_{k,k}(f;x,y) \right\|_{L_p} \qquad (2.1.1)$$

для классических треугольных матриц $\{\mu_{k,n}\}$

$$\{\mu_{k,n}\} = \begin{cases} \dfrac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_k^{\alpha}}, & k \le n; \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Для величины (2.1.1) оценка сверху приведена в работе [13], а оценка снизу для этой величины установлена в работе [36]. В [36] также уточнены некоторые оценки из работ Л.В. Жижиашвили [13] и Р. Таберски [30]. А так же при любом натуральном r в [3] получены точные порядковые равенства для треугольной матрицы

$$\{\mu_{k,n}\} = \begin{cases} \dfrac{(k+1)^r - r^k}{(n+1)^r}, & k \le n; \\ 0, & k > n. \end{cases} \qquad (2.1.2)$$

Установлено, что если $f(x,y) \in L_p$ и $\{\mu_{k,n}\}$ определены в виде треугольной матрицы (2.1.2), то справедливо неравенство

$$R_n(f;\nu)_{L_p} \le c_r (n+1)^{-r} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{r-1} E_{\nu,\nu}(f)_{L_p},$$

где

$$E_{\nu,\nu}(f)_{L_p} = \inf_{T_{k,k}} \left\| f(x,y) - T_{\nu,\nu}(x,y) \right\|_{L_p},$$

$T_{\nu,\nu}$- тригонометрические полиномы порядка не выше n по каждой из переменных, а константа c_r зависит только отr.

Если $f(x,y) \in L_p$ $(1 < p \le \infty)$ и $\{\mu_{k,n}\}$ определены соотношением (2.1.2), то в [13] получены оценки посредством модулей непрерывности, то есть

$$R_n(f;\nu)_{L_p} \le c_{p,k} \left(\omega_k^{(1)}(f;\frac{1}{n})_{L_p} + \omega_k^{(2)}(f;\frac{1}{n})_{L_p} \right),$$

где

$$\omega_k^{(1)}(f;u)_{L_p} = \sup_{|h| \le u} \left\| \Delta_{x,h}^k f \right\|_{L_p}, \omega_k^{(2)}(f;u)_{L_p} = \sup_{|h| \le u} \left\| \Delta_{h,y}^k f \right\|_{L_p},$$

$$\Delta_{x,h}^k f = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{\nu} f(x+\nu h, y),$$

$$\Delta_{h,y}^k f = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{\nu} f(x, y+\nu h) (u > 0, k \in N),$$

$c_{p,k}$ - константа, зависящая от p и k.

При $1 < p < \infty$ в [38] также получены следующие результаты:

а) $\omega_k^{(1)} \le M_{p,k} R_n(f;\mu)_{L_p}$, $\omega_k^{(2)} \le M_{p,k} R_n(f;\mu)_{L_p}$,

где $M_{p,k}$ – константа, зависящая от p и k;

б) $R_n(f;\mu)_{L_p} \le \omega_k^{(1)}(f;\frac{1}{n})_{l_p} + \omega_k^{(2)}(f;\frac{1}{n})_{L_p}$;

в) $\|f(x,y)-W_r(f;x,y)\|_{L_p} \le c_p\left(\omega_1^{(1)}(f;1-r)_{L_p}+\omega_1^{(2)}(f;1-r)_{L_p}\right)$;

г) $\omega_1^{(1)}(f;1-r)_{L_p} \le M_p\|f(x,y)-W_k(f;x,y)\|_{L_p}$;

д) $\omega_1^{(2)}(f;1-r)_{L_p} \le M_p\|f(x,y)-W_k(f;x,y)\|_{L_p}$.

В работе Ю.Х.Хасанова [48] получены аналоги вышеприведенных результатов о поведении отклонений функций двух переменных $f(x,y)$, заданных на плоскости от интегральных средних их преобразований Фурье в метрике пространства $L_p(R^2)$ $(1 \le p < \infty)$.

Пусть $f(x,y) \in L_p(R^2)$ - пространство измеримых функций $f(x,y)$ для которых

$$\|f\|_{L_p} = \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|^p\,dxdy\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

и почти всюду существует преобразование Фурье

$$F(t,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\exp(-i(tu+zv))\,dudv,$$

где $F(t,z) \in l_q(R^2)$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

При $\sigma > 0$ рассмотрим частные суммы

$$S_{\sigma,\sigma}(f;x,y) = \int_{-\sigma}^{\sigma}\int_{-\sigma}^{\sigma} F(t,z)e^{i(tx+zy)}dtdz =$$

$$= \int_{-\sigma}^{\sigma}\left[\int_{-u}^{u}A(t,u)dt + \int_{-u}^{u}A(t,-u)dt + \int_{-u}^{u}A(u,z)dz + \int_{-u}^{u}A(-u,z)dz\right] =$$

$$= \int_{0}^{\sigma} S_{u,u}^{*}(f;x,y)du, \qquad (2.1.3)$$

где

$$A(t,z) = F(t,z)\mathrm{e}^{i(tx+zy)},$$

$$S_{u,u}^{*}(f;x,y) = \int_{-u}^{u}A(t,u)dt + \int_{-u}^{u}A(t,-u)dt + \int_{-u}^{u}A(u,z)dz + \int_{-u}^{u}A(-u,z)dz.$$

Исследуем порядок поведения величины отклонения

$$R_{\sigma,r}(f)_{L_p} = \left\| f(x,y) - U_{\sigma,r}(f;x,y) \right\|_{L_p}, \qquad (2.1.4)$$

где

$$U_{\sigma,r}f(x,y) = \int_0^\sigma \left(1 - \frac{u^r}{\sigma^r}\right) S_{u,u}^*(f;x,y).$$

Имеют места следующие утверждения [48]:

Теорема А. *Если* $f \in L_p(R^2)$ $(1 < p \le 2)$, *то справедлива оценка*

$$R_{\sigma,k}(f;)_{L_p} \le c_{p,k}\left(\omega_k^{(1)}(f;\frac{1}{\sigma})_{L_p} + \omega_k^{(2)}(f;\frac{1}{\sigma})_{L_p}\right),$$

где $c_{p,k}$– *константа, зависящая лишь от* p *и* k.

Теорема Б. Пусть$f(x,y) \in L_p(R^2)$ $(0 < p \le 2)$. Тогда имеет место

$$\omega_k^{(\nu)}(f;\frac{1}{\sigma})_{L_p} \le M_{p,k} R_{\sigma,k}(f)_{L_p} \quad (\nu = 1,2),$$

$M_{p,k}$ – константа*, зависящая лишь* от p и k.

Из теорем А и Б вытекает, что если имеют места условия теоремы Б, то при любом натуральном k,выполняется оценка

$$R_{\sigma,k}(f;)_{L_p} \le c_{p,k}\left(\omega_k^{(1)}(f;\frac{1}{\sigma})_{L_p} + \omega_k^{(2)}(f;\frac{1}{\sigma})_{L_p}\right).$$

При $p = \infty$ и $k = 1$аналогичные результаты получены в работе [19], а для случая периодических функций, в работе [13].

Теперь приводим результаты данного параграфа оценки сверху отклонения функций $f(x) \in \boldsymbol{B}$ от сумм типа Марцинкевича, когда показатели Фурье имеют единственную предельную точку в бесконечности.

Пусть $B(R)$– пространство всех ограниченных функций $f(x) \in \boldsymbol{B}$ с нормой

$$\|f\|_{\boldsymbol{B}} = \sup_{x \in R} |f(x)|$$

и функция $f(x) \in \boldsymbol{B}$ имеет ряд Фурье вида

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp(i\lambda_k x), \qquad (2.1.8)$$

с коэффициентами

$$A_k = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) \exp(-i\lambda_k x)\, dx,$$

где числа $\{\lambda_k\}$ – показатели Фурье, которые имеет единственную предельную точку в бесконечности, то есть,

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lambda_{-n} = -\lambda_n\,, \quad |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|, \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty\,.$$

Введем в рассмотрение

$$S_\sigma(f;x)_{\boldsymbol{B}} = \sum_{|\lambda_n|\le\sigma} A_n \Phi_\sigma(\lambda_n)\, e^{i\lambda_n x},$$

где $\Phi_\sigma(t) \in R$ непрерывная и четная функция такая, что $\Phi_\sigma(0) = 1$, $\Phi_\sigma(t) = 0$ при $|t| \le \sigma$;

$$\psi_\sigma(t) \in L(-\infty,\infty), \tag{2.1.9}$$

где

$$\psi_\sigma(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\sigma(t)\, e^{-iut}\, dt.$$

В начале докажем следующую вспомогательную утверждению, имеющей самостоятельный характер.

Лемма 2.1.1. *Если функция $f(x) \in \boldsymbol{B}$, то*

$$S_\sigma(f;x) = U_\sigma(f;\varphi;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\, \Phi_\sigma(t) dt.$$

Доказательство. Пусть

$$f_\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\, \Phi_\sigma(t) dt$$

Тогда, благодаря в силу (2.1.9), получим, что

$$|f_\sigma(x+\tau) - f_\sigma(x)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t+\tau) - f(x+t)||\psi_\sigma(t)| dt \le$$

$$\leq \sup_x |f(x+\tau)-f(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_\sigma(t)|dt.$$

Интеграл в правой части последнего неравенства сходится и

$$|f(x+t+\tau)-f(x+t)|<\varepsilon.$$

Поэтому из последнего неравенства следует, что функция $f(x) \in \boldsymbol{B}$.

Через $D(\lambda_n)$ обозначим коэффициенты Фурье функций $f_\sigma(x) \in \boldsymbol{B}$, которые соответствуют показателям λ_n.Тогда имеем

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_\sigma(x)\, e^{-i\lambda_n x}dx = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,\psi_\sigma(t)\, e^{-i\lambda_n x}dtdx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_\sigma(t)dt\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+t)e^{-i\lambda_n x}dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_\sigma(t)\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+t)e^{-i\lambda_n x}dx\right)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_\sigma(t)\left(\frac{1}{2T}\int_{-T+t}^{T+t} f(x)e^{-i\lambda_n (x+t)}dx\right)dt =$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\psi_\sigma(t)\left(\frac{1}{2T}\int_{-T+t}^{T+t} f(x)e^{-i\lambda_n x}e^{-i\lambda_n t}dx\right)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_\sigma(t)e^{-i\lambda_n t}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T+t}^{T+t} f(x)e^{-i\lambda_n x}dx\right)dt.$$

Внутренний интеграл в последнем суть допредельное выражение коэффициентов Фурье функции $f(x)$. Значит по формулы обращения Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\sigma(t)e^{-i\lambda_n t}dt = \Phi_\sigma(\lambda_n).$$

Поэтому $D(\lambda_n) = A_n\Phi_\sigma(\lambda_n)$ и

$$f_\sigma(x) = \sum_{|\lambda_n|\leq\sigma} A_n\Phi_\sigma(\lambda_n)\, e^{i\lambda_n x}.$$

Так как $f(x) \in \boldsymbol{B}$, то из последнего вытекает утверждение леммы.

Пусть $B(R)$ – пространство всех ограниченных функций $f(x) \in \boldsymbol{B}$ с нормой

$$\|f\|_{\boldsymbol{B}} = \sup_{x \in R} |f(x)|.$$

Рассмотрим величину

$$R(f;x) = \|U_\sigma(f;\varphi;x) - f(x)\|_{\boldsymbol{B}}, \qquad (2.1.10)$$

в которой

$$U_\sigma(f;\varphi;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,\Phi_\sigma(t)dt, \qquad \Phi_\sigma(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \varphi_\sigma(u) K_m(t) du\,, (2.1.11)$$

где $K_m(t) = \frac{4\sin(ut)}{t}$, $\varphi_\sigma(u)$ – некоторая, абсолютно интегрируемая на интервале $(0,\infty)$ функция при каждом фиксированном $\sigma > 0$, и такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\sigma(t)|\, dt = 1. \qquad (2.1.12)$$

В зависимости от скорости стремления к нулю $E_\sigma(f)$ $(\sigma \to \infty)$ для случаев, когда

$$\varphi_\sigma(u) = \varphi_{\sigma,a}(u) = \begin{cases} 1\,, & |u| \le a \ (0 < a < \sigma); \\ \dfrac{\sigma - |u|}{\sigma - a}, & a < |u| < \sigma; \\ 0, & |u| \ge \sigma, \end{cases} \qquad (2.1.13)$$

исследуем поведению величины (2.1.10).

Известно, что[38] (см. [38], теорема1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\Phi_{\sigma,a}(t)\right| dt \le C\,\frac{\sigma + a}{\sigma - a}, \qquad (2.1.14)$$

где C – константа.

Теорема 2.1.1. *Пусть $f(x) \in B(R)$ и функция $\varphi_\sigma(u) = \varphi_{\sigma,a}(u)$ определена соотношением (2.1.13). Тогда при любом Λ ($0 < \Lambda < a < \sigma$) имеет места оценка*

$$R(f;\varphi_\sigma) \le C\frac{\sigma+a}{\sigma-a}E_\Lambda(f)_{\boldsymbol{B}}, \qquad (2.1.15)$$

где C - абсолютная константа.

Доказательство. Соотношению (2.1.12) запишем в виде

$$\int_0^\infty \Phi_\sigma(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

Умножим обе части последнего на $f(x)$ и вычтем полученное равенство из (2.1.11) при $\Phi_\sigma(t) = \Phi_{\sigma,a}(t)$, будем иметь

$$\Delta_{\sigma,a}(f;x) = U_\sigma(f;\varphi;x) - f(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \Big(f(x+t)\Phi_{\sigma,a}(t) - f(x)\Phi_{\sigma,a}(t)\Big)\,dt =$$

$$\int_0^\infty [f(x+t) - f(x-t)]\Phi_{\sigma,a}(t)\,dt - 2\int_0^\infty f(x)\Phi_{\sigma,a}(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty [f(x+t) - f(x-t) - 2f(x)]\Phi_{\sigma,a}(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \Omega_{\text{x}}(f;t)\Phi_{\sigma,a}(t)\,dt,$$

где $\Omega_{\text{x}}(f;t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$.

Пусть

$$T_{\text{r}} = \sum_{|\lambda_m|\le r} A_m\,\mathrm{e}^{i\lambda_m x}$$

произвольный тригонометрический полином и $0 < \Lambda < a < \sigma$. Тогда (см. [31], лемма 3)

$$T_\Lambda(x) = \int_{-\infty}^\infty \sum_{|\lambda_m|\le r} T_\Lambda\, f(x+t)\Phi_{\sigma,a}(t).$$

Нетрудно показать, что для полинома $T_\Lambda(x)$

$$\int_{0}^{\infty} \Omega_{\text{x}}(T_{\Lambda}; f; t)\Phi_{\sigma,a}\, dt = 0.$$

Действительно, в силу оценки (2.1.12), получим

$$\int_{0}^{\infty} \Omega_{\text{x}}(T_{\Lambda}; f; t)\Phi_{\sigma,a}(t)\, dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} [T_{\Lambda}(x+t) + T_{\Lambda}(x-t) - 2T_{\Lambda}(x)]\Phi_{\sigma,a}(t)\, dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_{\Lambda}(x+t)\Phi_{\sigma,a}(t)\, dt - \int_{-\infty}^{\infty} T_{\Lambda}(x)\Phi_{\sigma,a}(t)\, dt =$$

$$= T_{\Lambda}(x) - T_{\Lambda}(x) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\sigma,a}(t)\, dt = 0$$

Значит

$$\Delta_{\sigma,a}(f; x) = \int_{0}^{\infty} \Omega_{\text{x}}[(f - T_{\Lambda}); t]\Phi_{\sigma,a}(t)\, dt. \qquad (2.1.16)$$

Пусть

$$\|f(x) - T_{\Lambda}(x)\| = E_{\Lambda}(f)_{\boldsymbol{B}},$$

где $T_{\text{r}}(x)$ – тригонометрический полином, осуществляющий наилучшее приближение порядкаΛ, тогда

$$\|\Omega_{\text{x}}[(f - T_{\Lambda}); t]\|_{\boldsymbol{B}} = 4E_{r}(f)_{\boldsymbol{B}}. \qquad (2.1.17)$$

Из (2.1.14), (2.1.17) и (2.1.16) следует оценка (2.1.15).Теорема 2.1.1 доказана.

Теорема 2.1.2. Если $f(x) \in \boldsymbol{B}$ *,показатели Фурье которой имеют единственную предельную точку в бесконечности, то есть* $\lambda_m \to \infty$*. Тогда справедлива оценка*

$$\left\| f(x) - (n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} S_k\,(f; x) \right\|_{\boldsymbol{B}} \le M(n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} E_{\Lambda}\,(f)_{\boldsymbol{B}}, \qquad (\text{Б})$$

гдеM – константа и

$$E_{\Lambda}(f;x)_{\boldsymbol{B}} = \inf_{A(\lambda_n)} \left\| f(x) - \sum_{|\lambda_n| \le k} A_n\, e^{i\lambda_n x} \right\|_{\boldsymbol{B}}$$

- *величина наилучшего приближенная функции* $f(x)$ *тригонометрическими полиномами степени не выше* Λ.

Доказательство. Пусть $n \in [2^m; 2^m + 1]$. Тогда

$$R_n(f)_{\boldsymbol{B}} = \left\| f(x) - (n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} S_k\,(f;x) \right\|_{\boldsymbol{B}} =$$

$$= \left\| (n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} \big(f(x) - S_k(f;x)\big) \right\|_{\boldsymbol{B}} =$$

$$= (n+1)^{-1} \left\| \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} \big(f(x) - S_k(f;x)\big) + f(x) - S_0(f;x) \right.$$

$$\left. + \sum_{r=2^m}^{n} \big(f(x) - S_k(f;x)\big) \right\|_{\boldsymbol{B}} \le$$

$$\le (n+1)^{-1} \left\| \sum_{\nu=0}^{n-1} 2^\nu \cdot \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} \big(f(x) - S_k(f;x)\big) \right\|_{\boldsymbol{B}} +$$

$$+(n+1)^{-1} \| f(x) - S_0(f;x) \|_{\boldsymbol{B}} +$$

$$+(n+1)^{-1} \left\| \sum_{k=2^m}^{n} \big(f(x) - S_k(f;x)\big) \right\|_{B}. \qquad (2.1.8)$$

В силу теоремы 2.2.1 имеем

$$\left\| 2^{-\nu} \sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} \big(f(x) - S_k(f;x)\big) \right\|_{\boldsymbol{B}} \le M E_{2^{\nu+1}-1}(f)_{\boldsymbol{B}}, \qquad (\,2.1.9)$$

$$\left\| \sum_{k=2^\nu}^{m} \big(f(x) - S_k(f;x)\big) \right\|_{\boldsymbol{B}} \le M(n - 2^m) E_{2^m-1}(f)_{\boldsymbol{B}}. \qquad (2.1.20)$$

Подставляя (2.1.19), (2.1.20) в (2.1.18), получаем

$$R_n(f)_{\boldsymbol{B}} \leq \, M(n+1)^{-1} \sum_{\nu=0}^{m-1} 2^{\nu} \, E_{2^{n}-1}(f)_{\boldsymbol{B}} + (n+1)^{-1} E_0(f)_{\boldsymbol{B}} +$$

$$+ M(n+1)^{-1}(n-2^m) E_{2^m-1}(f)_{\boldsymbol{B}} \leq$$

$$\leq M(n+1)^{-1} \sum_{\nu=0}^{m-1} 2^{\nu} \, E_{2^{\nu}-1}(f)_{\boldsymbol{B}} + (n+1)^{-1} E_0(f)_{\boldsymbol{B}} +$$

$$+ M(n+1)^{-1} E_{2^m-1}(f)_{\boldsymbol{B}} \leq$$

$$\leq M_1(n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{2^m} E_k \, (f)_{\boldsymbol{B}} \leq M_1(n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} E_k \, (f)_{\boldsymbol{B}}.$$

Отсюда и вытекает неравенство (Б), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.2.

Аналог теоремы 2.1.2 для периодических функций установлен в работе М.Ф. Тимана и В.Г.Пономаренко [38], а для класса почти-периодических в смысле Безиковича функций в [49].

§ 2.2. Об условиях принадлежности равномерных почти-периодических функций к классу целых функций

В этом параграфе изучается проблемы аппроксимации функций $f(x) \in \boldsymbol{B}$ целыми функциями конечной степени с произвольными показателями Фурье. Устанавливаются необходимые и достаточные условия принадлежности функций $f(x) \in \boldsymbol{B}$ к классу целых функций, ограниченной степени.

Через $\boldsymbol{B}_\sigma$ $(\sigma > 0)$ обозначим класс ограниченных на всей действительной оси целых функций $g_\sigma(x)$ степени не выше σ. С.Н. Бернштейн [2] установил, что среди функций из класса $\boldsymbol{B}_\sigma$, осуществляющих на всей действительной оси наилучшее приближение 2π-периодической функции $f(x)$, найдется тригонометрический полином степени не выше σ.

Аналоги теоремы С.Н. Бернштейна для функций $f(x) \in \boldsymbol{B}$ получены в работах Е.А. Бредихиной [7,8]. Она доказала, что если функция$f(x) \in \boldsymbol{B}$ с рядом Фурье

$$f(x) \sim \sum_k A_k e^{i\lambda_k \beta x} \ ,$$

где λ_k – рациональные числа и β – действительное число, то среди функций $g_\sigma(x) \in \boldsymbol{B}_\sigma$ $(\sigma > 0)$, для которых

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - g_\sigma(x)| = A_\sigma(f), \tag{2.2.1}$$

найдется тригонометрический полином степени $\le \sigma$.

Пространство равномерных почти-периодических функций, его обозначим через $\boldsymbol{B}$, есть замыкание множества тригонометрических полиномов

$$T_k(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{i\lambda_k x},$$

где A_k – коэффициенты Фурье, λ_k- спектр функции $f(x) \in \boldsymbol{B}$, с нормой

$$\|f(x)\|_{\boldsymbol{B}} = \sup_{x\in R} |f(x)|.$$

Пусть функция$f(x) \in \boldsymbol{B}$с произвольным спектром $\{\lambda_k\}$, имеет ряд Фурьевида

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \mathrm{e}^{i\lambda_k x}, \tag{2.2.2}$$

где коэффициенты $\{A_k\}$ Фурье определены следующим образом

$$A_k = M\{f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda_k x}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda_k x} dx.$$

Рассмотрим следующую проблему. Пусть функция $f(x) \in \boldsymbol{B}$. Каковы необходимые и достаточные условия для принадлежности этой функции к классу $\boldsymbol{B}_\sigma$. Ответ на этот вопрос даёт следующие.

Теорема 2.2.1. *Для того чтобы $f(x) \in \boldsymbol{B}$ принадлежала классу целых функций $\boldsymbol{B}_\sigma$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия*

$$|\lambda_k| \leq \sigma\,. \qquad 2.2.3$$

Доказательство. Достаточность. Рассмотрим функцию

$$f_{a,b}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\varphi_{a,b}(t)dt,$$

где

$$\varphi_{a,b}(t) = \frac{2}{\pi(a-b)t^2} \cdot sin\frac{a-b}{2}tsin\frac{b+a}{2}t\,.$$

Нетрудно показать, что функция $f_{a,b}(x)$ является непрерывной и почти-периодической. Действительно, так как [18] (см.[18], с. 76)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\varphi_{a,b}(t)\right|dt \leq A + Bln\frac{a+b}{b-a},$$

где A и B –константы, то

$$\left|f_{a,b}(x+\tau) - f_{a,b}(x)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t+\tau) - f(x+t)| \cdot \left|\varphi_{a,b}(t)\right|dt \leq$$

$$\leq \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x+t+\tau) - f(x+t)| \left(A + Bln\frac{a+b}{b-a}\right).$$

Отсюда следует непрерывность и почти-периодичность функции $f_{a,b}(x) \in \boldsymbol{B}$.

Положим$a = \lambda, b = 2\lambda$. Тогда

$$f_{a,b}(x) = \frac{2}{\lambda\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{sin\frac{(t-x)\lambda}{2} sin\frac{3\lambda(t-x)}{2}}{(t-x)^2} dt,$$

или

$$f_{a,b}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp(i\lambda_k x)\,.$$

Отсюда благодаря теоремы единственности [10] (см.[10], с. 73), будет

$$f_{a,b}(x) \to f(x).$$

Необходимость. Пусть функция $f(x) \in \boldsymbol{B}$ принадлежит классу $\boldsymbol{B}_\sigma$ и имеет ряд Фурье вида (2.2.2). Тогда, при любом натуральном r , производная порядка r будет

$$f^{(r)}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (i\lambda_k)^r A_k \, exp(i\lambda_x x).$$

С помощью неравенство С.Н. Бернштейна, приходим к

$$\left|f^{(r)}(x)\right| \leq \sigma^r \cdot \sup_x |f(x)| = \sigma^r \cdot C.$$

Значит

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left|f^{(r)}(x)\right|^2 dx \leq \sigma^{2r} \cdot C^2.$$

Отсюда применяя неравенства Бесселя, будем иметь

$$|\lambda_k|^{2r} |A_k|^2 \leq \sigma^{2r} \cdot C^2 (r = 1, 2, \dots),$$

или

$$|A_k| \leq C \cdot \left(\frac{\sigma}{|\lambda_k|}\right)^r.$$

Следовательно, при $|\lambda_k| > \sigma$ коэффициенты $A_k = 0$. Теорема 2.2.1 доказана.

Известно [31], что из совокупности функций $f(x) \in \boldsymbol{B}_\sigma$, которые осуществляют на всей вещественной оси наилучшие приближение функций $f(x) \in L_p[-\pi, \pi]$, можно найти тригонометрический полином степени $\leq \sigma$.

Этой утверждения опирается на тот факт, что если $g_\sigma(f; x) \in \boldsymbol{B}_\sigma$ и

$$\sup_{x\in R} |f(x) - g_\sigma(f; x)| = A_\sigma(f),$$

то равномерно по всем $x \in R$ справедливы соотношения

$$\left|f(x) - \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} g_\sigma(x + 2k\pi)\right| \leq A_\sigma(f), \tag{2.2.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \{g_\sigma(x + 2k\pi + 2\pi) - g_\sigma(x + 2k\pi)\} = 0, \tag{2.2.5}$$

где $A_\sigma(f)$ - наилучшее приближение порядка σ.

Этот результат удается получить, если (2.2.4) и (2.2.5) заменить соотношениями

$$\left|\Phi_n(x) - Q_{\sigma,N,n}(x)\right| \leq A_\sigma(f), \tag{2.2.4^1}$$

где $\sigma > 0; N, n$ - любые натуральные числа,

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)F_n(t)dt = \frac{1}{2\pi N}\int_{-2\pi N}^{2\pi N} f(x+t)F_n(t)dt,$$

$$Q_{\sigma,N,n}(x) = \frac{1}{2\pi N}\int_{-2\pi N}^{2\pi N} g_\sigma(x+t)F_n(t)dt,$$

$$F_n(t) = \frac{sin^2(n+1)\frac{t}{2}}{2(n+1)sin^2\frac{t}{2}},$$

и для всех фиксированныхn равномерно по $x \in R$

$$\lim_{N\to\infty}\{Q_{\sigma,N,n}(x+2\pi) - Q_{\sigma,N,n}(x)\} = 0. \tag{2.1.5^1}$$

При установлении подобных результатов для функций $f(x) \in \boldsymbol{B}$ возникают ряд проблем. Во-первых, дополнительные условия накладываются на гладкости функций, во-вторых показатели Фурье таких функций могут лежат всюду плотно, то есть [46] или [47]):

$$\lambda_0 = 0;\ \lambda_{-k} = -\lambda_k, \qquad |\lambda_k| > |\lambda_{k+1}|,\ \ (k = 1,2,\dots), \lim_{k\to\infty}|\lambda_k| = 0;$$

$$\lambda_0 = 0;\ \lambda_{-k} = -\lambda_k, \qquad |\lambda_k| < |\lambda_{k+1}|,\ \ (k = 1,2,\dots), \lim_{k\to\infty}|\lambda_k| = \infty.$$

Аналогичные результаты С.Н. Бернштейна для равномерных почти-периодических функций Бора впервые установлены в работах Е.А Бредихиной [7]-[8]. Она доказала, что если $f(x) \in \boldsymbol{B}$ и имеет соответствующий ряд Фурье, с спектром в бесконечности, то из множеств функций $f(x) \in \boldsymbol{B}_\sigma$ можно найти тригонометрический полином степени $\leq \sigma$.

Сформулируем основной результат данного параграфа, который является также аналогом теоремы С.Н. Бернштейна для равномерных почти-периодических функций с произвольными показателями Фурье $\{\lambda_k\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

Теорема 2.2.2. *Если* $f(x) \in \boldsymbol{B}$ *и*

$$A_\sigma(f) = \sup_{x \in R} |f(x) - g_\sigma(f; x)| (\sigma > 0)$$

- наилучшее равномерное приближение порядка σ, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся конечный тригонометрический полином*

$$P_\sigma(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k e^{i\lambda_k x},$$

для которой равномерно по x *справедлива оценка*

$$|f(x) - P_\sigma(x)| \leq A_\sigma(f) + \varepsilon,$$

где $\varepsilon = \varepsilon(N, \delta) (\delta < \pi)$.

Доказательство. Предположим, что множество чисел $\beta\{\beta_k\}$ является базисом для множества $\Lambda\{\lambda_k\}$ и $\beta\{\beta_k\} \subset \Lambda\{\lambda_k\}$ (см. [10], с. 99).

Рассмотрим суммы Бохнера-Фейера, которые соответствуют функциям $f(x) \in \boldsymbol{B}$

$$P_N^{(m)}(f; x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x+t) K_N^{(m)}(t) dt =$$

$$= \sum_{|\nu_k| \leq n_k} \left(1 - \frac{|\nu_1|}{n_1}\right) \dots \left(1 - \frac{|\nu_r|}{n_r}\right) exp\left[i\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1 + \dots + \frac{\nu_r}{m!}\beta_r\right)\right] \cdot$$

$$\cdot A\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1 + \dots + \frac{\nu_r}{m!}\beta_r\right) (k = 1, 2, \dots, r),$$

где $A\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1 + \dots + \frac{\nu_r}{m!}\beta_r\right)$ - коэффициенты Фурье функции $f(x)$,

$$\lambda_\nu = \frac{\nu_1}{m!}\beta_1 + \dots + \frac{\nu_r}{m!}\beta_r,$$

$$K_N^{(m)}(t) = \prod_{j=1}^{r} K_{n_j}\left(\frac{\beta_j t}{m!}\right),$$

$$K_{n_j}\left(\frac{\beta_j t}{m!}\right) = \sum_{|\nu| \leq n_j} \left(1 - \frac{|\nu|}{n_j}\right) exp\left[-i\left(\frac{\nu}{m!}\beta_j\right)\right].$$

Известно [10] (см.[10], с. 103), что $K_N^{(m)}(t)$ положительные величины, для которых

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}K_N^{(m)}(t)\,dt = 1.$$

Далее рассмотрим целую функцию $g_\sigma(x)\in\boldsymbol{B}_\sigma$, удовлетворяющая соотношению (2.2.3) и функцию

$$F_{N,T}(x)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x+t)K_N^{(m)}(t)dt,$$

для которой равномерно по $x\in R$

$$\lim_{T\to\infty}F_{N,T}(x)=P_N^{(m)}(f;x),$$

а также

$$Q_{\sigma,N,n}(x)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}g_\sigma(x+t)K_N^{(m)}(t)dt,$$

где $g_\sigma(x)\in\boldsymbol{B}_\sigma$ и равномерно по $x\in R$

$$|g_\sigma(x)|\le C, |f(x)-g_\sigma(x)|\le A_\sigma(f).$$

В силу теоремы Бохнера-Фейера, при $\boldsymbol{\varepsilon}>0$ найдетсячисло $\boldsymbol{N}$ такое, что

$$\left|f(x)-P_N^{(m)}(f;x)\right|\le\varepsilon. \qquad (2.2.6)$$

Далее, так как

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}K_N^{(m)}(t)dt=1,$$

то

$$\left|F_{N,T}(x)-Q_{\sigma,T,N}(x)\right|\le A_\sigma(f)\cdot\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}K_N^{(m)}(t)dt \qquad (2.2.7)$$

и при $T\to\infty$ правая часть в (2.2.7) равна величине $A_\sigma(f)$.

Так как $g_\sigma(x)\in\boldsymbol{B}_\sigma$ и $|g_\sigma(x)|\le C$, то при фиксированном $\sigma>0$ каждая из $Q_{\sigma,T,N}(x)$ суть целой функцией степени не выше σ при $T\to\infty$

$$\left|Q_{\sigma,T,N}(x)\right| \le C \cdot \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} K_N^{(m)}(t)dt \le C_1,$$

равномерно по x, T и N.

Далее можно показать, что множества функций $\{Q_{\sigma,T,N}(x)\}$ равностепенно равномерно непрерывна на $(-\infty,\infty)$. Значит для фиксированного числа N найдется указать последовательность чисел $\{T_l\}$, для которой

$$\lim_{T_l\to\infty} Q_{\sigma,T_l,N}(x) = Q_{\sigma,N}(x)$$

равномерно на любом конечном отрезке вещественной оси. Так как $Q_{\sigma,N}(x) \in \boldsymbol{B}_\sigma$, то в силу (2.2.7) равномерно по x и N имеем

$$\left|P_N^{(m)}(x) - Q_{\sigma,N}(x)\right| \le A_\sigma(f). \tag{2.2.8}$$

Теперь можно показать, что функция $Q_{\sigma,N}(x) \in \boldsymbol{B}$. Выбирая произвольное число τ, оценим следующую разность

$$Q_{\sigma,T,N}(x+\tau) - Q_{\sigma,T,N}(x) =$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g_\sigma(x+t+\tau)K_N^{(m)}(t)dt - \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g_\sigma(x+t)K_N^{(m)}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g_\sigma(x+t+\tau)\left\{K_N^{(m)}(t) - K_N^{(m)}(t+\tau)\right\}dt +$$

$$+ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g_\sigma(x+t+\tau)K_N^{(m)}(t+\tau)dt - \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g_\sigma(x+t)K_N^{(m)}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g_\sigma(x+t+\tau)\left\{K_N^{(m)}(t) - K_N^{(m)}(t+\tau)\right\}dt +$$

$$+ \frac{1}{2T}\int_{T}^{T+\tau} g_\sigma(x+u)K_N^{(m)}(u)du + \frac{1}{2T}\int_{-T+\tau}^{T} g_\sigma(x+u)K_N^{(m)}(u)du =$$

$$= I_1(T) + I_2(T) + I_3(T). \tag{2.2.9}$$

Выше было показано, что $|g_\sigma(x)| \le C$ равномерно по $x \in R$, поэтому для фиксированных чисел τ и N

$$\lim_{T\to\infty} I_2(T) = 0, \quad \lim_{T\to\infty} I_3(T) = 0. \tag{2.2.10}$$

Пусть $f(x) \in \boldsymbol{B}$ имеет спектр $\Lambda\{\lambda_k\}$. Тогда [18] (см.[18], с. 104) для любых целых чисел N, n_k и $\delta > 0$ $(\delta < \pi)$ можно найти такое положительное число $\varepsilon = \varepsilon(N, \delta)$, что в каждом интервале длины ε найдется по крайней мере одно число τ, которые удовлетворяет неравенству

$$|\lambda_k \tau - 2\pi n_k| < \delta \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Значит для τ взяв ε - почти-период функции $f(x)$, оценим $I_1(T)$

$$|I_1(T)| \le C \cdot \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| K_N^{(m)}(t+\tau) - K_N^{(m)}(t) \right| dt \le$$

$$\le C \cdot \sum_{|\nu_k| \le n_k} \left| exp\left[-i\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1 + \dots + \frac{\nu_r}{m!}\beta_r \right) \right] - 1 \right| \left(1 - \frac{|\nu_1|}{n_1} \right) \dots \left(1 - \frac{|\nu_r|}{n_r} \right) \le$$

$$\le C \cdot S_n \le C \cdot N \cdot \delta \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

где

$$S_n = 2\sum_{\nu=1}^{N} \left| sin\frac{\lambda_\nu \tau}{2} \right|, \quad \lambda_\nu = \frac{\nu_1}{m!}\beta_1 + \dots + \frac{\nu_r}{m!}\beta_r\,,$$

а N - количество слагаемых.

Приняв, $\delta = \frac{\varepsilon}{C \cdot N}$, будем иметь

$$|I_1(T)| \le \varepsilon C N \delta = CN\frac{\varepsilon}{CN} = \varepsilon. \tag{2.2.11}$$

Подставляя (2.2.10) и (2.2.11) в (2.2.9) окончательно получаем, что

$$\lim_{T\to\infty} \left| Q_{\sigma,T,N}(x+\tau) - Q_{\sigma,T,N}(x) \right| \le \varepsilon.$$

Значит, и функция $Q_{\sigma,N}(x) \in \boldsymbol{B}$.

Докажем, что функция $Q_{\sigma,N}(x)$ является конечной тригонометрическим полиномам суммой со спектром, удовлетворяющая условию $|\lambda_k| \le \sigma$ из совокупности $\Lambda\{\lambda_k\}$ $(k = 1, 2, \dots, N)$. Действительно,

$$Q_{\sigma,N}(x) = \lim_{T_l\to\infty} Q_{\sigma,T_l,N}(x) = \lim_{T_l\to\infty} \frac{1}{2T_l}\int_{-T_l}^{T_l} g_\sigma(x+t)K_N^{(m)}(t)dt =$$

$$= \sum_{|\nu_k|\le n_k} C\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1+\dots+\frac{\nu_r}{m!}\beta_r\right)\prod_{k=1}^{r}\left(1-\frac{|\nu_k|}{n_k}\right)exp\left(i\frac{\nu_k}{m!}\beta_k\right)(k=\overline{1,r}),$$

где

$$C\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1+\dots+\frac{\nu_r}{m!}\beta_r\right) =$$

$$= \lim_{T_l\to\infty}\frac{1}{2T_l}\int_{-T_l}^{T_l} g_\sigma(x+t)exp\left[-i\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1+\dots+\frac{\nu_r}{m!}\beta_r\right)(x+t)\right]dt =$$

$$= \lim_{T_l\to\infty}\frac{1}{2T_l}\int_{-T_l+x}^{T_l+x} g_\sigma(u)exp\left[-i\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1+\dots+\frac{\nu_r}{m!}\beta_r\right)u\right]du =$$

$$= \lim_{T_l\to\infty}\frac{1}{2T_l}\int_{-T_l+x}^{T_l+x} g_\sigma(u)exp(-i\lambda_\nu u)du.$$

Условие $|\lambda_k| \le \sigma$, вытекает из теоремы 2.2.1. Пологая N таким, чтобы выполнялось неравенство (2.2.6), оценим разность

$$\left|f(x)-Q_{\sigma,N}(x)\right| \le$$

$$\le \left|f(x)-P_N^{(m)}(x)\right| + \left|P_N^{(m)}(x)-Q_{\sigma,N}(x)\right| = \varepsilon + A_\sigma(f).$$

В силу (2.2.6) и (2.2.8) получаем утверждение теоремы 2.2.2.

Получения дальнейших результатов существенно опираются на следующие понятия [18] (см. [18], с. 47-48).

Определение 2.2.1. *Семейство функций* $f(x)$ *называется равностепенно ограниченным, если существует такое число* $A > 0$, *что для всех функций этого семейства выполняется неравенство* $|f(x)| < A$.

Определение 2.2.2. *Семейство функций* $f(x)$ *называется равностепенно непрерывным, если для каждого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta = \delta(\varepsilon)$, *что при* $|x' - x''| < \delta$ *для всех функций семейства выполняется неравенство* $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Определение 2.2.3. *Семейство функций $f(x)$ называется равностепенно почти-периодическим, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $l = l(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины l имеется общий для всех функций семейства -почти-период.*

Теорема 2.2.3. *Пусть $f(x) \in \boldsymbol{B}$. Тогда среди функций $g_\sigma(x) \in B_\sigma$, найдется функция $Q_\sigma(f;x) \in \boldsymbol{B}$ с рядом Фурье*

$$\sum_{|\lambda_k| \le \sigma} \mathrm{A}_k e^{i\lambda_k x}.$$

Доказательство. В силу теоремы 2.2.2 совокупность полиномов $\{Q_{\sigma,N}(x)\}$, в неравенстве

$$\left|P_N^{(m)}(x) - Q_{\sigma,N}(x)\right| \le A_\sigma(f),$$

является компактной. Поэтому, можно выбрать из ней подпоследовательность $\{Q_{\sigma,N_k}(x)\}$, сходящуюся равномерно на любом отрезке с соответствующей предельной функцией $f_{N_k}(x)$. Поэтому в силу [10] (см.[10]с. 48) $f_{N_k}(x) \in \boldsymbol{B}$. Значит при $N_k \to \infty$ функция $f_{N_k}(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно для всех x.Отсюда следует, что$f(x) \in B$ со спектром $\{\lambda_k\}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. Теорема 2.2.3 доказана.

Пусть $f(x)$ – равномерно-непрерывная и ограниченная на$(-\infty, \infty)$ функция и $A_\sigma(f)$ наилучшие приближения функции $f(x)$ целыми функциями степени $\le \sigma$, то есть

$$A_\sigma(f) = \inf_{g(x) \in B_\sigma} \left\{ \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x) - g(x)| \right\}.$$

С.Н. Бернштейн доказал(см. [3], с. 371-373), что для равномерной непрерывности на всей вещественной оси ограниченной функций$f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено

$$A_\sigma(f) \le \mathrm{C}\omega\left(f; \frac{1}{\sigma}\right), \tag{2.2.12}$$

где С – некоторая константа и

$$\omega(f;\delta) = \sup_{|x_1 - x_2| \le \delta} |f(x_1) - f(x_2)|$$

- модуль непрерывности функций $f(x)$. Оценка (2.2.12) получена путём предельного перехода при $n \to \infty$ из неравенства

$$A_\sigma(f;\delta) \leq E_n(f;\delta)\left(\sigma = \frac{n}{\delta}\right),$$

где $E_n(f;\delta)$ – наилучшее приближение функции $f(x)$ на отрезке $[-\sigma,\sigma]$ полиномами степени n.

Далее для функций $f(x) \in \boldsymbol{B}$ будем найти функцию $g(x) \in \boldsymbol{B}_\sigma$, которая удовлетворяет условию (2.2.12).

Теорема 2.2.4. *Пусть* $f(x) \in \boldsymbol{B}$ *и при* $z = x + iy$

$$f_\sigma(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\psi_\sigma(u-z)du,$$

где

$$\psi_\sigma(z) = \frac{1}{\pi\sigma^3}\left(\frac{\sin\frac{\sigma z}{4}}{z}\right)^4.$$

Тогда $f_\sigma(z)$ *принадлежит классу целых функций* $\boldsymbol{B}_\sigma$ *и справедлива*

$$\sup_{x\in R}|f(x) - f_\sigma(z)| < C\omega\left(f;\frac{1}{\sigma}\right), \qquad (2.2.13)$$

C *- абсолютная константа.*

Доказательство. Нетрудно доказать, что $f_\sigma(z)$ является целой функцией степени $\leq \sigma$. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_\sigma(u-z)|du \leq$$

$$\leq \int_{|u-z|\leq 2} |\psi_\sigma(u-z)|du + \int_{|u-z|>2} |\psi_\sigma(u-z)|du. \qquad (2.2.13)$$

Так как

$$\left|\frac{sinz}{z}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^{2k}}{(2k+1)!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^{2k}}{(2k)!} < e^{|z|},$$

то

$$\int\limits_{|u-z|\leq 2} |\psi_\sigma(u-z)|du = \frac{1}{\pi\sigma^3} \int\limits_{|u-z|\leq 2} \left|\frac{sin^4 \frac{(u-z)\sigma}{4}}{\sigma^3(u-z)^3}\right| du =$$

$$= \frac{1}{\pi\sigma^3} \int\limits_{|u-z|\leq 2} \left|\frac{sin^4 \frac{(u-z)\sigma}{4}}{\left(\frac{u-z}{4}\sigma\right)^4} \cdot \frac{(u-z)\sigma}{4^4}\right| du \leq C\frac{\sigma}{\pi} e^{2\sigma}(|z|+2), \qquad (2.2.15)$$

где C - независимая константа.

Оценки второго интеграла в правой части (2.2.14), проводится с помощью следующей неравенстве

$$|sinz| \leq \frac{1}{2}(|e^{-y}| + |e^y|) < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|y|^k}{k!} = e^{|y|}(z = x + iy).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{|u-z|>2} |\psi_\sigma(u-z)|du = \frac{1}{\pi\sigma^3} \int\limits_{|u-z|>2} \left|\frac{sin^4 \frac{(u-z)\sigma}{4}}{\sigma^3(u-z)^3}\right| du \leq$$

$$\leq \frac{e^{\sigma y}}{\pi\sigma^3}\left(\int\limits_{|u-x|>1} \frac{du}{(u-x)^4} + \int\limits_{\substack{|u-x|>1 \\ y^2>3}} \frac{du}{y^4}\right) \leq C\frac{1}{\pi\sigma^3} e^{\sigma|z|}. \qquad (2.2.16)$$

Подставляя (2.2.15) и (2.2.16) в (2.2.14), получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_\sigma(u-z)du < C\left(\frac{\sigma}{\pi} e^{2\sigma}(|z|+2) + \frac{1}{\pi\sigma^3} e^{\sigma|z|}\right).$$

Отсюда следует, что $f_\sigma(z)$ является целой функцией.

Пусть задана функция

$$\psi_\sigma(u) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_\sigma(t)\, e^{-itu} dt,$$

где

$$\varphi_\sigma(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{6t^2}{\sigma^2} + \dfrac{6|t|^3}{\sigma^3}, & |t| < \dfrac{\sigma}{2}, \\ 2\left(1 - \dfrac{|t|}{\sigma}\right)^3, & \dfrac{\sigma}{2} \le |t| < \sigma, \\ 0, & |t| \ge \sigma. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\sigma(u)du \le \frac{3\sigma}{4\pi}\int_0^{\frac{4}{\sigma}} du + \frac{2}{\pi\sigma^3}\int_{\frac{4}{\sigma}}^{\infty} \frac{du}{u^4} \le C \cdot \frac{1}{\pi}, \tag{2.2.17}$$

$$\sigma\int_0^{\infty} u\psi_\sigma(u)du \le \frac{3\sigma^2}{4\pi}\int_0^{\frac{4}{\sigma}} udu + \frac{2}{\pi\sigma^2}\int_{\frac{4}{\sigma}}^{\infty} \frac{du}{u^3} \le C \cdot \frac{1}{\pi}. \tag{2.2.18}$$

Благодаря формулы обращения Фурье [18] (см. [18], с. 77), находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\sigma(u)\exp(itu)du = \varphi_\sigma(t). \tag{2.2.19}$$

При $t = 0$ будет $\varphi_\sigma(0) = 1$, тогда (2.2.19) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\sigma(u)du = 1. \tag{2.2.20}$$

Поэтому,

$$f_\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_\sigma(u)du. \tag{2.2.21}$$

Умножая обе части (2.2.20) на $f(x)$и вычтя полученное равенство из (2.2.21), получим

$$|f(x) - f_\sigma(x)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x+u)|\psi_\sigma(u)du \le$$

$$\le C\omega(f;\sigma^{-1})\int_0^{\infty} (1 + \sigma u)\psi_\sigma(u)du.$$

Благодаря (2.2.17), (2.2.18)и последнего неравенство следует оценка (2.2.13). Теорема 2.2.4 доказана.

Наряду с теоремой 2.2.4 докажем, что если функция $f(x) \in \boldsymbol{B}$, то и $f_\sigma(x) \in B$.

Теорема 2.2.5. *Если* $f(x) \in \boldsymbol{B}$*с рядом Фурье*

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x},$$

то $f_\sigma(x) \in \boldsymbol{B}$ *и функция*$f_\sigma(x)$*имеет ряд Фурье*

$$f_\sigma(x) \sim \sum_{|\lambda_k|<\sigma} A_k \varphi_\sigma(\lambda_k) e^{-i\lambda_k x}. \tag{2.2.22}$$

Доказательство. Пусть функция $f_\sigma(x)$ задана в виде

$$f_\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\psi_\sigma(u)du.$$

Можно доказать, что эта функция является почти-периодической. Благодаря неравенства (2.2.17), будем иметь

$$|f_\sigma(x+\tau) - f_\sigma(x)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+u+\tau) - f(x+u)|\psi_\sigma(u)du \le$$

$$\le C\sup_{x\in R}|f(x+\tau) - f(x)|,$$

где C – абсолютная константа. Из последнего следует, что$f_\sigma(x) \in \boldsymbol{B}$**.**

Пусть $\boldsymbol{B}_\lambda$ коэффициент Фурье функции $f_\sigma(x)$, со спектромλ. Тогда с помощью усиленной теоремы о среднем значении [10] (см. [10], с. 55-56), используя соотношению (2.2.19), получим

$$B_\lambda = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f_\sigma(x) \exp(-i\lambda x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\sigma(u) \exp(i\lambda u) \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+u}^{T+u} f(x) \exp(-i\lambda x) dx \right] du = A_\lambda \varphi_\sigma(\lambda),$$

где A_λ - коэффициент Фурье функции $f(x)$, который соответствует спектру λ. В силу теоремы 2.2.1 для спектра функции $f_\sigma(x)$ выполняется условие (2.2.2) и так как

$$A_\lambda = 0 \text{ при } |\lambda| \geq \sigma; A_\lambda = 0 \text{ при } \lambda \neq \lambda_k, \text{ то } B_{\lambda_k} = A_{\lambda_k}\varphi_\sigma(\lambda_k).$$

Отсюда следует соотношение (2.2.22) и теорема 2.2.5 доказана.

Заключение

Основные результаты и выводы

Основными научными результатами диссертационной работы заключаются в следующие:

1. найдены достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных почти-периодических функций, когда: а) их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности; б) их спектр имеет единственную предельную точку в нуле, при этом в качестве структурной характеристики функций, используется величина, построенная на базе преобразование Лапласа [3-А, 4-А, 8-А, 10-А, 11-А];
2. аналогичные результаты получены для рядов Фурье равномерных почти-периодических функций с малыми пропусками [5-А, 6-А, 9-А];
3. установлены условия отклонения функций $f(x) \in \boldsymbol{B}$ от сумм типа Марцинкевича, частных сумм и интеграла Фурье в равномерной метрике [1-А, 2-А, 3-А, 7-А];
4. доказаны условия принадлежности целых функций ограниченной степени к классу почти-периодических функций [7-А, 12-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов:

Результаты, полученные в диссертационной работе, носят теоретический и практический характеры, и они могут быть использованы в теории рядов Фурье различных классов почти-периодических функций и теории приближения. Материалы диссертации могут использоваться при чтении специальных курсов для студентов, магистрантов и докторантов в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

Список литературы

[1]. Бари Н.К. Тригонометрические ряды [Текст] / Н.К. Бари. М.:Физматгиз.-1961. - 936 с.

[2]. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений [Текст] / С.Н. Бернштейн // М.: Изд. АН СССР. – 1952. –Т.1. - 581 с.

[3]. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений [Текст] / С.Н. Бернштейн // М.: Изд. АН СССР. – 1954. –Т.2. - 627 с.

[4]. Besicovitch A.S. Almost periodic functions [Текст] / A.S Besicovitch.– Cambridge. – 1932. - 180 p.

[5]. Бредихина Е.А. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций [Текст] / Е. А Бредихиной // ДАН СССР. – 1956. - Т.111. - № 6. - С. 1163-1166.

[6]. Бредихина Е.А. Некоторые оценки отклонений частных сумм рядов Фурье от почти-периодических функций [Текст] / Е.А. Бредихиной // Матем. сборник. – 1960. – Т.50(92). - №3. - С. 369-382.

[7]. Бредихина Е.А. К вопросу об аппроксимации почти-периодических функций [Текст] / Е.А. Бредихиной // Сиб. матем. журн. - 1964. -Т.5. - № 4. - С. 768-773.

[8]. Бредихина Е.А. К теореме С.Н.Бернштейн о наилучшем приближении непрерывных функций целыми функциями данной степени [Текст] / Е.А. Бредихиной // Изв. вузов Математика. - 1961. - Т. 6. - С. 3-7.

[9]. Боянич Р., М. Томич М., Об абсолютной сходимости рядов Фурье с малыми пропусками [Текст] / Р. Боянич, М. Томич // Матем. сб. – 1966. – Т.70(112). - № 3. - С 297-309.

[10]. Бор Г. Почти-периодические функции [Текст] / Г. Бор. М.: ЛИБРОКОМ. - 2009. - 128 с.

[11]. Бочкарев С.В. Метод усреднений в теории ортогональных рядов и некоторые вопроси теории базисов [Текст] / С.В. Бочкарев // Труди матем. института им. В.А. Стеклова, Москва, Наука. – 1978. - Т.146.

[12]. Джафаров А.С и Мамедов Г. А. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций Безиковича [Текст] / А.С. Джафаров и А.С. Мамедов // Известия АН Азерб. ССР, серия физ-тех и мат. – 1983. - №5. - С. 8-13.

[13]. Жижиашвили Л.В. О суммировании двойных рядов Фурье [Текст] / Л.В. Жижиашливи Сиб. Мат. журнал. Т. – VIII. - № 3. – 1967. - С. 548-564.

[14]. Зигмунд А. Тригонометрические ряды [Текст] / А. Зигмунд. М.: Мир. – 1965. – Т. I. - 615 с.

[15]. Kennedy P. B., Fourier series with gaps, Quart, J [Текст] / P. Kennedy. Math. - 7 (1956). - pp. - 224-230.

[16]. Конюшков А.А. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье [Текст] / А.А. Конюшков // Математический сборник. – 1956. - 40(82). - №2. - С. 157-178.

[17]. Купцов Н.П. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций [Текст] / Н.М. Купцов // Математический сборник. – 1956. -Т. 40(82). - № 2. - С. 157-178.

[18]. Левитан Б.М. Почти-периодические функции [Текст] / Б.М. Левитан. -М.: ГИТТЛ. – 1953. - 396 с.

[19]. Marcinkewisz I. Sur une metode remarquable de sommation des series doubles de Fourier [Текст] / I. Marcinkewisz // Collecfed papers, Warszawa. – 1964. - pp. 527-538.

[20]. Mohammad M. On the absolute convergence of a Fourier series with gaps [Текст] / M. Mohammad // Received August 3; read October 2. – 1959. - pp. 104-109.

[21]. Musielak J. O. bezwzglednej zbieznosci czeregow Fouriera pewnych funcji prawie okresowich [Текст] / J. O. Musielak // Bull. Acad. Polon. Sci. si. – 1957. - v.3. - № 5. - pp. 9-17.

[22]. Noble M. E., Coefficient properties of Fourier series with a gap condition [Текст] / M.E. Noble // Math. Ann. - 128 (1954). - pp. 55-62.

[23]. Притула Я.Г. Про абсолютну збіжність рядів Фурье майже периодичных функций [Текст] / Я.Г. Притула // Віснік Львів. ун-ту, сер. мехмат. – 1971. -Т.137. - № 5. -С. 72-80.

[24]. Пономаренко В.Г. О приближении функций, равномерно непрерывных на всей вещественной плоскости [Текст] / В.Г. Пономаренко // Сиб. мат. журнал. – 1975. Т.16. - № 1. -С. 86–97.

[25]. Salem R. On the theorem of Zygmund [Текст] / R. Salem // Duke mathematical journal (Durham). – 1943. - pp. 23-31.

[26]. Стечкин С.Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье [Текст] / С.Б. Стечкин // Известия АН СССР, серия математики. – 1951. - №29(71). - С. 225-232.

[27]. Стечкин С.Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье [Текст] / С.Б. Стечкин // Известия АН СССР, серия математики. – 1953. – 17, №2, - С. 87-98.

[28]. Стечкин С.Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье [Текст] / С.Б. Стечкин // Известия АН СССР, серия математики. – 1955. - 19, №2. - С. 221-246.

[29]. Szasz O. Fourier series and mean moduli of continuity [Текст] / O. Szasz // Trans. Amer. math. soc. – 1934. - 42, № 2. - pp. 366-395.

[30]. Taberski R. Abel summability of double Fourier series [Текст] / R. Taberski // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Msth. Astron. Et phys., t. 18. - № 6. – 1970. - pp. 307-314.

[31]. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного [Текст] / А.Ф. Тиман, М.: Физматгиз. – 1960. - 624 - С.

[32]. Тиман М.Ф. Об абсолютной сходимости рядов Фурье [Текст] / М.Ф. Тиман // Доклады АН СССР. - 1961. - 137. - №5. - С. 1074-1077.

[33]. Тиман М.Ф. Об абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье [Текст] / М.Ф. Тиман // Сообщение АН Груз. ССР. – 1961. - 26, №6. - С. 641-646.

[34]. Тиман М.Ф. Частные наилучше приближения функций, абсолютная сходимость рядов Фурье и ядреность интегральных операторов Гилберта-Шмидта [Текст] / М.Ф. Тиман // математический сборник. – 1968. - 75 (117) . - №3. - С. 361-373.

[35]. Тиман М.Ф. Исследование свойств функции с заданными наилучшими приближениями [Текст] / М.Ф. Тиман. Автореферат докторский диссертации. Ленинград. – 1973. - 43 с.

[36]. Тиман М.Ф., Гаймназаров Г. Уклонение периодических функций двух переменных от некоторых полиномов [Текст] / М.Ф. Тиман // Доклады АН Тадж. ССР. - 1972. - 15. - № 5. - С. 6-8.

[37]. Тиман М.Ф., Хасанов Ю.Х. О приближениях почти-периодических функций целыми функциями [Текст] / М.Ф. Тиман // Изв. вузов. Математика. - 2011. - № 12. - С. 64-70.

[38]. Тиман М.Ф., Пономаренко В.Г. О приближении функций двух переменных суммами типа Марцинкевича [Текст] / М.Ф. Тиман // Известия вузов. Математика. - 1975. - № 9. - С. 59–67.

[39]. Тиман М.Ф., Хасанов Ю.Х. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций [Текст] / М.Ф. Тиман // Ряды Фурье: теория и приложения. Киев, Институт Математики АН Украины. - 1992. - С. 142-146.

[40]. Титчмарш Е. Теория функций [Текст] / Е. Титчмарч. М.: Наука, 1980, 464 с.

[41]. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления [Текст] / Г.М. Фихтенголц. – Т.3. –М.: Наука. - 1970. - 656 с.

[42]. Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г. Неравенства [Текст] / Г. Харди, Д. Литтлвуд, Г. Полиа. М.: Гос. изд. иностр. лит. – 1948. - 456 с.

[43]. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций [Текст] / Ю.Х. Хасанов // Конструктивная теория функций, Санкт-Петербург. - 1992. - С. 66-68.

[44]. Хасанов Ю.Х. О приближении функций двух переменных некоторыми интегралами Фурье [Текст] / Ю.Х. Хасанов // Доклады АН РТ. - 1993. - Т.36. - № 3. - С. 174-176.

[45]. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной чезаровской суммируемости рядов Фурье почти-периодических функций с предельными точками в нуле [Текст] / Ю.Х. Хасанов // Уфимский матем. журнал. - 2016. - Т.8. - № 4. - С. - 147-155.

[46]. Хасанов Ю.Х. Абсолютная сходимость рядов Фурье почти-периодических функций [Текст] / Ю.Х. Хасанов // Матем. заметки. - 2013. - Т.94. - № 5. - С. 745-756.

[47]. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти-периодических функций[Текст] / Ю.Х. Хасанов // Anal. Math. - 2013. - v.39. - pp. 259-270.

[48]. Хасанов Ю.Х. О приближении почти-периодических функций двух переменных [Текст] / Ю.Х. Хасанов // Известия вузов. Математика. - 2010. - №12. - С. 82-86.

[49]. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических в смысле Безиковича функций [Текст] / Ю.Х. Хасанов // Украинский матем. журнал. - 2013. - Т.65. - №12. - С. 1716-1722.

[50]. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти-периодических функций [Текст] / Ю.Х. Хасанов // Доклады АН РТ. - 2009. - Т.52. - № 12. - С. 913-920.

[51]. Хасанов Ю.Х. О связи между степенью суммируемости почти-периодических функций и коэффициентов Фурье [Текст] / Ю.Х. Хасанов // Влад. метем. журнал. - 2014. - Т. - 16. - С. 47-54.

Публикация автора по теме диссертации в рецензируемых изданиях из списка ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Минобрнауки РФ:

[1-А]. Талбаков Ф.М. Аналог теоремы С.Н. Бернштейна о наилучшем приближении почти-периодических функций [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // ДАН РТ. - 2016. - Т.59. - № 1-2. - С.11-18.

[2-А]. Талбаков Ф.М. О некоторых оценках частичных сумм ряда Фурье функций Бора [Текст] / Ф.М. Талбаков // Вестник ТНУ. - 2018. - №2. - С. 28-34.

[3-А]. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций Безиковича [Текст] / Ю.Х Хасанов, Ф.М. Талбаков // ДАН РТ. - 2018. - Т.61. - № 1-2. - С.813-821.

[4-А]. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций в равномерной метрики [Текст] / Ф.М. Талбаков // ДАН РТ. - 2019. - Т.63. - № 5-6. - С. 288-292.

В других изданиях:

[5-А]. Талбаков Ф.М. О некоторых условиях сходимости рядов Фурье с малыми пропусками [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы международной научной конференции «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел», посвященной 75-летию профессора Т.С. Собирова, (г. Душанбе, 29-30 октября 2015). - С. 61-63.

[6-А]. Талбаков Ф.М. Об абсолютной ходимости рядов Фурье почти-периодических функций с малыми пропусками [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 27 января – 3 февраля 2016 г.). - С. 300-303.

[7-А]. Талбаков Ф.М. Об одном аналоге теоремы Пели для почти-периодических функций [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы *II* Международной научно–практической конференции «Актуальные проблемы физико-математического образования», (Набережные Челны, 20-22 октября 2017 г.). - С. 58-60.

[8-А]. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы 19-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения», посвященной 90-летию со дня рождения академика П. Л. Ульянова (Саратов, 29 января – 2 февраля 2018 г.). - С. 330-332.

[9-А]. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функции с малыми пропусками [Текст] / Ф.М. Талбаков Ф.М. // Материалы XII научно-практической конференции молодых ученых и студентов с международным участием, посвященной, ТГМУ имени Абуали ибни Сино, (Душанбе, 27 апреля 2018 г.). - С. 34-35.

[10-А]. Талбаков Ф.М. О некоторых достачных условиях сходимости рядов Фурье почти-периодических функций [Текст] / Ю.Х. Хасанов , Ф.М. Талбаков // Материалы молодежной школы-конференции (Лобачевские чтения, 23-28 ноября 2018 г.). - С. 307-309.

[11-А]. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач» (3-9 мая 2019 г.). - С. 289-290.

[12-А]. Талбаков Ф.М. Об аппроксимации почти-периодических функций Бора целыми функциями конечной степени [Текст] / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // Материалы международной конференции 60-летю академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора З.Х. Рахмонова и члена-корреспондента НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора С.А. Исхокова (Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.). - С. 270-273.