

«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор Таджикского национального
университета д.э.н., профессор

К.Х. Хушвахтзода

« 9 » 03 2021 г.

ОТЗЫВ

оппонирующей организации на диссертацию Талбакова Фарходджона Махмадшоевича «Об абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных почти-периодических функций и некоторые вопросы их аппроксимации» по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ, представленная на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Актуальность избранной темы. Теория почти-периодических функций возникла в 20-30-х годах XX столетия, благодаря исследованиям датского математика Г. Бора и в настоящее время накопилась обширная литература по различным вопросам этой теории. Дальнейшее развитие теории почти-периодических функций было продолжено П. Боль, Е. Эсклангоном, А.Безиковичем, Н.Винером, Г.Вейлем, С.Бохнером, Н.Н.Боголюбовым и др.

В этой теории важную роль играет нахождение условий абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье таких функций. Так как и в различных классах почти-периодических функций ряд Фурье является прекрасным аппаратом приближения функций полиномами.

В отличие от периодических функций, проблемы, касающиеся нахождения признаков абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье различных классов почти-периодических функций исследованы недостаточно. Это связано с тем, что показатели Фурье таких функций могут

иметь предельную точку в бесконечности или в нуле, т.е. они могут лежат всюду плотно.

В работах Ю. Муселиака, Б.М. Левитана, Н.П. Купцова, Я.Г. Притулы Е.А. Бредихиной, А.С. Джафарова и Г.А. Мамедова, Ю.Х. Хасанова получены ряд необходимых и достаточных условий абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических в смысле Бора, Безиковича и Степанова функций.

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней изучены и исследованы новые условия абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных почти-периодических функций и рассмотрены приближения таких функций некоторыми частными суммами и интегралами.

Структура и основные результаты диссертации. Диссертационная работа Талбакова Ф.М. состоит из введения, двух глав, списка литературы из 63 наименований и составляет 84 страниц машинописного текста. Она посвящена изучению проблем о сходимости рядов Фурье равномерных почти-периодических функций в зависимости от поведения их показателей Фурье.

Основными объектами диссертационной работы являются исследования необходимых и достаточных признаков абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций в равномерной метрике, т.е. если функция $f(x)$ является почти-периодической в смысле Бора ($f(x) \in \mathbf{B}$), то норма для этой функции определяется по формуле $\|f(x)\|_{\mathbf{B}} = \sup_x |f(x)|$.

Пусть ряд Фурье функции $f(x) \in \mathbf{B}$ имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x}, \quad (1)$$

где A_k - коэффициенты Фурье этого ряда, а числа $\{\lambda_k\}$ – показатели Фурье, которые:

а) имеют единственную предельную точку в бесконечности,

$$\lambda_k > 0 (k > 0), \lambda_{-k} = -\lambda_k, |\lambda_k| > |\lambda_{k-1}|, (k = 1, 2, \dots), \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = \infty; \quad (2)$$

б) имеют единственную предельную точку в нуле, то есть

$$\lambda_k > 0 (k > 0), \lambda_{-k} = -\lambda_k, |\lambda_k| < |\lambda_{k-1}|, (k = 1, 2, \dots), \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = 0. \quad (3)$$

При исследовании вопросов абсолютной сходимости рядов вида (1), когда для показателей Фурье выполнены условия (2), в работе используется модуль непрерывности порядка k функции $f(x) \in \mathbf{B}$

$$\omega(fh; h)_{\mathbf{B}} = \sup_{|t| \leq h} \sup_{x \in \mathbf{R}} |\Delta_t^k f(x)|,$$

$$\Delta_t^k f(x) = \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \binom{k}{r} f(x + rt) (h > 0, k \in \mathbf{N})$$

- разность k -го порядка функции $f(x)$ в точке x с шагом t ;

в случае, когда выполнены условия (3), используется величина, которая построена на базе преобразования Лапласа, т.е.

$$\Omega(f; \theta) = \theta \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| \int_0^{\infty} e^{-\theta t} f(x-t) dt \right|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Во введении обосновывается актуальность темы рассматриваемой диссертации, формулируется цель исследования, приводится краткий обзор работ, связанных с темой диссертации, а также приводятся основные результаты исследования.

В первой главе работы исследуются достаточные условия сходимости ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k|^\beta |k|^\gamma (\gamma > 0, \beta > 0). \quad (4)$$

Доказываются утверждения, что если для функции $f(x) \in \mathbf{B}$, спектр которой удовлетворяет условиям (3), из сходимости ряда $\sum_{v=0}^{\infty} 2^{v(\gamma + \frac{q-\beta}{q})} \Omega(f; \lambda_{2^v})$ вытекает абсолютная сходимость ряда (4). А в случае, когда выполнены условия (2), то сходимость ряда (4), следует из

$$\sum_{v=1}^{\infty} [\mu(2^v \pi) - \mu(2^{v-1} \pi) + 1]^{1-\frac{\gamma}{2}} \omega^\gamma(f; 2^{-v}) \omega_\Phi^{\frac{\gamma}{2}}(f; 2^{-v}) \Phi^{-\frac{\gamma}{2}}[\omega(f; 2^{-v})] < \infty,$$

где $\omega(f; h) = \text{vraisup}_{\infty < x < \infty} |f(x + \delta) - f(x)|$ ($|\delta| \leq h$),

$$\omega_\Phi(f; h) = \sup_{|\delta| \leq h} \bar{M}\{\Phi[|f(x + \delta) - f(x)|]\}, \bar{M}\{g(x)\} = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(x) dx.$$

Аналогичные результаты получены и для рядов Фурье с малыми пропусками,

т.е. когда этот ряд допускает малые пропуски вида $n_{k+1} - n_k \geq \frac{4\pi}{\eta}$.

Вторая глава диссертационной работы посвящена исследованию приближения равномерных почти-периодических функций некоторыми суммами и интегралами Фурье, а также вопросам приближения $f(x) \in \mathbf{B}$ суммами типа Марцинкевича $\sigma_T(f; x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f; x)$, где $S_k(f; x)$ – частная сумма ряда Фурье функции $f(x) \in \mathbf{B}$. Во втором параграфе второй главы исследованы проблемы приближения равномерных почти-периодических функций целыми функциями, а также принадлежности функций $f(x) \in \mathbf{B}$ к классу целых функций.

Достоверность и научная новизна исследований. Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, определяется обоснованными теоретическими выкладками и строгими доказательствами, опирающимися на методы теории функций и функционального анализа и теории рядов Фурье. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. найдены достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных почти-периодических функций, когда: а) их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности; б) их спектр имеет единственную предельную точку в нуле, при этом в качестве структурной характеристики функций, используется величина, построенная на базе преобразования Лапласа;

2. аналогичные результаты получены для рядов Фурье равномерных почти-периодических функций с малыми пропусками;

3. установлены условия отклонения функций $f(x) \in \mathbf{B}$ от сумм типа Марцинкевича, частных сумм и интеграла Фурье в равномерной метрике;

4. доказаны условия принадлежности целых функций ограниченной степени к классу почти-периодических функций.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Работа носит как теоретический, так и практический характер и ее результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории

рядов Фурье почти-периодических функций, в различных прикладных вопросах, также могут быть использованы в научных учреждениях и вузах, где ведутся исследования по теории тригонометрических рядов Фурье, например, в Таджикском Национальном Университете, Таджикском государственном педагогическом университете им. С.Айни, Худжандском государственном университете им. Б.Гафурова, Бохтарском государственном университете им. Н.Хусрава и др.

Апробация работы. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 публикациях автора в научных журналах и материалах международных научных конференций, из которых 4 входят в перечень рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК РФ. Они также докладывались на ряде международных научных конференций, проходивших в Российской Федерации и Республике Таджикистан.

Диссертация и автореферат написаны ясным и понятным научным языком. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Замечания по содержанию и оформлению работы. К диссертационной работе имеются некоторые замечания, которые легко могут быть исправлены:

1. Встречаются грамматические и стилистические ошибки, например, в автореферате, с. 12, в формулировке теоремы 2.1.1 вместо «частная сумма», написано «частная функция», здесь же вместо «которые» - «которой»;

2. Во втором параграфе главы 2 исследуются принадлежности целых функций классу функций Бора. Однако в работе не приведены определения основных понятий, как понятия целой функции, степень целой функции, целая функция ограниченной степени и др.

Высказанные замечания не снижают в целом научных достоинств диссертации и не могут существенно повлиять на её общую положительную оценку.

Заключение по диссертации. Отметим, что научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в исследовании, обоснованы с помощью общепризнанных методов теории рядов Фурье почти-периодических функций. Все результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми, подтверждены строгими доказательствами, согласуются с известными результатами других авторов и являются существенным вкладом в общую теорию рядов Фурье почти-периодических функций.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертационная работа Талбакова Ф.М. «Об абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных почти-периодических функций и некоторые вопросы их аппроксимации» удовлетворяет требованиям, представляемым ВАК При Президенте Республики Таджикистан к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук.

Результаты диссертационной работы Талбакова Фарходджона Махмадшоевича заслушаны на специальном семинаре кафедры «Математического анализа и теории функций» и «Функционального анализа и дифференциальных уравнений» Механико-математического факультета Таджикского национального университета 03.03.2021 г.

Отзыв подготовил доцент кафедры Функционального анализа и дифференциальных уравнений ТНУ, кандидат физико-математических наук Джурахонов О. Отзыв был заслушан, обсуждён и единогласно утверждён на совместном заседании кафедр «Математического анализа и теории функций» и «Функционального анализа и дифференциальных уравнений» 3 марта 2021 года, протокол №4.

Председатель заседания, заведующий кафедрой Функционального анализа и дифференциальных уравнений ТНУ, кандидат физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление



Солиев С.К.

Эксперт, доцент кафедры Функционального анализа и дифференциальных уравнений ТНУ, кандидат физико-математических наук по специальности 01.01.01– Вещественный, комплексный и функциональный анализ



Джурахонов О.

Секретарь заседания, доцент кафедры Математического анализа и теории функции ТНУ, физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление



Шоимкулов Б.М.

Сведение об оппонировавшей организации
Таджикский национальный университет,
734025, г. Душанбе, проспект Рудаки, 17.
Тел: (+992-372) 21-77-11;
E-mail: tgnu@mail.tj;
Сайт: <http://www.tnu.tj>.

Подписи Солиева С.К., Джурахонова О., Шоимкулова Б.М. заверяю
Начальник управления кадров и
специальной части ТНУ



Тавкиев Э.Ш.