Таджикский национальный университет

На правах рукописи

УДК 511.331

Хайруллоев Шамсулло Амруллоевич

Нули производных функций Харди и Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие в коротких промежутках критической прямой

Диссертация
на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук
по специальности 01.01.06 - Математическая логика,
алгебра и теория чисел

Научный консультант: доктор физико-математических
наук, академик НАНТ, профессор, Рахмонов З.Х.

Душанбе — 2022

Оглавление

Обозначения 4

Введение 6

Общая характеристика работы 9

Глава 1. Анализ литературы по нулям производных функции Харди и функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие на критической прямой 17

1.1. Краткий исторический обзор о нулях функции Харди и её производных 17

1.2. Краткий исторический обзор о нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие на критической прямой 22

1.3. Методы исследования 26

Глава 2. Нули производной функции Харди 33

2.1. Постановка и изложение основных результатов 33

2.2. Вспомогательные утверждения 36

2.3. Теорема о нулях производной функции Харди 44

2.4. Нули производной j–го порядка функции Харди при $j \geq 3$ 56

2.5. Теоремы о нулях производной первого и второго порядка функции Харди 60

Глава 3. Оценки специальных тригонометрических сумм и суммы $S(Y)$, $W(\theta)$ 75

3.1. Формулировка основных результатов 75

3.2. Оценка специальных тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0, 1, 2$ 79

3.3. Оценки сумм $S(Y)$ и $W(\theta)$ 93

Глава 4. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие на критической прямой 122

4.1. Постановка задач и формулировка результатов 122

4.2. Вспомогательные утверждения 126

4.3. Доказательство теоремы 4.1.1 129

4.4. Доказательство теоремы 4.1.2 149

Обсуждение полученных результатов 169

Выводы 177

Список литературы 179

Обозначения

В диссертационном работе используются следующие обозначения:

- $e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha}$;
- $\|\alpha\| = \min(\{\alpha\}, 1 - \{\alpha\})$ — расстояние от α до ближайшего целого числа;
- $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера, которая определяется равенством

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}},$$

  γ — постоянная (константа) Эйлера, которая определяется следующим образом:

$$\gamma = \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-\ln m\right);$$

- $\prod\limits_{p}$ — произведение по простым числам;
- $Z(t)$ — функция Харди;
- c, c_1, c_2, $\ldots$, — положительные постоянные, не всегда одни и те же;
- ε, ε_1, $\ldots$ — положительные сколь угодно малые постоянные;
- $\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$;
- $[\alpha]$ — целая часть α — наибольшее целое число, не превосходящее α;
- $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ — дробная часть α;
- $\ln x = \log x$ — натуральный логарифм x;
- запись $A \ll B$ означает, что существует $c > 0$ такое, что $|A| \leq cB$;

- запись $A \gg B$ означает, что существует $B > 0$ и $A > cB$, где c — постоянная, большая нуля;
- $N(T)$ — число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0 < Re\,s < 1$, $0 < Jm\,s \leq 1$;
- $N_0(T)$ — число нулей функции $f(s)$ — Дэвенпорта-Хейльбронна в области $Re\,s = 1/2$, $0 < Jm\,s \leq T$;
- $N(\sigma, T)$ — число нулей функции $f(s)$ в прямоугольнике $\sigma < Re\,s < 1$, $0 < Jm\,s \leq T$;
- для действительных положительных функций f и φ запись $f \asymp \varphi$ означает, что существуют положительные c_1 и c_2 такие, что $c_1 f \leq \varphi \leq c_2 f$;
- во всех утверждениях, касающихся ζ — функций $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$. Если s имеет какие-либо индексы, то такие же индексы имеют σ и t, $Res = \sigma$, $Ims = t$;
- $\mathscr{L} = \ln P$, $P = \sqrt{5T(2\pi)^{-1}}$;
- $T \geq T_0 > 0$, где T_0 — достаточно большое натуральное число;
- $T \leq t \leq T + H$;
- при ссылках теоремы, леммы и формулы нумеруются тремя индексами: номер главы, номер параграфа, номер утверждения.

Введение

Актуальность темы исследования. Исследования по теории дзета-функции Римана берёт своё начало с XIX века и отдельные разделы этой теории стали самостоятельными научными направлениями современной аналитической теории чисел.

В исследованиях по теории дзета-функции Римана одним из главных направлений является изучение нулей $\zeta(s)$, лежащих на критической прямой. А изучение нулей дзета-функции Римана на критической прямой сводится к изучению действительных нулей функции Харди.

Одним из вопросов относительно этих нулей является вопрос о величине промежутка, на котором заведомо лежат нуль функции Харди и её производные.

Гипотеза Римана не верна для функции Дэвенпорта-Хейльбронна, который является простейшим рядом Дирихле, удовлетворяющим функциональному уравнению риманова типа. Кроме того известно, что на критической прямой лежит очень много нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна.

Исследования нулей функции Харди и её производных, а также нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой, ранее рассматривались в работах английских математиков Г.Харди и Дж.Литтлвуда [197]–[201], Г.Дэвенпорта и Г.Хейльбронна [178], норвежского математика А.Сельберга [307], чешского математика Я.Мозера [124]–[129] и советских математиков С.М.Воронина [12]–[26], А.А.Карацубы [52]–[78], С.А.Гриценко [27]–[50], И.С.Резвякова [153]–[162], М.А.Королёва [80]–[98], А.Ф.Лаврика [103]–[123].

Актуальность и целесообразность данной работы определяются тем, что полученные результаты об оценке длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди, и оценка количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой являются новыми и наилучшими.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. В дальнейшее развитие теории нулей функции Харди и её производных и функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой, значительный вклад внесли следующие известные математики: А.А.Карацуба [209]–[244], С.М.Воронин [312]–[320], И.М.Виноградов [7]–[11, 311], Г.И. Архипов [5, 6, 174], З.Х.Рахмонов [133]–[152, 295, 296], С.М.Гриценко [182]–[196], M.N.Huxley [202]–[205], В.Н.Чубариков [172], М.А.Королёв [245]–[271], А.А. Лаврик [99]–[102, 273, 274, 275], А.Ф.Лаврик [276]–[290], И.С.Резвякова [297]–[306], Л.В.Киселёва [79], М.Е.Чанга [169, 170, 176, 177], A.P.Ivic [206], H.Iwaniec [207], И.Ш. Джаборов [51, 208] и M.Z.Garaev [180].

Дзета-функция Римана является аналитической функцией на всей s – комплексной плоскости, за исключением точки $s = 1$ и имеют тривиальные нули при чётных целых отрицательных s. Нетривиальные нули $\zeta(s)$ находятся в полосе $0 \leq Res \leq 1$, которая называется «критической полосой».

В работе [173] Л.Эйлер изучал функцию $\zeta(s)$ при действительных s и с помощью своего тождества предложил аналитическое доказательство теоремы Евклида о бесконечности числа простых чисел. Б.Риман [163] изучал $\zeta(s)$ как функцию комплексного переменного. Он доказал, что применяя теорию функций комплексного переменного для $\zeta(s)$, можно получить новые результаты о распределении простых чисел.

До сих пор не доказанная гипотеза Римана утверждает следующее: ***«все нетривиальные нули дзета-функции Римана, лежат на прямой*** $Res = 1/2$***»***. Нули $\zeta(s)$ на критической прямой — это действительные нули функции $\zeta(1/2 + it)$.

Существуют функции, обладающие свойствами $\zeta(s)$, но не имеющие эйлерова произведения. Для некоторых из них удаётся показать, что гипотеза Римана неверна. Более того, нули некоторых из этих функций встречаются в любой полосе. Примером таких функций является функция Дэвенпорта-Хейльбронна, которую впервые исследовали Г.Харди и Дж.Литтлвуд в 1936 г.

Из вышеприведённого рассуждения по теории нулей функции Харди и её производной, а также нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой, следует, что данные направления являются актуальными, и этим актуальным проблемам посвящается настоящая диссертационная работа.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета 2016-2020 гг. по теме «Тригонометрические суммы и их приложения». ГР 0116TJ00663.

Общая характеристика работы

Цель исследования. Целями диссертационной работы являются:

- нахождение по множеству всех экспоненциальных пар нижней грани длины промежутка критической прямой, содержащей нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди;
- получение новых равномерных по параметрам оценок специальных тригонометрических сумм в терминах экспоненциальных пар;
- усиление неравенства А.А.Карацубы о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой для промежутков, имеющих более короткую длину.

Задачи исследования. В соответствии с поставленными целями выделяются следующие задачи:

- свести задачу об оценке сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди, к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар;
- получить новые оценки сверху величины длин промежутков критической прямой, в которых заведомо содержатся нули нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди;
- получить новые равномерные по параметрам оценки специальных тригонометрических сумм, в терминах экспоненциальных пар;
- свести задачу об оценке количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна к задаче отыскания экспоненциальных пар;

- усилить неравенство А.А.Карацубы о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, притом для промежутков, имеющих более короткую длину.

Объект исследования. Объектами исследования являются нули производной j-го порядка функции Харди, лежащие на критической прямой, оценка специальных и кратных тригонометрических сумм и нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой.

Предмет исследования. Предметом исследования является получение новых равномерных по параметрам оценок специальных тригонометрических сумм в терминах экспоненциальных пар, получение новых оценок сверху величины длин промежутков критической прямой, в которых заведомо содержатся нули нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди, а также усиление неравенства А.А.Карацубы о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой, для промежутков, имеющих более короткую длину.

Научная новизна исследования. Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют теоретический интерес и состоят в следующем:

- задача об оценке сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди, сведена к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар;
- найдены новые оценки сверху величины длин промежутков критической прямой, в которых заведомо содержатся нули нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди;

- получены новые равномерные по параметрам оценки тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0; 1; 2; 3$ в терминах экспоненциальных пар, которые возникают при исследовании нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой;
- с использованием новых равномерных по параметрам оценок тригонометрических сумм задача об оценке количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна сведена к задаче отыскания экспоненциальных пар;
- усилено неравенство А.А.Карацубы о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, притом для промежутков, имеющих более короткую длину.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применения в аналитической теории чисел при дальнейших исследованиях нулей рядов Дирихле, в том числе, линейных комбинациях L – рядов Дирихле, для которых не выполняется гипотеза Римана о нулях в критической полосе. Полученные результаты могут быть использованы в научных учреждениях и ВУЗах, где ведутся исследования по аналитической теории чисел, например, в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, в Таджикском национальном университете, в Таджикском государственном педагогическом университете им. С.Айни. Также материалы диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

Положения, выносимые на защиту:

1. Теорема о сведении задачи оценки сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди, к задачам оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар;
2. Теорема об оценке сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди.
3. Теорема о получении равномерных по параметрам оценок специальных тригонометрических сумм в терминах экспоненциальных пар.
4. Теорема о сведении задачи об оценке количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна, к задачам отыскания экспоненциальных пар.
5. Теорема о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, когда промежуток имеет более короткую длину.

Степень достоверности результатов. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В диссертационной работе исследуются задачи по аналитической теории чисел, которые соответствуют паспорту научной специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел (Пункт III параграф 3 паспорта научной специальности).

Личный вклад соискателя учёной степени. Задачи исследования были сформулированы совместно с научным консультантом работы, который оказывал консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, отражённые в разделе «Научная новизна», получены лично автором.

Апробация и реализация результатов диссертации. Основные результаты диссертации обсуждены и получили положительные отзывы на следующих конференциях и семинарах:

- международной конференции «Современные проблемы анализа и преподавания математики», посвящённой 105-летию академика С.М. Никольского. г. Москва, МГУ им. М.В.Ломоносов, 17-19 мая 2010 г.;
- VIII-ой международной конференции «Алгебра и теории чисел: Современные проблемы и приложения», посвящённой 190-летию П.Л.Чебышева и 120-летию И.М.Виноградова, г. Саратов, 12-17 сентября 2011 г;
- международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел». г. Белгород. 17-21 октября 2011 г.;
- международной конференции «Современные проблемы теории дифференциальных уравнений и математического анализа», посвящённой 80-летию академика АН РТ Джураева А.Д., г. Душанбе, 07-08 декабря 2012 г.;
- международной научной конференции «Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений», посвящённой 85-летию академика АН РТ Л.Г.Михайлова, г. Душанбе, 17-18 июня 2013 г.;
- международной научно-практической конференции «Наука и инновационные разработки – северу». Россия, г. Мирный, 10-12 марта 2014 г.;

- XIII-ой международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященной 80-летию со дня рождения профессора С.С.Рышкова. Россия, г. Тула, 25-30 мая 2015 г.;
- XIV-ой международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённой 70-летию со дня рождения Г.И.Архипова и С.М.Воронина. г. Саратов, 12-15 сентября 2016 г.;
- международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики». г. Нальчик, 17-21 мая 2017 г.;
- IV-ой международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики». г. Нальчик, 22-26 мая 2018 г.;
- XV-ой международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвящённой столетию со дня рождения профессора Н.М.Коробова. Россия. г. Тула, 28-31 мая 2018 г.;
- международной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвящённой 80-летию академика РАН В.А.Садовничего. г. Москва, 13-15 мая 2019 г.;
- XVI-ой международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённой 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Россия. г. Тула, 13-18 мая 2019 г.;
- XVII-ой международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Н.И.Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А.И.Виноградова, А.В.Малышева и Б.Ф.Скубенко. г. Тула, 23-28 сентября 2019 г.;

- международной конференции «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа», посвящённой 60-летию академика З.Х.Рахмонова и члена-корреспондента С.А.Исхокова, г. Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.;
- XVIII-ой международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённой столетию со дня рождения профессоров Б.М.Бредихина, В.И.Нечаева и С.Б.Стечкина. г. Тула, 23-26 сентября 2020 г.;
- XIX-ой международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённой двухсотлетию со дня рождения академика П.Л.Чебышева. г. Тула, 18-22 мая 2021 г.;
- XX-ой международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённой 130-летию со дня рождения академика И.М.Виноградова. г. Тула, 21-24 сентября 2021 г.;
- семинар кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета;
- семинар отдела алгебры, теории чисел и топологии (2016-2020 гг.) и общеинститутский семинар (2016-2020 гг.) в Институте математики им. А.Джураева НАН Таджикистана.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 40 работах, список которых приведён в конце диссертации. Работы [1-А]–[18-А] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан, 16 из них написаны без соавторов. Работы [1-A], [2-A] и [3-A] опубликованы в журналах, входящих в международные библиографические и реферативные базы данных и систем цитирования **Web of Science и Scopus**, одна из которых написана в соавторстве с научным консультантом, которому принадлежит постановка задачи.

Структура диссертации и объём. Диссертация состоит из списка обозначений, введения, общей характеристики работы, трёх глав, обсуждения полученных результатов, выводов, списка цитированной литературы из 360 наименований, занимает 218 страниц машинописного текста и набрана на редакторе LaTeX. Главы разбиты на параграфы. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья-на порядковый номер теорем, лемм или формул в данном параграфе.

Глава 1

Анализ литературы по нулям производных функции Харди и функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие на критической прямой

В этой главе излагается анализ изученной литературы по теме диссертационной работы, приводятся основы теоретико-методологического исследования, методы исследования, анализ существующих проблем и полученных результатов, а также нерешенные задачи по теме диссертационной работы.

1.1. Краткий исторический обзор о нулях функции Харди и её производных

Одной из актуальных задач теории дзета-функции Римана является доказательство существования её нулей на коротких промежутках критической прямой или, что то же самое, вещественных нулей функции Харди $Z(t)$. Обобщением этой задачи является исследование нулей производных $Z^{(j)}(t)$ этой функции. Существование вещественных нулей функции Харди и её производных на коротких промежутках критической прямой является одной из актуальных проблем аналитической теории чисел.

Нули функции Харди и её производных исследовали такие знаменитые учёные как Г.Харди, Дж.Литтлвуд [197]–[201], А.Сельберг [307], Я.Мозер [124]–[129], С.М.Воронин [26], А.А.Карацуба [52]–[60] и другие.

Английский математик Г.Харди впервые исследовал нули функции $Z(t)$ на критической прямой. Он в 1914 г. в работе [197] доказал теорему:

Теорема Харди [197]. *Функция $Z(t)$ имеет бесконечно много вещественных нулей.*

Продолжая свои исследования Г.Харди и Дж.Литтлвуд [199], [200] в 1918–1921 гг. доказали следующее утверждение, которое значительно перекрыло теорему Г.Харди.

Первая теорема Харди Литтлвуда [199]. *Пусть* $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{1/6} \ln^2 T$, *тогда промежуток* $(T, T+H)$ *содержит нуль нечётного порядка функции* $Z(t)$.

Вторая теорема Харди Литтлвуда [200]. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют* $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$, $c = c(\varepsilon) > 0$, *такие что при* $T \geq T_0 > 0$, $H = T^{1/2+\varepsilon}$ *справедливо неравенство*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq cH,$$

где $N_0(T)$ *– число нулей нечётного порядка функции* $Z(t)$, *лежащих на промежутке* $(0, T)$.

Эти теоремы открыли два направления исследований, первое – оценки сверху расстояний между соседними вещественными нулями функции $Z(t)$, а второе – плотность нулей $Z(t)$ на промежутках $(T, T+H)$, $H = T^{\alpha+\varepsilon}$ с возможно меньшими значениями α.

А.Сельберг [307] в 1942 г. доказал усиленный вариант второй теоремы Г.Харди и Дж.Литтлвуда.

Теорема Сельберга [307]. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют* $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$, $c = c(\varepsilon) > 0$, *такие, что при* $T \geq T_0 > 0$, $H = T^{1/2+\varepsilon}$ *справедливо неравенство*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq cH \ln T.$$

При изучении количества нулей функции $Z(t)$ на промежутке $(0, T)$, основной идеей является сравнивание интегралов I_1 и I_2, где

$$I_1 = \int_t^{t+h} |Z(u)| du, \quad I_2 = \left| \int_t^{t+h} Z(u) du \right|.$$

Если $I_1 \neq I_2$, тогда функция $Z(u)$ на промежутке $(t, t+h)$ меняет знак, то есть этот промежуток имеет нуль нечётного порядка функции $Z(u)$.

Эту идею затем дополнил А.Сельберг [307]. Он вместо функции $Z(u)$ рассматривал функцию

$$F(u) = Z(u)|f_1(u)|^2,$$

где $f_1(u)$ подбирается так, чтобы функция $F(u)$ «в среднем» была близко к постоянной. А.Сельберг при выборе $f_1(u)$ пользовался тем, что функция $\zeta(s)$ имеет эйлерова произведение, это впервые применили Г. Бор и Э.Ландау при оценке количества нулей функции $Z(t)$ на промежутке $(0, T)$.

А.Сельберг об оценках количества нулей функции $Z(t)$ на промежутке $(0, T)$ высказал гипотезу, что результат должен иметь место при $H = T^{\alpha+\varepsilon}$, где α – фиксированное положительное число, меньше $1/2$. Эту гипотезу при $\alpha = 27/82$ решил А.А.Карацуба [55],[56],[57]. Он в своих работах отметил, что показатель

$$\alpha = \frac{27}{82} = \frac{1}{3} - \frac{1}{246}$$

может быть заменен и меньшим числом, однако это связано с исключительно громоздкими оценками специального вида тригонометрических сумм.

Новые важные результаты по названным проблемам получил Я.Мозер [124]–[129]. Он в своих работах доказал следующие теоремы:

Первая теорема Мозера [124]. *Пусть* $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{1/6} \ln^2 T$, *тогда промежуток* $(T, T+H)$ *содержит нуль нечётного* *порядка функции* $Z(t)$.

Вторая теорема Мозера [128]. *При* $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{5/12} \ln^3 T$ *имеет место оценка*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq cH \ln^3 T,$$

$c > 0$ *– абсолютная постоянная.*

А.А. Карацуба [52], [58] получил нетривиальную оценку для тригонометрических сумм вида

$$C(u, M) = \sum_{M < m \leq M_1} e\left(\frac{t \ln(P_1 - m)}{2\pi}\right),$$

где

$$t \geq t_0 > 0, \quad \sqrt{P_1} \leq M \leq \frac{P_1}{10}, \quad M_1 \leq 2M, \quad P_1 = \left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right],$$

который позволил ему получить более точный результат, чем Я.Мозер.

Лемма А.А. Карацубы [52]. *Пусть* $t \gg 1$, $P = [\sqrt{t/2\pi}]$, $\sqrt{P} \ll M \ll P$,

$$C(u, M) = \sum_{M < m \leq 2M} e^{it \ln(P-m)}.$$

Тогда имеет место следующая оценка:

$$C(u, M) \ll P^{-2/7} M^{8/7} + P^{-13/29} M^{19/14},$$

где постоянная в знаке $\ll$ *– абсолютная.*

Первая теорема А.А.Карацубы [56]. *При* $H \gg T^{5/32} \ln^2 T$ *промежуток* $(T, T+H)$ *содержит нуль нечётного порядка функции* $Z(t)$.

При доказательстве этой теоремы А.А.Карацуба следовал Харди-Литтлвуду-Мозеру, изучал вещественные нули функции $Z(t)$, которые являются вещественными нулями дзета-функция Римана, лежащей на критической прямой. Он [52] предполагал, что при любом $\varepsilon > 0$, $T \geq$

$T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{\varepsilon}$ промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечётного порядка функции $Z(t)$. Однако эта гипотеза не следует даже из гипотезы Римана.

А.А. Карацуба вместе с задачей о нулях функции Харди, рассмотрел более общую задачу – о нулях производной j–го порядка функции Харди [52], [209]. Ему удалось доказать, что с увеличением порядка производных длина промежутка, на котором заведомо лежит нуль нечётного порядка функции $Z^{(j)}(t)$, уменьшается.

Вторая теорема А.А.Карацубы [52]. *Пусть j – целое число, $j > 0$, $T \gg 1$,*

$$H \gg T^{\frac{1}{6j+6}}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}.$$

Тогда промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечётного порядка функции $Z^{(j)}(t)$.

При доказательстве этой теоремы А.А.Карацуба пользовался теми же средствами, что и Я. Мозер, с добавлением дополнительного соображения о многократном усреднении, которое довольно часто встречается в разных задачах теории чисел. Кроме того, он применил новый приём оценки специальных тригонометрических сумм $C(u, M)$, который позволил ему удачно использовать особенность решаемой задачи.

А.А.Карацуба отметил, что если для оценки тригонометрических сумм $C(u, M)$ применить более сложные методы, например, метод экспоненциальных пар, то для этой суммы можно получить более точную оценку [26].

В работах [139], [142], применяя метод экспоненциальных пар, для специальных тригонометрических сумм $C(u, M)$ по множеству всех экспоненциальных пар, авторы получили новую нетривиальную оценку вида

$$|C(t, M)| \ll P_1^{\frac{1}{2}-\lambda} M^{-\frac{1}{2}+\kappa+2\lambda},$$

которая позволила получить более точные результаты, чем результат А.А. Карацубы, т.е. было доказано следующее: *Пусть* $T \geq T_0 > 0$. *Тогда промежуток* $(T, T+H)$ *при*

$$H \geq T^{\frac{5}{32} - \frac{\frac{5}{6} - R}{192(2R+1)}} \ln^2 T,$$

где $R = 0.8290213568591335924092397772831120\ldots$, *константа Ранкина, имеет нуль нечётного порядка функции* $Z(t)$.

При доказательстве этой теоремы авторы пользуются методом экспоненциальных пар в сочетании с алгоритмом определения экспоненциальных пар.

Полученный результат является уточнением результата А.А. Карацубы и в рамках метода оптимизации экспоненциальных пар, является окончательным.

Задача о получении более точных результатов в исследовании нулей нечётного порядка функции Харди и её производных, лежащих на критической прямой, успешно решена в настоящей диссертационной работе.

К нерешенным задачам относится до сих пор не доказанная гипотеза Римана о нулях дзета-функция Римана, лежащих на критической прямой.

1.2. Краткий исторический обзор о нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие на критической прямой

Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие на критической прямой, исследовали Г.Дэвепорт и Г.Хейльбронн [178], С.М.Воронин [21], [22], [25], [26], А.А.Карацуба [61], [62], [63], [66], [67], [68], [69], С.А.Гриценко [43], [44], [45], [46], [47], [48], [49] и З.Х.Рахмонов [150], [146], [148], [149], [151].

В 1936 г. Г.Дэвенпорт и Г.Хейльбронн [178] исследовали функцию

$$f(s) = c_1 L(s,\chi) + \overline{c_1}\overline{L}(s,\chi),$$

где χ – характер Дирихле по модулю 5 с условием $\chi(2) = i$, а постоянная c_1 выбрана так, чтобы для $f(s)$ выполнялось функциональное уравнение риманова типа

$$g(s) = g(1-s), \quad g(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s).$$

Количество нулей функции $f(s)$ в области $0 < Ims \le T$, $Res \ge \sigma$ обозначают через $N(\sigma, T)$, а количество нулей функции $f(s)$ в области $0 < Ims \le T$, $Res = 1/2$ через $N_0(T)$.

В работе [178] Г.Дэвенпорт и Г.Хейльбронн доказали следующее.

Теорема Девенпорта-Хейльбронна. *При $Res > 1$, $0 < Ims \le T$ для функции $f(s)$ имеет место неравенство*

$$N(1,T) \ge c_1 T,$$

где $c_1 > 0$ – абсолютная постоянная.

С.М.Воронин [22] в 1980 г. доказал

Теорема Воронина [22]. *При $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ справедливо неравенство*

$$N(\sigma_2, T) - N(\sigma_1, T) \ge c_2 T,$$

где $c_2 = c_2(\sigma_1, \sigma_2) > 0$.

Кроме того, С.М.Воронин [21] показал, что прямая $Res = 1/2$ является исключительным множеством для нулей функции $f(s)$.

Теорема Воронина [21]. *Пусть $T > T_0 \ge 0$, тогда имеет место неравенство*

$$N_0(T) \ge c_3 T \exp\left(\frac{1}{20}\sqrt{\ln\ln\ln\ln T}\right),$$

где $c_3 > 0$ – абсолютная постоянная.

А.А.Карацуба [61], [62] в 1989 г. создал новый метод, с помощью которого получил более точную оценку. Основная идея метода А.А.Карацубы заключаются в следующем:

- при $Res > 1$ использовать наличие у функции $f(s)$ множителя

$$f_1(s) = \prod_{p \equiv \pm 1 (mod 5)} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

  то есть, $f_1(s)$ является общим делителем $L(s, \chi)$ и $L(s, \overline{\chi_1})$;

- сравнивать малые положительные степени абсолютных величин интегралов от вещественной функции $F(t)$, соответствующей $f(s)$.

Теорема Карацубы [61]. *Пусть ε – произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее 0,01. Тогда при $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, справедливо неравенство*

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq H(\log T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

В 1994 г. А.А.Карацуба [67], [68], развивая свой метод, получил ещё более точную оценку, а именно, множитель $(\log T)^{-\varepsilon}$ заменил менее убывающей функцией T.

Теорема Карацубы [68]. *Пусть ε – произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее 0,01. Тогда при $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, справедливо неравенство*

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq H(\log T)^{\frac{1}{2}} \exp(-c_4\sqrt{\log\log T}),$$

где c_4 – положительная абсолютная постоянная.

При оценке количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой, основным содержанием являются оценки специальных тригонометрических сумм $W_j(T)$. При $j = 0, 1, 2$ определим три типа сумм $W_j(T)$. Введём параметры, от которых будут зависеть эти суммы: Y – растущий параметр, $Y \geq Y_0 > 0$, где Y_0 – достаточно большое число; $0,5Y \leq T \leq Y$; $P = \sqrt{T/2\pi}$; $P_0 = \sqrt{Y/2\pi}$; $0 < X \leq P$; параметр X выбирается некоторым оптимальным образом из условий решаемой задачи; $A \geq 10$; A – постоянное число; $0 < \varepsilon_1 < 0,01$; ε_1 – постоянное число; $L = \ln Y$; $h = AL^{-1}$; $0 < H < \sqrt[3]{X}$; $H_1 = H + h$; $0 < \varepsilon < 0,001$; ε – постоянное число. Через $a(\lambda)$ обозначим число

$$a(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\nu_2}, \quad \beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\left(1 - \dfrac{\ln\nu}{\ln X}\right), & 1 \leq \nu < X, \\ 0, & \nu \geq X, \end{cases}$$

где λ – рациональные числа, знаменатель которых не превосходит X, а числа $\alpha(\nu)$ находятся из соотношения

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta(s)}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s}, \quad Res > 1.$$

Суммы $W_j(T)$ определим равенствами

$$W_0(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} e^{-\left(\frac{H_1}{2}\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2};$$

$$W_1(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P_0^{1-\varepsilon_1}} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} B(\lambda_1)\overline{B(\lambda_2)} e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2};$$

$$W_2(T) = \sum_{P_0^{1-\varepsilon_1}<\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} e^{-\left(\frac{H_1}{2}\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2},$$

где

$$B(\lambda) = ((P\lambda^{-1})^{ih} - 1)(\ln P\lambda^{-1})^{-1}.$$

А.А.Карацуба [58] в 1985 г. для суммы $W_j(T)$ впервые получил равномерные по параметрам оценки.

Лемма Карацубы [58]. *Пусть* $X = Y^{0{,}01\varepsilon}$, $H = Y^{27/82+\varepsilon}$, *тогда для суммы* $W = W_j(T)$ $(j = 0, 1, 2)$ *справедлива следующая оценка:*

$$W = W_j(T) \ll B_0 Y^{-\varepsilon},$$

где $B_0 = 1$ *при* $j = 0, 2$ *и* $B_0 = \varepsilon_1^{-2} L^{-2} + \varepsilon_1^{-1} A L^{-2}$ *при* $j = 1$.

1.3. Методы исследования

В диссертационной работе используются современные методы аналитической теории чисел, а именно, метод ван дер Корпута, метод экспоненциальных пар, метод успокаивающий множители Сельберга, метод производящих функций Дирихле и аналитические методы, применяемые в теории функции комплексного переменного. Приведём основные методы исследования.

Метод ван дер Корпута. Метод ван дер Корпута широко применяется при оценке тригонометрических сумм. Например, одной из задач, в которой метод ван дер Корпута даёт существенное продвижение, является проблема Гаусса о числе целых точек в круге. Этот метод впервые был описан в работах ван дер Корпута в 1921-1922 гг.

Метод ван дер Корпута состоит в том, что суммы заменяются на интегралы, а интегралы оцениваются. Технически это делается с помощью применения формулы Пуассона с последующей асимптотической оценкой возникающих интегралов Фурье. В результате получается приближённое равенство двух сумм разной длины; соответствующее преобразование называется B – процессом. Амплитудные функции в обеих суммах могут иметь различную форму, но не размер, и их производные также сравнимы. Далее амплитудные функции упрощаются с помощью процедуры взятия разностей, являющейся развитием процедуры, применяемой в методе Вейля; эта процедура называется A – процессом. Заключительная оценка получается последовательным применением этих двух процедур.

Основой метода ван дер Корпута является следующее утверждение:

Теорема ван дер Корпута. *Пусть* $k \geq 2$, $K = 2^{k-1}$, $f(x) \in C^k[a,b]$, $b - a \geq 1$. *Если выполнены неравенства*

$$0 < \lambda_k \leq f^{(k)}(x) \leq h\lambda_k,$$

тогда имеет место оценка

$$\sum_{a<n\leq b} e(f(n)) \ll h^{\frac{2}{K}}(b-a)\lambda_k^{\frac{1}{2K-2}} + (b-a)^{1-\frac{2}{K}}\lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}},$$

где постоянная в знаке $\ll$ *абсолютная.*

Метод экспоненциальных пар. Рассмотрим тригонометрическую сумму вида

$$S_f(N) = \sum_{N<n\leq N'} e(f(n)),$$

где $N \leq N' \leq 2N$, а f – гладкая функция на $[N; 2N]$. Предположим, что производные функции f удовлетворяют условию

$$|f^{(j)}(x)| \asymp FN^{-j} \tag{1.3.1}$$

при $N \leq x \leq 2N$ для всякого $j \geq 0$ с подразумеваемой константой, зависящей только от j. В частности, имеется в виду, что $|f(x)| \asymp F$ и $|f'(x)| \asymp FN^{-1}$. Если N больше, чем F, в достаточно большое число раз, тогда

$$S_f(N) \ll NF^{-1}.$$

Эта оценка является оптимальной, поскольку в этом случае сумма $S_f(N)$ хорошо приближается соответствующим интегралом. В дальнейшем мы не будем рассматривать этот частный случай и для этого предположим, что

$$\Lambda = FN^{-1} \geq 1. \tag{1.3.2}$$

На основе анализа многочисленных примеров можно постулировать существование универсальных констант

$$0 \leq p, \quad q \leq \frac{1}{2},$$

обладающих тем свойством, что

$$S_f(N) \ll \Lambda^p N^{q+\frac{1}{2}} F^{\varepsilon}$$

для всякой тригонометрической суммы длины N с частотной функцией f, удовлетворяющей условиям (1.3.1) и (1.3.2). Здесь ε – произвольное положительное число, а подразумеваемая константа зависит только от ε и от последовательности подразумеваемых констант в формуле (1.3.1). Мы будем называть такую пару (p, q) экспоненциальной парой.

Ясно, что если (p, q) – экспоненциальная пара, то экспоненциальной парой будет и всякая пара больших чисел. Тривиальная оценка для $S_f(N)$ соответствует экспоненциальной паре

$$(p, q) = \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

E.Phillips показал, что если (p, q) экспоненциальная пара, то экспоненциальной парой будет и

$$A(p, q) = \left(\frac{p}{2p+2}, \frac{q+\frac{1}{2}}{2p+2}\right), \quad B(p, q) = (q, p),$$

которые называем A и B процессами.

Приведём несколько примеров экспоненциальных пар, построенных исходя из тривиальной пары:

$$B\left(0,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},0\right),\quad AB\left(0,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right),$$

$$A^2B\left(0,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{14},\frac{2}{7}\right),\quad A^3B\left(0,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{30},\frac{11}{30}\right),$$

$$A^4B\left(0,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{62},\frac{13}{31}\right),\quad ABABA^2B\left(0,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{11},\frac{1}{4}\right).$$

При решении некоторых задач, например, для оценки дзета-функции Римана на критической прямой нужна экспоненциальная пара (p,q) с очень малым $p+q$, поскольку

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\ll t^{\frac{1}{2}(p+q)+\varepsilon}\quad \text{при}\quad t\geq 1.$$

В 1955 г. Р.А. Ранкин вычислил наименьшее значение суммы $p+q$ по множеству всех экспоненциальных пар, которые можно получить с помощью A и B – процессов. В других приложениях экспоненциальных пар ищется минимум дробно-линейной функции

$$\theta(p,q)=\frac{\alpha p+\beta q+\mu}{\delta p+\gamma q+\nu}.$$

Имея в виду эти приложения, С.Грэхем в 1985 г. предложил воистину изящный алгоритм для решения этой задачи.

Отметим, что известны некоторые экспоненциальные пары, которые методом ван дер Корпута найти невозможно. Например, М.Н. Хаксли и Н. Уотт, основываясь на работе Е. Бомбьери и Х. Иванеца, показали, что пара

$$(p,q)=\left(\frac{9}{56},\frac{9}{56}\right)$$

является экспоненциальной парой. Дальнейшие усовершенствования в этом направлении приведены в работах М.Н. Хаксли. Вейлевский сдвиг (от n к $n+q$) был введён с целью уменьшения амплитудной функции (переход от $f(n)$ к $h(n) = f(n+q) - f(n)$). Однако этот сдвиг влечет появление дополнительной переменной суммирования. В теории двумерных экспоненциальных пар это обстоятельство оказывается полезным, но получаемые при этом улучшения не является очень внушительными.

Метод успокаивающий множители Сельберга. Основная идея данного метода состоит во введении так называемого «успокаивающего множителя» («mollifying factor»), который частично успокаивает оба ряда Дирихле, входящих, например в определение функции Дэвенпорта-Хейльбронна

$$f(s) = \frac{1 - i\text{æ}}{2} L(s, \chi) + \frac{1 + i\text{æ}}{2} L(s, \bar{\chi}), \quad \text{æ} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1},$$

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Под успокоением понимается понижение порядка роста моментов рядов Дирихле после умножения этих рядов на соответствующие успокаивающие множители. Успокаивающий множитель впервые ввёл в математику А. Сельберг в 1942 г.

Используя существование эйлеровского произведения для дзета-функции Римана, А. Сельберг в 1942 г. доказал, что конечная часть нулей $\zeta(s)$ лежит на прямой $Res = 1/2$. Идея доказательства А. Сельберга состоит в следующем. Несмотря на то, что ряд Дирихле для $1/\sqrt{\zeta(s)}$ расходится при s, лежащем на прямой $Res = 1/2$, тем не менее можно ожидать, что куски этого ряда в среднем будут приближать функцию $1/\sqrt{\zeta(s)}$.

Метод производящих функции Дирихле. Производящие функции Дирихле часто используются в аналитической теории чисел, в том числе в мультипликативной теории чисел. Введение производящей функции Дирихле обусловлено их свойствами относительно умножения, что позволяет контролировать мультипликативную структуру натуральных чисел. Самой известной среди производящих функций Дирихле является дзета-функция Римана. Общая же производящая функция Дирихле, отвечающая последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$, имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Причиной, обуславливающей введение производящих функций Дирихле, служит их поведение относительно умножения: при перемножении двух функций

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad B(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

мы получаем функцию

$$A(s)B(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{kl=n} a_k b_l}{n^s},$$

где внутреннее суммирование ведется по всем разложениям числа n в произведение двух сомножителей.

Таким образом, использование производящих функций Дирихле позволяет контролировать мультипликативную структуру натуральных чисел. Отметим, что сложение таких производящих функций соответствует обычному почленному сложению последовательностей.

Роль единицы при умножении производящих функций Дирихле играет функция $1 = 1^{-s}$. Любая производящая функция Дирихле $A(s)$ с ненулевым свободным членом, $a_1 \neq 0$, обратима, то есть существует функция $B(s)$ такая, что $A(s)B(s) = 1$. Например обратная функция для дзета-функции Римана имеет вид

$$M(s) = \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{n^s},$$

где

$$\mu_n = \begin{cases} (-1)^{t_n}, t_n - \text{число простых делителей } n, \text{ если в разложении } n \\ \qquad \text{на простые множители нет повторяющихся множителей;} \\ 0, \quad \text{в противном случае;} \end{cases}$$

μ_n называется последовательностью Мёбиуса, а функция $M(s)$ – функцией Мёбиуса.

Метод контурного интегрирования. Метод контурного интегрирования является одним из основных методов теории функций комплексного переменного, позволяющим получать различные неравенства, выражающие экстремальные свойства однолистных и многолистных функций, а также тождества, связывающие основные функции областей теории конформного отображения. Метод существенно связан с использованием свойств функций, конформно отображающих данную область на различные канонические области. Метод контурного интегрирования состоит в основном в следующем.

Рассматривается некоторый интеграл, взятый по всему контуру данной области. Этот интеграл выбирается так, чтобы подынтегральное выражение содержало множители с указанным выше контурным свойством и, чтобы после использования этого свойства получался интеграл, вычисляемый с помощью теоремы о вычетах. Если из других соображений известны либо значение исходного интеграла, либо его знак, то в результате получается или некоторое соотношение между использованными функциями, или некоторое неравенство, связывающее их. Часто контурный интеграл, к которому удается применить указанный метод, появляется в результате преобразования по формуле Грина неотрицательного двойного интеграла - интеграла от квадрата модуля производной некоторой функции, регулярной в данной области.

Глава 2

Нули производной функции Харди

Настоящая глава диссертации, состоящая из пяти параграфов, посвящена оценке сверху величины длины промежутка критической прямой, заведомо содержащей нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди, которая сведена к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар для оценки специальных тригонометрических сумм.

2.1. Постановка и изложение основных результатов

Наряду с задачей о соседних нулях функции Харди $Z(t)$, лежащих на критической прямой, можно рассмотреть более общую задачу — о соседних нулях производной j-го порядка функции Харди $Z^{(j)}(t)$, $j \geq 1$. С увеличением порядка производной j длина промежутка, на котором заведомо лежит нуль функции $Z^{(j)}(t)$, уменьшается.

В 1981 г. А.А.Карацуба [26] обнаружил эффект «сближения» с ростом j нулей функции $Z^{(j)}(t)$ и доказал следующее: *Пусть j –натуральное число,*

$$T \geq T_0(j) > 0, \quad H \geq cT^{\frac{1}{6j+6}} \ln^{\frac{2}{j+1}} T, \quad c = c(j) > 0. \tag{2.1.1}$$

Тогда промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечётного порядка функции $Z^{(j)}(t)$.

В первом параграфе изложены основные результаты главы. Второй параграф главы носит вспомогательный характер, и в нём приведены известные леммы и определения.

В третьем параграфе главы задача об оценке сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди, сведена к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 2.3.1. *Пусть* (κ,λ) *— произвольная экспоненциальная пара,* j *— натуральное число,* $T\geq T_0(j)>0$*,* $c=c_0(j)>0$*, тогда функция* $Z^{(j)}(t)$ *имеет нуль нечётного порядка в промежутке* $(T,T+H)$*, если*

$$H\geq cT^{\omega_j(\kappa,\lambda)}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}},\quad \omega_j(\kappa,\lambda)=\frac{\kappa+\lambda-0.5}{2\kappa+4\lambda+2j-1}.$$

Дробно-линейную функцию $\omega_j(\kappa,\lambda)$ для удобства представим в виде

$$\omega_j(\kappa,\lambda)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2-\delta_j^{-1}(\kappa,\lambda)}\right),\quad \delta_j(\kappa,\lambda)=\frac{\lambda+j}{0,5-\kappa+j},$$

и её минимизация сводится к минимизации функции $\delta_j(\kappa,\lambda)$ по множеству всех экспоненциальных пар.

Заметим, что теорема А.А.Карацубы является следствием теоремы 2.3.1, при

$$(\kappa,\lambda)=\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)=AB(0,1),\quad \delta_j\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)=1+\frac{1}{3j+1},$$

$$\omega_j\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6j+6},\ j\in\mathbb{N}.$$

Доказательство теоремы 2.3.1 проводится по схеме доказательства теоремы А.А. Карацубы, идеями работ [130, 131, 132, 164, 167, 168, 171, 308, 309, 310], в сочетании с методом экспоненциальных пар.

В четвёртом параграфе главы получена новая оценка сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором содержится нуль нечётного порядка производных j–го порядка функции Харди, когда $j\geq 3$.

Теорема 2.4.1. *Пусть* $j \geq 3$ *— натуральное число,* $T \geq T_0(j) > 0$*,* $c = c(j) > 0$*, тогда функция* $Z^{(j)}(t)$ *имеет нуль нечётного порядка в промежутке* $(T, T + H)$*, если*

$$H \geq cT^{\frac{1}{6+6j} - \frac{1}{6(1+j)(19+18j)}} (\ln T)^{\frac{2}{j+1}}.$$

Доказательство теоремы проводится методом оптимизации экспоненциальных пар.

Полученный результат является улучшением оценки (2.1.1) А.А. Карацубы при любом натуральном $j \geq 3$ и является окончательным в рамках данного метода.

В пятом параграфе главы методом оптимизации экспоненциальных пар получены новые оценки сверху величины длин промежутков критической прямой, в котором содержатся нуль нечётного порядка производных первого и второго порядка функции Харди, что соответственно уточняет теоремы А.А.Карацубы при $j = 1$ и $j = 2$.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 2.5.1. *Пусть* $T \gg 1$*, тогда функция* $Z'(t)$ *имеет нуль нечётного порядка в промежутке* $(T, T + H)$*, если*

$$H \gg T^{\frac{1}{12} - \frac{65601}{810284}} \ln T.$$

Теорема 2.5.2. *Пусть* $T \gg 1$*, тогда функция* $Z''(t)$ *имеет нуль нечётного порядка в промежутке* $(T, T + H)$*, если*

$$H \gg T^{\frac{1}{18}} (\ln T)^{\frac{2}{3}}.$$

2.2. Вспомогательные утверждения

Определение 2.2.1. *Функция Харди $Z(t)$ определяется следующим равенством*

$$Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

где

$$e^{i\theta(t)} = \pi^{-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right)\right|^{-1}.$$

Лемма 2.2.1. *Функция Харди $Z(t)$ принимает действительные значения при действительных значениях t и действительные нули $Z(t)$ являются нулями дзета-функция Римана $\zeta(s)$, лежащими на критической прямой.*

Доказательство см. [26].

Лемма 2.2.2. *Для функции $\theta(t)$, заданной в определении 2.2.1, при $t \geq 2\pi$ имеет место формула*

$$\theta(t) = t\ln\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \Delta(t),$$

где

$$\Delta(t) = \frac{t}{4}\ln\left(1 + \frac{1}{4t^2}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{2t} - \frac{t}{2}\int_0^\infty \frac{\rho(u)du}{\left(u+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{t^2}{4}},$$

$$\rho(u) = \frac{1}{2} - \{u\}.$$

Доказательство см. [26].

Лемма 2.2.3. *При всяком целом неотрицательном числе $j \geq 0$ и $t \geq 2\pi$ имеет место асимптотическая формула*

$$Z^{(j)}(t) = 2\sum_{n\leq\sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{(\theta'(t) - \ln n)^j}{\sqrt{n}}\cos\left(\theta(t) - t\ln n + \frac{\pi j}{2}\right) + O(t^{-\frac{1}{4}}\ln^{j+1} t),$$

где

$$(\theta'(t) - \ln n)^j = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi} - \ln n\right)^j + O\left(\frac{\ln t}{t}\right),$$

причем постоянная в знаке O *зависит только от* j*.*

Доказательство см. [26].

Замечание 1. *При* $j = 0$ *формула леммы 2.2.3 называется формулой Римана-Зигеля, то есть*

$$Z(t) = 2\sum_{n\le\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{\cos(\theta(t) - t\ln n)}{\sqrt{n}} + O(t^{-\frac{1}{4}}\ln n),$$

где

$$\theta(t) = t\ln\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \Delta(t).$$

Лемма 2.2.4. *Пусть* $T \ge T_0 > 0$*,* $H \ge T^{1/6}\ln^2 T$*. Тогда промежуток* $(T, T+H)$ *имеет нуль нечётного порядка функции* $Z(t)$*.*

Доказательство см. [26].

Лемма 2.2.5. *Пусть* $t \ge t_0 > 0$*,* $P = [\sqrt{t/(2\pi)}]$*,* $\sqrt{P} \le M \le P$*. Рассмотрим тригонометрическую сумму*

$$V(t) = \sum_{M<m\le M_1}\exp(it\ln(P-m)), \quad M_1 \le 2M.$$

Тогда для $|V(t)|$ *справедлива следующая оценка:*

$$V(t) \ll P^{-2/7}M^{8/7} + P^{-13/28}M^{19/14}.$$

Доказательство см. [26].

Лемма 2.2.6. *Пусть* (κ, λ) *– произвольная экспоненциальная пара.*

Тогда для тригонометрической суммы

$$C(t,M)=\sum_{M<m\le M_1} e\left(\frac{t\ln(P_1-m)}{2\pi}\right),$$

с условиями

$$t\ge t_0>0,\quad \sqrt{P_1}\le M\le\frac{P_1}{10},\quad M_1\le 2M,\quad P_1=\left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right],$$

имеет место оценка

$$|C(t,M)|\ll P_1^{\frac{1}{2}-\lambda}M^{-\frac{1}{2}+\kappa+2\lambda}.$$

Полученный результат обобщает лемму А.А.Карацубы (Лемма 2.2.5), при экспоненциальной паре

$$(\kappa,\lambda)=\left(\frac{1}{14},\frac{11}{14}\right).$$

Доказательство см. [165].

Лемма 2.2.7. *При* $H\ge T^{\alpha}\ln^2 T$, $\alpha=5/32$, $T\ge T_0>0$ *промежуток* $(T,T+H)$ *имеет нуль нечётного порядка функции* $Z(t)$.

Доказательство см. [26].

Лемма 2.2.8. *Пусть* $T\ge T_0>0$. *Тогда промежуток* $(T,T+H)$ *при*

$$H\ge T^{\frac{5}{32}-\frac{\frac{5}{6}-R}{192(2R+1)}}\ln^2 T,$$

где $R=0.8290213568591335924092397772831120\ldots$, *константа Ранкина, имеет нуль нечётного порядка функции* $Z(t)$.

Следует отметить, что полученный результат является уточнением леммы А.А. Карацубы (Лемма 2.2.7) и в рамках метода оптимизации экспоненциальных пар, является окончательным.

Доказательство см. [165].

Лемма 2.2.9. *(Теорема А.А.Карацубы). Пусть* j *– натуральное число и*

$$T \geq T_0(j) > 0, \quad H \geq cT^{\frac{1}{6j+6}}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}, \quad c = c(j) > 0.$$

Тогда функции $Z^{(j)}(t)$ *имеют нуль нечётного порядка в промежутке* $(T, T+H)$.

Доказательство см. [26].

Лемма 2.2.10. *Пусть действительные функции* $\varphi(x)$ *и* $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$ *удовлетворяют условиям:*

- $f^{(4)}(x)$ *и* $\varphi''(x)$ *непрерывны;*
- *имеют место числа* H, U, A, $H > 0$, $1 \ll A \ll U$, $0 < b-a \leq U$, *такие, что*

$$f''(x) \asymp A^{-1}, \quad f^{(3)}(x) \ll A^{-1}U^{-1}, \quad f^{(4)}(x) \ll A^{-1}U^{-2},$$

$$\varphi(x) \ll H, \quad \varphi'(x) \ll HU^{-1}, \quad \varphi''(x) \ll HU^{-2}.$$

Тогда из уравнения $f'(x_n) = n$, *определяя числа* x_n, *имеем*

$$\sum_{a<x\leq b} \varphi(x) e(f(x)) = \sum_{f'(a)\leq n\leq f'(b)} c(n) Z(n) + R,$$

здесь

$$R = O\left(H(A(b-a)^{-1} + T_a + T_b + \ln(f'(b) - f'(a) + 2))\right),$$

$$T_\mu = \begin{cases} 0, & \text{если } f'(\mu)\text{–целое число}, \\ \min\left(\|f'(\mu)\|^{-1}, \sqrt{A}\right), & \text{если } \|f'(\mu)\| \neq 0; \end{cases}$$

$$c(n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad f'(a) < n < f'(b), \\ 1/2, & \text{если} \quad n = f'(a) \quad \text{или} \quad n = f'(b), \end{cases}$$

$$Z(n) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\frac{\varphi(x_n)}{\sqrt{f''(x_n)}}\exp(2\pi i(f(x_n) - nx_n)).$$

Доказательство см. [54].

Лемма 2.2.11. *При любом действительном числе* α *и* $H \geq 1$, *имеет место неравенство*

$$\left|\sum_{\nu=0}^{H-1} e(\alpha\nu)\right| \leq \min\left(H, \frac{1}{\|\alpha\|}\right),$$

где

$$\|\alpha\| = \min(\{\alpha\}, 1 - \{\alpha\}) - \textit{расстояние до ближащего целого.}$$

Доказательство см. [54].

Лемма 2.2.12. *(Преобразование Абеля). Пусть на отрезке* $[a,b]$ *функция* $f(x)$ *является комплекснозначной и дифференцируемой,* c_n – *произвольные комплексные числа. Тогда имеет место равенство*

$$\sum_{a<n\leq b} c_n f(n) = -\int_a^b C(x)f'(x)dx + C(b)f(b),$$

где

$$C(x) = \sum_{a<n\leq x} c_n.$$

Доказательство см. [54].

Определение 2.2.2. *Если* $B \geq 1$, $0 < h \leq B$, $F(u) \in C^{\infty}(B, 2B)$, $A \geq 1$,

$$AB^{1-r} \ll |F^{(r)}(u)| \ll AB^{1-r},\ r = 1, 2, 3, \ldots,$$

здесь постоянные в знаке $\ll$ *зависят только от* r, *и имеет место* *оценка*

$$\sum_{B\leq n\leq B+h} e(F(n)) \ll A^{\kappa}B^{\lambda}, \quad 0\leq \kappa\leq 0.5\leq \lambda\leq 1,$$

тогда пара (κ,λ) *называется экспоненциальной парой.*

Из тривиальной оценки видно, что $(0;1)$ является экспоненциальной парой. E.Phillips [181] показал, что если (κ,λ) является экспоненциальной парой, тогда

$$A(\kappa,\lambda)=\left(\frac{\kappa}{2\kappa+2},\ \frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2\kappa+2}\right),$$

$$B(\kappa,\lambda)=\left(\lambda-\frac{1}{2},\ \kappa+\frac{1}{2}\right),$$

также являются экспоненциальными парами, которые называют A и B процессами.

Далее приведём алгоритм оптимизации экспоненциальных пар.

Пусть

$$\theta(\kappa,\lambda)=\frac{a\kappa+b\lambda+c}{d\kappa+e\lambda+f},$$

где a,b,c,d,e,f — действительные числа. Через $\mathcal{P}$ обозначим множество всех экспоненциальных пар, которые получаются из пары $(0,1)$ применением A и B – процессов. Так как

$$B^2(\kappa,\lambda)=(\kappa,\lambda) \quad \text{и} \quad A(0,1)=(0,1),$$

тогда множество $\mathcal{P}$ состоит из следующих экспоненциальных пар:

$$\mathcal{P}=\{A^{q_1}BA^{q_2}B\ldots A^{q_k}B(0,1)\}\cup\{BA^{q_1}BA^{q_2}B\ldots A^{q_k}B(0,1)\}.$$

Очевидно, что

$$A\mathcal{P}=\{A^{q_1}BA^{q_2}B\ldots A^{q_k}B(0,1)\},$$

$$BA\mathcal{P}=\{BA^{q_1}BA^{q_2}B\ldots A^{q_k}B(0,1)\}.$$

Поэтому

$$\mathcal{P} = A\mathcal{P} \cup BA\mathcal{P}.$$

Отметим, что A и B процессы в проективном пространстве можно задавать как линейные преобразования. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$A \begin{pmatrix} \kappa \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \\ \kappa + \lambda + 1 \\ 2\kappa + 2 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} \kappa \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda - 1 \\ 2\kappa + 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

и соответственно они в проективном пространстве эквивалентны, то есть

$$\begin{pmatrix} \frac{\kappa}{2\kappa+2} \\ \frac{\kappa+\lambda+1}{2\kappa+2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ l \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{2\lambda-1}{2} \\ \frac{2\kappa+1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ l \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $(k,l) = A(\kappa,\lambda)$ и $(k,l) = B(\kappa,\lambda)$.

Сравнение A и B – процессов с их матрицами особенно удобно, когда композиция этих процессов соответствует произведению их матриц. Например, матрицы, представляющие композиции $A(B(\kappa,\lambda))$, имеют вид AB.

Из равенства $\mathcal{P} = A\mathcal{P} \cup BA\mathcal{P}$ для множества всех экспоненциальных пар вытекает, что

$$\inf_{\mathcal{P}} \theta = \inf_{\mathcal{P}} \theta A, \quad \text{либо} \quad \inf_{\mathcal{P}} \theta = \inf_{\mathcal{P}} \theta BA.$$

Для минимизации дробно-линейной функции $\theta(\kappa,\lambda) = \theta\Lambda$ по множеству всех экспоненциальных пар $\mathcal{P}$, где

$$\theta = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \kappa \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.2.1}$$

пользуемся алгоритмом определения оптимальных экспоненциальных пар [181]. Основу этого алгоритма составляют следующие леммы.

Лемма 2.2.13. *Пусть для всех* $(\kappa, \lambda) \in \mathcal{P}$ *выполняется* $d\kappa + e\lambda + f > 0$, r *— произвольное вещественное число, удовлетворяющее условию* $r \leq \inf\limits_{\mathcal{P}}(\kappa + \lambda)$, $Y = \max(wr + v - u,\ w + v - u)$, $Z = \min(wr + v - u,\ w + v - u)$. *Тогда*

$$\inf \theta = \begin{cases} \inf \theta A, & \text{если } Z \geq 0; \\ \inf \theta BA, & \text{если } Y \leq 0. \end{cases}$$

Доказательство см. [181], стр. 57.

Лемма 2.2.14. *Пусть число* r *такое, как в лемме 2.2.13,* C *— некоторое конечное произведение* A *и* B, *что* $\inf \theta BA = \inf \theta BAC$, *и* $\sup\{\kappa + \lambda : (\kappa, \lambda) \in CA\mathcal{P}\} = r_1$, *а также* $\min(rw + v - u, r_1 w + v - u) \geq 0$, *тогда* $\inf \theta = \inf \theta A$.

Доказательство см. [181], стр. 59.

Лемма 2.2.15. *Пусть* u, v, w *такие, как в лемме 2.2.13, тогда следующие условия эквивалентны:*

a) $\inf \theta = \inf \theta A^q$, $\forall\, q \geq 0$;

b) $\inf \theta = \theta(0, 1)$;

c) $w + v \geq u$, $u \leq 0$.

Доказательство см. [181], стр. 60.

В формулировке алгоритма используются следующие обозначения:

$$u = bf - ce, \quad v = af - cd, \quad w = ae - bd, \quad \xi(\theta) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \qquad (2.2.2)$$

Каждая итерация алгоритма состоит из следующих 6 шагов:

1. Проверяем условие $d\kappa + e\lambda + f \geq 0$.
2. Вычисляем $\xi(\theta)$.
3. Если условие $\inf\theta = \theta(0,1)$ в лемме 2.2.15 выполняется, то завершаем алгоритм.
4. Проверяем выполнение условия леммы 2.2.15 к θB, то есть, если выполняется условие $\inf\theta = \theta(0.5, 0.5)$, то завершаем алгоритм.
5. Проверяем выполнение условия леммы 2.2.13, если лемма 2.2.13 не применима, то проверяем условие леммы 2.2.14, если и лемма 2.2.14 не применима, то завершаем алгоритм, ибо он не применим в этом случае.
6. Если $\inf\theta = \inf\theta A$, заменяем $\xi(\theta)$ на $\xi(\theta A)$, если же $\inf\theta = \inf\theta BA$, то $\xi(\theta)$ заменяем на $\xi(\theta BA)$, иначе, возвращаемся к шагу 5.

2.3. Теорема о нулях производной функции Харди

В этом параграфе, как мы отметили в начале главы, задача об оценке сверху длины промежутка критической прямой, имеющего нуль нечётного порядка функции $Z^{(j)}(t)$, сведена к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар. При доказательстве теоремы мы пользуемся теми же средствами, что и А.А.Карацуба, при добавлении нового метода оценок специальных тригонометрических сумм, который позволил удачно использовать особенность решаемой задачи.

Имеет место следующая

Теорема 2.3.1. *Пусть* (κ,λ) *— произвольная экспоненциальная пара,* j *— натуральное число,* $T\ge T_0(j)>0$, $c=c_0(j)>0$, *тогда функция* $Z^{(j)}(t)$ *имеет нуль нечётного порядка в промежутке* $(T,\,T+H)$, *если*

$$H\ge cT^{\omega_j(\kappa,\lambda)}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}},\quad \omega_j(\kappa,\lambda)=\frac{\kappa+\lambda-0.5}{2\kappa+4\lambda+2j-1}. \tag{2.3.1}$$

Доказательство теоремы 2.3.1.

Предположим, что $T\le t\le T+H$, $H\le T^{\frac16}$. Сначала рассмотрим случай, когда j является чётным числом. Согласно лемме 2.2.3, приближенное функциональное уравнение j–ой производной функции Харди имеет вид

$$\begin{aligned} Z^{(j)}(t)=(-1)^{\frac{j}{2}}\cdot 2\sum_{n\le\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{(\theta'(t)-\ln n)^j}{\sqrt{n}}\cos(\theta(t)-t\ln n)+\\ =O(t^{-\frac14}\ln^{j+1}t). \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Чтобы избавиться от зависимости границы изменения t в формуле (2.3.2), заменив величину $\sqrt{\dfrac{t}{2\pi}}$ на $\sqrt{\dfrac{T}{2\pi}}=P$, находим

$$Z^{(j)}(t)=(-1)^{\frac{j}{2}}\cdot 2\sum_{n\le P}\frac{(\theta'(t)-\ln n)^j}{\sqrt{n}}\cos(\theta(t)-t\ln n)+R(t,j)+$$

$$+O(T^{-\frac14}\ln^{j+1}T),$$

где

$$R(t,j)=(-1)^{\frac{j}{2}}\cdot 2\sum_{P<n\le\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{(\theta'(t)-\ln n)^j}{\sqrt{n}}\cos(\theta(t)-t\ln n). \tag{2.3.3}$$

Сверху оценим сумму $R(t,j)$, для чего используем лемму 2.2.3, имеем

$$\left|(\theta'(t)-\ln n)^j\right| = \left|\left(\ln\sqrt{\frac{t}{2\pi}}-\ln n\right)^j + O\left(\frac{\ln T}{T}\right)\right| \ll$$

$$\ll \left|\left(\ln\sqrt{\frac{T+H}{2\pi}}-\ln\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\right)^j + \frac{\ln T}{T}\right| \ll$$

$$\ll \left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{H}{T}\right)\right)^j + \frac{\ln T}{T} \ll \left(\frac{H}{T}\right)^j.$$

Полученную оценку подставляя в (2.3.3), находим

$$|R(t,j)| \ll T^{-\frac{1}{4}}\left(\sqrt{\frac{T+H}{2\pi}}-\sqrt{\frac{T}{2\pi}}+1\right)\cdot\left(\frac{H}{T}\right)^j \ll$$

$$\ll T^{-\frac{1}{4}}\cdot\left(\frac{H}{\sqrt{T}}+1\right)\cdot\left(\frac{H}{T}\right)^j \ll T^{-\frac{1}{4}}\ln^j T.$$

Отсюда видно, что от замены величины $\sqrt{\frac{t}{2\pi}}$ на $\sqrt{\frac{T}{2\pi}}=P$ правая часть (2.3.2) меняется на величину порядка не выше $T^{-\frac{1}{4}}\ln^j T$ и принимает следующий вид

$$Z^{(j)}(t) = (-1)^{\frac{j}{2}}\cdot 2\sum_{n\le P}\frac{(\theta'(t)-\ln n)^j}{\sqrt{n}}\cos(\theta(t)-t\ln n)+$$
$$+O(T^{-\frac{1}{4}}\ln^{j+1}T). \tag{2.3.4}$$

Согласно лемме 2.2.2 функция $\theta(t)$ определяется следующим образом:

$$\theta(t)=\theta_0(t)+\Delta(t),$$

где

$$\theta_0(t)=t\ln\sqrt{\frac{t}{2\pi}}-\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8},$$

$$\Delta(t)=\frac{t}{4}\ln\left(1+\frac{1}{4t^2}\right)+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{2t}-\frac{t}{2}\int_0^\infty\frac{\rho(u)du}{\left(u+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{t^2}{4}}.$$

Найдём производную этой функции

$$\theta'(t) = \ln\sqrt{\frac{t}{2\pi}} + \frac{t}{2}\cdot\frac{1}{\frac{t}{2\pi}}\cdot\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2} + \Delta'(t) = \ln\sqrt{\frac{t}{2\pi}} + \Delta'(t)$$

и

$$\Delta'(t) = \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{4t^2}\right) - \frac{1}{2(4t^2+1)} - \frac{1}{2(4t^2+1)} -$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\rho(u)du}{\left(u+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{t^2}{4}} + \frac{t^2}{4}\int_0^\infty \frac{\rho(u)du}{\left[\left(u+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{t^2}{4}\right]^2} =$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{4t^2}\right) - \frac{1}{4t^2+1} - \frac{1}{2}J_1 + \frac{t^2}{4}J_2,$$

где

$$J_1 = \int_0^\infty \frac{\rho(u)du}{\left(u+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{t^2}{4}}, \qquad J_2 = \int_0^\infty \frac{\rho(u)du}{\left[\left(u+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{t^2}{4}\right]^2}.$$

Несобственные интегралы J_1 и J_2 оцениваются одинаково. Например, оценим интеграл J_1. Знаменатель подинтегральной функции для удобства обозначим через

$$f(u) = \left(u+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{t^2}{4}.$$

Имеем

$$J_1 = \int_0^\infty \frac{\rho(u)}{f(u)}du,$$

$$J_1 = \sum_{n=0}^\infty \left[\int_n^{n+0,5} \frac{\rho(u)}{f(u)}du + \int_{n+0,5}^{n+1} \frac{\rho(u)}{f(u)}du\right] =$$
$$= \sum_{n=0}^\infty \int_0^{0,5} \left[\frac{1}{f(n+u)} - \frac{1}{f(n+1-u)}\right](0,5-u)du.$$

Так как

$$0 \le \frac{1}{f(n+u)} - \frac{1}{f(n+1-u)} \le \frac{(1-2u)(2n+2+t)}{\left(n^2+\frac{t^2}{4}\right)^2} \le$$
$$\le \frac{(1-2n)(n+t)8}{\left(n+\frac{t}{2}\right)^4} \le \frac{128(1-2u)}{(n+t)^3},$$

тогда

$$J_1 = \int_0^\infty \frac{\rho(u)}{\left(u+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{t^2}{4}}du \le \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{0,5}\frac{128(1-2u)}{(n+t)^3}(0,5-u)du =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{64}{(n+t)^3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\int_0^{0,5}(1-2u)^2d(1-2u) = \frac{32}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+t)^3} =$$
$$= \frac{32}{3}\left[\sum_{n\le t}\frac{1}{(n+t)^3}+\sum_{n>t}\frac{1}{(n+t)^3}\right] \le \frac{32}{3}\left[\sum_{n\le t}\frac{1}{t^3}+\sum_{n>t}\frac{1}{n^3}\right] \le$$
$$\le \frac{32}{3}\left[\frac{1}{t^2}+\int_t^\infty\frac{du}{u^3}\right] = \frac{32}{3}\cdot\frac{3}{2t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Аналогично можно также получить для J_2 следующую оценку:

$$J_2 = O\left(\frac{1}{t^4}\right).$$

Таким образом, для $\Delta'(t)$ получим оценку:

$$\Delta'(t) = \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{4t^2}\right) - \frac{1}{(4t^2+1)} - \frac{8}{t^2} + \frac{1}{4t^2} = O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Можно также показать, что

$$\Delta(t) = O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Следовательно, в формуле (2.3.4) заменяя функции $\theta(t)$, $\theta'(t)$ соответственно на $\theta_0(t)$ и $0,5\ln\dfrac{t}{2\pi}$, правую часть формулу (2.3.4) изменим на величину порядка не выше $T^{-\frac{3}{4}}\ln^j T$.

Теперь, выбирая

$$\theta_1(t) = t\ln\sqrt{\frac{T}{2\pi}} - \frac{T}{2} - \frac{\pi}{8},$$

находим

$$\theta_0(t) - \theta_1(t) = t\ln\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} - t\ln\sqrt{\frac{T}{2\pi}} + \frac{T}{2} + \frac{\pi}{8} =$$

$$= t\ln\sqrt{\frac{t}{T}} + \frac{1}{2}(T-t) = -\frac{t}{2}\ln\left(1 + \frac{T-t}{t}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}(T-t) = O(H^2T^{-1}),$$

и кроме того,

$$\frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{T+t-T}{2\pi}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{T}{2\pi} + O(HT^{-1}).$$

Таким образом, в свою очередь, заменяя функции $\theta_0(t)$, $0,5\ln t$ соответственно на $\theta_1(t)$, $0,5\ln T$, можно изменить правую часть (2.3.4) на величину порядка не выше

$$H^2T^{-\frac{3}{4}}\ln^j T = O(T^{-\frac{1}{4}}\ln^{j+1} T).$$

Следовательно, после всех выполнений замен формула (2.3.2) принимает вид

$$Z^j(t) = (-1)^{\frac{j}{2}} 2\sum_{n\le P}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln^j\frac{P}{n}\cos\left(t\ln P - \frac{T}{2} - \frac{\pi}{8} - t\ln n\right) +$$

$$+O(T^{-\frac{1}{4}}\ln^{j+1} T).$$

Учитывая

$$\frac{T}{2} + \frac{\pi}{8} = 2\pi K,$$

находим следующую формулу:

$$Z^j(t) = (-1)^{\frac{j}{2}} 2 \sum_{n \le P} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln^j \frac{P}{n} \cos\left(t \ln \frac{P}{n}\right) + O(T^{-\frac{1}{4}} \ln^{j+1} T),$$

где

$$P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}.$$

При нечётном j, проводя аналогичное рассуждения, и полагая что

$$\frac{T}{2} + \frac{\pi}{8} = 2\pi K + \frac{\pi}{2},$$

получаем формулу

$$Z^j(t) = (-1)^{\frac{j+1}{2}} 2 \sum_{n \le P} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln^j \frac{P}{n} \cos\left(t \ln \frac{P}{n}\right) + O(T^{-\frac{1}{4}} \ln^{j+1} T).$$

Следовательно, при чётном или нечётном j рассматриваем следующую функцию:

$$\Phi(t) = \Phi_j(t) = \sum_{n \le P} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln^j \frac{P}{n} \cos\left(t \ln \frac{P}{n}\right) + O(T^{-\frac{1}{4}} \ln^{j+1} T),$$

докажем для функций $\Phi(t)$ существование нечётного нуля в промежутке $(T, T+H)$.

Из уравнения $t_\nu \ln P = \pi\nu$ определяя t_ν, рассматриваем ν так, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$T \le \frac{\pi\nu}{\ln P} < T + H.$$

Выбирая

$$\nu_0 = \left[\frac{T \ln P}{\pi}\right] + 1, \quad r = [\ln T], \quad H_1 = \left[\frac{H \ln P}{\pi r}\right],$$

числа ν определим следующим образом:

$$\nu = \nu_0 + \nu_1 + ... + \nu_r, \quad 0 \le \nu_1, ..., \nu_r \le H_1 - 1,$$

где ν_0 – число постоянное, и числа $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_r$ принимают любые целые значения из полуинтервала $[0, H_1)$.

Будем рассматривать две следующие суммы S_1 и S_2:

$$S_1 = \sum_{\nu_1=0}^{H_1-1} ... \sum_{\nu_r=0}^{H_1-1} \Phi(t_\nu), \quad S_2 = \sum_{\nu_1=0}^{H_1-1} ... \sum_{\nu_r=0}^{H_1-1} (-1)^\nu \Phi(t_\nu),$$

и для них доказываем выполнение неравенства $|S_2| > |S_1|$.

Согласно определению t_ν, найдём

$$S_1 = \sum_{\nu_1=0}^{H_1-1} ... \sum_{\nu_r=0}^{H_1-1} \sum_{n \le P} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln^j \frac{P}{n} \cos\left(\frac{\pi\nu}{\ln P} \ln \frac{P}{n}\right) + O(H_1^r T^{-\frac{1}{4}} \ln^{j+1} T),$$

$$S_2 = \sum_{\nu_1=0}^{H_1-1} ... \sum_{\nu_r=0}^{H_1-1} \sum_{n \le P} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln^j \frac{P}{n} \cos\left(\frac{\pi\nu}{\ln P} \ln n\right) + O(H_1^r T^{-\frac{1}{4}} \ln^{j+1} T).$$

Сумму $|S_2|$ оценим снизу. В сумме $|S_2|$ выделяем слагаемое при $n = 1$, который равен $H_1^r (\ln P)^j$, а оставшуюся часть этой суммы сверху оценим величиной R, имеем

$$R \le \sum_{2 \le n \le P} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{\nu=0}^{H_1-1} \exp\left(2\pi i \frac{\nu \ln n}{2 \ln P}\right) \right|^r (\ln P)^j \le$$

$$\le \sum_{2 \le n \le P} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\ln n}{2 \ln P}\right)^{-r} (\ln P)^j < T^{\frac{1}{4}} (4 \ln P)^r (\ln P)^j,$$

тем самым для суммы $|S_2|$ получаем следующую оценку:

$$S_2 = H_1^r \ln^j P \left[1 + O(T^{\frac{1}{4}} (4 H_1^{-1} \ln P)^r) + O(T^{-\frac{1}{4}} \ln T)\right].$$

Теперь сумму $|S_1|$ оценим сверху. Разбивая интервал суммирования на два интервала

$$1 \leq n \leq (1-\Delta)P \quad \text{и} \quad (1-\Delta)P < n \leq P,$$

где

$$\Delta = 8H_1^{-1}\ln P,$$

представляем S_1 в следующем виде:

$$S_1 = S_3 + S_4,$$

где

$$S_3 = \sum_{\nu_1=0}^{H_1-1} \dots \sum_{\nu_r=0}^{H_1-1} \sum_{1\leq n\leq(1-\Delta)P} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln^j\frac{P}{n}\cos\left(\frac{\pi\nu}{\ln P}\ln\frac{P}{n}\right) + O(H_1^r T^{-\frac{1}{4}}\ln T),$$

$$S_4 = \sum_{\nu_1=0}^{H_1-1} \dots \sum_{\nu_r=0}^{H_1-1} \sum_{(1-\Delta)P<n\leq P} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln^j\frac{P}{n}\cos\left(\frac{\pi\nu}{\ln P}\ln\frac{P}{n}\right) + O(H_1^r T^{-\frac{1}{4}}\ln T).$$

Для оценки суммы S_3 воспользуемся формулой Эйлера и леммой 2.2.11, находим

$$S_3 \ll \sum_{n\leq(1-\Delta)P} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln^j\frac{P}{n}\left|\sum_{\nu=0}^{H_1-1} e\left(\frac{\ln\frac{P}{n}}{2\ln P}\right)\right|^r + H_1^r T^{-\frac{1}{4}}\ln^{j+1}T \ll$$

$$\ll \sum_{n\leq(1-\Delta)P} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln^j\frac{P}{n}\left(\min\left(H_1, \quad \left\|\frac{\ln\frac{P}{n}}{2\ln P}\right\|^{-1}\right)\right)^r + H_1^r T^{-\frac{1}{4}}\ln^{j+1}T \ll$$

$$\ll \sum_{n\leq(1-\Delta)P} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln^j\frac{P}{n}\left(\frac{1}{\frac{\ln\frac{P}{n}}{2\ln P}}\right)^r + H_1^r T^{-\frac{1}{4}}\ln^{j+1}T \ll$$

$$\ll T^{\frac{1}{4}}\ln^j P\left(\frac{2\ln P}{\Delta}\right)^r + H_1^r T^{-\frac{1}{4}}\ln^{j+1}T \ll$$

$$\ll T^{\frac{1}{4}}\ln^j P H_1^r 4^{-r} + H_1^r T^{-\frac{1}{4}}\ln^{j+1}T.$$

Таким образом, для суммы S_3 получаем оценку

$$|S_3| \ll 4^{-r} H_1^r T^{\frac{1}{4}} \ln^j T + H_1^r T^{-\frac{1}{4}} \ln^{j+1} T \ll H_1^r T^{-\frac{1}{4}} \ln^{j+1} T.$$

Далее оценим сумму S_4. Применяя формулу Эйлера, находим

$$|S_4| \ll H_1^r \left| \sum_{P(1-\Delta)<n\leq P} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln^j \frac{P}{n} e\left(\frac{\nu}{2\ln P} \cdot \ln \frac{P}{n} \right) \right|,$$

здесь ν – целое число с условием

$$T < \frac{\pi\nu}{\ln P} < T + H, \quad \frac{\pi\nu}{\ln P} = t, \quad T < t < T + H.$$

Тем самым, для суммы S_4 получим оценку

$$|S_4| \ll H_1^r \left| \sum_{(1-\Delta)P_1<n\leq P_1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln^j \frac{P}{n} e\left(\frac{t}{2\pi} \cdot \ln n \right) \right| + \\ + H_1^r T^{-\frac{1}{4}} \ln^{j+1} T,$$

где

$$P_1 = \left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}} \right], \quad \Delta = 8H_1^{-1} \ln P.$$

Сумму по n, обозначая через S_5, и делая замену переменной $n = P_1 - m$, находим

$$S_5 = \sum_{0\leq m<\Delta P_1} \frac{\ln^j \frac{P}{P_1-m}}{\sqrt{P_1-m}} e\left(\frac{t\ln(P_1-m)}{2\pi} \right).$$

Разбивая промежуток суммирования в сумме S_5 на $\ll \ln T$ промежутков вида $M < m \leq M_1 \leq 2M < \Delta P_1$, имеем

$$|S_5| \ll \left| \sum_{M<m\leq M_1} (P_1-m)^{-\frac{1}{2}} \ln^j \frac{P}{P_1-m} e\left(\frac{t\ln(P_1-m)}{2\pi} \right) \right| \ln T.$$

Далее, применяя лемму 2.2.12, находим

$$|S_5| \ll \left| -\int_M^{M_1} C(u)d(f(u)) + f(M_1)C(M_1) \right| \ln T,$$

где

$$C(u) = \sum_{M<m\le u} e\left(\frac{t\ln(P_1-m)}{2\pi}\right), \quad u \le M_1,$$

$$f(u) = (P_1-u)^{-\frac{1}{2}} \left(\ln\frac{P}{P_1-u}\right)^j,$$

$$|S_5| \ll \left| -\int_M^{M_1} C(u)d(f(u)) + (P_1-M_1)^{-\frac{1}{2}} \ln^j \frac{P}{P_1-M_1} C(M_1) \right| \ln T.$$

Используя

$$\begin{aligned}
(P_1-M_1)^{-\frac{1}{2}} \ln^j \frac{P}{P_1-M_1} = \\
&= (P_1-M_1)^{-\frac{1}{2}} \left(\ln\frac{P_1-M_1+P-P_1+M_1}{P_1-M_1}\right)^j = \\
&= (P_1-M_1)^{-\frac{1}{2}} \left(\ln\left(1+\frac{M_1+P-P_1}{P_1-M_1}\right)\right)^j \le \\
&\le (P_1-M_1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{M_1+P-P_1}{P_1-M_1}\right)^j = \\
&= (P_1-M_1)^{-j-\frac{1}{2}} \cdot (M_1+P-P_1)^j \le \\
&\le (P_1-\Delta P_1)^{-j-\frac{1}{2}} \cdot (2M+P-P)^j \le \\
&\le (P_1(1-\Delta))^{-j-\frac{1}{2}} \cdot (2M)^j \ll P^{-j-\frac{1}{2}} M^j,
\end{aligned}$$

для S_5, находим

$$|S_5| \ll \left| -\int_M^{M_1} C(u)d(f(u)) + M^j P^{-j-\frac{1}{2}} C(M_1) \right| \ln T \ll$$

$$\ll M^j P^{-j-\frac{1}{2}} \left| \sum_{M<m\le u} e\left(\frac{t\ln(P_1-m)}{2\pi}\right) \right| \ln T, \quad u \le M_1.$$

Последнюю сумму обозначая через $C(u,M)$ и при $M \le \sqrt[3]{P}$ оценивая её тривиально, получим

$$|S_5| \ll M^{j+1}P^{-j-\frac{1}{2}} \cdot \ln T \ll P^{\frac{j+1}{3}} \cdot P^{-j-\frac{1}{2}} \ln T \ll$$
$$\ll P^{-\frac{1}{6}} \ln T \ll T^{-\frac{1}{12}} \ln T.$$

В случае $\sqrt[3]{P} < M \leq \Delta P_1$ для оценки тригонометрических сумм вида $C(u, M)$ применяя лемму 2.2.6, находим

$$|S_5| \ll M^{j+\kappa+2\lambda-\frac{1}{2}}P^{-j-l} \ln T \ll$$
$$\ll P^{\kappa+\lambda-\frac{1}{2}}H^{\frac{1}{2}-j-\kappa-2\lambda}(\ln T)^{j+\kappa+2\lambda+\frac{1}{2}} \ll$$
$$\ll T^{\frac{\kappa+\lambda}{2}-\frac{1}{4}}H^{\frac{1}{2}-j-\kappa-2\lambda}(\ln T)^{j+3}.$$

Таким образом, для суммы S_1 получаем следующую оценку:

$$S_1 \ll H_1^r \ln^j P \left(T^{-\frac{1}{4}} \ln T + T^{\frac{\kappa+\lambda}{2}-\frac{1}{4}}H^{\frac{1}{2}-j-\kappa-2\lambda} \ln^2 T\right).$$

Теперь сравниваем полученную оценку S_1 с оценкой S_2. Для того, чтобы выполнялось $|S_2| > |S_1|$ необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенств:

$$T^{-\frac{1}{12}} \ll 1, \quad T^{\frac{\kappa+\lambda}{2}-\frac{1}{4}}H^{\frac{1}{2}-j-\kappa-2\lambda} \ln^2 T \ll 1,$$

$$T^{\frac{1}{4}}(4H_1^{-1} \ln P)^r \ll 1.$$

При $T \gg 1$ верно первое неравенство, а два остальные неравенства справедлива, если

$$H \gg T^{\omega_j(\kappa,\lambda)}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}, \qquad \omega_j(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa + \lambda - 0.5}{2\kappa + 4\lambda + 2j - 1},$$

$$H \geq 4T^{\frac{1}{4r}} \ln P \gg \ln P.$$

Теорема доказана.

В дальнейшем для удобства $\omega_j(\kappa,\lambda)$ представим в виде

$$\omega_j(\kappa,\lambda)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2-\delta_j^{-1}(\kappa,\lambda)}\right),\quad \delta_j(\kappa,\lambda)=\frac{\lambda+j}{0,5-\kappa+j}. \tag{2.3.5}$$

Заметим, что полученный результат А.А. Карацубы (Лемма 2.2.9) вытекает из теоремы 2.3.1, при

$$(\kappa,\lambda)=\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)=AB(0,1),\quad \omega_j\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)=1+\frac{1}{3j+1},$$

$$\delta_j\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6j+6},\ j\in\mathbb{N}.$$

2.4. Нули производной j–го порядка функции Харди при $j\geq 3$

В этом параграфе доказана новая теорема о нулях функции $Z^{(j)}(t)$, которая в случае $j\geq 3$ уточняет соответствующие результаты А.А.Карацубы.

Теорема 2.4.1. *Пусть $j\geq 3$ — натуральное число, $T\geq T_0(j)>0$, $c=c(j)>0$, тогда функция $Z^{(j)}(t)$ имеет нуль нечётного порядка в промежутке $(T,T+H)$, если*

$$H\geq cT^{\frac{1}{6+6j}-\frac{1}{6(1+j)(19+18j)}}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}.$$

Доказательство теоремы 2.4.1. Минимизируем функцию $\omega_j(\kappa,\lambda)$, определенную в теореме 2.3.1 по множеству всех экспоненциальных пар $\mathcal{P}$. Воспользовавшись представлением

$$\omega_j(\kappa,\lambda)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2-\delta_j^{-1}(\kappa,\lambda)}\right),\quad \delta_j(\kappa,\lambda)=\frac{\lambda+j}{0.5-\kappa+j},$$

эту минимизацию сводим к минимизации $\delta_j(\kappa,\lambda)$.

Минимизация по множеству всех экспоненциальных пар $\mathcal{P}$ функции

$$\delta_j(\kappa, \lambda) = \frac{\lambda + j}{0.5 - \kappa + j} = \delta_j \Lambda, \qquad \delta_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & j \\ -1 & 0 & 0.5 + j \end{pmatrix}.$$

при помощи алгоритма оптимизации экспоненциальных пар, состоит всего из четырёх итераций, которые для удобства обозначим соответственно буквами D, E, F и G. Имеем

D1. Условие леммы 2.2.13, то есть неравенство $-\kappa + 0.5 + j > 0$, выполняется.

D2. Вычисляя параметры u, v и w, составим вектор

$$\xi(\delta_j) = \begin{pmatrix} 0.5 + j \\ j \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D3. $w + v = 1 + j$, $u = 0.5 + j$, то есть условия c) леммы 2.2.15, не выполняются, следовательно, не выполняются также и условия a) и b) этой леммы.

D4. Применяя лемму 2.2.15 к

$$\delta_j B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 + j \\ 0 & -1 & 1 + j \end{pmatrix},$$

и вычисляя параметры u, v и w, составим вектор

$$\xi(\delta_j B) = \begin{pmatrix} 0.5 + j \\ 1 + j \\ -1 \end{pmatrix},$$

и имеем $w + v = j$ и $u = 0.5 + j$, то есть условия c) леммы 2.2.15, не выполняются, следовательно, не выполняются также и условия

a) и b) этой леммы.

D5. Применяя лемму 2.2.13 к δ_j при

$$r = \frac{1}{2}, \quad Y = 0.5 > 0, \quad Z = r - 0.5 > 0,$$

имеем $\inf \delta_j = \inf \delta_j A$.

D6. Заменяя $\xi(\delta_j)$ на $\xi(\delta_j A)$, имеем

$$\delta_j A = \begin{pmatrix} 1+2j & 1 & 1+2j \\ 2j & 0 & 1+2j \end{pmatrix}, \qquad \xi(\delta_j A) = \begin{pmatrix} 1+2j \\ 1+2j \\ -2j \end{pmatrix}.$$

Отметим, что после первой итерации не обязательно проверять первые четыре шага алгоритма.

E5. Применяя лемму 2.2.13 к $\delta_j A$ при

$$Y = -2jr < 0, \quad Z = -2j < 0,$$

имеем $\inf \delta_j A = \inf \delta_j ABA$.

E6. Заменяя $\xi(\delta_j A)$ на $\xi(\delta_j ABA)$, находим

$$\delta_j ABA = \begin{pmatrix} 4+4j & 1+2j & 3+4j \\ 2+4j & 2j & 2+4j \end{pmatrix},$$

$$\xi(\delta_j ABA) = \begin{pmatrix} 2+2j \\ 2+4j \\ -2 \end{pmatrix}.$$

F5. Применяя лемму 2.2.13 к $\delta_j ABA$ при

$$Y = -2r + 2j > 0, \quad Z = -2 + 2j \geq 0,$$

получим $\inf \delta_j ABA = \inf \delta_j ABA^2$.

F6. Заменяя $\xi(\delta_j ABA)$ на $\xi(\delta_j ABA^2)$, имеем

$$\delta_j ABA^2 = \begin{pmatrix} 11+14j & 1+2j & 7+10j \\ 6+14j & 2j & 4+10j \end{pmatrix},$$

$$\xi(\delta_j ABA^2) = \begin{pmatrix} 4+4j \\ 2+8j \\ -6-4j \end{pmatrix}.$$

G5. Лемму 2.2.13 к $\delta_j ABA^2$ применить нельзя, так как

$$Y = -6r - 4rj - 2 + 4j > 0, \quad Z = -8 < 0.$$

Поэтому при

$$\min(rw + v - u, r_1 w + v - u) = -6r_1 - 4jr_1 - 2 + 4j < 0,$$

применяя лемму 2.2.14, завершаем алгоритм. Имеем

$$\inf \delta_j = \delta_j ABA^2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \delta_j \left(\frac{1}{9}, \frac{13}{18}\right) = 1 + \frac{6}{7+18j}.$$

Следовательно,

$$\omega_j \left(\frac{1}{9}, \frac{13}{18}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2 - \delta_j^{-1}\left(\frac{1}{9}, \frac{13}{18}\right)}\right) =$$
$$= \frac{1}{6+6j} - \frac{1}{6(1+j)(19+18j)}.$$

Теорема доказана.

2.5. Теоремы о нулях производной первого и второго порядка функции Харди

В этом параграфе методом оптимизации экспоненциальных пар найдена нижняя грань длины промежутка критической прямой, в котором содержится нуль нечётного порядка производной первого и второго порядка функции Харди. Минимизированы величины $\omega_j(\kappa,\lambda)$ в теореме 2.3.1, при $j=1,\ j=2$ по множеству всех экспоненциальных пар, так как мы уже отметили, что минимизация величин $\omega_j(\kappa,\lambda)$ равносильна минимизации $\delta_j(\kappa,\lambda)$.

Теорема 2.5.1. *Пусть $T\gg 1$, тогда функция $Z'(t)$ имеет нуль нечётного порядка в промежутке $(T,\,T+H)$, если*

$$H\gg T^{\frac{1}{12}-\frac{65601}{810284}}\ln T.$$

Доказательство теоремы 2.5.1. Минимизируем функцию $\omega_1(\kappa,\lambda)$, определенную в теореме 2.3.1 по множеству всех экспоненциальных пар $\mathcal{P}$. Воспользовавшись представлением

$$\omega_1(\kappa,\lambda)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2-\delta_1^{-1}(\kappa,\lambda)}\right),\quad \delta_1(\kappa,\lambda)=\frac{\lambda+1}{-\kappa+1,5},\qquad (2.5.1)$$

эту минимизацию сводим к минимизации $\delta_1(\kappa,\lambda)$.

Применяя алгоритм оптимизации экспоненциальных пар, имеем

1. Условие $d\kappa+e\lambda+f>0$, то есть $-\kappa+1,5>0$ выполняется.

2. Преобразованию (2.5.1) сопоставим матрицу

$$\delta_1=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&0&1,5\end{pmatrix}.$$

Определим числа u, v, w следующим образом:

$$u = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1,5 \end{vmatrix} = 1,5, \quad v = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1,5 \end{vmatrix} = 1, \quad w = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

а по ним составим вектор

$$\xi(\delta_1) = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Проверяем условия леммы 2.2.15. Так как $w+v=2$, $u=1,5$ то есть условия c) не выполняются, следовательно, не выполняются также и условия a) и b) этой леммы.

4. Лемму 2.2.15 применим к $\delta_1 B$:

$$\delta_1 B = \frac{k+1,5}{-l+2},$$

Сопоставим $B\delta_1$ матрицу

$$B\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1,5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определим числа u, v, w:

$$u = 1,5, \quad v = 2, \quad w = -1, \quad \xi(B\delta_1) = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Так как $w+v=1$ и $u=1,5$, то есть условия c) не выполняются, следовательно, и условия a) и b) также не выполнимы.

5. К $\delta_1 = \dfrac{\lambda+1}{-\kappa+1,5}$ применим лемму 2.2.13, полагая $r=0,5$, находим

$$Y = 0,5; \quad Z = r - 0,5.$$

Так как $Z \geq 0$, то согласно лемме 2.2.13, $\inf \delta_1 = \inf \delta_1 A$.

6. Заменяя $\xi(\delta_1)$ на $\xi(\delta_1 A)$, находим

$$\delta_1 A = \frac{3\kappa+\lambda+3}{2\kappa+3}.$$

А теперь минимизируем $\delta_1 A$. Отметим, что после первой итерации не обязательно проверять первые четыре шага алгоритма, поэтому для удобства каждую итерацию обозначая буквами латинского алфавита, имеем

A5. К $\delta_1 A$ применим лемму 2.2.13.

$$Y = -2r < 0, \quad Z = -2 < 0.$$

Поскольку $Y < 0$, то согласно утверждению леммы, $\inf \delta_1 A = \inf \delta_1 ABA$.

A6. Заменяем $\xi(\delta_1 A)$ на $\xi(\delta_1 ABA)$ и находим

$$\delta_1 ABA = \frac{8\kappa+3\lambda+7}{6\kappa+2\lambda+6}.$$

Далее

$$u=4, \quad v=6, \quad w=-2, \quad \xi(\delta_1 ABA) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

B5. К $\delta_1 ABA$ применим лемму 2.2.13.

$$Y = -2r+2 > 0, \quad Z = 0.$$

В силу $Z \geq 0$, имеем $\inf \delta_1 ABA = \inf \delta_1 ABA^2$.

B6. Заменяем $\xi(\delta_1 ABA)$ на $\xi(\delta_1 ABA^2)$ и находим

$$\delta_1 ABA^2 = \frac{25\kappa + 3\lambda + 17}{20\kappa + 2\lambda + 14}.$$

тогда

$$u = 8, \quad v = 10, \quad w = -10, \quad \xi(\delta_1 ABA^2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

C5. Для $\delta_1 ABA^2$ применим лемму 2.2.13.

$$Y = -10r + 2 < 0, \quad Z = -8 < 0,$$

так как $Y < 0$, то $\inf \delta_1 ABA^2 = \inf \delta_1 ABA^2BA$.

C6. Заменяя $\xi(\delta_1 ABA^2)$ на $\xi(\delta_1 ABA^2BA)$, находим

$$\delta_1 ABA^2BA = \frac{40\kappa + 25\lambda + 37}{32\kappa + 20\lambda + 30}.$$

Далее

$$u = 10, \quad v = 16, \quad w = 0, \quad \xi(\delta_1 ABA^2BA) = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D5. Для $\delta_1 ABA^2BA$ применим лемму 2.2.13.

$$Y = 6 > 0, \quad Z = 6 > 0,$$

так как $Z > 0$, то $\inf \delta_1 ABA^2BA = \inf \delta_1 ABA^2BA^2$.

D6. Заменяем $\xi(\delta_1 ABA^2BA)$ на $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2)$, найдем

$$\delta_1 ABA^2BA^2 = \frac{139\kappa + 25\lambda + 99}{112\kappa + 20\lambda + 80},$$

$$u = 20, \quad v = 32, \quad w = -20, \quad \xi(\delta_1 ABA^2BA^2) = \begin{pmatrix} 20 \\ 32 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

E5. К $\delta_1 ABA^2BA^2$ применим лемму 2.2.13.

$$Y = -20r + 12 < 0, \quad Z = -8 < 0,$$

так как $Y < 0$ то $\inf \delta_1 ABA^2BA^2 = \inf \delta_1 ABA^2BA^2BA$

E6. Заменяя $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2)$ на $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BA)$, имеем

$$\delta_1 ABA^2BA^2BA = \frac{248\kappa + 139\lambda + 223}{200\kappa + 112\lambda + 180}.$$

$$u = 44, \quad v = 40, \quad w = -24, \quad \xi(\delta_1 ABA^2BA^2BA) = \begin{pmatrix} 44 \\ 40 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

F5. К $\delta_1 ABA^2BA^2BA$ применим лемму 2.2.13.

$$Y = -24r - 4 < 0, \quad Z = -28 < 0,$$

так как $Y < 0$ то $\inf \delta_1 ABA^2BA^2BA = \inf \delta_1 ABA^2BA^2BABA$.

F6. Заменяем $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BA)$ на $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA)$, имеем

$$\delta_1 ABA^2BA^2BABA = \frac{724\kappa + 248\lambda + 585}{584\kappa + 200\lambda + 472}.$$

$$u = 56, \quad v = 88, \quad w = -32$$

и

$$\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA) = \begin{pmatrix} 56 \\ 88 \\ -32 \end{pmatrix}.$$

G5. Применяя к $\delta_1 ABA^2BA^2BABA$ лемму 2.2.13, находим

$$Y = -32r + 32 > 0, \quad Z = 0,$$

так как $Z \geq 0$ то $\inf \delta_1 ABA^2BA^2BABA = \inf \delta_1 ABA^2BA^2BABA^2$.

G6. Заменяем $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA)$ на $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2)$

$$\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2 = \frac{2142\kappa + 248\lambda + 1418}{1728\kappa + 200\lambda + 1144}.$$

$$u = 112, \quad v = 144, \quad w = -144$$

и

$$\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2) = \begin{pmatrix} 112 \\ 144 \\ -144 \end{pmatrix}.$$

H5. К $\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2$ применим лемму 2.2.13.

$$Y = -144r + 32 < 0, \quad Z = -112 < 0,$$

так как $Y < 0$ то $\inf \delta_1 ABA^2BA^2BABA^2 = \inf \delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA$.

H6. Заменяя $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2)$ на $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA)$, имеем

$$\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA = \frac{3332\kappa + 2142\lambda + 3084}{2688\kappa + 1728\lambda + 2488}.$$

$$u = 144, \quad v = 224, \quad w = 0$$

и

$$\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA) = \begin{pmatrix} 144 \\ 224 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I5. К $\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA$ применим лемму 2.2.13.

$$Y = 80 > 0, \quad Z = 80 > 0,$$

так как $Z \geq 0$ то $\inf \delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA = \inf \delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2$.

I6. Заменяем $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA)$ на $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2)$ и находим

$$\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2 = \frac{11642\kappa + 2142\lambda + 8310}{9392\kappa + 1728\lambda + 6704}.$$

$$u = 288, \quad v = 448, \quad w = -288.$$

$$\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2) = \begin{pmatrix} 288 \\ 448 \\ -288 \end{pmatrix}.$$

J5. К $\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2$ применим лемму 2.2.13.

$$Y = -288r + 160 < 0, \quad Z = -128 < 0,$$

так как $Y < 0$ то

$$\inf \delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2 = \inf \delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BA.$$

J6. Заменяем $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2)$ на $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BA)$ и находим

$$\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BA = \frac{20904\kappa + 11642\lambda + 18762}{16864\kappa + 9392\lambda + 15136},$$

$$u = 608, \quad v = 576, \quad w = -320.$$

$$\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BA) = \begin{pmatrix} 608 \\ 576 \\ -320 \end{pmatrix}.$$

K5. К $\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BA$ применим лемму 2.2.13.

$$Y = -320r - 32 < 0, \quad Z = -352 < 0,$$

отсюда

$$\inf \delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BA = \inf \delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABA.$$

K6. Заменяя $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BA)$ на $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABA)$, находим

$$\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABA = \frac{60808\kappa + 20904\lambda + 49166}{49056\kappa + 16864\lambda + 39664},$$

$$u = 832, \quad v = 1216, \quad w = -512.$$

$$\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABA) = \begin{pmatrix} 832 \\ 1216 \\ -512 \end{pmatrix}.$$

L5. К $\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABA$ применим лемму 2.2.13.

$$Y = -512r + 384 < 0, \quad Z = -128 < 0$$

и

$$\inf \delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABA =$$

$$= \inf \delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABA.$$

L6. Заменяем $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABA)$ на

$\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABA)$, находим

$$\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABA = \frac{140140\kappa + 60808\lambda + 119236}{113056\kappa + 49056\lambda + 96192},$$

$$u = 1920, \quad v = 1664, \quad w = -1408.$$

$$\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABA) = \begin{pmatrix} 1920 \\ 1664 \\ -1408 \end{pmatrix}.$$

M5. К $\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABA$ применим лемму 2.2.13.

$$Y = -1408r - 256 < 0, \quad Z = -1664 < 0,$$

так как $Y < 0$ то

$$\inf \delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABA =$$
$$= \inf \delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABABA.$$

M6. Заменяем $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABA)$ на $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABABA)$ и находим

$$\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABABA = \frac{360088\kappa + 140140\lambda + 299280}{290496\kappa + 113056\lambda + 241440},$$

$$u = 1920, \quad v = 3840, \quad w = -512.$$

$$\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABABA) = \begin{pmatrix} 1920 \\ 3840 \\ -512 \end{pmatrix}.$$

N5. К $\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABABA$ применим лемму 2.2.13.

$$Y = -512r + 1290 > 0, \quad Z = 1408 > 0,$$

так как $Z>0$ то $\inf\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABABA =$
$= \inf\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABABA^2$.

N6. Заменяя $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABABA)$ на $\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABABA^2)$, имеем

$$\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABABA^2 = \frac{1098788\kappa+140140\lambda+738700}{886432\kappa+113056\lambda+595936},$$

$$u=3840, \quad v=7168, \quad w=-4352.$$

$$\xi(\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABABA^2) = \begin{pmatrix} 3840 \\ 7168 \\ -4352 \end{pmatrix}.$$

O5. К $\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABABA^2$ применим лемму 2.2.13.

$$Y=-4352r+3328>0, \quad Z=-1024<0,$$

так как $Y>0$ и $Z<0$, то в этом случае используем лемму 2.2.14. Согласно утверждению леммы $\sup\{\kappa+\lambda:\ (\kappa,\lambda)\in CA\mathcal{P}\}=r_1$. Проверяем условие $\min(rw+v-u, r_1w+v-u)\geq 0$.

$$\min(rw+v-u, r_1w+v-u) = -4352r_1+3328<0,$$

то есть условия леммы 2.2.14 не выполняются. Значит, согласно алгоритму минимизации завершаем алгоритм. Тогда

$$\inf\delta_1 = \inf\delta_1 ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABABA^2.$$

Вычислям

$$ABA^2BA^2BABA^2BA^2BABABABA^2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{23473}{198262},\frac{141279}{198262}\right).$$

Тем самым получим, что

$$\delta_1\left(\frac{23473}{198262},\frac{141279}{198262}\right)=1+\frac{65621}{273920}=1,23956264602804.$$

Следовательно,

$$\omega_1\left(\frac{23473}{198262},\frac{141279}{198262}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2-\delta_j^{-1}\left(\frac{23473}{198262},\frac{141279}{198262}\right)}\right)=$$
$$=\frac{1}{12}-\frac{65601}{810284}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.5.2. *Пусть* $T\gg 1$, *тогда функция* $Z''(t)$ *имеет нуль нечётного порядка в промежутке* $(T,\,T+H)$, *если*

$$H\gg T^{\frac{1}{18}}(\ln T)^{\frac{2}{3}}.$$

Доказательство теоремы 2.5.2. Минимизируем функцию $\omega_2(\kappa,\lambda)$, определенную в теореме 2.3.1, по множеству всех экспоненциальных пар $\mathcal{P}$. Воспользовавшись представлением

$$\omega_2(\kappa,\lambda)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2-\delta_1^{-1}(\kappa,\lambda)}\right),\quad \delta_2(\kappa,\lambda)=\frac{\lambda+2}{-\kappa+2,5},\qquad (2.5.2)$$

эту минимизацию сводим к минимизации $\delta_2(\kappa,\lambda)$.

Применяя алгоритм оптимизации экспоненциальных пар [181], имеем

1. Условие $d\kappa+e\lambda+f>0$, то есть $-\kappa+2,5>0$ выполняется.

2. Преобразованию (2.5.2) сопоставим матрицу

$$\delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2,5 \end{pmatrix}.$$

Определим числа u, v, w, составим вектор

$$\xi(\delta_2) = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Применяем лемму 2.2.15, так как $w + v = 3$, $u = 2,5$, то есть, условия c) не выполняются, следовательно, и условия a) и b) также не выполняются.

4. Лемму 2.2.15 применим к $\delta_2 B$:

$$\delta_2 B = \frac{\kappa + 2,5}{-\lambda + 3},$$

Сопоставим $\delta_2 B$ матрицу

$$\delta_2 B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2,5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определим числа u, v, w:

$$u = 2,5, \quad v = 3, \quad w = -1, \quad \xi(\delta_2 B) = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Применим лемму 2.2.15. Так как $w + v = 2$ и $u = 2,5$, то есть, условия c) не выполняются, следовательно, и условия a) и b) также не выполняются.

5. К $\delta_2 = \dfrac{\lambda+2}{-\kappa+2,5}$ применим лемму 2.2.13, полагая $r = 0,5$, имеем

$$Y = 1,5; \quad Z = r + 0,5.$$

Так как $Z \geq 0$, то, согласно утверждению леммы 2.2.13, $\inf \delta_2 = \inf \delta_2 A$.

6. Заменяя $\xi(\delta_2)$ на $\xi(\delta_2 A)$, находим

$$\delta_2 A = \frac{5\kappa+\lambda+4}{4\kappa+5}.$$

Далее минимизируем $\delta_2 A$. Отметим, что после первой итерации не обязательно проверять первый шаг, поэтому переходим к шагу 2.

2. Преобразованию $\delta_2 A$ сопоставим матрицу

$$\delta_2 A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Определим числа u, v, w

$$u = 5, \quad v = 9, \quad w = -4 \quad \text{и} \quad \xi(\delta_2 A) = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

3. Применим лемму 2.2.15, так как $w+v = 5$, $u = 5$, то есть, условия c) не выполняется, следовательно, и условия a) и b) также не выполняются.

4. Лемму 2.2.15 применим к $\delta_2 AB$:

$$\delta_2 AB = \frac{\kappa+5\lambda+2}{4\lambda+3}.$$

Сопоставим $\delta_2 AB$ матрицу

$$\delta_2 AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad u = 7, \quad v = 3, \quad w = 4,$$

и

$$\xi(\delta_2 AB) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Так как $w + v = 7$ и $u = 7$, то есть, условия c) не выполняются, следовательно, и условия a) и b) также не выполняются.

5. К $\delta_2 A$ применим лемму 2.2.13.

$$Y = -4r + 4 > 0, \quad Z = 0.$$

Так как $Z \geq 0$, то согласно утверждению леммы, $\inf \delta_2 A = \inf \delta_2 A^2$.

6. Заменяя $\xi(\delta_2 A)$ на $\xi(\delta_2 A^2)$, находим

$$\delta_2 A^2 = \frac{14k + l + 9}{14k + 4l + 14}.$$

2. Вычисляем $\xi(\delta_2 A^2)$:

$$\delta_2 A^2 = \begin{pmatrix} 14 & 1 & 9 \\ 14 & 4 & 14 \end{pmatrix}; \quad u = -22, \quad v = 70, \quad w = 42,$$

и

$$\xi(\delta_2 A^2) = \begin{pmatrix} -22 \\ 70 \\ 42 \end{pmatrix}.$$

3. Применим лемму 2.2.15 так как $w + v = 112$, $u = -22$, условия c) выполняется, следовательно, и условия a) и b) также выполняется. Значит, согласно алгоритму, завершаем процесс и получаем, что $\inf \delta_2 = \delta_2 A^2$.

Тогда получим, что

$$A^2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right),\quad \delta_2\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)=1+\frac{1}{7}=1,14285714285714.$$

Следовательно,

$$\omega_2\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2-\delta_j^{-1}\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)}\right)=\frac{1}{18}.$$

Теорема доказана.

Глава 3

Оценки специальных тригонометрических сумм и суммы $S(Y)$, $W(\theta)$

3.1. Формулировка основных результатов

В этой главе получены новые равномерные по параметрам оценки тригонометрических сумм $W_j = W_j(T)$, $j = 0, 1, 2$, которые возникают при выводе оценки количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна в короткие промежутки критической прямой, и задача о нетривиальности оценки этих сумм относительно параметра H сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар.

Всюду ниже будем считать, что ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие $0,001$; $T \le t \le T + H$, $T \ge T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$; $T^{\frac{1}{4}} < H < T^{\frac{1}{3}}$; $P = \sqrt{5T(2\pi)^{-1}}$; $X = T^{0{,}01\varepsilon_1}$; $\mathscr{L} = \ln P$; $k = [\ln \mathscr{L}]$; $\eta = c_1 k \mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}$; c_1, c_2, $\ldots$ — абсолютные положительные постоянные;

$$r(n) = \frac{1 - i\text{æ}}{2}\chi(n) + \frac{1 + i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(n).$$

Воспользуемся определением чисел $A(\lambda)$:

$$A(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2} = \lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}$$

и обозначениями функций $B(\varphi)$ и $\overline{B(\psi)}$, то есть, соотношениями

$$B(\varphi) = \left(\frac{\varphi^{i\eta} - 1}{\ln \varphi}\right)^k, \qquad \overline{B(\psi)} = \left(\frac{\psi^{-i\eta} - 1}{\ln \psi}\right)^k,$$

$$r(n) = \frac{1 - i\text{æ}}{2}\chi(n) + \frac{1 + i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(n),$$

$$h(\nu) \equiv \beta(\nu)\chi(\nu) = \beta(\nu)\overline{\chi}(\nu),$$

определим суммы $W_j = W_j(T)$ равенствами

$$W_0 = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_1 = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} B\left(\frac{P}{\lambda_1}\right)\overline{B\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_2 = \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Для этих сумм А.А. Карацуба [61] при $H \geq T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$ получил следующие нетривиальные оценки:

$$W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \quad j = 0, 2; \tag{3.1.1}$$

$$W_1(T) \ll \left(\varepsilon_2^{-2k}(\ln T)^{-2k} + \varepsilon_2^{-k}\eta^k(\ln T)^{-k}\right) T^{-\varepsilon_1}. \tag{3.1.2}$$

В отличие от этих оценок, в лемме 3.2.1 получены новые равномерные по параметрам оценки тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0; 1; 2$, и задача о нетривиальности оценки этих сумм относительно параметра H сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар.

Лемма 3.2.1. *Пусть* $(\varkappa, \lambda)$ *— произвольная экспоненциальная пара,* ε_1 *и* ε_2 *- малые произвольные положительные числа, не превосходящие* $0,001$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \eta < 1$,

$$\theta(\varkappa, \lambda) = \frac{\varkappa+\lambda}{2\varkappa+2}, \qquad æ(\varkappa, \lambda) = \frac{52+\varkappa-\lambda}{50\varkappa+50}, \qquad \sigma(\varkappa) = \frac{\ln\mathscr{L}}{(\varkappa+1)\ln T}.$$

Тогда при $H = T^{\theta(\varkappa,\lambda)+æ(\varkappa,\lambda)\varepsilon_1+\sigma(\varkappa)}$ *для суммы* $W_j(T)$ *имеют место оцен-*

ки

$$W_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}}\right)^{2k} \left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k \mathscr{L}\right) T^{-0,5(\lambda-\kappa)\varepsilon_2} \cdot T^{-\varepsilon_1},$$
$$W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \quad j = 0,\ j = 2.$$

Отметим, что показатель

$$\theta(\kappa;\lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2(\kappa+1)}$$

в лемме 3.2.1 также рассматривается в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге $x^2 + y^2 \le R$, то есть

$$K(R) = \#\left\{(x,y):\ x^2+y^2 \le R,\ x,y \in Z\right\} = \pi R + O\left(R^{\theta(\kappa;\lambda)+\varepsilon}\right),$$

также при оценке остаточного члена в проблеме делителей Дирихле о числе целых точек в гиперболе $xy \le N$, $x > 0$, $y > 0$. Наилучшая для $\theta(\kappa;\lambda)$ оценка сверху на данный момент принадлежит J. Bourgain and N. Watt [175]. Они доказали, что

$$\theta_0 = \min_{\kappa,\lambda \in \mathcal{P}} \theta(\kappa,\lambda) = \min_{\kappa,\lambda \in \mathcal{P}} \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2} \le \frac{1515}{4816} = \frac{1}{3} - \frac{271}{3 \cdot 4816} \approx 0.314576,$$

где $\mathcal{P}$ — множество всех экспоненциальных пар.

Отсюда из леммы 3.2.1 получаем следующее

Следствие 3.2.1.1. *Пусть ε_1 и ε_2 - малые произвольные положительные числа, не превосходящие $0,001$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \eta < 1$. Тогда при $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon_1}$ имеют место оценки:*

$$W_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}}\right)^{2k} \left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k \mathscr{L}\right) T^{-\varepsilon_1},$$
$$W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \quad j = 0,\ j = 2.$$

В третьем параграфе главы получена асимптотическая формула для суммы

$$S(Y) = \sum_{\lambda \le Y} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}, \quad A(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2},$$

λ — положительное рациональное число, знаменатель которого не превосходит X, и найдена оценка сверху для суммы

$$W(\theta) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \left(\frac{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4},$$

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\left(1 - \dfrac{\ln \nu}{\ln X}\right), & 1 \le \nu < X, \\ 0, & \nu \ge X, \end{cases}$$

которая применяется при нахождении оценки количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой.

Имеют место следующие утверждения.

Лемма 3.3.1. *Пусть* $T^{0,1} \le Y \le T$, $\frac{1}{4} \le \theta \le \frac{1}{2}$, *тогда имеет место следующая асимптотическая формула:*

$$S(Y) = \frac{2(1+æ^2)}{5(1-2\theta)} Y^{1-2\theta} W(\theta) + \left(\frac{c_1}{1-2\theta} + c_2\right) W(1-2\theta) +$$

$$+ O\left(Y^{-2\theta} X^2 \ln^2 X\right).$$

Лемма 3.3.2. *Пусть* $0 \le \theta \le \frac{1}{2}$, *тогда для суммы* $W(\theta)$ *справедлива следующая оценка*

$$W(\theta) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \left(\frac{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4} =$$

$$= O\left(\frac{X^{2\theta}}{\sqrt{\ln X}}\right).$$

3.2. Оценка специальных тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0, 1, 2$

В этом параграфе, как мы указали в начале главы, находим новые равномерные по параметрам оценки специальных тригонометрических сумм вида $W_j(T)$, $j = 0, 1, 2$, которые применяются при получении оценки количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой.

Имеет место следующая

Лемма 3.2.1. *Пусть* (κ, λ) *— произвольная экспоненциальная пара,* ε_1 *и* ε_2 *- малые произвольные положительные числа, не превосходящие* $0,001$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \eta < 1$,

$$\theta(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2}, \qquad æ(\kappa, \lambda) = \frac{52 + \kappa - \lambda}{50\kappa + 50}, \qquad \sigma(\kappa) = \frac{\ln \mathscr{L}}{(\kappa + 1)\ln T}.$$

Тогда при $H = T^{\theta(\kappa,\lambda) + æ(\kappa,\lambda)\varepsilon_1 + \sigma(\kappa)}$ *для суммы* $W_j(T)$ *имеют место оценки*

$$W_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}}\right)^{2k} \left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k \mathscr{L}\right) T^{-0,5(\lambda - \kappa)\varepsilon_2} \cdot T^{-\varepsilon_1},$$
$$W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \quad j = 0, \ j = 2.$$

Отметим, что показатель

$$\theta(\kappa; \lambda) = \frac{\kappa + \lambda}{2(\kappa + 1)}$$

в лемме 3.2.1 также рассматривается в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге $x^2 + y^2 \le R$, то есть

$$K(R) = \#\left\{(x, y) : \ x^2 + y^2 \le R, \ x, y \in Z\right\} = \pi R + O\left(R^{\theta(\kappa;\lambda) + \varepsilon}\right),$$

также при оценке остаточного члена в проблеме делителей Дирихле о числе целых точек в гиперболе $xy \le N$, $x>0$, $y>0$. Наилучшая для $\theta(\kappa;\lambda)$ оценка сверху на данный момент принадлежит J. Bourgain and N. Watt [175]. Они доказали, что

$$\theta_0=\min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}}\theta(\kappa,\lambda)=\min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}}\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}\le\frac{1515}{4816}=\frac{1}{3}-\frac{271}{3\cdot 4816}\approx 0.314576,$$

где $\mathcal{P}$ — множество всех экспоненциальных пар.

Отсюда из леммы 3.2.1 получаем следующее

Следствие 3.2.1.1. *Пусть* ε_1 *и* ε_2 *- малые произвольные положительные числа, не превосходящие* $0,001$, $k\in\mathbb{N}$, $0<\eta<1$. *Тогда при* $H=T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon_1}$ *имеют место оценки*

$$\begin{aligned}&W_1(T)\ll\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2}+\eta k\mathscr{L}\right)T^{-\varepsilon_1},\\&W_j(T)\ll T^{-\varepsilon_1},\quad j=0,\ j=2.\end{aligned}$$

Доказательство леммы 3.2.1. Для удобства доказательство разобьём на несколько этапов.

1. Оценка $W_j(T)$, $j=0,1,2$ при условии $\lambda_2>\lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})$. При выполнении условия $\lambda_2>\lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})$ для сумм $W_j(T)$, $j=0,1,2$ используем неравенства $\ln(1+x)>0,5x$, $0<x\le 0,5$, находим

$$\begin{aligned}\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)<\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(1+\frac{\mathscr{L}}{H}\right)\right)^2\right)<\\<\exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right).\end{aligned}$$

Часть сумм $W_j(T)$, для которой выполняется $\lambda_2-\lambda_1>\mathscr{L}H^{-1}$, обозначим через $W_j'(T)$, $j=0,1,2$ и применим следующие соотношения при $j=1$

$$\left|B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right| = \frac{\left|\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i\eta}-1\right|^k}{\left(\ln\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right)^k} = \frac{\left|2\sin\left(\frac{\eta}{2}\ln\frac{P}{\lambda}\right)\right|^k}{(\ln P-\ln\lambda)^k} \le$$
$$\le \frac{2^k}{(\ln P-\ln P^{1-\varepsilon_2})^k} = \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^k, \qquad (3.2.1)$$

имеем

$$|W_j'(T)| < \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)\left(\sum_{\lambda<P}\frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}}\right)^2; \qquad j=0,2;$$

$$|W_1'(T)| < \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)\left(\sum_{\lambda<P^{1-\varepsilon_2}}\frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}}\right)^2.$$

Воспользуемся определением $A(\lambda)$ и неравенствами $|r(m)|\le 1$, $|h(\nu)|\le 1$, находим

$$\sum_{\lambda<P}\frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}} = \sum_{\lambda<P}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left|\sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda\\ \nu_1,\nu_2<X}}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}\right| \le$$
$$\le \sum_{\lambda<P}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda\\ \nu_1,\nu_2<X}}\frac{|h(\nu_1)||h(\nu_2)||r(n)|}{\nu_2} =$$
$$= \sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{|h(\nu_1)||h(\nu_2)|}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\sum_{n<\frac{P\nu_2}{\nu_1}}\frac{|r(n)|}{\sqrt{n}} \le$$
$$\le \sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\sum_{n<\frac{P\nu_2}{\nu_1}}\frac{1}{\sqrt{n}} \ll$$
$$\ll \sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\left(\frac{P\nu_2}{\nu_1}\right)^{\frac{1}{2}} \ll P^{\frac{1}{2}}X\ln X.$$

Таким образом,

$$W_j'(T) \ll \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right) PX^2\ln^2 X, \qquad j=0,2;$$
$$W_1'(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k} \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right) P^{1-\varepsilon_2}X^2\ln^2 X.$$

Далее рассмотрим слагаемые с условиями

$$\lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_1\left(1+\frac{\mathscr{L}}{H}\right).$$

Разобьём промежутки $0<\lambda_1<P$ в $W_0(T)$, $0<\lambda_1<P^{1-\varepsilon_2}$ в $W_1(T)$, и $P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<P$ в $W_2(T)$, целыми числами $\Lambda=\Lambda(j)$ на $\ll \mathscr{L}$ промежутков следующего вида $\Lambda<\lambda_1\le\Lambda_1\le 2\Lambda$, видим, что для чисел Λ имеет место соотношение

$$2\Lambda = 2\Lambda(j) < E_jP, \quad \text{где} \quad E_j = \begin{cases} P^{-\varepsilon_2}, & \text{если } j=1; \\ 1, & \text{если } j=0 \text{ или } j=2. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Максимальную из таких сумм обозначаем через $W_j(\Lambda)$, $j=0,1,2$ и перейдём к следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} &W_j(T) \ll \mathscr{L}|W_j(\Lambda)| + \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right) PX^2\ln^2 X, \qquad j=0,2; \\ &W_1(T) \ll \mathscr{L}|W_1(\Lambda)| + \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k} \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right) P^{1-\varepsilon_2}X^2\ln^2 X. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

2. Оценка $W_j(\Lambda)$ при условии $\Lambda \le \dfrac{H}{X^2\mathscr{L}}$. При выполнении условия $\Lambda \le \dfrac{H}{X^2\mathscr{L}}$ в силу того, что числа λ_1 и λ_2 определяются как

$$\lambda_1<\lambda_2, \qquad \lambda_1 = \frac{n_1\nu_1}{\nu_2}, \qquad \lambda_2=\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}, \qquad \nu_i<X, \qquad i=1,2,3,4,$$

имеем

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \geq 1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\Lambda} > 1 + \frac{1}{2\Lambda} \cdot \frac{n_2\nu_3\nu_2 - n_1\nu_1\nu_4}{\nu_2\nu_4} >$$
$$> 1 + \frac{1}{2\nu_2\nu_4\Lambda} \geq 1 + \frac{\mathscr{L}}{2H},$$

таким образом,

$$\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) < \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)$$
$$< \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(1+\frac{\mathscr{L}}{2H}\right)\right)^2\right) < \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{64}\right).$$

Аналогично для суммы W_j', $j = 0, 1, 2$ при оценке суммы $W_j(\Lambda)$ с условиями $\Lambda \leq HX^{-2}\mathscr{L}^{-1}$, находим

$$\begin{aligned} &W_j(\Lambda) \ll \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{64}\right) PX^2\ln^2 X, \qquad j = 0, 2; \\ &W_1(\Lambda) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k} \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{64}\right) P^{1-\varepsilon_2}X^2\ln^2 X. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

3. Преобразование $W_j(\Lambda)$ при условии $\Lambda > \dfrac{H}{X^2\mathscr{L}}$ через $C(u,h)$ и $F_j(h,\nu)$.

Не ограничивая общности, считаем, что $\Lambda > \dfrac{H}{X^2\mathscr{L}}$,

$$B_0\left(\frac{P}{\lambda}\right) = B_2\left(\frac{P}{\lambda}\right) = 1 \quad \text{и} \quad B_1\left(\frac{P}{\lambda}\right) = B\left(\frac{P}{\lambda}\right).$$

Тогда

$$W_j(\Lambda) = \sum_{\Lambda<\lambda_1\leq\Lambda_1}\ \sum_{\lambda_1<\lambda_2\leq\lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} B_j\left(\frac{P}{\lambda_1}\right)\overline{B_j\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)}\cdot$$
$$\cdot\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

где $\delta = 0$ и $\dfrac{H}{X^2\mathscr{L}} < \Lambda < \Lambda_1 \leq 2\Lambda < P^{1-\varepsilon_2}$ при $j = 1$, а $\delta = 1$ и

$$\frac{H}{X^2\mathscr{L}} < \Lambda < \Lambda_1 \leq 2\Lambda < P \quad \text{при} \quad j = 0, 2.$$

Используя представление $A(\lambda)$, а также обозначения $\dfrac{\nu_1\nu_4}{\nu_2\nu_3} = \dfrac{a}{b}$, $(a, b) = 1$, сумму $W(\Lambda)$ представляем в виде

$$W_j(\Lambda) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4 < X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\sqrt{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}} W_j(\Lambda, \nu); \tag{3.2.5}$$

$$j = 0, 1, 2; \quad \nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4);$$

здесь

$$W_j(\Lambda, \nu) = \sum_{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1} < n_1 \leq \frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}} \sum_{\frac{n_1 a}{b} < n_2 \leq \frac{n_1 a}{b}(1+\mathscr{L}H^{-1})} r(n_1)r(n_2)\Phi_j(n_1, n_2, \nu) \left(\frac{n_1 a}{n_2 b}\right)^{iT},$$

$$\Phi_j(n_1, n_2, \nu) = \frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2} \ln \frac{n_1 a}{n_2 b}\right)^2\right)}{\sqrt{n_1 n_2}} B_j\left(\frac{P\nu_2}{n_1\nu_1}\right) \overline{B_j\left(\frac{P\nu_4}{n_2\nu_3}\right)}.$$

Числа n_1 и n_2 можно представить в виде членов арифметической прогрессии с разностью $5a$ и $5b$, действительно

$$n_1 = 5bm + b_1, \quad 0 \leq b_1 < 5b, \quad \frac{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1} - b_1}{5b} < m \leq \frac{\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1} - b_1}{5b},$$

$$n_2 = 5am_1 + a_1, \quad 0 \leq a_1 < 5a,$$

$$m + \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a} < m_1 \leq m + \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a} + \left(m + \frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H},$$

используя следующие обозначения

$$N = \frac{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1} - b_1}{5b}, \quad N_1 = \frac{\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1} - b_1}{5b},$$

$$\alpha = \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a}, \quad \omega(m) = \left(m + \frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H},$$

и суммирование по b_1 и a_1 сделаем внешним, кроме того, используя $r(5bm+b_1) = r(b_1)$ и $r(5am_1+a_1) = r(a_1)$, последовательно имеем

$$W_j(\Lambda,\nu) = \sum_{0\le b_1<5b} r(b_1) \sum_{0\le a_1<5a} r(a_1) W_j(\Lambda,\nu,m,m_1), \tag{3.2.6}$$

$$W_j(\Lambda,\nu,m,m_1) = \sum_{N<m\le N_1}\ \sum_{m+\alpha<m_1\le m+\alpha+\omega(m)} \Phi_j(5bm+b_1, 5am_1+a_1,\nu)\times$$
$$\times\left(\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{m_1+\frac{a_1}{5a}}\right)^{iT}.$$

В сумме по m_1 переменное суммирование принимает целые значения из полуинтервала $m+\alpha < m_1 \le m+\alpha+\omega(m)$, следовательно, заменяем m_1 на $m+h$, где значения h находятся из интервала $\alpha < h \le \alpha+\omega(m)$, для суммы W_j, имеем

$$W_j(\Lambda,\nu,m,m_1) = \sum_{N<m\le N_1}\ \sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(m)} \Phi_j(5bm+b_1, 5a(m+h)+a_1,\nu)\times$$
$$\times\left(\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{(m+h)+\frac{a_1}{5a}}\right)^{iT},$$

Отметим, что $h \ge 0$, действительно, это следует из неравенства

$$-1 < -1 + \frac{1}{5a} \le \alpha = \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a} \le 1 - \frac{1}{5b} < 1.$$

Заменяем порядок суммирования по h и m, учитывая равносильность условия

$$h \le \alpha + \omega(m) \quad \text{и} \quad m \ge (h-\alpha)\frac{H}{\mathscr{L}} - \frac{b_1}{5b},$$

а также используяс обозначения

$$N_2 = \max\left(N, \frac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha) - \frac{b_1}{5b}\right),$$

имеем

$$W_j(\Lambda,\nu,m,m_1)=\sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(N_1)}\sum_{N_2<m\le N_1}\Phi_j(5bm+b_1,5a(m+h)+a_1,\nu)\times$$
$$\times\left(\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{m+h+\frac{a_1}{5a}}\right)^{iT},$$

Применяя лемму 2.2.12 к внутренней сумме, находим

$$W_j(\Lambda,\nu,m,m_1)=$$

$$=\sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(N_1)}\left(-\int_{N_2}^{N_1}C(u,h)f_j'(u,h)du+C(N_1,h)f_j(N_1,h)\right),$$
$$f_j(u,h)=\Phi_j(5bu+b_1,5a(u+h)+a_1,\nu),$$
$$C(u,h)=\sum_{N_2<m\le u}\left(\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{m+h+\frac{a_1}{5a}}\right)^{iT}.$$

Полученную формулу подставляем сначала в (3.2.6), а потом в (3.2.5), после того переходим к оценке, получим

$$W_j(\Lambda)\le\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}}\times$$
$$\times\sum_{0\le b_1<5b}\sum_{0\le a_1<5a}\sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(N_1)}F_j(h,\nu)\max_{N_2<u\le N_1}|C(u,h)|, \qquad (3.2.7)$$
$$F_j(h,\nu)=\int_{N_2}^{N_1}|f_j'(u,h)|du+|f_j(N_1,h)|.$$

Далее необходимо оценить интегралы $F_j(h,\nu)$, при $j=0,1,2$, а потом сумму $|C(u,h)|$. Отметим, что так как $f_2(u,h)=f_0(u,h)$, поэтому значения интегралов $F_0(h,\nu)$ и $F_2(h,\nu)$ тождественно равны, и следовательно, достаточно оценить $F_0(h,\nu)$ и $F_1(h,\nu)$.

4. Оценка $F_0(h,\nu)$ сверху. Учитывая, что

$$f_0(u,h)=\Phi_0(5bu+b_1,5a(u+h)+a_1,\nu),$$

имеем

$$f_0'(u,h)=\left(\frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{u+\frac{b_1}{5b}}{u+h+\frac{a_1}{5a}}\right)^2\right)}{5\sqrt{ab}\sqrt{\left(u+\frac{b_1}{5b}\right)\left(u+h+\frac{a_1}{5a}\right)}}\right)'=$$

$$=\frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{u+\frac{b_1}{5b}}{u+h+\frac{a_1}{5a}}\right)^2\right)}{5\sqrt{ab}}\times$$

$$\times\frac{2(H+\delta)\ln\left(1+\frac{h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}}{u+\frac{b_1}{5b}}\right)\left(h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}\right)-2u-h-\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a}}{2\left(u+\frac{b_1}{5b}\right)^{\frac{3}{2}}\left(u+h+\frac{a_1}{5a}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Так как знак числителя последней дроби совпадает со знаком $f_0'(u,h)$, для определения которой используется граница изменения переменных $N_2<m\le N_1$ и $\alpha<h\le\alpha+\omega(N_1)$, т.е. обозначениями

$$N_2=\max\left(N,\frac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha)-\frac{b_1}{5b}\right)=$$

$$=\max\left(\frac{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1}-b_1}{5b},\frac{H}{\mathscr{L}}\left(h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}\right)-\frac{b_1}{5b}\right),$$

$$\alpha=\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a},\quad \omega(N_1)=\left(N_1+\frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H}=\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}\cdot\frac{\mathscr{L}}{5bH},$$

находим

$$2(H+\delta)\ln\left(1+\frac{h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}}{u+\frac{b_1}{5b}}\right)\left(h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}\right)-2u-h-\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a}<$$

$$<2(H+\delta)\ln\left(1+\frac{\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}\cdot\frac{\mathscr{L}}{5bH}}{\frac{\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b}}\right)\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}\cdot\frac{\mathscr{L}}{5bH}-\frac{2\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b}=$$

$$=\frac{2\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b}\left(\left(1+\frac{\delta}{H}\right)\ln\left(1+\frac{\mathscr{L}}{H}\right)\mathscr{L}-1\right)<$$

$$<\left(\frac{2\mathscr{L}^2}{H}-1\right)\frac{2\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b}<0.$$

Таким образом, определили, что $f_0'(u,h)<0$. Учитывая условие

$f_0(u,h)>0$, находим

$$F_0(h,\nu)=\int_{N_2}^{N_1}|f_0'(u,h)|du+|f_0(N_1,h)|=$$
$$=-\int_{N_2}^{N_1}f_0'(u,h)du+f_0(N_1,h)\le f_0(N_2,h).$$

Возвращаясь к переменным n_1, n_2, а потом к λ_1, λ_2, используем неравенства $\Lambda<\lambda_1<\lambda_2$, для оценки $f_0(u,h)$, получим

$$F_0(h,\nu)=f_0(u,N_2)=\sqrt{\frac{\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4}}\cdot\frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\le$$

$$\le\frac{1}{\Lambda}\sqrt{\frac{\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4}}. \tag{3.2.8}$$

5. Оценка $F_1(h,\nu)$. Для оценки $F_1(h,\nu)$ нам понадобятся оценки $f_1(u,h)$ и $f_1'(u,h)$— её производная по переменным u. Воспользовавшись следующими обозначениями

$$B(\varphi)=\left(\frac{\varphi^{i\eta}-1}{\ln\varphi}\right)^k,\qquad\overline{B(\psi)}=\left(\frac{\psi^{-i\eta}-1}{\ln\psi}\right)^k,$$

$$\varphi=\varphi(u)=\frac{P\nu_2}{(5bu+b_1)\nu_1},\quad\psi=\psi(u)=\frac{P\nu_4}{(5a(u+h)+a_1)\nu_3},$$

и равенством $f_1(u,h)=\Phi_1(5bu+b_1,5a(u+h)+a_1,\nu)$, найдём

$$f_1(u,h)=f_0(u,h)\left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right),$$
$$f_1'(u,h)=f_0(u,h)\left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right)_u'+f_0'(u,h)B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))},$$
$$\left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right)_u'=kB(\varphi)\overline{B(\psi)}\times$$
$$\times\left(\frac{1-i\eta\varphi^{i\eta}(B(\varphi))^{-\frac{1}{k}}}{\left(u+\frac{b_1}{5b}\right)\ln\varphi}+\frac{1+i\eta\psi^{-i\eta}(\overline{B(\psi)})^{-\frac{1}{k}}}{\left(u+h+\frac{a_1}{5a}\right)\ln\psi}\right).$$

Воспользуемся оценкой (3.2.1), находим

$$\left|\left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right)'_u\right| \le \frac{2k}{u\ln\left(\frac{P}{\lambda}\right)}\left(\left|B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right|^2 + \eta\left|B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right|^{\frac{2k-1}{k}}\right) \le$$
$$\le \frac{2k}{u\,\varepsilon_2\mathscr{L}}\left(\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k} + \eta\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k-1}\right) =$$
$$= \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}} + \eta\right)\frac{k}{u}.$$

Полученные формулы для $f_1(u,h)$ и $f_1'(u,h)$ подставляем в (3.2.7), переходим к оценкам и пользуемся последней оценкой и оценкой (3.2.1) и соотношением (3.2.8), последовательно, найдём

$$F_1(h,\nu) \le \int_{N_2}^{N_1}\left|f_0(u,h)\left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right)'_u\right|du +$$
$$+\int_{N_2}^{N_1}|f_0'(u,h)|\left|B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right|du +$$
$$+|f_0(N_1,h)|\left|B(\varphi(N_1))\overline{B(\psi(N_1))}\right| \le$$
$$\le \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\left(\frac{2k}{\varepsilon_2\mathscr{L}} + k\eta\right)\int_{N_2}^{N_1}\frac{f_0(u,h)}{u}du -\right.$$
$$\left. - \int_{N_2}^{N_1} f_0'(u,h)du + f_0(N_1,h)\right) \le$$
$$\le \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{2k}{\varepsilon_2} + k\eta\mathscr{L} + 1\right)f_0(N_2,h) \ll$$
$$\ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k\mathscr{L}\right)\frac{1}{\Lambda}\sqrt{\frac{\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4}}.$$

Полученную оценку объединяем с оценкой (3.2.8), находим

$$F_j(h,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4) \ll \frac{D_j}{\Lambda}\sqrt{\frac{\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4}},$$
$$D_j = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\dfrac{k}{\varepsilon_2} + \eta k\mathscr{L}\right), & \text{если } j = 1; \\ 1, & \text{если } j = 0 \text{ или } j = 2. \end{cases}$$

Таким образом, подставляем последнюю оценку в соотношение (3.2.7),

имеем

$$W_j(\Lambda) \ll \frac{D_j}{\Lambda} \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{1}{\nu_2\nu_4}\times$$
$$\times \sum_{0\le b_1<5b} \sum_{0\le a_1<5a} \sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(N_1)} \max_{N_2<u\le N_1} |C(u,h)|, \qquad (3.2.9)$$

6. Оценка $|C(u,h)|$. Теперь оценим тригонометрическую сумму

$$C(u,h) = \sum_{N_2<m\le u} e\left(\frac{T}{2\pi} \ln \frac{m+h+\frac{a_1}{5a}}{m+\frac{b_1}{5b}}\right),$$

с условиями

$$N_2 = \max\left(\frac{\Lambda\nu_2}{5b\nu_1} - \frac{b_1}{5b}, \frac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha) - \frac{b_1}{5b}\right), \quad u \le \frac{\Lambda_1\nu_2}{5b\nu_1} - \frac{b_1}{5b}.$$

Для этого используем метод экспоненциальных пар. Полагаем

$$f(y) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{y+h+\frac{a_1}{5a}}{y+\frac{b_1}{5b}},$$
$$A = \frac{T|h-\alpha|}{N_2^2} \ll \frac{T|h-\alpha|b^2\nu_1^2}{\Lambda^2\nu_2^2},$$
$$B = u - N_2 \le N_1 - N_2 = \frac{\Lambda_1\nu_2}{5b\nu_1} - \frac{b_1}{5b} -$$
$$-\max\left(\frac{\Lambda\nu_2}{5b\nu_1} - \frac{b_1}{5b}, \frac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha) - \frac{b_1}{5b}\right) \ll \frac{\Lambda\nu_2}{b\nu_1}.$$

Находим производную s – го порядка функции $f(u)$, $s = 1, 2, \ldots$. Для этого представляем производную первого порядка этой функции в следующем виде:

$$f'(y) = -\frac{T(h-\alpha)}{2\pi} \cdot f_1(y) f_2(y), \quad f_1(y) = \frac{1}{y+h+\frac{a_1}{5a}},$$
$$f_2(y) = \frac{1}{y+\frac{b_1}{5b}}, \quad \alpha = \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a},$$

и учитывая, что

$$f_1^{(s-1-j)}(y)=\frac{(-1)^{s-1-j}(s-1-j)!}{(y+h+\frac{a_1}{5a})^{s-j}},$$

$$f_2^{(j)}(y)=\frac{(-1)^j j!}{(y+\frac{b_1}{5b})^{j+1}},$$

используем формулу Лейбница для производной $s-1$ — ой произведения двух функций, имеем

$$f^{(s)}(y)=-\frac{T(h-\alpha)}{2\pi}\left(f_1(y)f_2(y)\right)^{(s-1)}=$$

$$=-\frac{T(h-\alpha)}{2\pi}\sum_{j=0}^{s-1}C_{s-1}^j f_1^{(s-1-j)}(y)f_2^{(j)}(y)=$$

$$=-\frac{T(h-\alpha)}{2\pi}\sum_{j=0}^{s-1}C_{s-1}^j\frac{(-1)^{s-1-j}(s-1-j)!}{(y+h+\frac{a_1}{5a})^{s-j}}\cdot\frac{(-1)^j j!}{(y+\frac{b_1}{5b})^{j+1}}=$$

$$=\frac{(-1)^s\, s!\, T(h-\alpha)}{2\pi}\sum_{j=0}^{s-1}\frac{1}{(y+h+\frac{a_1}{5a})^{s-j}(y+\frac{b_1}{5b})^{j+1}}.$$

Следовательно, выполняется

$$AB^{1-s}\ll f^{(s)}(y)\ll AB^{1-s},\qquad s=1,2,\dots.$$

Таким образом, для любой экспоненциальной пары (κ,λ), находим

$$|C(u,h|\ll\left(\frac{T(h-\alpha)b^2\nu_1^2}{\Lambda^2\nu_2^2}\right)^\kappa\left(\frac{\Lambda\nu_2}{b\nu_1}\right)^\lambda=\frac{T^\kappa b^{2\kappa-\lambda}\nu_1^{2\kappa-\lambda}}{\Lambda^{2\kappa-\lambda}\nu_2^{2\kappa-\lambda}}(h-\alpha)^\kappa.$$

7. Оценка $W_j(T)$, $j=0,1,2$. Полученную оценку суммы $|C(u,h|$ подставляем в (3.2.7), находим

$$W_j(\Lambda)\ll\frac{D_j}{\Lambda}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{1}{\nu_2\nu_4}\times$$

$$\times\sum_{0\le b_1<5b}\sum_{0\le a_1<5a}\sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(N_1)}\frac{T^\kappa b^{2\kappa-\lambda}\nu_1^{2\kappa-\lambda}}{\Lambda^{2\kappa-\lambda}\nu_2^{2\kappa-\lambda}}(h-\alpha)^\kappa=$$

$$= \frac{D_j T^\kappa}{\Lambda^{1+2\kappa-\lambda}} \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{\nu_1^{2\kappa-\lambda} b^{2\kappa-\lambda}}{\nu_2^{1+2\kappa-\lambda}\nu_4} \times$$

$$\times \sum_{0\le b_1<5b} \sum_{0\le a_1<5a} \sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(N_1)} (h-\alpha)^\kappa \ll$$

$$\ll \frac{D_j T^\kappa}{\Lambda^{1+2\kappa-\lambda}} \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{\nu_1^{2\kappa-\lambda} a b^{1+2\kappa-\lambda}}{\nu_2^{1+2\kappa-\lambda}\nu_4} (\omega(N_1))^{\kappa+1}.$$

Отсюда учитывая, что

$$\omega(N_1) = \left(N_1 + \frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H} = \frac{\Lambda_1\nu_2\mathscr{L}}{5Hb\nu_1},$$

$$a = \frac{\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}, \quad b = \frac{\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)},$$

находим

$$W_j(\Lambda) \ll \frac{D_j T^\kappa}{\Lambda^{1+2\kappa-\lambda}} \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{\nu_1^{2\kappa-\lambda} a b^{1+2\kappa-\lambda}}{\nu_2^{1+2\kappa-\lambda}\nu_4} \left(\frac{\Lambda\nu_2\mathscr{L}}{Hb\nu_1}\right)^{\kappa+1} =$$

$$= \frac{D_j T^\kappa \Lambda^{\lambda-\kappa}}{H^{\kappa+1}} \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{\nu_1^{\kappa-\lambda-1} a b^{\kappa-\lambda}}{\nu_2^{\kappa-\lambda}\nu_4} =$$

$$= \frac{D_j T^\kappa \Lambda^{\lambda-\kappa}}{H^{\kappa+1}} \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{\nu_1^{\kappa-\lambda-1}}{\nu_2^{\kappa-\lambda}\nu_4} \cdot \frac{\nu_1\nu_4\,(\nu_2\nu_3)^{\kappa-\lambda}}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{1+\kappa-\lambda}} =$$

$$= \frac{D_j T^\kappa \Lambda^{\lambda-\kappa}}{H^{\kappa+1}} \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{(\nu_1\nu_3)^{\kappa-\lambda}}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{1+\kappa-\lambda}} \le$$

$$\le \frac{D_j T^\kappa \Lambda^{\lambda-\kappa}}{H^{\kappa+1}} \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} (\nu_1\nu_3)^{\kappa-\lambda} \ll D_j \frac{T^\kappa\Lambda^{\lambda-\kappa}X^{4+2\kappa-2\lambda}}{H^{\kappa+1}}.$$

Отсюда воспользовавшись условиями $\lambda-\kappa\ge 0$, $2\Lambda = 2\Lambda(j) < E_jP$, где E_j как в (3.2.2), а также, используя $X = T^{0,01\varepsilon_1}$, находим

$$W_j(\Lambda) \ll D_j E_j^{\lambda-\kappa} \frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2}} X^{4+2\kappa-2\lambda}}{H^{\kappa+1}} =$$

$$= D_j E_j^{\lambda-\kappa} \left(\frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}+0,01\varepsilon_1\cdot\frac{4+2\kappa-2\lambda}{\kappa+1}}}{H}\right)^{\kappa+1} =$$

$$= D_j E_j^{\lambda-\kappa} \cdot T^{-\varepsilon_1} \mathscr{L}^{-1} \left(\frac{T^{\theta(\kappa,\lambda)+\text{æ}(\kappa,\lambda)\varepsilon_1+\sigma(\kappa)}}{H} \right)^{\kappa+1},$$

где

$$\theta(\kappa,\lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}, \quad \text{æ}(\kappa,\lambda) = \frac{52+\kappa-\lambda}{50\kappa+50}, \quad \sigma(\kappa) = \frac{\ln\mathscr{L}}{(\kappa+1)\ln T}.$$

Таким образом, при $H \geq T^{\theta(\kappa,\lambda)+\text{æ}(\kappa,\lambda)\varepsilon_1+\sigma(\kappa)}$ находим оценку

$$W_j(\Lambda) \ll D_j E_j^{\lambda-\kappa} \cdot T^{-\varepsilon_1} \mathscr{L}^{-1}.$$

Подставляя значения параметров D_j и E_j, последнюю оценку представим в следующем виде

$$W_j(\Lambda) \ll T^{-\varepsilon_1} \mathscr{L}^{-1}, \qquad j=0, \quad j=2;$$
$$W_1(\Lambda) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}} \right)^{2k} \left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k \mathscr{L} \right) T^{-0{,}5(\lambda-\kappa)\varepsilon_2} \cdot T^{-\varepsilon_1} \mathscr{L}^{-1}.$$

Подставляем найденные оценки суммы $W_j(\Lambda)$, $j=0,1,2$ и оценку (3.2.4) в формуле (3.2.3), получаем утверждение леммы.

3.3. Оценки сумм $S(Y)$ и $W(\theta)$

В этом параграфе доказываем асимптотическую формулу для суммы $S(Y)$ и сверху оцениваем суммы $W(\theta)$.

Определение 3.3.1. *Суммами $W(\theta)$ и $S(Y)$ назовём соответственно суммы вида*

$$W(\theta) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \left(\frac{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3} \right)^{1-\theta} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4},$$
$$S(Y) = \sum_{\lambda \leq Y} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}},$$

где

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\left(1 - \dfrac{\ln \nu}{\ln X}\right), & 1 \le \nu < X, \\ 0, & \nu \ge X, \end{cases}$$

$$A(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}.$$

λ — положительное рациональное число, знаменатель которого не превосходит X.

Лемма 3.3.1. *Пусть $T^{0,1} \le Y \le T$, $\frac{1}{4} \le \theta \le \frac{1}{2}$, тогда имеет место следующая асимптотическая формула:*

$$S(Y) = \frac{2(1+æ^2)}{5(1-2\theta)} Y^{1-2\theta} W(\theta) + \left(\frac{c_1}{1-2\theta} + c_2\right) W(1-2\theta) +$$

$$+O\left(Y^{-2\theta} X^2 \ln^2 X\right).$$

Доказательство. Воспользуемся представлением $A(\lambda)$,

$$A(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2} = \sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda \\ \nu_1,\nu_2<X}} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2},$$

имеем

$$S(Y) = \sum_{\lambda \le Y} \frac{1}{\lambda^{2\theta}} \sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda \\ \nu_1,\nu_2<X}} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n_1)}{\nu_2} \sum_{\substack{\frac{n\nu_3}{\nu_4}=\lambda \\ \nu_3,\nu_4<X}} \frac{h(\nu_3)h(\nu_4)r(n_2)}{\nu_4} =$$

$$= \sum_{\substack{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X \\ \frac{n_1\nu_1}{\nu_2}=\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\le Y}} \frac{1}{\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}\cdot\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\right)^\theta} \cdot \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n_1)}{\nu_2} \cdot \frac{h(\nu_3)h(\nu_4)r(n_2)}{\nu_4} =$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\nu_1^\theta \nu_2^{1-\theta} \nu_3^\theta \nu_4^{1-\theta}} \sum_{\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}=\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\le Y} \frac{r(n_1)r(n_2)}{(n_1n_2)^\theta} =$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\nu_1^\theta \nu_2^{1-\theta} \nu_3^\theta \nu_4^{1-\theta}} \sum_{n_1\nu_1\nu_4=n_2\nu_2\nu_3\le Y\nu_2\nu_4} \frac{r(n_1)r(n_2)}{(n_1n_2)^\theta} =$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\nu_1^{\theta}\nu_2^{1-\theta}\nu_3^{\theta}\nu_4^{1-\theta}} \times$$

$$\times \sum_{\frac{n_1\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}=\frac{n_2\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\le\frac{Y\nu_2\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}} \frac{r(n_1)r(n_2)}{(n_1n_2)^{\theta}}. \tag{3.3.1}$$

Обозначая сумму по n_1, n_2 через $S_1(Y)$ и вычислим её. Так как

$$\frac{n_1\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)} = \frac{n_2\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)} \le \frac{Y\nu_2\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}, \tag{3.3.2}$$

где

$$\left(\frac{\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)},\ \frac{\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\right) = 1,$$

отсюда находим

$$n_1 = n_1'\frac{\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}, \qquad n_2 = n_2'\frac{\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}.$$

Полученные значения n_1 и n_2 подставляем в (3.3.2), находим

$$\frac{n_1'\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^2} = \frac{n_2'\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^2} \le \frac{Y\nu_2\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}.$$

Вводя обозначения $n_1' = n_2' = m$ и, сокращая последнее соотношение, для суммы $S_1(Y)$ получаем новую границу изменения:

$$m \le \frac{Y(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3} = Y_1.$$

Переходим от переменных n_1 и n_2 к n_1' и n_2' в сумме $S_1(Y)$ и учитывая, что $n_1' = n_2' = m$, найдём

$$S_1(Y) = \sum_{\frac{n_1\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}=\frac{n_2\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\le\frac{Y\nu_2\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}} \frac{r(n_1)r(n_2)}{(n_1n_2)^{\theta}} =$$

$$= \sum_{m\le Y_1} \frac{r\left(\frac{m\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\right) r\left(\frac{m\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\right)}{\left(\frac{m^2\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^2}\right)^{\theta}} =$$

$$= \frac{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)^{2\theta}}{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)^{\theta}} \sum_{m \le Y_1} \frac{r\left(\frac{m\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\right) r\left(\frac{m\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\right)}{m^{2\theta}}.$$

Так как $\nu_1\nu_4$ и $\nu_2\nu_3$ представляет собой произведение степеней простых чисел $5k \pm 1$, поэтому делители, кроме того, $\frac{\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}$ и $\frac{\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}$, принимают вид $5k \pm 1$. Таким образом, для значений характера χ по модулю 5, имеют место следующие соотношения:

$$\chi\left(\frac{\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}\right) = \overline{\chi}\left(\frac{\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}\right),$$

$$\chi\left(\frac{\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}\right) = \overline{\chi}\left(\frac{\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}\right).$$

Используя функции

$$r(n) = \frac{1 - i\text{æ}}{2}\chi(n) + \frac{1 + i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(n),$$

и принимая $\tilde{\nu}$ одно из чисел $\dfrac{\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}$ или $\dfrac{\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}$, находим

$$\begin{aligned} r(m\tilde{\nu}) &= \frac{1 - i\text{æ}}{2}\chi(m\tilde{\nu}) + \frac{1 + i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(m\tilde{\nu}) = \\ &= \chi(m)\left(\frac{1 - i\text{æ}}{2}\chi(\tilde{\nu}) + \frac{1 + i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(\tilde{\nu})\right) = \chi(\tilde{\nu})r(m). \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая, что $\chi((\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)^2) = \chi^2((\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)) = 1$, находим

$$\begin{aligned} & r\left(\frac{m\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}\right) r\left(\frac{m\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}\right) = \\ &= \chi\left(\frac{\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}\right) \chi\left(\frac{\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}\right) r^2(m) = \\ &= \chi\left(\frac{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)^2}\right) r^2(m) = \\ &= \chi\left(\frac{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)^2}\right) \chi((\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)^2) r^2(m) = \\ &= \chi(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4) r^2(m). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S_1(Y) = \chi(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)\frac{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)^{2\theta}}{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)^{\theta}}\ S_2(Y), \tag{3.3.3}$$

где

$$S_2(Y) = \sum_{m\le Y_1}\frac{r^2(m)}{m^{2\theta}}.$$

Так как функция $r(m)$ является периодической, и учитывая, что $r(5k) = 0$, находим

$$S_2(Y) = \sum_{m\le Y_1}\frac{r^2(m)}{m^{2\theta}} = \sum_{l=1}^{4} r^2(l) \sum_{1\le 5k+l\le Y_1}(5k+l)^{-2\theta} =$$
$$= \sum_{l=1}^{4} r^2(l)\left(\sum_{\frac{1-l}{5}\le k<0{,}5}(5k+l)^{-2\theta} + \sum_{0{,}5\le k\le \frac{Y_1-l}{5}}(5k+l)^{-2\theta}\right) =$$
$$= \sum_{l=1}^{4} r^2(l)\left(l^{-2\theta} + \sum_{0{,}5\le k\le \frac{Y_1-l}{5}}(5k+l)^{-2\theta}\right).$$

Воспользовавшись формулой суммирования Эйлера, находим

$$S_2(Y) = \sum_{l=1}^{4} r^2(l)\left(\int_{0{,}5}^{(Y_1-l)/5}\frac{du}{(5u+l)^{2\theta}} + \rho\left(\frac{Y_1-l}{5}\right)\frac{1}{Y_1^{2\theta}} + \right.$$
$$\left. +10\theta\int_{0{,}5}^{(Y_1-l)/5}\frac{\rho(u)du}{(5u+l)^{2\theta+1}} + l^{-2\theta}\right) =$$
$$= \sum_{l=1}^{4} r^2(l)\left(\frac{Y_1^{1-2\theta} - (l+2,5)^{1-2\theta}}{5(1-2\theta)} + \right.$$
$$\left. +10\theta\int_{0{,}5}^{\infty}\frac{\rho(u)du}{(5u+l)^{2\theta+1}} + l^{-2\theta} + O\left(Y_1^{-2\theta}\right)\right).$$

Учитывая равенства $r(5k\pm1) = \pm1$, $r(5k\pm2) = \pm æ$, $r(5k) = 0$ для последней формулы, имеем

$$S_2(Y) = \frac{2(1+æ^2)}{5(1-2\theta)}Y_1^{1-2\theta} + \left(\frac{c_1}{1-2\theta} + c_2\right) + O\left(Y_1^{-2\theta}\right),$$

$$c_1=-\frac{7^{1-2\theta}+13^{1-2\theta}+æ^2(9^{1-2\theta}+11^{1-2\theta})}{5\cdot 2^{1-2\theta}},$$

$$c_2=10\theta\left(\int_{0,5}^{\infty}\frac{\rho(u)du}{(5u+1)^{2\theta+1}}+\int_{0,5}^{\infty}\frac{\rho(u)du}{(5u+4)^{2\theta+1}}+æ^2\int_{0,5}^{\infty}\frac{\rho(u)du}{(5u+2)^{2\theta+1}}+\right.$$
$$\left.+æ^2\int_{0,5}^{\infty}\frac{\rho(u)du}{(5u+3)^{2\theta+1}}\right)+1+\frac{1}{4^{2\theta}}+\frac{æ^2}{2^{2\theta}}+\frac{æ^2}{3^{2\theta}}.$$

Полученную сумму $S_2(Y)$ подставим в формуле (3.3.3), потом используя равенство $Y_1=\frac{Y(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}$, находим

$$S_1(Y)=\chi(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{2\theta}}{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)^{\theta}}\left(\frac{2(1+æ^2)}{5(1-2\theta)}Y_1^{1-2\theta}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right)+O\left(Y_1^{-2\theta}\right)\right)=$$
$$=\frac{2(1+æ^2)}{5(1-2\theta)}\chi(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{2\theta}}{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)^{\theta}}\left(\frac{Y(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-2\theta}+$$
$$+\left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right)\chi(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{2\theta}}{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)^{\theta}}+$$
$$+O\left(\left(\frac{Y(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{-2\theta}\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{2\theta}}{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)^{\theta}}\right)=$$
$$=\frac{2(1+æ^2)}{5(1-2\theta)}Y^{1-2\theta}\ \frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_2^{\theta}\nu_3^{1-\theta}\nu_4^{\theta}}\chi(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)+$$
$$+\left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right)\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{2\theta}}{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)^{\theta}}\chi(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)+O\left(\frac{\nu_1^{\theta}\nu_3^{\theta}}{\nu_2^{\theta}\nu_4^{\theta}}\ Y^{-2\theta}\right).$$

Полученную асимптотическую формулу подставляем в $(3.3.1)$, и учитывая, что $h(\nu)\chi(\nu)=\beta(\nu)$, и $|h(\nu)|\leq 1$, имеем

$$S(Y)=\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\nu_1^{\theta}\nu_2^{1-\theta}\nu_3^{\theta}\nu_4^{1-\theta}}S_1(Y)=$$
$$=\frac{2(1+æ^2)}{5(1-2\theta)}Y^{1-2\theta}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\nu_1^{\theta}\nu_2^{1-\theta}\nu_3^{\theta}\nu_4^{1-\theta}}\times$$
$$\times\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_2^{\theta}\nu_3^{1-\theta}\nu_4^{\theta}}\ \chi(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)+$$

$$+\left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right)\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\nu_1^\theta\nu_2^{1-\theta}\nu_3^\theta\nu_4^{1-\theta}}\times$$

$$\times\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{2\theta}}{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)^\theta}\ \chi(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)+$$

$$+O\left(Y^{-2\theta}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{1}{\nu_1^\theta\nu_2^{1-\theta}\nu_3^\theta\nu_4^{1-\theta}}\ \frac{\nu_1^\theta\nu_3^\theta}{\nu_2^\theta\nu_4^\theta}\right)=$$

$$=\frac{2(1+æ^2)}{5(1-2\theta)}Y^{1-2\theta}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\ \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4}+$$

$$+\left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right)\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\left(\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{2\theta}\ \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4}+$$

$$+\,O\left(Y^{-2\theta}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{1}{\nu_2\nu_4}\right).$$

Таким образом, используя соотношения

$$\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\ \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4}=W(\theta),$$

$$\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\left(\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{2\theta}\ \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4}=W(1-2\theta),$$

$$\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{1}{\nu_2\nu_4}\ll X^2\ln^2 X,$$

находим

$$S(Y)=\frac{2(1+æ^2)}{5(1-2\theta)}Y^{1-2\theta}W(\theta)+\left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right)W(1-2\theta)+$$

$$+O\left(Y^{-2\theta}X^2\ln^2 X\right).$$

Лемма доказана.

А теперь оценим суммы $W(\theta)$. Имеет место следующая

Лемма 3.3.2. *Пусть* $0\le\theta\le\frac{1}{2}$, *тогда для суммы* $W(\theta)$ *справед-*

лива следующая оценка:

$$W(\theta)=\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\left(\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4}=$$

$$=O\left(\frac{X^{2\theta}}{\sqrt{\ln X}}\right).$$

Доказательство. Функцию $\gamma(d)$ определяем из равенства

$$\sum_{d\backslash(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\gamma(d)=(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{1-\theta}, \tag{3.3.4}$$

и используем первую формулу обращения Мёбиуса, находим

$$\gamma(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\left(\frac{n}{d}\right)^{1-\theta}=n^{1-\theta}\prod_{d|n}\left(1-\frac{1}{p^{1-\theta}}\right),$$

значит,

$$0<\gamma(n)<n^{1-\theta}.$$

Используя определение суммы $W(\theta)$ и соотношение (3.3.4), находим

$$\begin{aligned}W(\theta)&=\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}s\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_2\nu_3^{1-\theta}\nu_4}(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{1-\theta}=\\&=\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_2\nu_3^{1-\theta}\nu_4}\sum_{d|(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\gamma(d)=\\&=\sum_{d\le X^2}{}'\gamma(d)\sum_{\substack{\nu_1,\nu_4<X\\ \nu_1\nu_4\equiv 0 \pmod d}}\sum_{\substack{\nu_2,\nu_3<X\\ \nu_2\nu_3\equiv 0 \pmod d}}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_2\nu_3^{1-\theta}\nu_4}=\\&=\sum_{d\le X^2}{}'\gamma(d)\left(\sum_{\substack{\nu_1,\nu_4<X\\ \nu_1\nu_4\equiv 0 \pmod d}}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_4}\right)^2.\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

В последней формуле штрих определяет, что суммирование берётся по тем натуральным числам d, простых делители которых имеют следующий вид $p \equiv \pm 1 \pmod 5$, то есть, d есть делители $(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)$, состоящие из простых сомножителей вида $p \equiv \pm 1 \pmod 5$. Далее в последней формуле рассматриваем внутреннюю сумму, которую обозначим через $V(d)$. Предположим, что натуральные числа δ_1 и δ_4 имеют простые делители, совпадающие с делителями числа d и кроме того, пусть $\nu_1 = \delta_1\nu_1'$, $\nu_4 = \delta_4\nu_4'$, где $(\nu_1', d) = (\nu_4', d) = 1$. Имеем

$$V(d) = \sum_{\substack{\nu_1,\nu_4<X\\ \nu_1\nu_4\equiv 0 \pmod d}} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_4} = \sum_{\substack{\delta_1\nu_1',\delta_4\nu_4'<X,\ (\nu_1'\nu_4',d)=1\\ \delta_1\nu_1'\delta_4\nu_4'\equiv 0 \pmod d}} \frac{\beta(\delta_1\nu_1')\beta(\delta_4\nu_4')}{(\delta_1\nu_1')^{1-\theta}\delta_4\nu_4'} =$$

$$= \sum_{\substack{\delta_1\nu_1',\delta_4\nu_4'<X,\ (\nu_1'\nu_4',d)=1\\ \delta_1\delta_4\equiv 0 \pmod d}} \frac{\beta(\delta_1\nu_1')\beta(\delta_4\nu_4')}{(\delta_1\nu_1')^{1-\theta}\delta_4\nu_4'} =$$

$$= \sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X\\ \delta_1\delta_4\equiv 0 \pmod d}}'' \frac{1}{\delta_1^{1-\theta}\delta_4} \sum_{\substack{\delta_1\nu_1'<X\\ (\nu_1',d)=1}} \frac{\beta(\delta_1\nu_1')}{\nu_1'^{1-\theta}} \sum_{\substack{\delta_4\nu_4'<X\\ (\nu_4',d)=1}} \frac{\beta(\delta_4\nu_4')}{\nu_4'}.$$

Воспользуемся формулой для $\beta(\delta_1\nu_1')$, найдём

$$\beta(\delta_1\nu_1') = \alpha(\delta_1\nu_1')\left(1 - \frac{\ln \delta_1\nu_1'}{\ln X}\right) = \frac{\alpha(\delta_1\nu_1')}{\ln X}\ \ln\frac{X}{\delta_1\nu_1'}.$$

Согласно тому, что делители числа δ_1 совпадают с простыми делителями d, кроме того $(d, \nu_1') = 1$, тогда $(\delta_1, \nu_1') = 1$, таким образом, пользуясь мультипликативностью $\alpha(\nu)$, находим

$$\alpha(\delta_1\nu_1') = \alpha(\delta_1)\alpha(\nu_1'),$$

тем самым,

$$\beta(\delta_1\nu_1') = \frac{\alpha(\delta_1)\alpha(\nu_1')}{\ln X}\ \ln\frac{X}{\delta_1\nu_1'}.$$

Поступая точно также, получим

$$\beta(\delta_4\nu_4') = \frac{\alpha(\delta_4)\alpha(\nu_4')}{\ln X}\ \ln\frac{X}{\delta_4\nu_4'}.$$

Следовательно, для суммы $V(d)$, получим следующую формулу:

$$
\begin{aligned}
V(d) =& \frac{1}{\ln^2 X} \sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X\\ \delta_1\delta_4\equiv 0 \pmod d}} \frac{\alpha(\delta_1)\alpha(\delta_4)}{\delta_1^{1-\theta}\delta_4}\times\\
&\times \sum_{\substack{\nu_1'<X\delta_1^{-1}\\ (\nu_1',d)=1}} \frac{\alpha(\nu_1')}{\nu_1'^{1-\theta}} \ln\frac{X}{\delta_1\nu_1'} \sum_{\substack{\nu_4'<X\delta_4^{-1}\\ (\nu_4',d)=1}} \frac{\alpha(\nu_4')}{\nu_4'} \ln\frac{X}{\delta_4\nu_4'}\\
&= \frac{1}{\ln^2 X} \sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X\\ \delta_1\delta_4\equiv 0 \pmod d}} \frac{\alpha(\delta_1)\alpha(\delta_4)}{\delta_1^{1-\theta}\delta_4} K(\delta_1,d,\theta)K(\delta_4,d,0), \qquad (3.3.6)
\end{aligned}
$$

где

$$
K(\delta,d,\theta) = \sum_{\substack{\nu<X\delta^{-1}\\ (\nu,d)=1}} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^{1-\theta}} \ln\frac{X}{\delta\nu}.
$$

При $Re\, s > 1$ и $\chi_1 = \chi_1(n) = \left(\frac{n}{5}\right)$ — символ Лежандра по модулю 5, имеем

$$
\begin{aligned}
&f_1(s) = \prod_{p\equiv\pm 1 (mod\, 5)} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-2},\\
&f_2(s) = \prod_{p\equiv\pm 2 (mod\, 5)} \left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right),\\
&\zeta(s) = \prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},\\
&L(s,\chi_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n)}{n^s} = \prod_p \left(1-\frac{\left(\frac{p}{5}\right)}{p^s}\right)^{-1} =\\
&= \prod_{p\equiv\pm 1 (mod 5)} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p\equiv\pm 2 (mod 5)} \left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \qquad (3.3.7)
\end{aligned}
$$

тогда имеет место равенство

$$
f_1(s) = \left(1-\frac{1}{5^s}\right)\prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}.
$$

$$\cdot \prod_{p\equiv\pm1(mod5)} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p\equiv\pm2(mod\,5)} \left(1-\frac{1}{p^s}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{5^s}\right)\zeta(s) \prod_{p\equiv\pm1(mod5)} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p\equiv\pm2(mod5)} \left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \cdot$$
$$\cdot \prod_{p\equiv\pm2(mod\,5)} \left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right) = \left(1-\frac{1}{5^s}\right)\zeta(s) \prod_{p\equiv\pm1(mod5)} \left(1-\frac{\left(\frac{p}{5}\right)}{p^s}\right)^{-1} \cdot$$
$$\cdot \prod_{p\equiv\pm2(mod5)} \left(1-\frac{\left(\frac{p}{5}\right)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p\equiv\pm2(mod\,5)} \left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right) = \left(1-\frac{1}{5^s}\right)\zeta(s)\cdot$$
$$\cdot \prod_{p} \left(1-\frac{\left(\frac{p}{5}\right)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p\equiv\pm2(mod\,5)} \left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right) =$$
$$= \left(1-\frac{1}{5^s}\right)\zeta(s)L(s,\chi_1)f_2(s). \tag{3.3.8}$$

В сумме $K(\delta,d,\theta)$ вводим обозначения $Y = X\delta^{-1}$, имеем

$$K(\delta,d,\theta) = \sum_{\substack{\nu<X\delta^{-1}\\(\nu,d)=1}} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^{1-\theta}} \ln\frac{X}{\delta\nu} = \sum_{\substack{\nu<Y\\(\nu,d)=1}} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^{1-\theta}} \ln\frac{Y}{\nu}.$$

Используя формулу Перрона

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^s\,\frac{ds}{s^2} = \begin{cases} \ln x, & x\geq 1;\\ 0, & 0<x<1,\end{cases}$$

сумму $K(\delta,d,\theta)$, напишем в следующем виде:

$$K(\delta,d,\theta) = \sum_{\substack{n=1\\(n,d)=1}}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{n^{1-\theta}}\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \left(\frac{Y}{n}\right)^s \frac{ds}{s^2} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{Y^s}{s^2} g_d(s+1-\theta)ds,$$

где

$$g_d(s+1-\theta) = \sum_{\substack{n=1\\(n,d)=1}}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{n^{s+1-\theta}}.$$

Поскольку функция $\alpha(n)$ является мультипликативной, представляем $g_d(s+1-\theta)$ как бесконечное произведение и воспользуемся представлением $f_1(s)$ и формулой (3.3.8), найдём

$$\begin{aligned} g_d(s+1-\theta) &= \prod_{\substack{p\equiv\pm1 (mod\, 5)\\(p,d)=1}} \left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= f_1^{-\frac{1}{4}}(s+1-\theta) \prod_{p|d} \left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

где

$$\begin{aligned} f_1^{-\frac{1}{4}}(s+1-\theta) = \Bigg(\left(1-\frac{1}{5^{s+1-\theta}}\right)\zeta(s+1-\theta)\times \\ \times L(s+1-\theta,\chi_1) f_2(s+1-\theta)\Bigg)^{-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

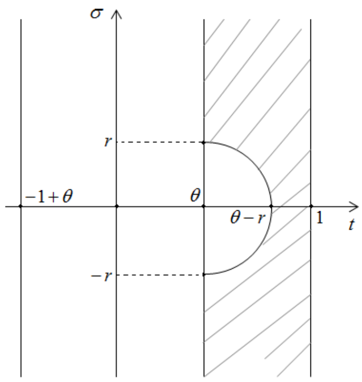
Воспользуемся полученной формулой (3.3.9), и предполагая $Y > 2$, находим

$$\begin{aligned} K(\delta,d,\theta) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} g_d(s+1-\theta)\frac{Y^s}{s^2}ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} f_1^{-\frac{1}{4}}(s+1-\theta)\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{Y^s}{s^2}ds. \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Рассматриваем следующие случаи: $\theta \geq (\ln Y)^{-1}$; $0 \leq \theta < (\ln Y)^{-1}$.

1. Случай $\theta \geq (\ln Y)^{-1}$. Рассматриваем следующий интеграл:

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f_1^{-\frac{1}{4}}(s+1-\theta)\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{Y^s}{s^2}ds.$$



Область D является ограниченной прямыми $[1-i\infty, 1+i\infty]$, полуокружностю $s=\theta+re^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$ и полупрямыми $Res=0$, $|Ims|\geq r$, $0<r<1$. Подынтегральная функция состоит из произведения трёх функций, две из которых голоморфные. В этой области отдельно рассмотрим поведение каждой из этих функций, произведение которых согласно равенству (3.3.8) имеет вид $f_1(s+1-\theta)$:

- в области D, $1-\frac{1}{5^{s+1-\theta}}\neq 0$ является голоморфной функцией и имеет единственный нуль в точке $s=-1+\theta$, которая лежит вне области D;
- в области D, $\zeta(s+1-\theta)\neq 0$ голоморфная функция имеет единственный полюс в точке $s=\theta$, который лежит вне этой области;
- в области D, функция $L(s+1-\theta,\chi_1)\neq 0$ голоморфная, также в области $Re\,s>\theta$, входящей в $Re\,s>\theta$;
- в области D, функция $(f_2(s+1-\theta))^{-\frac{1}{4}}$ голоморфная и не имеет нулей, потому, что

$$
\begin{aligned}
|f_2(s+1-\theta)| = &\prod_{p\equiv\pm2(mod\,5)}\left|1-\frac{1}{p^{2s+2-2\theta}}\right|\geq\\
&\geq\prod_{p\equiv\pm2(mod\,5)}\left(1-\frac{1}{|p^{2s+2-2\theta}|}\right)=\\
&=\prod_{p\equiv\pm2(mod\,5)}\left(1-\frac{1}{p^{2\sigma+2-2\theta}}\right)>\\
&>\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{2\sigma+2-2\theta}}\right)=\\
&=\zeta^{-1}(2\sigma+2-2\theta)>0.
\end{aligned}
$$

Следовательно, функция $f_1^{-\frac{1}{4}}(s+1-\theta)$ является голоморфной в области D и в этой области функция

$$g_d(s+1-\theta)\frac{Y^s}{s^2} = f_1^{-\frac{1}{4}}(s+1-\theta)\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{Y^s}{s^2}$$

также является голоморфной и по теореме Коши

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f_1^{-\frac{1}{4}}(s+1-\theta)\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{Y^s}{s^2}ds = 0.$$

Из этого равенства и из формулы (3.3.10), найдём

$$\begin{aligned} K(\delta,d,\theta) = {} & \frac{1}{2\pi i}\int_{\theta-i\infty}^{\theta-ir} g_d(s+1-\theta)\frac{Y^s}{s^2}ds+ \\ & + \frac{r}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g_d(1+re^{i\varphi})\frac{Y^{\theta+re^{i\varphi}}e^{i\varphi}}{(\theta+re^{i\varphi})^2}d\varphi+ \\ & + \frac{1}{2\pi i}\int_{\theta+ir}^{\theta+i\infty} g_d(s+1-\theta)\frac{Y^s}{s^2}ds. \qquad (3.3.11) \end{aligned}$$

Полученные интегралы обозначаем через $K_1(\delta,d,\theta)$, $K_2(\delta,d,\theta)$ и $K_3(\delta,d,\theta)$. Отметим, что интегралы $K_1(\delta,d,\theta)$ и $K_3(\delta,d,\theta)$ по абсолютной величине равны, поэтому достаточно оценить один из них. Оценим интеграл $K_2(\delta,d,\theta)$ по окружности. Находим

$$\begin{aligned} |K_2(\delta,d,\theta)| \le {} & \frac{r}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |g_d(1+re^{i\varphi})|\frac{Y^{\theta+r\cos\varphi}}{\theta^2+r^2+2r\theta\cos\varphi}d\varphi \le \\ & \le \frac{rY^{\theta+r}}{2\pi(\theta^2+r^2)}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |g_d(1+re^{i\varphi})|d\varphi. \qquad (3.3.12) \end{aligned}$$

Используя формулу (3.3.9) и выражение

$$Re(1+re^{i\varphi}) = 1+r\cos\varphi \ge 1,$$

сводим оценку подынтегральной функции к оценке функций $|\zeta(s)|^{-1}$,

$|L(s,\chi_1)|^{-1}$, $|f_2(s)|^{-1}$ при $1+re^{i\varphi}$. Находим

$$\begin{aligned}|g_d(1+re^{i\varphi})| &= \left|f_1^{-\frac{1}{4}}(1+re^{i\varphi})\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{1+re^{i\varphi}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right| \leq \\ &\leq |f_1(1+re^{i\varphi})|^{-\frac{1}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left|\left(1-\frac{1}{5^{1+re^{i\varphi}}}\right)\zeta(1+re^{i\varphi})L(1+re^{i\varphi},\chi_1)f_2(1+re^{i\varphi})\right|^{-\frac{1}{4}} \times \\ &\times \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left|\frac{5}{4}\zeta(1+re^{i\varphi})L(1+re^{i\varphi},\chi_1)f_2(1+re^{i\varphi})\right|^{-\frac{1}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

Для оценки $|\zeta(1+re^{i\varphi})|^{-1}$ воспользуемся формулой аналитического продолжения $\zeta(s)$ в полуплоскости $Res>0$, полагая в ней $N=1$, находим

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}+s\int_1^\infty\frac{\rho(u)}{u^{s+1}}du.$$

Так как функция $\zeta(s)$ при $s=1$ имеет полюс первого порядка, поэтому при $s\to 1$ справедлива оценка $|\zeta(s)|^{-1}\ll|s-1|$, следовательно,

$$|\zeta(1+re^{i\varphi})|^{-1}\ll r.$$

Далее применяем формулу аналитического продолжения в полуплоскости $Res>0$ для функции Дирихле $L(s,\chi_1)$, $\chi_1=\chi_1(n)=\left(\frac{n}{5}\right)$ — символ Лежандра по модулю 5, находим

$$L(s,\chi_1)=s\int_1^\infty\frac{S(x)}{x^{s+1}}dx, \qquad S(x)=\sum_{n\leq x}\left(\frac{n}{5}\right).$$

Так как для функции $S(x)$ при всех $x\geq 1$ имеет место неравенство $|S(x)|\leq 1$, имеем

$$|L(s,\chi_1)| = |s| \left| \int_1^\infty \frac{S(x)}{x^{s+1}} dx \right| \le |s| \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+Re\,s}} = \frac{|s|}{Re\,s},$$

следовательно, интеграл в полуплоскости $Re\,s > 0$ сходится и является голоморфной функцией. По теореме Валле-Пуссена о нулях и теореме Пейджа, функция $L(s,\chi_1)$ в области

$$Re\,s = \sigma \ge 1 - \min\left(\frac{c}{\ln q(|t|+2)},\ \frac{c}{\sqrt{q}\ln^4 q}\right)$$

не имеет нулей, поэтому при $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, находим

$$|L(1+re^{i\varphi},\chi_1)|^{-1} \ll 1.$$

Используя представление для функции $f_2(s)$, то есть формулу (3.3.7), находим

$$|f_2(1+re^{i\varphi})| = \prod_{p\equiv\pm2(mod\,5)} \left|1 - \frac{1}{p^{2+2re^{i\varphi}}}\right| \ge \prod_{p\equiv\pm2(mod\,5)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) >$$
$$> \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \zeta^{-1}(2) = \frac{6}{\pi^2}.$$

Найденные оценки для функций

$$\frac{1}{|\zeta(s)|},\quad \frac{1}{|L(s,\chi_1)|},\quad \frac{1}{|f_2(s)|}$$

подставляем в формулу (3.3.13) при $1+re^{i\varphi}$, имеем

$$|g_d(1+re^{i\varphi})| \le \left|\frac{5}{4}\zeta(1+re^{i\varphi})L(1+re^{i\varphi},\chi_1)f_2(1+re^{i\varphi})\right|^{-\frac{1}{4}} \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll r^{\frac{1}{4}} \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Учитывая последнюю оценку и оценку (3.3.12), получим

$$|K_2(\delta,d,\theta)| \le \frac{rY^{\theta+r}}{2\pi(\theta^2+r^2)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |g_d(1+re^{i\varphi})|d\varphi \ll$$
$$\ll \frac{r^{\frac{5}{4}}Y^{\theta+r}}{\theta^2+r^2} \prod_{p|d} \left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.3.14)$$

Теперь оценим интеграл $K_3(\delta,d,\theta)$. Находим

$$|K_3(\delta,d,\theta)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\theta+ir}^{\theta+i\infty} g_d(s+1-\theta)\frac{Y^s}{s^2}ds\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int_r^{\infty} g_d(1+it)\frac{Y^{\theta+it}}{(\theta+it)^2}dt\right| \ll$$
$$\ll Y^{\theta}\int_r^{\infty} |g_d(1+it)|\frac{dt}{\theta^2+t^2}. \qquad (3.3.15)$$

Пользуясь формулой (3.3.9), оценку подинтегральную функцию сводим к оценке $|\zeta(s)|^{-1}$, $|L(s,\chi_1)|^{-1}$, $|f_2(s)|^{-1}$ при $1+it$. Находим

$$|g_d(1+it)| = \left|f_1^{-\frac{1}{4}}(1+it)\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{1+it}}\right)^{\frac{1}{2}}\right| \le |f_1(1+it)|^{-\frac{1}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \left|\left(1-\frac{1}{5^{1+it}}\right)\zeta(1+it)L(1+it,\chi_1)f_2(1+it)\right|^{-\frac{1}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \le$$
$$\le \left|\frac{5}{4}\zeta(1+it)L(1+it,\chi_1)f_2(1+it)\right|^{-\frac{1}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.3.16)$$

Для оценки $|\zeta(1+it)|^{-1}$ воспользуемся формулой аналитического продолжения $\zeta(s)$ в полуплоскости $Res>0$, полагая $N=1$, находим

$$\zeta(1+it) = \frac{1}{it}+\frac{1}{2}+(1+it)\int_1^{\infty}\frac{\rho(u)}{u^{2+it}}du.$$

Следовательно, при $s\to\infty$ справедлива оценка

$$|\zeta(1+it)|^{-1} \ll |t|.$$

Так как функция $L(s,\chi_1)$, $\chi_1=\chi_1(n)=\left(\frac{n}{5}\right)$ голоморфная функция в полуплоскости $Re\, s>0$ и по теореме Ш.Валле-Пуссена о нулях и теореме Пейджа, эта функция не имеет нулей в области

$$Re\, s=\sigma\geq 1-\min\left(\frac{c}{\ln q(|t|+2)},\ \frac{c}{\sqrt{q}\ln^4 q}\right).$$

Таким образом,

$$|L(1+it,\chi_1)|^{-1}\ll 1.$$

Используем представление для функции $f_2(s)$, то есть, формулу (3.3.7), находим

$$|f_2(1+it)|=\prod_{p\equiv\pm 2(mod\, 5)}\left|1-\frac{1}{p^{2+2it}}\right|\geq\prod_{p\equiv\pm 2(mod\, 5)}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)>$$
$$>\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=\zeta^{-1}(2)=\frac{6}{\pi^2}.$$

Полученные оценки для

$$\frac{1}{|\zeta(1+it)|},\quad \frac{1}{|L(1+it,\chi_1)|},\quad \frac{1}{|f_2(1+it)|}$$

подставляем в формулу (3.3.16), найдём

$$|g_d(1+it)|\leq\left|\frac{5}{4}\zeta(1+it)L(1+it,\chi_1)f_2(1+it)\right|^{-\frac{1}{4}}\cdot$$
$$\cdot\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\ll|t|^{\frac{1}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3.17}$$

Учитывая последнюю оценку и (3.3.15), получим

$$|K_3(\delta,d,\theta)|\ll Y^\theta\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\int_r^\infty\frac{t^{\frac{1}{4}}dt}{\theta^2+t^2}=$$
$$=Y^\theta\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_r^\theta\frac{t^{\frac{1}{4}}dt}{\theta^2+t^2}+\int_\theta^\infty\frac{t^{\frac{1}{4}}dt}{\theta^2+t^2}\right)\leq$$

$$\le Y^{\theta}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\theta^{-2}\int_{r}^{\theta}t^{\frac{1}{4}}dt+\int_{\theta}^{\infty}t^{-\frac{7}{4}}dt\right)\ll$$

$$\ll Y^{\theta}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\theta^{-\frac{3}{4}}\ll Y^{\theta}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}(\ln Y)^{\frac{3}{4}}.$$

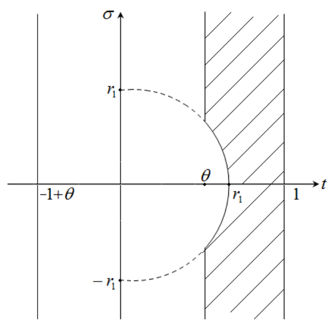
В формуле (3.3.11) переходим к оценке, и подставляя полученные оценки интегралов $K_2(\delta,d,\theta)$ и $K_3(\delta,d,\theta)$, имея ввиду, что $|K_3(\delta,d,\theta)|=|K_1(\delta,d,\theta)|$, находим

$$|K(\delta,d,\theta)|\ll Y^{\theta}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}(\ln Y)^{\frac{3}{4}}+\frac{r^{\frac{5}{4}}Y^{\theta+r}}{\theta^2+r^2}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В последней оценке при $r\to 0$ переходим к пределу, получим

$$|K(\delta,d,\theta)|\ll Y^{\theta}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}(\ln Y)^{\frac{3}{4}}.$$

2. Случай $0\le\theta<(\ln Y)^{-1}$**.** Пусть $r_1=2(\ln Y)^{-1}$, рассматриваем интеграл



$$J=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}f_1^{-\frac{1}{4}}(s+1-\theta)\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{Y^s}{s^2}ds.$$

Область D является ограниченной прямыми $[1-i\infty,1+i\infty]$, дугой окружности $|s|=r_1$, $Res\ge\theta$ и полупрямыми $Re\,s=\theta$, $|Im\,s|\ge\sqrt{r_1^2-\theta^2}$. Подынтегральная функция состоит из произведения трёх функций, из которых две голоморфные. В этой области отдельно рассмотрим поведение каждой из этих функций, произведение которых согласно равенству (3.3.8), имеет вид $f_1(s+1-\theta)$:

- в области D, $1-\frac{1}{5^{s+1-\theta}}\neq 0$ является голоморфной функцией, имеет единственный нуль в точке $s=-1+\theta$, вне области D;

- в области D, $\zeta(s+1-\theta)\neq 0$ голоморфная функция, имеет единственный полюс в точке $s=\theta$, вне области D;
- в области D, функция $L(s+1-\theta,\chi_1)\neq 0$ голоморфная, также в области $Res>\theta$, входящей в $Res>\theta$;
- в области D, функция $(f_2(s+1-\theta))^{-\frac{1}{4}}$ голоморфная и не имеет нулей, потому что

$$\begin{aligned}|f_2(s+1-\theta)| = &\prod_{p\equiv\pm 2(mod\,5)}\left|1-\frac{1}{p^{2s+2-2\theta}}\right|\geq\\ &\geq \prod_{p\equiv\pm 2(mod\,5)}\left(1-\frac{1}{p^{2\sigma+2-2\theta}}\right)>\\ &>\zeta^{-1}(2\sigma+2-2\theta)>0.\end{aligned}$$

Следовательно, функция $f_1^{-\frac{1}{4}}(s+1-\theta)$ является голоморфной в области D и в этой области функция

$$g_d(s+1-\theta)\frac{Y^s}{s^2}=f_1^{-\frac{1}{4}}(s+1-\theta)\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{Y^s}{s^2}$$

также является голоморфной, и по теореме Коши находим

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}f_1^{-\frac{1}{4}}(s+1-\theta)\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{Y^s}{s^2}ds=0.$$

Из этого равенства, из формулы (3.3.10), величины угла α и равенства $r_1\sin\alpha=\sqrt{r_1^2-\theta^2}$, $r_1\cos\alpha=\theta$, найдём

$$\begin{aligned}K(\delta,d,\theta)=&\frac{1}{2\pi i}\int_{\theta-i\infty}^{\theta-i\sqrt{r_1^2-\theta^2}}g_d(s+1-\theta)\frac{Y^s}{s^2}ds+\\ &+\frac{r_1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}g_d(r_1e^{i\varphi}+1-\theta)\frac{Y^{r_1e^{i\varphi}}e^{i\varphi}}{(r_1e^{i\varphi})^2}d\varphi+\\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_{\theta+i\sqrt{r_1^2-\theta^2}}^{\theta+i\infty}g_d(s+1-\theta)\frac{Y^s}{s^2}ds.\end{aligned}\tag{3.3.18}$$

Полученные интегралы обозначаем через $K_4(\delta,d,\theta)$, $K_5(\delta,d,\theta)$ и $K_6(\delta,d,\theta)$. Интегралы $K_4(\delta,d,\theta)$ и $K_6(\delta,d,\theta)$ по абсолютной величине равны, поэтому достаточно оценить один из них. Оцениваем интеграл $K_5(\delta,d,\theta)$ по дуге окружности

$$s = r_1 e^{i\varphi}, \quad -\alpha \le \varphi \le \alpha, \quad 0 < \alpha \le \frac{\pi}{2},$$

находим

$$\begin{aligned} |K_5(\delta,d,\theta)| \le & \frac{1}{2\pi r_1}\int_{-\alpha}^{\alpha} |g_d(1-\theta+r_1e^{i\varphi})| Y^{r_1\cos\varphi} d\varphi \le \\ & \le \frac{Y^{r_1}}{2\pi r_1}\int_{-\alpha}^{\alpha} |g_d(1-\theta+r_1e^{i\varphi})| d\varphi \le \frac{e^2}{\pi r_1}\int_0^{\alpha} |g_d(1-\theta+r_1e^{i\varphi})| d\varphi. \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

Используя формулу (3.3.9) и неравенства

$$\begin{aligned} & Re(1-\theta+r_1e^{i\varphi}) = 1-\theta+r_1\cos\varphi \ge 1-\theta+r_1\cos\alpha = 1, \\ & \left|1-\frac{1}{5^{1-\theta+r_1e^{i\varphi}}}\right| \ge 1-\frac{1}{5^{1-\theta+r_1\cos\varphi}} \ge \frac{4}{5}, \end{aligned}$$

сведём оценку $|g_d(r_1e^{i\varphi})|$ к оценке следующих функций:

$$|\zeta(s)|^{-1}, \quad |L(s,\chi_1)|^{-1}, \quad |f_2(s)|^{-1}$$

при $s = 1-\theta+r_1e^{i\varphi}$. Находим

$$\begin{aligned} |g_d(1-\theta+r_1e^{i\varphi})| = & \left| f_1^{-\frac{1}{4}}(1-\theta+r_1e^{i\varphi}) \prod_{p|d} \left(1-\frac{1}{p^{1-\theta+r_1e^{i\varphi}}}\right)^{\frac{1}{2}} \right| \le \\ & \le |f_1(1-\theta+r_1e^{i\varphi})|^{-\frac{1}{4}} \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} = \\ & = \left| \left(1-\frac{1}{5^{1-\theta+r_1e^{i\varphi}}}\right) \zeta(1-\theta+r_1e^{i\varphi}) L(1+re^{i\varphi},\chi_1) \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\cdot f_2(1-\theta+r_1e^{i\varphi})\Big|^{-\frac{1}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left|\frac{5}{4}\zeta(1-\theta+r_1e^{i\varphi})L(1-\theta+r_1e^{i\varphi},\chi_1)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot f_2(1-\theta+r_1e^{i\varphi})\right|^{-\frac{1}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.3.20)$$

Далее оцениваем функцию $|\zeta(1-\theta+r_1e^{i\varphi})|^{-1}$. Известно, что $\zeta(s)$ при $s=1$ имеет полюс с вычетом равным 1, следовательно, при $s\to 1$ справедлива оценка $|\zeta(s)|^{-1}\ll|s-1|$, поэтому

$$|\zeta(1-\theta+r_1e^{i\varphi})|^{-1}\ll|\theta-r_1e^{i\varphi}|=$$

$$=\sqrt{\theta^2+r_1^2-2\theta r_1\cos\varphi}=\sqrt{r_1^2-\theta^2}\le r_1.$$

Функция $L(s,\chi_1)$ по теореме Валле-Пуссена о нулях и теореме Пейджа в области

$$Re\, s=\sigma\ge 1-\min\left(\frac{c}{\ln q(|t|+2)},\ \frac{c}{\sqrt{q}\ln^4 q}\right)$$

нулей не имеет, поэтому согласно условию

$$1-\theta+r_1\cos\varphi\ge 1-\theta+r_1\cos\alpha=1,$$

где $-\alpha\le\varphi\le\alpha,\ 0<\alpha\le\frac{\pi}{2}$, функция $L(1-\theta+r_1e^{i\varphi},\chi_1)$ в ноль не обращается. Таким образом,

$$|L(1-\theta+r_1e^{i\varphi},\chi_1)|^{-1}\ll 1.$$

Используя представление для функции $f_2(s)$, то есть, формулу (3.3.7) и неравенство $1-\theta+r_1\cos\varphi\ge 1$, находим

$$|f_2(1-\theta+r_1e^{i\varphi})| = \prod_{p\equiv\pm2(mod\,5)}\left|1-\frac{1}{p^{2(1-\theta+r_1e^{i\varphi})}}\right| \geq$$
$$\geq \prod_{p\equiv\pm2(mod\,5)}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) > \prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \zeta^{-1}(2) = \frac{6}{\pi^2}.$$

Найденные оценки функции $|\zeta(s)|^{-1}$, $|L(s,\chi_1)|^{-1}$, $|f_2(s)|^{-1}$ при $s = 1-\theta+r_1e^{i\varphi}$ подставим в формуле (3.3.20), находим

$$|g_d(1-\theta+r_1e^{i\varphi})| \leq$$
$$\leq \left|\frac{5}{4}\zeta(1-\theta+r_1e^{i\varphi})L(1-\theta+r_1e^{i\varphi},\chi_1)f_2(1-\theta+r_1e^{i\varphi})\right|^{-\frac{1}{4}}\cdot$$
$$\cdot\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \ll r_1^{\frac{1}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из этой оценки и (3.3.19) найдём

$$|K_5(\delta,d,\theta)| \leq \frac{e^2}{\pi r_1}\int_0^\alpha |g_d(1-\theta+r_1e^{i\varphi})|d\varphi \ll$$
$$\ll r_1^{-\frac{3}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \ll \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}(\ln Y)^{\frac{3}{4}}. \tag{3.3.21}$$

Теперь оцениваем $K_6(\delta,d,\theta)$ — интеграл по верхним полупрямым. Получим

$$|K_6(\delta,d,\theta)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\sqrt{r_1^2-\theta^2}}^\infty g_d(1+it)\frac{Y^{\theta+it}}{(\theta+it)^2}dt\right| \leq$$
$$\leq Y^\theta\int_{\sqrt{r_1^2-\theta^2}}^\infty g_d(1+it)|\frac{dt}{\theta^2+t^2} <$$
$$< e\int_{\sqrt{3}(\ln Y)^{-1}}^\infty |g_d(1+it)|\frac{dt}{t^2}. \tag{3.3.22}$$

Используем полученную оценку интеграла $K_3(\delta,d,\theta)$ для $|g_d(1+it)|$, то есть, оценку (3.3.17), находим

$$|K_6(\delta,d,\theta)| \ll \int_{\sqrt{3}(\ln Y)^{-1}}^{\infty} t^{-\frac{1}{4}} \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2} \ll$$

$$\ll \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} (\ln Y)^{\frac{3}{4}}.$$

В равенстве (3.3.18) переходим к оценкам и подставим полученные оценки интегралов $K_5(\delta,d,\theta)$ и $K_6(\delta,d,\theta)$, имея ввиду, что $K_6(\delta,d,\theta) = K_4(\delta,d,\theta)$, найдём

$$|K(\delta,d,\theta)| \ll \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} (\ln Y)^{\frac{3}{4}}.$$

Следовательно, для $K(\delta,d,\theta)$ получим окончательную оценку вида

$$K(\delta,d,\theta) \ll Y^{\theta} \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} (\ln Y)^{\frac{3}{4}} \ll$$

$$\ll \left(\frac{X}{\delta}\right)^{\theta} \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} (\ln X)^{\frac{3}{4}}.$$

Полученную оценку подставляем в формулу (3.3.6), имеем

$$|V(d)| \ll \frac{1}{\ln^2 X} \sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X \\ \delta_1\delta_4\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} \frac{|\alpha(\delta_1)||\alpha(\delta_4)|}{\delta_1^{1-\theta}\delta_4} |K(\delta_1,d,\theta)||K(\delta_4,d,0)| \ll$$

$$\ll \frac{1}{\ln^2 X} \sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X \\ \delta_1\delta_4\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} \frac{|\alpha(\delta_1)||\alpha(\delta_4)|}{\delta_1^{1-\theta}\delta_4} \left(\frac{X}{\delta_1}\right)^{\theta} \times$$

$$\times \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} (\ln X)^{\frac{3}{4}} \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} (\ln X)^{\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{X^{\theta}}{\sqrt{\ln X}} \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X \\ \delta_1\delta_4\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} \frac{|\alpha(\delta_1)||\alpha(\delta_4)|}{\delta_1\delta_4}. \tag{3.3.23}$$

Сумму в последней оценке обозначим через $v(d)$ и оценим её

$$v(d) = \sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X \\ \delta_1\delta_4\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ d)}} \frac{|\alpha(\delta_1)||\alpha(\delta_4)|}{\delta_1\delta_4} =$$

$$= \sum_{\substack{\delta<X^2 \\ \delta\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ d)}} \frac{1}{\delta} \sum_{\substack{\delta_1\delta_4=\delta \\ \delta_1,\delta_4<X}} |\alpha(\delta_1)||\alpha(\delta_4)|.$$

Для этого вспоминаем следующее:

- при $Re\, s>1$ число $\alpha(\nu)$ вычисляется из равенства

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p\equiv\pm1(mod\,5)}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \prod_{p\equiv\pm1(mod\,5)}\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}\cdot\frac{1}{p^{ks}}\right) = \prod_{p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(p^k)}{p^{ks}},$$

$$\alpha(p^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k=0; \\ -\dfrac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}, & \text{если } k\geq 1 \text{ и } p\equiv\pm1(mod\,5). \\ 0, & \text{если } k\geq 1 \text{ и } p\not\equiv\pm1(mod\,5); \end{cases}$$

- $\alpha(\nu)$ является мультипликативной функцией и $|\alpha(\nu)|<1$ при всяком $\nu>1$, а числа ν представляют собой произведение степенных простых чисел вида $p\equiv\pm1 \pmod 5$;

- числа $d<X^2$ имеют простые делители $p\equiv\pm1 \pmod 5$;

- числа δ_1, δ_4 натуральные, их простые делители равны делителям числа d.

Далее числа $\alpha'(\nu)$ будем определять из равенства

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha'(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p\equiv\pm1(mod\,5)}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \prod_{p\equiv\pm1(mod\,5)} \left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}\cdot\frac{1}{p^{ks}}\right) = \prod_{p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha'(p^k)}{p^{ks}},$$

$$\alpha'(p^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k=0; \\ \dfrac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}, & \text{если } k\ge 1 \text{ и } p\equiv\pm1(mod\,5). \\ 0, & \text{если } k\ge 1 \text{ и } p\not\equiv\pm1(mod\,5). \end{cases}$$

Точно так же $\alpha'(\nu)$ как $\alpha(\nu)$ мультипликативная функция и $0\le\alpha'(\nu)|<1$, $\alpha'(\nu)=|\alpha(\nu)|$. А при $\Re s>1$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^s} = \prod_{p\equiv\pm1(mod\,5)}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\dots\right) = \prod_{p\equiv\pm1(mod\,5)}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\prod_{p\equiv\pm1(mod\,5)}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha'(\nu)}{\nu^s}\right)^2 =$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2=1}^{\infty}\frac{\alpha'(\nu_1)\alpha'(\nu_2)}{(\nu_1\nu_2)^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{\nu_1\nu_2=n}\alpha'(\nu_1)\alpha'(\nu_2),$$

где штрих в сумме показывает,что суммирование берётся по таким числам n, у которых простые делители удовлетворяют сравнению $p\equiv\pm1 \pmod 5$. Таким образом,

$$\sum_{\nu_1\nu_2=n}\alpha'(\nu_1)\alpha'(\nu_2) = 1,$$

в противном случае

$$\sum_{\nu_1\nu_2=n}\alpha'(\nu_1)\alpha'(\nu_2) = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{\delta_1\delta_4=\delta\\ \delta_1,\delta_4<X}}\alpha'(\delta_1)\alpha'(\delta_4)\le 1.$$

В сумме $v(d)$ заменяем $|\alpha(\delta_1)\alpha(\delta_4)|$ на $\alpha'(\delta_1)\alpha'(\delta_4)$, и учитывая последнее неравенство, находим

$$\begin{aligned}
v(d) = &\sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X\\ \delta_1\delta_4\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)}} \frac{|\alpha(\delta_1)||\alpha(\delta_4)|}{\delta_1\delta_4} = \sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X\\ \delta_1\delta_4\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)}} \frac{\alpha'(\delta_1)\alpha'(\delta_4)}{\delta_1\delta_4} = \\
&= \sum_{\substack{\delta<X^2\\ \delta\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)}} \frac{1}{\delta} \sum_{\substack{\delta_1\delta_4=\delta\\ \delta_1,\delta_4<X}} \alpha'(\delta_1)\alpha'(\delta_4) \le \sum_{\substack{\delta<X^2\\ \delta\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)}} \frac{1}{\delta} \le \\
&\le \frac{1}{d}\sum_{\delta<X^2}\frac{1}{\delta} \le \frac{1}{d}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\dots\right) = \frac{1}{d}\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \\
&= \prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1} t\frac{1}{d}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right) < \\
&< \prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1} \frac{1}{d}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right) = \\
&= \frac{\zeta(2)}{d}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right) = \frac{\pi^2}{6d}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right).
\end{aligned}$$

Полученную оценку суммы $v(d)$ подставляем в (3.3.23), находим

$$\begin{aligned}
|V(d)| &\ll \frac{X^\theta}{\sqrt{\ln X}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X\\ \delta_1\delta_4\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)}} \frac{|\alpha(\delta_1)||\alpha(\delta_4)|}{\delta_1\delta_4} \ll \\
&\ll \frac{X^\theta}{\sqrt{\ln X}}\frac{1}{d}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^2.
\end{aligned}$$

В формуле (3.3.5) переходим к неравенствам, используя оценки для $V(d)$ и неравенства $0<\gamma(d)<d^{1-\theta}$, получим

$$\begin{aligned}
|W(\theta)| &\le {\sum_{d\le X^2}}' \gamma(d)|V(d)|^2 \ll \\
&\ll \frac{X^{2\theta}}{\ln X}{\sum_{d\le X^2}}' \frac{\gamma(d)}{d^2}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^4 \ll \\
&\ll \frac{X^{2\theta}}{\ln X}{\sum_{d\le X^2}}' \frac{1}{d^{1+\theta}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^4, \qquad (3.3.24)
\end{aligned}$$

где штрих в сумме показывает, что суммирование берётся по таким d, что простые делители удовлетворяют сравнению $p \equiv \pm 1 \pmod 5$. Пользуясь неравенством:

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^4 \le 1+\frac{1}{\sqrt{p}}, \qquad p \ge 25,$$

последнее соотношение напишем в виде

$$\begin{aligned}|W(\theta)| &\ll \frac{X^{2\theta}}{\ln X}\sum_{d\le X^2}{}' \frac{1}{d^{1+\theta}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \ll \\ &\ll \frac{X^{2\theta}}{\ln X}\sum_{d\le X^2}{}' \frac{1}{d^{1+\theta}}\sum_{n|d}{}' \frac{1}{\sqrt{n}} = \\ &= \frac{X^{2\theta}}{\ln X}\sum_{n\le X^2}{}' \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{d\le X^2 \\ d\equiv 0 \pmod n}}{}' \frac{1}{d^{1+\theta}} = \\ &= \frac{X^{2\theta}}{\ln X}\sum_{n\le X^2}{}' \frac{1}{n^{\frac{3}{2}+\theta}}\sum_{k\le \frac{X^2}{n}}{}' \frac{1}{k^{1+\theta}},\end{aligned}$$

причём штрихи в последних суммах по n и k показывают, что суммирование берётся по таким n и k, простые делители которых удовлетворяют сравнению $p \equiv \pm 1 \pmod 5$. Теперь к сумме по k используем преобразования Абеля, получим

$$|W(\theta)| \ll \frac{X^{2\theta}}{\ln X}\sum_{n\le X^2}{}' \frac{1}{n^{\frac{3}{2}+\theta}}\left(1+(1+\theta)\int_2^{\frac{X^2}{n}}\frac{C(u)}{u^{2+\theta}}du + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{X^2}{n}\right)^{-1-\theta} C\left(\frac{X^2}{n}\right)\right).$$

В последней оценке сумма

$$C(u) = \sum_{k\le u}{}' 1$$

показывает число натуральных чисел k, простые делители которых удовлетворяют сравнению $p \equiv \pm 1 \pmod 5$. Для оценки суммы $C(u)$ применяем следующую лемму: *Если $C(u)$ — количество чисел k, не превосходящих u, все простые делители p которых принадлежат прогрессиям*

$$qm + l_1, \quad qm + l_2, \quad \ldots, \quad qm + l_r, \qquad r \le \varphi(q),$$

тогда имеет место оценка:

$$C(u) \ll u(\ln u)^{1-\frac{r}{\varphi(q)}}.$$

Находим

$$|W(\theta)| \ll \frac{X^{2\theta}}{\ln X} \sideset{}{'}\sum_{n \le X^2} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}+\theta}} \left(1 + (\ln x)^{\frac{1}{2}} \int_2^{\frac{X^2}{n}} \frac{du}{u^{1+\theta}} + \left(\frac{X^2}{n}\right)^{-\theta} (\ln x)^{\frac{1}{2}}\right) \ll$$
$$\ll \frac{X^{2\theta}}{\sqrt{\ln X}}.$$

Лемма доказана.

Глава 4

Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие на критической прямой

Настоящая глава состоит из четырёх параграфов и посвящена оценке количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой. В первом параграфе главы приведена постановка задач и формулировка основных результатов. Во втором параграфе этой главы приводятся вспомогательные утверждения. В третьем и четвёртом параграфах главы доказываются соответственно теоремы 4.1.1 и 4.1.2.

4.1. Постановка задач и формулировка результатов

Пусть $\chi(n)$ комплексный характер по модулю 5 такой, что $\chi(2) = i$,

$$æ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1}, \qquad 0 < æ < 1.$$

Функцией *Дэвенпорта-Хейльбронна* называется функция, которая определяется равенством

$$f(s) = \frac{1 - iæ}{2} L(s, \chi) + \frac{1 + iæ}{2} L(s, \bar{\chi}),$$

где $L(s, \chi)$ — функция Дирихле. Функцию $f(s)$ ввели и исследовали Дэвенпорт и Хейльбронн [178] , (см. также [164] с. 283 – 287). Они показали, что $f(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению римановского типа

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right) f(1-s), \qquad (4.1.1)$$

однако для $f(s)$ гипотеза Римана, (все комплексные нули $f(s)$ лежат на прямой $Re\, s = 0.5$), не выполняется и, более того, число нулей $f(s)$ в области $Re\, s > 1$, $0 < Im\, s \leq T$ превосходит cT, $c > 0$ — абсолютная постоянная.

В 1984 г. С.М.Воронин [22] доказал, что при $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ справедливо неравенство $N(\sigma_2, T) - N(\sigma_1, T) > c_2 T$, где $c_2 = c_2(\sigma_1, \sigma_2) > 0$. Более того в 1980 г. С.М.Воронин [21] доказал, что *критическая прямая,* то есть, $Res = \frac{1}{2}$ является исключительным множеством для нулей $f(s)$, то есть, для $N_0(T)$ — числа нулей $f(s)$ на отрезке $Res = 1/2$, $0 < Ims \leq T$ имеет место оценка

$$N_0(T) > cT \exp\left(\frac{1}{20}\sqrt{\ln\ln\ln\ln T}\right),$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная, $T \geq T_0 > 0$.

Количество нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой впервые исследовал А.А.Карацуба [52]–[61]. Он в 1989 году доказал, что при ε и ε_1 – произвольно малых фиксированных положительных числах, не превосходящих 0.001, и $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ и $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$, выполняется соотношение

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \tag{4.1.2}$$

В 1993 г. А.А.Карацуба [67, 68], воспользовавшись новым усовершенствованным методом, при котором возникают почти такие же тригонометрические суммы, как при выводе оценки (4.1.2), получил более точную оценку вида

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}} \exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T}). \tag{4.1.3}$$

Воспользовавшись результатами главы 3 «Равномерные по параметрам оценки тригонометрических сумм $W_j = W_j(T)$, $j = 0, 1, 2$», которые возникают при выводе оценки (4.1.2) и (4.1.3) удалось:

- усилить неравенство (4.1.2) для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, притом для промежутков, имеющих более короткую длину (теорема 4.1.1);

- доказать неравенство (4.1.3) для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой для промежутков, имеющих более короткую длину (теорема 4.1.2).

Теорема 4.1.1. *Пусть* ε *и* ε_1 *– произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$, c_4, c_5, c_g *- абсолютные положительные постоянные, превосходящие* 1,

$$c_7 = \frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}.$$

Тогда при $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon,\varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq c_7 H (\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $T_0 = T_0(\varepsilon,\varepsilon_1)$ - такое, что выполняется соотношение

$$c_7(\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T_0 = \frac{(\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T_0 \cdot \varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}} \geq 1.$$

Поэтому из теоремы 4.1.1 следует

Следствие 4.1.1.1. *Пусть* ε *и* ε_1 *– произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$. *Тогда при* $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon,\varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Теорема 4.1.1 доказывается методом работы [61], идеями и методами работ [1, 2, 3, 4, 133, 135, 137, 139, 142, 150]. Основным утверждением, позволившим доказать неравенство (4.1.2) для промежутков, имеющих более короткую длину является лемма 3.2.1 о новых равномерных по параметрам оценках специальных тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0, 1, 2$ в терминах экспоненциальных пар, в котором задача о нетривиальности оценки этих сумм относительно параметра H сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар.

Теорема 4.1.2. *Пусть ε — произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее 0.01, тогда при $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon}$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$ выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H\sqrt{\log T}\exp(-c_8\sqrt{\log\log T}),$$

где $c_8 > 0$ – абсолютная постоянная.

Теорема 4.1.2 доказывается усовершенствованным методом А.А. Карацубы, изложенным в работах [67, 68], как в теореме 4.1.1, в соединении с идеями и методами работ [133, 135, 137, 139, 142, 150]. Основным утверждением, позволяющим доказать эту теорему, является новая оценка специальных тригонометрических сумм $W_3 = W_3(T)$ равномерных по параметру в терминах экспоненциальных пар.

4.2. Вспомогательные утверждения

Пусть вещественные числа $\alpha(\nu)$ при $Re\, s > 1$ находятся из соотношения

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p\equiv\pm1(mod\, 5)}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \prod_{p\equiv\pm1(mod\, 5)}\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)\, p^{ks}}\right) = \prod_p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(p^k)}{p^{ks}},$$

$$\alpha(p^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k=0; \\ -\dfrac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}, & \text{если } k\geq 1 \text{ и } p\equiv\pm1(mod\, 5). \\ 0, & \text{если } k\geq 1 \text{ и } p\not\equiv\pm1(mod\, 5), \end{cases}$$

где $(2k-1)!! = 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)$. Из определения чисел $\alpha(\nu)$ следует мультипликативность функции $\alpha(\nu)$ и $|\alpha(\nu)| < 1$ при любом $\nu > 1$. Отсюда и из соотношения $\chi(p^k) = (\pm1)^k$, $p\equiv\pm1(mod\, 5)$ вытекает, что $\beta(\nu)\chi(\nu) = \beta(\nu)\overline{\chi}(\nu) \equiv h(\nu)$ и $|h(\nu)| \leq 1$. Пусть далее

$$\varphi(s) = \sum_{\nu<X}\frac{\beta(\nu)\chi(\nu)}{\nu^s} = \sum_{\nu<X}\frac{h(\nu)}{\nu^s},$$

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\left(1-\dfrac{\ln\nu}{\ln X}\right), & 1\leq\nu<X, \\ 0, & \nu\geq X, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Определение 4.2.1. *Функция $G(t,\chi)$ определяется равенством*

$$G(t,\chi) = L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2.$$

Лемма 4.2.1. *Пусть $t\geq t_0 > 0$, $X\leq t^{0,01}$. Тогда имеет место* *асимптотическая формула*

$$G(t,\chi) = \sum_{\lambda \le P_1} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it} - \frac{\tau(\chi)}{\sqrt{5}}\, e^{i\theta_1(t)} \sum_{\lambda \le P_1} \frac{\overline{a(\lambda)}}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{it} + O\left(t^{-\frac{1}{4}} X^2\right)$$

где

$$a(\lambda) = \sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda \\ \nu_1,\nu_2<X}} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\chi(n)}{\nu_2},$$

$$\theta_1(t) = \frac{\pi}{4} + t - 2t\ln P_1, \quad P_1 = \sqrt{\frac{5t}{2\pi}},$$

λ *— положительные рациональные числа, знаменатель которых меньше* X.

Доказательство см. [4].

Лемма 4.2.2. *Пусть* $\chi(n)$ *-комплексный характер по модулю* 5 *такой, что* $\chi(2) = i$, $\tau(\chi)$ *— сумма Гаусса,*

$$æ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2}{\sqrt{5}-1}, \qquad r(n) = \frac{1-iæ}{2}\chi(n) + \frac{1+iæ}{2}\bar{\chi}(n)$$
$$\rho(n) = \frac{1-iæ}{2} \cdot \frac{\tau(\chi)\bar{\chi}(n)}{\sqrt{5}} + \frac{1+iæ}{2} \cdot \frac{\tau(\bar{\chi})\chi(n)}{\sqrt{5}}.$$

Тогда имеет место $\rho(n) = ir(n)$.

Доказательство см. [4].

Определение 4.2.2. *Функции* $F(t)$ *и* $\theta(t)$ *определяются равенствами*

$$F(t) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{it}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|} f\left(\frac{1}{2}+it\right) \left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 =$$
$$= e^{i\theta(t)} f\left(\frac{1}{2}+it\right) \left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2,$$
$$\theta(t) = t\log P_1 - \frac{t}{2} + \frac{\pi}{8} + \Delta(t), \quad P_1 = \sqrt{\frac{5t}{2\pi}},$$

$$\Delta(t) = -\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{3}{2t} + \frac{t}{4}\log\left(1+\frac{9}{4t^2}\right) - \frac{t}{2}\int_0^\infty \frac{\rho(u)du}{\left(u+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{t^2}{4}},$$

$$\rho(u) = \frac{1}{2} - \{u\}.$$

Из равенства для $F(t)$ и функционального уравнения риманова типа функции $f(s)$ следует, что $F(t)$ при действительных t принимает действительные значения, а действительные нули нечётного порядка функции $F(t)$ являются нулями функции $f(s)$, которые лежат на критической прямой.

Лемма 4.2.3. *Пусть T такое, что $T-\frac{\pi}{4} = 4\pi k$, k — целое число, тогда при $T \le t \le T+H$ справедлива следующая формула:*

$$F(t) = 2\sum_{\lambda\le P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\cos t\ln\frac{P}{\lambda} + O(T^{-0{,}01}),$$

где λ — рациональные положительные числа, у которых знаменатель не превосходит X,

$$P = \sqrt{\frac{5T}{2\pi}}, \quad A(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}. \tag{4.2.2}$$

Доказательство см. [4].

Лемма 4.2.4. *(Теорема Гэбриэла о выпуклости среднего значения по двум переменным). Если*

$$J(\sigma,\lambda) = \left(\int_0^{T_1}|g(\sigma+it)|^{\frac{1}{\lambda}}dt\right)^\lambda, \qquad \lambda > 0,$$

то

$$J(\sigma, p\lambda+q\mu) \le c_g J^p(\alpha,\lambda)J^q(\beta,\mu), \qquad \alpha<\sigma<\beta,$$

где $c_g > 1$ — абсолютная постоянная и

$$p = \frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}, \quad q = \frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

Доказательство см. [164].

4.3. Доказательство теоремы 4.1.1

Кроме уже введённых параметров предыдущих параграфов главы введём следующие дополнительные параметры: a — произвольное фиксированное число с условием $0 < a < 1$; $T - \frac{\pi}{4} = 4\pi r$, r — целое число; $\eta = c_1\mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}$; $k = [c\ln\mathscr{L}]$; c и $c_1 > 1$ — постоянные, значения которых определим позднее; для кратности всюду ниже функцию $F(t+u_1+\ldots+u_k)$ обозначим через $F(t,u,k)$.

Доказательство теоремы 4.1.1 для удобства разобьём на несколько этапов.

1. Сведение к оценкам интегралов $I_2(T,T+H)$, $I_1(T,T+H)$ и $J(T,H)$. Из функционального уравнения риманова типа функции $f(s)$ и определения функция $F(t)$ (Определение 4.2.2) следует, что функция $F(t)$ принимает действительные значения при действительных значениях t, и действительные нули этой функции являются нулями нечётного порядка функции $f(s)$, лежащими на критической прямой.

Через E обозначим подмножество промежутка $(T,T+H)$, которое состоит из таких t, что выполняется неравенство

$$\int_0^\eta\ldots\int_0^\eta |F(t,u,k)|\,du_1\ldots du_k > \\ > \left|\int_0^\eta\ldots\int_0^\eta F(t,u,k)du_1\ldots du_k\right|. \tag{4.3.1}$$

Обе части этого неравенства возведём в степень a и согласно определению подмножество E, находим

$$\int_E dt\left(\int_0^\eta\ldots\int_0^\eta |F(t,u,k)|\,du_1\ldots du_k\right)^a \geq$$

$$\geq \int_E dt \left(\left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|\, du_1 \ldots du_k \right)^a - \right.$$

$$\left. - \left| \int_0^\eta \ldots \int_0^\eta F(t,u,k) du_1 \ldots du_k \right|^a \right).$$

Отметим, что при замене области интегрирования подмножества E на промежутка $(T, T+H)$, значения интеграла не меняется, потому что при $t \in (T, T+H) \setminus E$ неравенство (4.3.1) обращается в равенство. Следовательно,

$$I(E) = \int_E \left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|\, du_1 \ldots du_k \right)^a dt,$$

$$I_1(T, T+H) = \int_T^{T+H} \left| \int_0^\eta \ldots \int_0^\eta F(t,u,k) du_1 \ldots du_k \right|^a dt;$$

$$I_2(T, T+H) = \int_T^{T+H} \left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|\, du_1 \ldots du_k \right)^a dt.$$

Согласно обозначениям, последнее неравенство представим в следующем виде:

$$I(E) \geq I_2(T, T+H) - I_1(T, T+H). \qquad (4.3.2)$$

Далее воспользуемся неравенством Гёльдера

$$\left(\int_E g(t) dt \right)^{\frac{2}{a}} \leq (\mu(E))^{\frac{2}{a}-1} \int_E g^{\frac{2}{a}}(t) dt,$$

находим

$$(I(E))^{\frac{2}{a}} \leq (\mu(E))^{\frac{2}{a}-1} \int_E \left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|\, du_1 \ldots du_k \right)^2 dt \leq$$

$$\leq (\mu(E))^{\frac{2}{a}-1} \int_T^{T+H} \left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|\, du_1 \ldots du_k \right)^2 dt.$$

Так как функция $F(t,u,k)$ на отрезке $[0,\eta]$ по всякому аргументу $u_1, \ldots, u_k$ непрерывна, следовательно, согласно первой теореме о среднем значении интеграла, можно найти такие точки $u_1^*, \ldots, u_k^*$, что имеет место равенство

$$\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|\, du_1 \ldots du_k = \eta^k \left|F(t+u_1^* + \ldots + u_k^*)\right|.$$

Отсюда с учётом

$$0 \le u_1^* + \ldots + u_k^* \le \eta k = \frac{c_1[c\ln\mathscr{L}]}{\sqrt{\mathscr{L}}} \le 1,$$

получим

$$I(E) \le \left((\mu(E))^{\frac{2}{a}-1}\, \eta^{2k} \int_{T+u_1^*+\ldots+u_k^*}^{T+H+u_1^*+\ldots+u_k^*} |F(t)|^2 dt \right)^{\frac{a}{2}} \le$$
$$\le (\mu(E))^{\frac{2-a}{2}} \left(\eta^{2k} J(T,H)\right)^{\frac{a}{2}},$$

где

$$J(T,H) = \int_T^{T+H+1} |F(t)|^2\, dt.$$

Из этой оценки и из (4.3.2) находим

$$(\mu(E))^{\frac{2-a}{2}} \ge \frac{I_2(T,T+H) - I_1(T,T+H)}{\left(\eta^{2k} J(T,H)\right)^{\frac{a}{2}}}. \tag{4.3.3}$$

Следовательно, для оценки снизу меры множества E, то есть $\mu(E)$, нужно оценить интеграл $I_2(T,T+H)$ снизу, а интегралы $I_1(T,T+H)$ и $J(T,H)$ оценить сверху.

2. Оценка $I_2(T,T+H)$ снизу. Для оценки интеграла $I_2(T,T+H)$, воспользуемся неравенством Гёльдера k – раз

$$\left(\int_0^\eta f(u)du\right)^{\frac{1}{a}} \le \eta^{\frac{1}{a}-1} \int_0^\eta f^{\frac{1}{a}}(u)du,$$

имеем

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|^a \, du_1 \ldots du_k\right)^{\frac{1}{a}} \leq \\
&\leq \eta^{\frac{1}{a}-1} \int_0^\eta \left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|^a \, du_1 \ldots du_{k-1}\right)^{\frac{1}{a}} du_k \leq \\
&\leq \eta^{(k-1)\left(\frac{1}{a}-1\right)} \int_0^\eta \ldots \int_0^\eta \left(\int_0^\eta |F(t,u,k)|^a \, du_1\right)^{\frac{1}{a}} du_2 \ldots du_k \leq \\
&\leq \eta^{k\left(\frac{1}{a}-1\right)} \int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)| \, du_1 \ldots du_k.
\end{aligned}
$$

потом обе части найденного неравенства возведём в степень a, получим

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)| \, du_1 \ldots du_k\right)^a \geq \\
&\geq \eta^{k(a-1)} \int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|^a \, du_1 \ldots du_k
\end{aligned}
$$

Применяя это неравенство, и учитывая определения $I_2(T, T+H)$, находим

$$
\begin{aligned}
I_2(T, T+H) &= \int_T^{T+H} \left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)| \, du_1 \ldots du_k\right)^a dt \geq \\
&\geq \int_T^{T+H} \eta^{k(a-1)} \int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|^a \, du_1 \ldots du_k dt = \\
&= \eta^{k(a-1)} \int_0^\eta \ldots \int_0^\eta \int_T^{T+H} |F(t,u,k)|^a \, dt du_1 \ldots du_k = \\
&= \eta^{k(a-1)} \int_0^\eta \ldots \int_0^\eta \int_{T+u_1+\ldots+u_k}^{T+H+u_1+\ldots+u_k} |F(t)|^a \, dt du_1 \ldots du_k \geq \\
&\geq \eta^{k(a-1)} \int_0^\eta \ldots \int_0^\eta \int_{T+k\eta}^{T+H} |F(t)|^a \, dt du_1 \ldots du_k = \\
&= \eta^{ka} \int_{T+k\eta}^{T+H} |F(t)|^a \, dt.
\end{aligned}
$$

Используя определение $F(t)$, последнее неравенство напишем в следующем виде:

$$I_2(T,T+H) \geq \eta^{ka} \int_0^{H-k\eta} \left| f\left(\frac{1}{2}+i(t+T+k\eta)\right) \times \right.$$
$$\left. \times \varphi^2 \left(\frac{1}{2}+i(t+T+k\eta)\right) \right|^a dt. \qquad (4.3.4)$$

Чтобы оценить снизу правую часть (4.3.4), воспользуемся теоремой Гэбриэла (Лемма 4.2.4) о выпуклости среднего значения по двум переменным. Полагая в этой теореме

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \lambda = \frac{1}{a}, \quad \beta = 2, \quad \mu = \frac{1}{2-a}, \quad \sigma = 2 - \frac{3a}{4},$$

$$T_1 = H - k\eta, \quad p = \frac{a}{2}, \quad q = \frac{2-a}{2},$$

с учётом формул

$$J\left(2-\frac{3a}{4},1\right) = \int_0^{H-k\eta} \left| f\left(2-\frac{3a}{4}+i(t+T+k\eta)\right) \times \right.$$
$$\left. \times \varphi^2 \left(2-\frac{3a}{4}+i(t+T+k\eta)\right) \right| dt,$$
$$J\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right) = \left(\int_0^{H-k\eta} \left| f\left(\frac{1}{2}+i(t+T+k\eta)\right) \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \varphi^2 \left(\frac{1}{2}+i(t+T+k\eta)\right) \right|^a dt \right)^{\frac{1}{a}},$$
$$J\left(2,\frac{1}{2-a}\right) = \left(\int_0^{H-k\eta} \left| f\left(2+i(t+T+k\eta)\right) \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \varphi^2 \left(2+i(t+T+k\eta)\right) \right|^{2-a} dt \right)^{\frac{1}{2-a}},$$

и равенства $p\lambda + q\mu = 1$, находим

$$J\left(2-\frac{3a}{4},1\right) \leq c_g J^{\frac{a}{2}}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right) J^{\frac{2-a}{2}}\left(2,\frac{1}{2-a}\right),$$

где c_g — абсолютная постоянная. Из неравенства (4.3.4), определения интеграла $J\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right)$ и последнего полученного неравенства, получим

$$I_2(T,T+H) \geq \eta^{ka} J^a\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right) \geq$$
$$\geq c_g^{-2}\eta^{ka} J^2\left(2-\frac{3a}{4},1\right) J^{-(2-a)}\left(2,\frac{1}{2-a}\right). \qquad (4.3.5)$$

Следовательно, для оценки интеграла $I_2(T,T+H)$ снизу, понадобится оценить два интеграла $J\left(2-\frac{3a}{4},1\right)$ и $J\left(2,\frac{1}{2-a}\right)$, соответственно снизу и сверху.

Сначала оценим снизу интеграл $J\left(2-\frac{3a}{4},1\right)$. Для этого воспользуемся определениями функции $f(s)$ и $\varphi(s)$ в случае

$$s = 2-\frac{3a}{4}+i(t+T+k\eta),$$

с учётом того, что

$$2-\frac{3a}{4} > 1,$$

имеем

$$f(s)\varphi^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{n^s}\sum_{\nu_1<X}\frac{h(\nu_1)}{\nu_1^s}\sum_{\nu_2<X}\frac{h(\nu_2)}{\nu_2^s} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_1(m)}{m^s},$$
$$r_1(m) = \sum_{\substack{m=n\nu_1\nu_2\\ \nu_1,\nu_2<X}} r(n)h(\nu_1)h(\nu_2).$$

Используя неравенства $|r(m)|\leq 1$, $|h(\nu)|\leq 1$, находим

$$|r_1(m)| \leq \sum_{\substack{m=n\nu_1\nu_2\\ \nu_1,\nu_2<X}} |r(m)||\alpha(\nu_1)||\alpha(\nu_2)| \leq \sum_{\substack{m=n\nu_1\nu_2\\ \nu_1,\nu_2<X}} 1 \leq \tau_3(n).$$

Таким образом,

$$\left|f\left(2-\frac{3a}{4}+i(t+T+k\eta)\right)\varphi^2\left(2-\frac{3a}{4}+i(t+T+k\eta)\right)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau_3(m)}{m^{2-\frac{3a}{4}}} \ll 1.$$

Из этой оценки, из представления интеграла $J\left(2-\frac{3a}{4},1\right)$, и имея ввиду, что $k\eta<1$, последовательно, получим

$$J\left(2-\frac{3a}{4},1\right)=\int_0^{H-k\eta}\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_1(m)}{m^{2-\frac{3a}{4}}}m^{-i(t+T+k\eta)}\right|dt\geq$$
$$\geq\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_1(m)}{m^{2-\frac{3a}{4}}}\int_0^{H-k\eta}m^{-i(t+T+k\eta)}dt\right|\geq$$
$$\geq H-k\eta-\left|\sum_{m=2}^{\infty}\frac{r_1(m)\left(m^{-ik\eta}-m^{-iH}\right)}{m^{2-\frac{3a}{4}+iT}\ln m}\right|\geq$$
$$\geq H+O(1). \tag{4.3.6}$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\left|\sum_{m=2}^{\infty}\frac{r_1(m)\left(m^{-ik\eta}-m^{-iH}\right)}{m^{2-\frac{3a}{4}+iT}\ln m}\right|\leq 2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{|r_1(m)|}{m^{2-\frac{3a}{4}}\ln m}\leq$$

$$\leq 2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\tau_3(m)}{m^{2-\frac{3a}{4}}\ln m}\ll 1.$$

А теперь оценим сверху интеграл $J\left(2,\frac{1}{2-a}\right)$. Для этого, как ранее при $Re\,s>1$, переходим к формуле

$$|f(2+i(t+T+k\eta)\varphi^2(2+i(t+T+k\eta)|=\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_1(m)}{m^{2+i(t+T+k\eta)}}\right|\leq$$
$$\leq\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau_3(n)}{m^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{m_1m_2m_3=m}1=\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\sum_{m_3=1}^{\infty}\sum_{m=m_1m_2m_3}\frac{1}{m^2}=$$

$$=\sum_{m_1=1}^{\infty}\frac{1}{m_1^2}\sum_{m_2=1}^{\infty}\frac{1}{m_2^2}\sum_{m_3=1}^{\infty}\frac{1}{m_3^2}\sum_{m=m_1m_2m_3}1=\sum_{m_1=1}^{\infty}\frac{1}{m_1^2}\sum_{m_2=1}^{\infty}\frac{1}{m_2^2}\sum_{m_3=1}^{\infty}\frac{1}{m_3^2}=$$
$$=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\right)^3=\zeta^3(2)=\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^3=\frac{\pi^6}{216}.$$

Таким образом,

$$J\left(2, \frac{1}{2-a}\right) \le \left(\int_0^H \left(\frac{\pi^6}{216}\right)^{2-a} dt\right)^{\frac{1}{2-a}} = \frac{\pi^6}{216} H^{\frac{1}{2-a}}.$$

Подставляя в соотношение (4.3.5), последнюю оценку и (4.3.6), для $I_2(T, T+H)$ получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} I_2(T, T+H) &\ge c_g^{-2} \eta^{ka} \left(H + O(1)\right)^2 \left(\frac{\pi^6}{216} H^{\frac{1}{2-a}}\right)^{-(2-a)} \ge \\ &\ge \left(\frac{216}{\pi^6}\right)^{2-a} c_g^{-2} \left(1 + O(H^{-1})\right) H\eta^{ka} \ge \\ &\ge \left(\frac{200}{10^3}\right)^{2-a} c_g^{-2} H\eta^{ka} = \frac{1}{5^{2-a} c_g^2} H\eta^{ka}, \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

где c_g – абсолютная постоянная.

3. Оценка $J(T, H)$ сверху. Вспоминая, что

$$T \le t \le T + H, \quad T - \frac{\pi}{4} = 4\pi r,$$

r — целое число, то согласно лемме 4.2.3, имеем

$$J(T, H) = \int_T^{T+H+1} |F(t)|^2 \, dt =$$

$$= \int_T^{T+H+1} \left| 2 \sum_{\lambda \le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \cos t \ln \frac{P}{\lambda} + O(T^{-0,01}) \right|^2 dt,$$

где в этой формуле вещественнозначная функция $A(\lambda)$ и P, определяются следующим образом:

$$A(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2} = \lambda} \frac{h(\nu_1) h(\nu_2) r(n)}{\nu_2}, \quad P = \sqrt{\frac{5T}{2\pi}}.$$

В последней формуле, переходя к оценкам, и используя дважды неравенства $|a+b|^2 \le 2|a|^2 + 2|b|^2$, с учётом того, что функция $A(\lambda)$ является вещественнозначной, находим

$$J(T,H) \ll \int_T^{T+H+1} \left| \sum_{\lambda \le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{it} + \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{-it} \right) \right|^2 dt + HT^{-0,02} \ll$$

$$\ll \int_T^{T+H+1} \left| \sum_{\lambda \le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{it} \right|^2 dt +$$

$$+ \int_T^{T+H+1} \left| \sum_{\lambda \le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{-it} \right|^2 dt + HT^{-0,02} \ll$$

$$\ll \int_0^{H+1} \left| \sum_{\lambda \le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{i(T+t)} \right|^2 dt + HT^{-0,02}.$$

Далее имеем

$$J(T,H) \ll \int_0^{H+1} \exp\left(1 - \left(\frac{t}{H+1}\right)^2\right) \left| \sum_{\lambda \le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{i(T+t)} \right|^2 dt + HT^{-0,02} \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(1 - \left(\frac{t}{H+1}\right)^2\right) \left| \sum_{\lambda \le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{i(T+t)} \right|^2 dt + HT^{-0,02} =$$

$$= e \sum_{\lambda_1, \lambda_2 \le P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{t}{H+1}\right)^2 + it \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right) dt +$$

$$+ HT^{-0,02} = e(H+1) \sum_{\lambda_1, \lambda_2 \le P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-t^2 + it(H+1) \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right) dt + HT^{-0,02}.$$

Воспользовавшись формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2 + i\alpha t) dt = \sqrt{\pi} \exp\left(-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right),$$

находим

$$J(T,H) \ll H \sum_{\lambda_1,\lambda_2\le P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \times$$
$$\times \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) + HT^{-0,02}.$$

Последнюю кратную сумму представляем в виде суммы двух слагаемых, одно из которых получается при $\lambda_1 = \lambda_2$,

$$J(T,H) \ll H\left(|\Sigma_0(T)| + |W_0(T)|\right) + HT^{-0,02}, \tag{4.3.8}$$

где

$$\Sigma_0(T) = \sum_{\lambda\le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda},$$

$$W_0(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Для оценки суммы $\Sigma_0(T)$ полагаем

$$\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\mathscr{L}}$$

и с учётом неравенства $X^{-1} \le \lambda \le P$, находим

$$\Sigma_0(T) = \sum_{\lambda\le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda} = \sum_{\lambda\le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}} \lambda^{-\frac{1}{\mathscr{L}}} =$$
$$= \sum_{\lambda\le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}} \exp\left(-\frac{\ln\lambda}{\mathscr{L}}\right) \le \sum_{\lambda\le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}} \exp\left(\frac{\ln X}{\mathscr{L}}\right) =$$
$$= \exp\left(\frac{0,01\varepsilon_1 \ln T}{0,5(\ln T + \ln 5 - \ln 2\pi)}\right) \sum_{\lambda\le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}} \le$$
$$\le \exp\left(0,03\varepsilon_1\right) \sum_{\lambda\le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}} \le e \sum_{\lambda\le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}.$$

Применяя к этой сумме лемму 3.3.1 при

$$Y = P \quad \text{и} \quad \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\mathscr{L}},$$

имеем

$$\Sigma_0(T) \leq \frac{2e(1+æ^2)\mathscr{L}}{5} W(\theta) + (c_1\mathscr{L} + c_2)\, W\left((\mathscr{L})^{-1}\right) +$$
$$+ O\left(P^{-1}X^2 \ln^2 X\right),$$

где

$$W(\theta) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \left(\frac{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4}.$$

Для оценки сумм $W(\theta)$ и $W\left((\mathscr{L})^{-1}\right)$ воспользуемся леммой 3.3.2, и учитывая, что $P = \sqrt{\frac{5T}{2\pi}}$ и $X = T^{0{,}01\varepsilon_1}$, получим

$$W(\theta) \ll \frac{1}{\sqrt{\ln X}},$$
$$W\left((\mathscr{L})^{-1}\right) \ll \frac{X^{2(\mathscr{L})^{-1}}}{\sqrt{\ln X}} = \frac{1}{\sqrt{\ln X}} \exp\left(\frac{2\ln T^{0{,}01\varepsilon_1}}{\ln\sqrt{5T/(2\pi)}}\right) \ll \frac{1}{\sqrt{\ln X}},$$

$$\Sigma_0(T) \ll W(0)\mathscr{L} + W\left((\mathscr{L})^{-1}\right)\mathscr{L} + \frac{X^2\ln^2 X}{P} \ll$$
$$\ll \frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}} + \frac{X^2\ln^2 X}{P} \ll \frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}}. \qquad (4.3.9)$$

Теперь для оценки суммы $W_0(T)$ воспользуемся следствием 3.2.1.1 при

$$H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon_1},$$

находим

$$W_0(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) =$$
$$= O\left(T^{-\varepsilon_1}\right).$$

Полученную оценку и оценку суммы $\Sigma_0(T)$ подставляя в (4.3.8), далее воспользовавшись соотношением

$$\ln X = 0,01\varepsilon_1 \ln T = 0,01\varepsilon_1 \ln \frac{2\pi P^2}{5} =$$

$$= 0,01\varepsilon_1(2\mathscr{L} + \ln 2\pi - \ln 5) > 0,02\varepsilon_1\mathscr{L},$$

имеем

$$J(T,H) \ll H\left(\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}} + T^{-\varepsilon_1}\right) + HT^{-0,02} \leq$$
$$\leq H\left(\frac{\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{0,02\varepsilon_1}} + T^{-\varepsilon_1}\right) + HT^{-0,02} \ll \frac{H\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{\varepsilon_1}}.$$

Отсюда для суммы $J(T,H)$ получим окончательную оценку

$$J(T,H) \leq \frac{c_4}{\sqrt{\varepsilon_1}} H\sqrt{\mathscr{L}}, \tag{4.3.10}$$

где $c_4 > 0$ – абсолютная константа.

4. Оценка $I_1(T,T+H)$ сверху. Для интеграла $I_1(T,T+H)$ будем применять неравенство Гёльдера, имеем

$$(I_1(T,T+H))^{\frac{2}{a}} \leq$$

$$\leq H^{\frac{2}{a}-1}\int_T^{T+H}\left|\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta F(t+u_1+\ldots+u_k)du_1\ldots du_k\right|^2 dt.$$

Предположим, что $0 < \varepsilon_2 < 0,01$, точное значение ε_2 определим позже. Применяя лемму 3.2.1 для подинтегральной функции $F(t)$, имеем

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) + O\left(T^{-0,01}\right),$$
$$T - \frac{\pi}{4} = 4\pi r, \quad r \text{ — целое число},$$
$$F_1(t) = 2\sum_{\lambda \leq P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \cos t \ln \frac{P}{\lambda},$$

$$F_2(t) = 2 \sum_{P^{1-\varepsilon_2} < \lambda \le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \cos t \ln \frac{P}{\lambda},$$

Следовательно, находим

$$(I_1(T,T+H))^{\frac{2}{a}} \ll H^{\frac{2}{a}-1}(I_{11}(T,T+H) + I_{12}(T,T+H) + \\ + H\eta^{2k}T^{-0,02}), \qquad (4.3.11)$$

где

$$I_{11}(T,T+H) = \int_T^{T+H} \left| \int_0^\eta \dots \int_0^\eta F_1(t+u_1+\dots+u_k)du_1\dots du_k \right|^2 dt,$$

$$I_{12}(T,T+H) = \int_T^{T+H} \left| \int_0^\eta \dots \int_0^\eta F_2(t+u_1+\dots+u_k)du_1\dots du_k \right|^2 dt.$$

Теперь оценим $I_{11}(T,T+H)$, для этого интегрируя $F_1(t+u_1+\dots+u_k)$ по $u_1, u_2, \dots, u_k$, имеем

$$I_{11}(T,T+H) \ll$$

$$\ll \int_T^{T+H} \left| \int_0^\eta \dots \int_0^\eta \sum_{\lambda \le P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i(t+u_1+\dots+u_k)} du_1\dots du_k \right|^2 dt =$$

$$= \int_T^{T+H} \left| \sum_{\lambda \le P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{it} \frac{\left(\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i\eta} - 1\right)^k}{\left(\ln\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right)^k} \right|^2 dt =$$

$$= \int_0^H \left| \sum_{\lambda \le P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i(T+t)} B(\lambda) \right|^2 dt,$$

где

$$B(\lambda) = \frac{\left(\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i\eta} - 1\right)^k}{\left(\ln\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right)^k}.$$

Далее, находим

$$I_{11}(T,T+H) \ll H \sum_{\lambda_1,\lambda_2 \le P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} B(\lambda_1)\overline{B(\lambda_2)} \times$$

$$\times \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Последнюю кратную сумму, представляя в виде суммы двух слагаемых, одно из которых получается при $\lambda_1 = \lambda_2$, имеем

$$I_{11}(T,T+H) \ll H\left(|\Sigma_1(T)| + |W_1(T)|\right), \qquad (4.3.12)$$

где

$$\Sigma_1(T) = \sum_{\lambda \le P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda} \left| B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right|^2,$$

$$W_1(T) = \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 < P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} B\left(\frac{P}{\lambda_1}\right) \overline{B\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)} \times$$

$$\times \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Применяя неравенство

$$\ln\frac{P}{\lambda} \ge \varepsilon_2 \mathscr{L},$$

оценку суммы $\Sigma_1(T)$ сведём к оценке суммы $\Sigma_0(T)$, которую мы уже рассматривали при оценке суммы $J(N,H)$.

$$\Sigma_1(T) = \sum_{\lambda \le P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A^2(\lambda)\left(2\sin\left(\frac{\eta}{2}\ln\frac{P}{\lambda}\right)\right)^{2k}}{\lambda\left(\ln\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right)^{2k}} \le$$

$$\le \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k} \sum_{\lambda \le P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda} <$$

$$< \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k} \sum_{\lambda \le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda} = \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k} \Sigma_0 \ll$$

$$\ll \frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}} \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}}\right)^{2k}.$$

Теперь для оценки суммы $W_1(T)$, используя следствия 3.2.1.1 при условии $k = [c \ln \mathscr{L}]$ и $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon_1}$, находим

$$W_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}}\right)^{2k} \left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k \mathscr{L}\right) T^{-\varepsilon_1}.$$

Полученные оценки суммы $\Sigma_1(T)$ и $W_1(T)$, подставляя в формулу (4.3.12), затем используя равенство $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \mathscr{L}^{-1/2}$, где $\varepsilon_3 > 0$ значение, которое определим позднее, а также пользуясь неравенствами

$$T = \frac{2\pi P^2}{5} > P^2, \quad \ln X = 0,01\varepsilon_1 \ln \frac{2\pi P^2}{5} =$$
$$= 0,01\varepsilon_1 (2\mathscr{L} + \ln 2\pi - \ln 5) > 0,02\varepsilon_1 \mathscr{L},$$

и параметрами $k = [c \ln \mathscr{L}]$, $\eta = c_1 \mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}$, последовательно, получим

$$\begin{aligned} I_{11}(T, T+H) &\ll H \left(\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}} + \frac{k}{\varepsilon_2} T^{-\varepsilon_1} + k\eta \mathscr{L} T^{-\varepsilon_1}\right) \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}}\right)^{2k} \leq \\ &= H\eta^{2k} \left(\frac{\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{0,02\varepsilon_1}} + \frac{c(\varepsilon_3^{-1} + c_1)\sqrt{\mathscr{L}} \ln \mathscr{L}}{P^{2\varepsilon_1}}\right) \left(\frac{2}{\varepsilon_3 c_1}\right)^{2k} \leq \\ &\leq \frac{10\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \left(\frac{2}{\varepsilon_3 c_1}\right)^{2k} H\eta^{2k}. \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Далее оценим $I_{12}(T, T+H)$. Отметим, что функция

$$F_2(t + u_1 + \ldots + u_k)$$

на отрезке $[0, \eta]$ непрерывна по каждому аргументу $u_1, \ldots, u_k$, тогда согласно теореме о среднем интеграле, имеются точки $u_1^*, \ldots, u_k^*$, для которых имеются равенства

$$\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F_2(t + u_1 + \ldots + u_k)|\, du_1 \ldots du_k =$$

$$= \eta^k \left| F_2(t + u_1^* + \ldots + u_k^*) \right|.$$

вследствие этого,

$$I_{12}(T, T+H) = \eta^{2k} \int_{T+u_1^*+\ldots+u_k^*}^{T+H+u_1^*+\ldots+u_k^*} \left| F_2(t) \right|^2 dt \le \int_T^{T+H+1} \left| F_2(t) \right|^2 dt =$$

$$= \eta^{2k} \int_T^{T+H+1} \left| 2 \sum_{P^{1-\varepsilon_2} < \lambda \le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \cos t \ln \frac{P}{\lambda} \right|^2 dt =$$

$$= \eta^{2k} \int_T^{T+H+1} \left| \sum_{P^{1-\varepsilon_2} < \lambda \le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda} \right)^{it} + \right.$$

$$\left. + \sum_{P^{1-\varepsilon_2} < \lambda \le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda} \right)^{-it} \right|^2 dt.$$

Используя неравенство $|a + b|^2 \le 2|a|^2 + 2|b|^2$, и пользуясь тем, что $A(\lambda)$ — вещественнозначная функция, находим

$$I_{12}(T, T+H) \ll \eta^{2k} \int_T^{T+H+1} \left| \sum_{P^{1-\varepsilon_2} < \lambda \le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda} \right)^{it} \right|^2 dt =$$

$$= \eta^{2k} \int_0^{H+1} \left| \sum_{P^{1-\varepsilon_2} < \lambda \le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda} \right)^{i(T+t)} \right|^2 dt.$$

Далее для оценки полученного интеграла, и поступая аналогично как при оценке $I_{11}(T, T+H)$, последовательно, находим

$$I_{12}(T, T+H) \ll H\eta^{2k} \sum_{P^{1-\varepsilon_2} < \lambda_1, \lambda_2 \le P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{iT} \times$$

$$\times \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 \right).$$

Последнюю кратную сумму, представляя в виде суммы двух слагаемых, одно из которых получается при $\lambda_1 = \lambda_2$, получим

$$I_{12}(T,T+H) \ll H\eta^{2k}\left(|\Sigma_2(T)| + |W_2(T)|\right), \qquad (4.3.14)$$

где

$$\Sigma_2(T) = \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda},$$

$$W_2(T) = \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Для оценки суммы $\Sigma_2(T)$, полагая

$$\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\mathscr{L}},$$

находим

$$\Sigma_2(T) = \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}} \exp\left(-\frac{\ln\lambda}{\mathscr{L}}\right) \le$$
$$\le e\left(\sum_{\lambda\le P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}} - \sum_{\lambda\le P^{1-\varepsilon_2}}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}\right).$$

Применим лемму 3.3.1, и учитывая что $1-e^{-\varepsilon_2} \ll \varepsilon_2$, а также для оценки $W(\theta)$, применяя лемму 3.3.2, получим

$$\Sigma_2(T) \le \frac{2e^2(1+\text{æ}^2)(1-e^{-\varepsilon_2})\mathscr{L}}{5} W(\theta) + O\left(P^{-1+\varepsilon_2}X^2\ln^2 X\right) \ll$$
$$\ll \varepsilon_2 W(\theta)\mathscr{L} + P^{-1+\varepsilon_2}X^2\ln^2 X \ll$$
$$\ll \varepsilon_2\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}} + P^{-1+\varepsilon_2}X^2\ln^2 X \ll \frac{\varepsilon_2\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}}.$$

Теперь для оценки суммы $W_2(T)$, используя следствия 3.2.1.1, при условии $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon_1}$, находим

$$W_2(T) = \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) =$$

$$=O\left(T^{-\varepsilon_1}\right).$$

Полученные оценки сумм $\Sigma_2(T)$ и $W_2(T)$ подставляя в (4.3.14), потом используя равенство $\varepsilon_2 = \varepsilon_3\mathscr{L}^{-1/2}$, имеем

$$I_{12}(T,T+H) \ll H\eta^{2k}\left(\frac{\varepsilon_2\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}} + T^{-\varepsilon_1}\right) \ll$$
$$\ll H\eta^{2k}\left(\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\mathscr{L}}}\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{0,02\varepsilon_1\mathscr{L}}} + T^{-\varepsilon_1}\right) \le \frac{10\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1}}H\eta^{2k}.$$

Следовательно, подставляя в (4.3.11) полученную оценку и оценку (4.3.13), получим оценку

$$(I_1(T,T+H))^{\frac{2}{a}} \ll H^{\frac{2}{a}-1}(I_{11}(T,T+H) + I_{12}(T,T+H) + H\eta^{2k}T^{-0,02}) \ll$$
$$\ll H^{\frac{2}{a}-1}\left(\frac{10\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left(\frac{2}{\varepsilon_3 c_1}\right)^{2k}H\eta^{2k} + \right.$$
$$\left. + \frac{10\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1}}H\eta^{2k} + H\eta^{2k}T^{-0,02}\right) =$$
$$= H^{\frac{2}{a}}\eta^{2k}\left(\frac{10\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left(\frac{2}{\varepsilon_3 c_1}\right)^{2k} + \frac{10\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1}} + T^{-0,02}\right).$$

При условии $c_1 = 2e\varepsilon_3^{-1},\ k = [c\ln\mathscr{L}]$, используя неравенство

$$c \ge \frac{1}{4} + \frac{2+\ln\varepsilon_3^{-1}}{2\ln\mathscr{L}},$$

имеем

$$\left(\frac{2}{\varepsilon_3 c_1}\right)^{2k} = e^{-2[c\ln\mathscr{L}]-2} \le e^{-2c\ln\mathscr{L}} = \mathscr{L}^{-2c} \le \mathscr{L}^{-\frac{1}{2}+\frac{\ln\varepsilon_3^{-1}}{\ln\mathscr{L}}} = \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\mathscr{L}}}$$

Таким образом, для интеграла $I_1(T,T+H)$, получим оценку

$$I_1(T,T+H) \le \left(\frac{30\varepsilon_3 c_5}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right)^{\frac{a}{2}} H\eta^{ka}, \tag{4.3.15}$$

где постоянная c_5 является абсолютной.

5. Оценка снизу $N_0(T+H)-N_0(T)$. Полученную оценку интеграла (4.3.15), а также оценку интеграла $I_2(T,T+H)$ и оценки интегралов $I_1(T,T+H)$ и $J(T,H)$ подставляя в формулу (4.3.3), последовательно, находим

$$(\mu(E))^{\frac{2-a}{2}} \geq \frac{5^{-(2-a)}c_g^{-2}H\eta^{ka} - \left(\dfrac{30\varepsilon_3 c_5}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right)^{\frac{a}{2}} H\eta^{ka}}{\left(\eta^{2k}\dfrac{c_4}{\sqrt{\varepsilon_1}}\,H\sqrt{\mathscr{L}}\right)^{\frac{a}{2}}} =$$

$$= \frac{5^{-(2-a)}c_g^{-2}\varepsilon_1^{\frac{a}{4}} - (30\varepsilon_3 c_5)^{\frac{a}{2}}}{c_4^{\frac{a}{2}}} H^{\frac{2-a}{2}}\mathscr{L}^{-\frac{a}{4}}.$$

В последнем неравенстве в качестве ε_3 выбираем наибольшее положительное число, для которого выполняется условие

$$(30\varepsilon_3 c_5)^{\frac{a}{2}} \leq 0,5\cdot 5^{-(2-a)}c_g^{-2}\varepsilon_1^{\frac{a}{4}},$$

то есть

$$\varepsilon_3 = \frac{5^{-\frac{2(2-a)}{a}}c_g^{-\frac{4}{a}}2^{-\frac{2}{a}}}{30c_5}\sqrt{\varepsilon_1},$$

получим

$$(\mu(E))^{\frac{2-a}{2}} \geq c_6 H^{\frac{2-a}{2}}\mathscr{L}^{-\frac{a}{4}}, \qquad c_6 = \frac{5^{-(2-a)}c_g^{-2}\varepsilon_1^{\frac{a}{4}}}{2c_4^{\frac{a}{2}}}.$$

Поскольку $k\eta = c_1[c\ln\mathscr{L}]\mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}$, тогда для число нулей функции $F(t)$ на промежутке $(T,T+H)$ имеет место

$$N_0(T+H)-N_0(T) \geq \frac{\mu(E)}{k\eta} \geq \frac{c_6^{\frac{2}{2-a}}\,H\mathscr{L}^{-\frac{a}{4-2a}}}{c_1[c\ln\mathscr{L}]\mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}} \geq$$

$$\geq \frac{c_6^{\frac{2}{2-a}}}{c_1 c}H\mathscr{L}^{\frac{1}{2}-\frac{a}{4-2a}}\ln\mathscr{L}.$$

Полагая $a=\varepsilon$, параметр c выбираем так, чтобы имело место неравенство

$$\begin{aligned}c \geq &\frac{1}{4}+\frac{2+\ln\varepsilon_3^{-1}}{2\ln\mathscr{L}}=\\ =&\frac{1}{4}+\frac{\varepsilon^2\ln 3000e^2c_5\varepsilon_1^{-0,5}+\varepsilon\ln(81\cdot 10^{-10})+\ln(10^8c_g^4)}{2\varepsilon^2\ln\mathscr{L}}.\end{aligned}$$

При выполнении условия $T\geq T_0>0$, имеет место неравенство

$$\frac{\varepsilon^2\ln 3000e^2c_5\varepsilon_1^{-0,5}+\varepsilon\ln(81\cdot 10^{-10})+\ln(10^8c_g^4)}{\varepsilon^2}<\frac{1}{6}\ln\mathscr{L}.$$

Для этого, выбирая

$$c=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3},$$

находим

$$N_0(T+H)-N_0(T)\geq 3c_6^{\frac{2}{2-\varepsilon}}c_1^{-1}H\mathscr{L}^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4-2\varepsilon}}\ln\mathscr{L}.$$

Воспользовавшись следующими соотношениями

$$\mathscr{L}^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4-2\varepsilon}}>\frac{7}{10}(\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4-2\varepsilon}},\quad \ln\mathscr{L}>\frac{20}{21}\ln\ln T,$$

находим

$$N_0(T+H)-N_0(T)\geq c_7H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}\ln\ln T,\qquad c_7=2c_6^{\frac{2}{2-\varepsilon}}c_1^{-1}.$$

Для ясности коэффициент c_7 представим в следующем виде:

$$c_7=\frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\,2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}.$$

Теорема полностью доказана.

4.4. Доказательство теоремы 4.1.2

Данная теорема доказывается методом работы [67] в соединении с идеями и методами работ [142]–[150].

Пусть $X = T^{0.01\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 0.01$ и при $T \le t \le T + H$ рассматриваем функцию $F(t)$

$$F(t) = e^{i\theta(t)} f\left(\frac{1}{2} + it\right) \left|\varphi\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2,$$

где

$$e^{i\theta(t)} = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{it}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{it}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{it}{2}\right)\right|},$$

$$\varphi(s) = \sum_{\nu < X} \frac{\beta(\nu)\chi(\nu)}{\nu^s} = \sum_{\nu < X} \frac{h(\nu)}{\nu^s},$$

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\left(1 - \dfrac{\ln \nu}{\ln X}\right), & 1 \le \nu < X, \\ 0, & \nu \ge X, \end{cases}$$

и действительные числа $\alpha(\nu)$ определяются из формулы

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p \equiv \pm 1 (mod\, 5)} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad Re\, s > 1.$$

Заметим, что значения $\chi(p)$ для чисел $p \equiv \pm 1 (mod\, 5)$, где p простое число, является действительным числом и

$$\chi(p^k) = (\chi(p))^k = (\chi(\pm 1))^k = \left(e\left(\frac{ind\,(\pm 1)}{4}\right)\right)^k = (\pm 1)^k. \qquad (4.4.1)$$

Из соотношения

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k! (2k-1)} \cdot \frac{1}{p^{ks}} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2p^s} - \frac{1}{8p^{2s}} - \frac{1}{162p^{3s}} - \frac{5}{128p^{4s}} - \ldots,$$

где $(2k-1)!!=1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)$ и из определения $\alpha(\nu)$,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha(\nu)}{\nu^s}=\prod_{p\equiv\pm1(mod\,5)}\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}\cdot\frac{1}{p^{ks}}\right)=$$

$$=\prod_{p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(p^k)}{p^{ks}},$$

$$\alpha(p^k)=\begin{cases}1, & \text{если } k=0;\\ -\dfrac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}, & \text{если } k\geq 1 \text{ и } p\equiv\pm1(mod\,5),\\ 0, & \text{если } k\geq 1 \text{ и } p\not\equiv\pm1(mod\,5),\end{cases}$$

вытекает, что функция $\alpha(\nu)$ мультипликативная и $|\alpha(\nu)|<1$ при всяком $\nu>1$. Учитывая это и (4.4.1), имеем

$$\alpha(p^k)\chi(p^k)=\begin{cases}1, & \text{если } k=0;\\ -\dfrac{(\pm1)^k\,(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}, & \text{если } k\geq 1 \text{ и } p\equiv\pm1(mod\,5),\\ 0, & \text{если } k\geq 1 \text{ и } p\not\equiv\pm1(mod\,5),\end{cases}$$

следовательно, $\alpha(p^k)\chi(p^k)$ принимает действительные значения и поэтому

$$\alpha(p^k)\chi(p^k)=\alpha(p^k)\overline{\chi}(p^k).$$

Тем самым получаем

$$\alpha(\nu)\chi(\nu)=\alpha(\nu)\overline{\chi}(\nu),\qquad |\alpha(\nu)\chi(\nu)|\leq 1.$$

Из соотношения $\beta(\nu)$ находим

$$\beta(\nu)\chi(\nu)=\beta(\nu)\overline{\chi}(\nu)\equiv h(\nu),\qquad |h(\nu)|\leq 1,$$

таким образом, получаем, что $\overline{h}(\nu)=h(\nu)$.

Пусть R – количество нулей функции $F(t)$ на промежутка

$(T, T+H)$. Величину R оцениваем снизу, для этого считаем, что

$$T = \frac{\pi}{4} + 4\pi r, \quad r - \text{целое число.}$$

Тогда согласно лемме 4.2.3 для функции $F(t)$, при $T \le t \le T+H$ справедлива формула

$$F(t) = 2\sum_{\lambda \le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \cos t \ln \frac{P}{\lambda} + O(T^{-0{,}01}),$$

где λ — положительные рациональные числа, у которых знаменатель не превосходит X, и

$$A(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}, \quad P = \sqrt{\frac{5T}{2\pi}}.$$

Пусть $T \ge T_0(\varepsilon) > 0$, и кроме того $0 < \alpha < 1/2$, $0 < h < h_1 < 1$.

Рассматриваем следующие два интеграла $I_1(t)$ и $I_2(t)$ вида:

$$I_1(t) = \int_{-h_1}^{h_1} e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2} |F(t+u)| du, \qquad I_2(t) = \left| \int_{-h_1}^{h_1} e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2} F(t+u) du \right|.$$

Через E обозначим подмножество интервала $(T, T+H)$, для которых верно неравенство $I_1(t) > I_2(t)$.

Рассмотрим интегралы

$$I_1 = \int_T^{T+H} I_1^2(t) dt, \qquad I_2 = \int_T^{T+H} I_2^\alpha(t) dt, \qquad I_3 = \int_T^{T+H} I_1^\alpha(t) dt,$$

и, учитывая, что для подмножества $[T, T+H] \setminus E$ имеет место равенство $I_1(t) = I_2(t)$, имеем

$$\int_E I_1^\alpha(t) dt = I_3 - \int_{[T,T+H]\setminus E} I_2^\alpha(t) dt \ge I_3 - I_2. \tag{4.4.2}$$

Используя неравенства Гёльдера, неравенства (4.4.2) оценим сверху:

$$\left(\int\limits_E I_1^\alpha(t)dt\right)^{\frac{2}{a}} \leq (\mu(E_1))^{\frac{2}{\alpha}-1}\int\limits_E I_1^2(t)dt \leq (\mu(E_1))^{\frac{2}{\alpha}-1} I_1.$$

Из этого неравенства и из (4.4.2), находим

$$\mu(E) \geq \left(\frac{(I_3 - I_2)^{\frac{2}{\alpha}}}{I_1}\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}. \tag{4.4.3}$$

Следовательно, для оценки снизу $\mu(E)$ достаточно интеграл I_3 оценить снизу, а интегралы I_1 и I_2 оценить сверху.

Оценка интеграла I_1 сверху. Для заданного интеграла, делая замену переменных, используя неравенства $0 < h_1 < h$, а также теорему о среднем значении интеграла, находим

$$I_1(t) = h\int\limits_{-\frac{h_1}{h}}^{\frac{h_1}{h}} e^{-u^2}|F(t+uh)|du \leq$$

$$\leq h\int\limits_{-1}^{1} e^{-u^2}|F(t+uh)|du \leq 2h|F(t+\theta)|, \quad |\theta| \leq 1.$$

Следовательно,

$$I_1 = \int\limits_T^{T+H} I_1^2(t)dt \leq 4h^2 \int\limits_{T-1}^{T+H+1} |F(t)|^2 dt = 4h^2 J(T,H). \tag{4.4.4}$$

Согласно лемме 4.2.3, получим

$$J(T,H) = \int\limits_{T-1}^{T+H+1} |F(t)|^2\, dt =$$

$$= \int\limits_{T-1}^{T+H+1} \left| 2\sum_{\lambda \le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \cos t \ln \frac{P}{\lambda} + O(T^{-0,01}) \right|^2 dt.$$

Далее для оценки интеграла $J(T,H)$, используяс функциональное уравнения функции Дэвенпорта-Хейльбронна и оценки, полученные в работе [150], имеем

$$J(T,H) \ll \frac{H\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}}, \quad \mathscr{L} = \ln P, \quad P = \sqrt{5T(2\pi)^{-1}}.$$

Полученную оценку интеграла $J(T,H)$ подставляем в (4.4.4) и для интеграла I_1 находим следующую оценку сверху:

$$I_1 \le c_4 h^2 H \frac{\log T}{\sqrt{\log X}}.$$

Оценка интеграла I_3 снизу. Пользуясь неравенствами $0 < h_1 < h$ и делая замену переменных для интеграла $I_1(t)$, находим

$$I_1(t) = h \int\limits_{-\frac{h_1}{h}}^{\frac{h_1}{h}} e^{-\nu^2} |F(t+\nu h)| d\nu \ge h \int\limits_{-1}^{1} e^{-\nu^2} |F(t+\nu h)| d\nu \ge$$

$$\ge h e^{-1} \int\limits_{-1}^{1} |F(t+\nu h)| d\nu.$$

Следовательно,

$$I_3 = \int\limits_{T}^{T+H} I_1^{\alpha}(t) dt \ge h^{\alpha} \cdot e^{-\alpha} \int\limits_{T}^{T+H} \left(\int\limits_{-1}^{1} |F(t+\nu h)| d\nu \right)^{\alpha} dt.$$

Применим неравенство Гёльдера для внутреннего интеграла, имеем

$$I_3 \ge \frac{1}{2} h^{\alpha} \cdot e^{-\alpha} \int\limits_{T}^{T+H} \int\limits_{-1}^{1} |F(t+\nu h)|^{\alpha} d\nu dt \ge$$

$$\geq \frac{1}{2}h^{\alpha}\cdot e^{-\alpha}\int\limits_{T+1}^{T+H-1}|F(t)|^{\alpha}dt=\frac{1}{2}h^{\alpha}\cdot e^{-\alpha}I_4,$$

где

$$I_4=\int\limits_{T+1}^{T+H-1}|F(t)|^{\alpha}dt.$$

Применяя лемму Р.Гэбриэла [179] для оценки I_4, находим

$$I_4\geq\frac{1}{5^{2-a}c_g^2}H.$$

Следовательно, для интеграла I_3 находим окончательную оценку:

$$I_3\geq c_3h^{\alpha}H,$$

где $c_3>0$ – абсолютная постоянная.

Оценка интеграла I_2 сверху. Воспользовавшись неравенством Гёльдера для оценки интеграла I_2, имеем

$$I_2^{\frac{2}{\alpha}}\leq H^{\frac{2}{\alpha}-1}J_2,\quad J_2=\int\limits_{T}^{T+H}I_2^2(t)dt.$$

Согласно приближенному функциональному уравнению для $F(t)$, получим

$$I_2(t)\ll\left|\int\limits_{-h_1}^{h_1}e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2}\sum_{\lambda<P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i(t+u)}du\right|+hT^{-0.01}=$$

$$=\left|\sum_{\lambda<P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}\int\limits_{-h_1}^{h_1}e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu}du\right|+hT^{-0.01}=$$

$$=\left|\sum_{\lambda<P}\frac{A(\lambda)d(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}\right|+hT^{-0.01},$$

где $d(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$d(\lambda) = \int\limits_{-h_1}^{h_1} e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu} du.$$

Далее для J_2, получим

$$J_2 \ll \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{H}\right)^2} \left| \sum_{\lambda<P} \frac{A(\lambda)d(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-iT}\lambda^{-it} \right|^2 + Hh^2T^{-0.02} \ll$$

$$\ll H(W_3 + W_4) + Hh^2T^{-0.02},$$

где

$$W_3 = W_3(T) =$$

$$= \left| \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)d(\lambda_1)\overline{A}(\lambda_2)\overline{d}(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) \right|.$$

$$W_4 = \sum_{\lambda<P} \frac{|A(\lambda)|^2|d(\lambda)|^2}{\lambda},$$

Оценим кратную тригонометрическую сумму $W_3(T)$. Справедлива следующая

Лемма 4.4.1. *Пусть ε-произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее 0.01, (κ, λ) — произвольная экспоненциальная пара*

$$\theta(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2}, \quad \sigma(\kappa) = \frac{\ln \mathscr{L}}{(\kappa+1)\ln T}, \quad \mathscr{L} = \ln P.$$

Тогда при $H = T^{\theta(\kappa,\lambda)+\varepsilon+\sigma(\kappa)}$ справедлива оценка:

$$W_3(T) \ll h^2T^{-0.98\varepsilon}.$$

Показатель $\theta(\kappa;\lambda)$ также появляется в оценке остаточного члена в проблеме делителей Дирихле о числе целых точек в гиперболе $xy \le N$, $x > 0$, $y > 0$ и в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге $x^2+y^2 \le R$.

Наилучшая оценка сверху для $\theta(\kappa;\lambda)$ принадлежит J. Bourgain and N. Watt [175]. Они доказали, что

$$\theta_0 = \min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}} \theta(\kappa,\lambda) = \min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}} \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2} \le \frac{1515}{4816} = \frac{1}{3} - \frac{271}{3\cdot 4816} \approx 0.314576,$$

Отсюда и из леммы 4.4.1 получаем следующее

Следствие 4.4.1.1. *Пусть ε-произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее* 0.01*. Тогда при $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon}$ имеет место оценка:*

$$W_3(T) \ll h^2 T^{-0.98\varepsilon}.$$

Доказательство. Повторяем рассуждения леммы 3.2.1. Сначала оценим часть суммы $W_3(T)$ с условием $\lambda_2 > \lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})$. При выполнение условия $\lambda_2 > \lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})$, для $W_3(T)$, используя неравенства $\ln(1+x) > 0,5x$, $0 < x \le 0,5$, имеем

$$\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) < \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(1+\frac{\mathscr{L}}{H}\right)\right)^2\right) < \\ < \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right).$$

Для интеграла $d(\lambda)$ имеет место оценка $|d(\lambda)| \le \sqrt{\pi}h$.

Через $W_3'(T)$ обозначаем часть суммы $W_3(T)$ с условиями

$$\lambda_2 - \lambda_1 > \frac{\mathscr{L}}{H},$$

находим

$$|W_3'(T)| < \pi h^2 \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)\left(\sum_{\lambda<P}\frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}}\right)^2.$$

Далее, воспользовавшись определением суммы $A(\lambda)$ и соотношениями

$|r(m)| \le 1$ и $|h(\nu)| \le 1$, имеем

$$\sum_{\lambda<P} \frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}} \le \sum_{\lambda<P} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda \\ \nu_1,\nu_2<X}} \frac{|h(\nu_1)||h(\nu_2)||r(n)|}{\nu_2} \ll P^{\frac{1}{2}} X \ln X.$$

Таким образом, находим

$$W_3'(T) \ll h^2 \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right) PX^2 \ln^2 X.$$

Далее рассмотрим случай, когда

$$\lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_1 \left(1 + \frac{\mathscr{L}}{H}\right).$$

Разобьём промежуток $0 < \lambda_1 < P$ в сумме $W_3(T)$ на $\ll \mathscr{L}$ промежутки вида $\Lambda < \lambda_1 \le \Lambda_1 \le 2\Lambda$, и через $W_3(\Lambda)$ обозначая максимальную из получившихся таких сумм, получим неравенства

$$W_3(T) \ll \mathscr{L}|W_3(\Lambda)| + h^2 \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right) PX^2 \ln^2 X. \qquad (4.4.5)$$

Далее сумму $W_3(\Lambda)$ оценим при выполнении условия

$$\Lambda \le \frac{H}{X^2 \mathscr{L}}.$$

Для чисел λ_1 и λ_2 имеем

$$\lambda_1 < \lambda_2, \quad \lambda_1 = \frac{n_1\nu_1}{\nu_2}, \quad \lambda_2 = \frac{n_2\nu_3}{\nu_4}, \quad \nu_i < X, \quad i = 1,2,3,4,$$

тогда

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \ge 1 + \frac{\mathscr{L}}{2H},$$

следовательно,

$$\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) < \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(1+\frac{\mathscr{L}}{2H}\right)\right)^2\right) <$$
$$< \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{64}\right).$$

Сумму $W_3(\Lambda)$, при условии $\Lambda \le HX^{-2}\mathscr{L}^{-1}$, оценим подобно тому, как для W_3', имеем

$$W_3(\Lambda) \ll h^2 \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{64}\right) PX^2 \ln^2 X. \qquad (4.4.6)$$

Теперь рассмотрим сумму $W_3(\Lambda)$ при условии

$$\Lambda > \frac{H}{X^2\mathscr{L}}$$

и выразим через $C(u,h)$ и $F_j(h,\nu)$, имеем

$$W_3(\Lambda) = \sum_{\Lambda<\lambda_1\le\Lambda_1} \sum_{\lambda_1<\lambda_2\le\lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-iT} \times$$
$$\times d(\lambda_1)\overline{d}(\lambda_2)\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

где

$$\frac{H}{X^2\mathscr{L}} < \Lambda < \Lambda_1 \le 2\Lambda < P.$$

Применяя определения функции $A(\lambda)$ и обозначения

$$\frac{\nu_1\nu_4}{\nu_2\nu_3} = \frac{a}{b}, \quad (a,b)=1,$$

сумму $W_3(\Lambda)$ представляем в следующем виде:

$$W_3(\Lambda) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\sqrt{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}} W_3(\Lambda,\nu); \qquad (4.4.7)$$

$$\nu = (\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4),$$

где

$$W_3(\Lambda,\nu)=\sum_{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1}<n_1\le\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}}\ \sum_{\frac{n_1a}{b}<n_2\le\frac{n_1a}{b}(1+\mathscr{L}H^{-1})} r(n_1)r(n_2)\times$$
$$\times\,\Phi_2(n_1,n_2,\nu)\left(\frac{n_1a}{n_2b}\right)^{-iT},$$
$$\Phi_2(n_1,n_2,\nu)=\frac{\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{n_1a}{n_2b}\right)^2\right)}{\sqrt{n_1n_2}}d(\lambda_1)\overline{d}(\lambda_2).$$

Числа n_1 и n_2 представим в виде членов арифметических прогрессии с разностью $5a$ и $5b$

$$n_1=5bm+b_1,\quad 0\le b_1<5b,$$
$$\frac{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1}-b_1}{5b}<m\le\frac{\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}-b_1}{5b},\quad n_2=5am_1+a_1,$$
$$0\le a_1<5a,\quad m+\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a}<m_1\le m+\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a}+\left(m+\frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H},$$

применяя обозначения

$$N=\frac{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1}-b_1}{5b},\quad N_1=\frac{\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}-b_1}{5b},$$
$$\alpha=\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a},\quad \omega(m)=\left(m+\frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H},$$

и суммирования по b_1 и a_1 делая внешним, учитывая $r(5bm+b_1)=r(b_1)$ и $r(5am_1+a_1)=r(a_1)$, последовательно, приходим к формуле

$$W_3(\Lambda,\nu)=\sum_{0\le b_1<5b}r(b_1)\sum_{0\le a_1<5a}r(a_1)W_2(\Lambda,\nu,m,m_1),\tag{4.4.8}$$
$$W_3(\Lambda,\nu,m,m_1)=\sum_{N<m\le N_1}\ \sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(m)}\Phi_2(5bm+b_1,5a(m+h)+a_1,\nu)\times$$
$$\times\left(\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{(m+h)+\frac{a_1}{5a}}\right)^{iT}.$$

В последней сумме суммирование по m_1 принимает значения из интервала $m+\alpha < m_1 \le m+\alpha+\omega(m)$, следовательно, заменяем m_1 на $m+h$, где h значения своё принимает $\alpha < h \le \alpha+\omega(m)$, для суммы $W_3(\Lambda,\nu,m,m_1)$, имеем

$$W_3(\Lambda,\nu,m,m_1) = \sum_{N<m\le N_1}\sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(m)} \Phi_2(5bm+b_1, 5a(m+h)+a_1,\nu)\times$$

$$\times\left(\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{(m+h)+\frac{a_1}{5a}}\right)^{iT}.$$

Отметим, что $h\ge 0$, действительно

$$-1 < -1+\frac{1}{5a} \le \alpha = \frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a} \le 1-\frac{1}{5b} < 1.$$

Порядок суммирования по h и m заменяем, учитывая равносильности условия

$$h\le\alpha+\omega(m), \quad m \ge (h-\alpha)\frac{H}{\mathscr{L}}-\frac{b_1}{5b}$$

имея ввиду обозначения

$$N_2 = \max\left(N, \frac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha)-\frac{b_1}{5b}\right),$$

находим

$$W_3(\Lambda,\nu,m,m_1) = \sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(N_1)}\sum_{N_2<m\le N_1} \Phi_2(5bm+b_1, 5a(m+h)+a_1,\nu)\times$$
$$\times\left(\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{m+h+\frac{a_1}{5a}}\right)^{iT}.$$

Применяя лемму 2.2.12 к сумме по m, приходим к формуле

$$W_3(\Lambda,\nu,m,m_1) =$$

$$= \sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(N_1)} \left(-\int_{N_2}^{N_1} C(u,h) f_2'(u,h)du + C(N_1,h) f_2(N_1,h) \right),$$

$$f_2(u,h) = \Phi_2(5bu+b_1, 5a(u+h)+a_1, \nu),$$

$$C(u,h) = \sum_{N_2<m\le u} \left(\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{m+h+\frac{a_1}{5a}} \right)^{iT}.$$

Полученную формулу подставляем в (4.4.8), затем в формулу (4.4.7), находим

$$W_3(\Lambda) \le \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}} \times$$
$$\times \sum_{0\le b_1<5b} \sum_{0\le a_1<5a} \sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(N_1)} F_2(h,\nu) \max_{N_2<u\le N_1} |C(u,h)|, \qquad (4.4.9)$$

где

$$F_2(h,\nu) = \int_{N_2}^{N_1} |f_2'(u,h)|du + |f_2(N_1,h)|.$$

Теперь оценим $F_2(h,\nu)$. Используя определении функции $d(\lambda_1)$ и $\overline{d}(\lambda_2)$ представляем функцию

$$f_2(u,h) = \Phi_2(5bu+b_1, 5a(u+h)+a_1, \nu)$$

в следующим виде

$$f_2(u,h) = \frac{\exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{u+\frac{b_1}{5b}}{u+h+\frac{a_1}{5a}} \right)^2 \right)}{5\sqrt{ab}\sqrt{\left(u+\frac{b_1}{5b}\right)\left(u+h+\frac{a_1}{5a}\right)}} \cdot d(\lambda_1)\overline{d}(\lambda_2) =$$
$$= f_1(u,h)\left(d(\lambda_1)\overline{d}(\lambda_2)\right),$$

вычисляем производную $f_2(u,h)$ по переменной u, имеем

$$f_2'(u,h) = f_1'(u,h)\left(d(\lambda_1)\overline{d}(\lambda_2)\right).$$

Учитывая, что

$$f_1(u,h) = \Phi_1(5bu + b_1, 5a(u+h) + a_1, \nu),$$

найдём

$$f_1'(u,h) = \left(\frac{\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{u+\frac{b_1}{5b}}{u+h+\frac{a_1}{5a}}\right)^2\right)}{5\sqrt{ab}\sqrt{\left(u+\frac{b_1}{5b}\right)\left(u+h+\frac{a_1}{5a}\right)}} \right)' =$$

$$= \frac{\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{u+\frac{b_1}{5b}}{u+h+\frac{a_1}{5a}}\right)^2\right)}{5\sqrt{ab}} \times$$

$$\times \frac{2H\ln\left(1+\frac{h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}}{u+\frac{b_1}{5b}}\right)\left(h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}\right) - 2u - h - \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a}}{2\left(u+\frac{b_1}{5b}\right)^{\frac{3}{2}}\left(u+h+\frac{a_1}{5a}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Знак функции $f_1'(u,h)$ и числителя последней дроби одинаковы, пользуясь границами изменения переменных $N_2 < m \le N_1$ и $\alpha < h \le \alpha + \omega(N_1)$

$$N_2 = \max\left(N, \frac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha) - \frac{b_1}{5b}\right) =$$

$$= \max\left(\frac{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1} - b_1}{5b}, \frac{H}{\mathscr{L}}\left(h - \frac{b_1}{5b} + \frac{a_1}{5a}\right) - \frac{b_1}{5b}\right),$$

$$\alpha = \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a}, \quad \omega(N_1) = \left(N_1 + \frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H} = \frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}\cdot\frac{\mathscr{L}}{5bH},$$

находим

$$2H\ln\left(1+\frac{h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}}{u+\frac{b_1}{5b}}\right)\left(h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}\right) -$$

$$- 2u - h - \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a} <$$

$$< \frac{2\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b}\left(\left(1+\frac{\delta}{H}\right)\ln\left(1+\frac{\mathscr{L}}{H}\right)\mathscr{L} - 1\right) <$$

$$< \left(\frac{2\mathscr{L}^2}{H} - 1\right)\frac{2\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b} < 0.$$

То есть $f_1'(u,h)<0$, поэтому с учётом $f_1(u,h)>0$, находим

$$F_2(h,\nu)=-\int\limits_{N_2}^{N_1} f_2'(u,h)du+f_2(N_1,h)\leq f_2(N_2,h).$$

Переходя к переменным n_1, n_2, потом к λ_1, λ_2 используя неравенства $\Lambda<\lambda_1<\lambda_2$, $|d(\lambda)|\leq\sqrt{\pi}h$, для оценки $f_2(u,h)$, имеем

$$\begin{aligned} F_2(h,\nu) &= |f_2(u,N_2)| = \\ &= \sqrt{\frac{\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4}}\cdot\frac{\left|\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)\right|}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}|d(\lambda_1)||\overline{d}(\lambda_2)|\leq \\ &\leq \sqrt{\frac{\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4}}\cdot\frac{\pi h^2}{\Lambda}. \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

Далее сведём оценки суммы $W_3(\Lambda)$ к оценке суммы $C(u,h)$. Полученную оценку (4.4.10) подставляя в (4.4.9), находим

$$\begin{aligned} W_3(\Lambda) \ll \frac{h^2}{\Lambda}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{1}{\nu_2\nu_4}\times \\ \times\sum_{0\leq b_1<5b}\ \sum_{0\leq a_1<5a}\ \sum_{\alpha<h\leq\alpha+\omega(N_1)}\max_{N_2<u\leq N_1}|C(u,h)|. \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

Оценим внутреннюю сумму

$$C(u,h)=\sum_{N_2<m\leq u} e\left(\frac{T}{2\pi}\ln\frac{m+h+\frac{a_1}{5a}}{m+\frac{b_1}{5b}}\right),$$

где

$$N_2=\max\left(\frac{\Lambda\nu_2}{5b\nu_1}-\frac{b_1}{5b},\frac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha)-\frac{b_1}{5b}\right),\quad u\leq\frac{\Lambda_1\nu_2}{5b\nu_1}-\frac{b_1}{5b}.$$

Для этого применяем метод экспоненциальных пар. Полагая

$$f(y)=\frac{T}{2\pi}\ln\frac{y+h+\frac{a_1}{5a}}{y+\frac{b_1}{5b}},$$

$$A = \frac{T|h-\alpha|}{N_2^2} \ll \frac{T|h-\alpha|b^2\nu_1^2}{\Lambda^2\nu_2^2},$$

$$B = u - N_2 \le N_1 - N_2 =$$

$$= \frac{\Lambda_1\nu_2}{5b\nu_1} - \frac{b_1}{5b} - \max\left(\frac{\Lambda\nu_2}{5b\nu_1} - \frac{b_1}{5b}, \frac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha) - \frac{b_1}{5b}\right) \ll \frac{\Lambda\nu_2}{b\nu_1}.$$

Для вычисления производных s–го порядка функции $f(u)$, производную первого порядка этой функции представим в следующем виде:

$$f'(y) = -\frac{T(h-\alpha)}{2\pi} \cdot f_1(y)f_2(y), \quad f_1(y) = \frac{1}{y + h + \frac{a_1}{5a}},$$

$$f_2(y) = \frac{1}{y + \frac{b_1}{5b}}, \quad \alpha = \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a},$$

и учитывая

$$f_1^{(s-1-j)}(y) = \frac{(-1)^{s-1-j}(s-1-j)!}{(y+h+\frac{a_1}{5a})^{s-j}},$$

$$f_2^{(j)}(y) = \frac{(-1)^j j!}{(y+\frac{b_1}{5b})^{j+1}},$$

используя формулу производной произведения двух функций, то есть формулу Лейбница для $s-1$ порядка, имеем

$$\begin{aligned} f^{(s)}(y) &= -\frac{T(h-\alpha)}{2\pi}\left(f_1(y)f_2(y)\right)^{(s-1)} = \\ &= -\frac{T(h-\alpha)}{2\pi}\sum_{j=0}^{s-1} C_{s-1}^j f_1^{(s-1-j)}(y) f_2^{(j)}(y) = \\ &= \frac{(-1)^s\, s!\, T(h-\alpha)}{2\pi}\sum_{j=0}^{s-1}\frac{1}{(y+h+\frac{a_1}{5a})^{s-j}(y+\frac{b_1}{5b})^{j+1}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$AB^{1-s} \ll f^{(s)}(u) \ll AB^{1-s}, \qquad s = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, для любой экспоненциальной пары (κ, λ), имеет место оценка

$$|C(u,h| \ll \left(\frac{T(h-\alpha)b^2\nu_1^2}{\Lambda^2\nu_2^2}\right)^{\kappa}\left(\frac{\Lambda\nu_2}{b\nu_1}\right)^{\lambda} =$$

$$= \frac{T^{\kappa}b^{2\kappa-\lambda}\nu_1^{2\kappa-\lambda}}{\Lambda^{2\kappa-\lambda}\nu_2^{2\kappa-\lambda}}(h-\alpha)^{\kappa}.$$

Полученную оценку суммы $|C(u,h|$, подставляя в формулу (4.4.11), находим

$$W_3(\Lambda) \ll \frac{h^2T^{\kappa}}{\Lambda^{1+2\kappa-\lambda}}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{\nu_1^{2\kappa-\lambda}b^{2\kappa-\lambda}}{\nu_2^{1+2\kappa-\lambda}\nu_4}\times$$

$$\times\sum_{0\le b_1<5b}\ \sum_{0\le a_1<5a}\ \sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(N_1)}(h-\alpha)^{\kappa} \ll$$

$$\ll \frac{h^2T^{\kappa}}{\Lambda^{1+2\kappa-\lambda}}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{\nu_1^{2\kappa-\lambda}ab^{1+2\kappa-\lambda}}{\nu_2^{1+2\kappa-\lambda}\nu_4}(\omega(N_1))^{\kappa+1}.$$

Учитывая эту оценку и соотношения

$$\omega(N_1) = \left(N_1+\frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H} = \frac{\Lambda_1\nu_2\mathscr{L}}{5Hb\nu_1},$$

$$a = \frac{\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)},\quad b = \frac{\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)},$$

находим

$$W_3(\Lambda) \ll \frac{h^2T^{\kappa}\Lambda^{\lambda-\kappa}}{H^{\kappa+1}}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{(\nu_1\nu_3)^{\kappa-\lambda}}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{1+\kappa-\lambda}} \le$$

$$\le \frac{h^2T^{\kappa}\Lambda^{\lambda-\kappa}}{H^{\kappa+1}}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}(\nu_1\nu_3)^{\kappa-\lambda} \ll$$

$$\ll h^2\,\frac{T^{\kappa}\Lambda^{\lambda-\kappa}X^{4+2\kappa-2\lambda}}{H^{\kappa+1}}.$$

Так как $0\le\lambda-\kappa\le 1$, $0\le\kappa\le 0.5$, используем неравенства

$$2\Lambda < P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}},$$

и потом подставляем значения следующих параметров:

$$X = T^{0.01\varepsilon}, \quad H = T^{\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}+\varepsilon+\sigma(\kappa)}, \quad \sigma(\kappa) = \frac{\ln \mathscr{L}}{(\kappa+1)\ln T},$$

имеем

$$\begin{aligned}
W_3(\Lambda) \ll h^2 \frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2}} X^{4-2(\lambda-\kappa)}}{H^{\kappa+1}} \le \\
&\le h^2 \frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2}} X^2}{H^{\kappa+1}} = h^2 \left(\frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}+0.01\varepsilon\cdot\frac{2}{\kappa+1}}}{H} \right)^{\kappa+1} = \\
&= h^2 \mathscr{L}^{-1} \left(\frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}+\frac{0.02\varepsilon}{\kappa+1}+\sigma(\kappa)}}{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}+\varepsilon+\sigma(\kappa)}} \right)^{\kappa+1} = h^2 \mathscr{L}^{-1} \left(T^{-(\kappa+1)\varepsilon+0.02\varepsilon} \right) = \\
&= h^2 \mathscr{L}^{-1} T^{-\varepsilon+\varepsilon(0.02-\kappa)} \le h^2 \mathscr{L}^{-1} T^{-\varepsilon+0.02\varepsilon} = h^2 \mathscr{L}^{-1} T^{-0.98\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Следовательно, получаем

$$W_3(\Lambda) \ll h^2 \mathscr{L}^{-1} T^{-0.98\varepsilon}.$$

Найденную оценку суммы $W_3(\Lambda)$ и оценку (4.4.6) подставляя в формулу (4.4.5), найдём

$$\begin{aligned}
W_3(T) \ll \mathscr{L} \left(h^2 \mathscr{L}^{-1} T^{-0.98\varepsilon} + h^2 \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16} \right) P X^2 \ln^2 X \right) + \\
+ h^2 \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{64} \right) P X^2 \ln^2 X \ll h^2 T^{-0.98\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Продолжаем доказательство теоремы 4.1.2. Для суммы W_4 находим оценку вида

$$W_4 \ll h^2 \Delta,$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta = &\frac{\log T}{\sqrt{\log X}} \left(c + (ch \log T)^{-2} \exp(-2(h_1 h^{-1})^2) + \right. \\
&\left. + \exp(-2(hc \log T)^2) \right). \qquad (4.4.12)
\end{aligned}$$

Следовательно, для интегралов J_2 и I_2 находим оценки

$$J_2 \leq c_5 H h^2 \Delta; \quad I_2^{\frac{2}{\alpha}} \leq c_5 H^{\frac{2}{\alpha}} h^2 \Delta; \quad I_2 \leq c_5^{\frac{\alpha}{2}} H h^\alpha \Delta^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Полученные оценки I_1, I_2 и I_3 подставляем в формуле (4.4.3), найдём

$$\mu(E) \geq \frac{\left(c_3 H h^\alpha - c_5^{\frac{\alpha}{2}} H h^\alpha \Delta^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}}{\left(h^2 H \frac{\log T}{\sqrt{\log X}}\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}} = \frac{H(c_3 - c_5^{\frac{\alpha}{2}} \Delta^{\frac{\alpha}{2}})}{\left(\frac{\log T}{\sqrt{\log X}}\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}}.$$

Значения параметров $X = T^{0.01\varepsilon}$ и c, подставляя в (4.4.12), получим

$$\Delta \leq \frac{30}{\sqrt{\varepsilon}} \exp(-\sqrt{\log\log T}), \quad (c_5 \Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \leq \exp\left(-\frac{c_1}{4}\right).$$

Положительную постоянную $c_1 > 1$ выбираем так, что имеет место неравенство

$$c_3 e^{-1} \geq \exp\left(-\frac{c_1}{4}\right).$$

Следовательно, имеем

$$\mu(E) \geq c_6 H \left(\frac{\log T}{\sqrt{\log X}}\right)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}} \geq c_6 H \left(\frac{\log T}{\sqrt{\log X}}\right)^{-\alpha}.$$

Из определения E и оценки $\mu(E)$, следует,что число нулей функции $F(t)$ на интервале $(T, T+H)$, является не менее

$$c_7 H h_1^{-1} \left(\frac{\log T}{\sqrt{\log X}}\right)^{-\alpha}, \tag{4.4.13}$$

где $c_7 > 0$ – абсолютная постоянная. Пользуясь значениями параметров

$$h = \frac{1}{c \log T} \sqrt{\log \frac{1}{c}}, \quad \frac{1}{c} = \sqrt{\log T} \exp \sqrt{\log\log T},$$

$$h_1 = h \sqrt{\log \frac{1}{c}}, \quad \alpha = \frac{c_1}{\sqrt{\log\log T}},$$

из (4.4.13) получаем утверждение теоремы, то есть:

$$R \geq H\sqrt{\log T}\exp(-c_8\sqrt{\log\log T});$$

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H\sqrt{\log T}\exp(-c_8\sqrt{\log\log T}),$$

где $c_8 > 0$ – абсолютная постоянная.

Теорема доказана.

Обсуждение полученных результатов

В диссертационной работе исследованы и решены научные проблемы аналитической теории чисел, а именно, по множеству всех экспоненциальных пар найдена нижняя грань длины промежутка критической прямой, содержащей нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди, получены новые равномерные по параметрам оценки специальных тригонометрических сумм в терминах экспоненциальных пар, усилено неравенство А.А.Карацубы о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, притом для промежутков, имеющих более короткую длину.

Ранее лучшие результаты по этим задачам принадлежали английским математикам Г.Харди, Дж.Литллвуду, Г.Дэвенпорту, Г.Хейльбронну, норвежскому математику А.Сельбергу, чешскому математику Я.Мозеру и советским математикам С.М.Воронину и А.А.Карацубе.

Приведём основные результаты учёных по этому направлению и сопоставим их с результатами, полученными в диссертационной работе.

Наряду с задачей о соседних нулях функции Харди, лежащих на критической прямой, А.А.Карацуба впервые исследовал нули нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди. Он показал, что с увеличением порядка производной длина промежутка, на котором заведомо лежит нуль функции $Z^{(j)}(t)$ уменьшается и доказал теорему: *Пусть k–натуральное число, $T \geq T_0(k) > 0$, $H \geq cT^{1/(6k+6)}\ln^{2/(k+1)} T$, $c = c(k) > 0$. Тогда промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечётного порядка функции $Z^{(k)}(t)$.*

В диссертационной работе задача об оценке сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной функции Харди, сведена к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар: *пусть (κ, λ) — про-*

извольная экспоненциальная пара, j — натуральное число, $T \geq T_0(j) > 0$, $c = c_0(j) > 0$, тогда функция $Z^{(j)}(t)$ имеет нуль нечётного порядка в промежутке $(T, T+H)$, если

$$H \geq cT^{\omega_j(\kappa,\lambda)}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}, \quad \omega_j(\kappa,\lambda) = \frac{\kappa+\lambda-0.5}{2\kappa+4\lambda+2j-1}.$$

Дробно-линейную функцию $\omega_j(\kappa,\lambda)$ для удобства представляем в виде

$$\omega_j(\kappa,\lambda) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2-\delta_j^{-1}(\kappa,\lambda)}\right), \quad \delta_j(\kappa,\lambda) = \frac{\lambda+j}{0,5-\kappa+j},$$

и её минимизацию сводим к минимизацию функции $\delta_j(\kappa,\lambda)$ по множеству всех экспоненциальных пар.

Полученный результат обобщает известный результат А.А.Карацубы при

$$(\kappa,\lambda) = \left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right) = AB(0,1), \quad \delta_j\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3j+1},$$

$$\omega_j\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6j+6}, \; j \in \mathbb{N}.$$

В диссертационной работе, методом оптимизации экспоненциальных пар минимизирована величина $\omega_j(\kappa,\lambda)$ по множеству всех экспоненциальных пар, то есть, доказана теорема: *Пусть $j \geq 3$ — натуральное число, $T \geq T_0(j) > 0$, $c = c(j) > 0$, тогда функция $Z^{(j)}(t)$ имеет нуль нечётного порядка в промежутке $(T, T+H)$, если*

$$H \geq cT^{\frac{1}{6+6j}-\frac{1}{6(1+j)(19+18j)}}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}.$$

Отметим, что этот результат является улучшением теоремы А.А. Карацубы при любом натуральном $j \geq 3$ и является окончательным в рамках данного метода.

В частности, также в диссертационной работе получены новые оценки сверху величины длин промежутков критической прямой, в которых содержатся нули нечётного порядка производных первого и второго порядка функции Харди, что соответственно уточняет теоремы А.А.Карацубы при $j = 1$ и $j = 2$.

Справедливы следующие утверждения:

Пусть $T \gg 1$, тогда функция $Z'(t)$ имеет нуль нечётного порядка в промежутке $(T,\, T+H)$, если

$$H \gg T^{\frac{1}{12}-\frac{65601}{810284}} \ln T.$$

Пусть $T \gg 1$, тогда функция $Z''(t)$ имеет нуль нечётного порядка в промежутке $(T,\, T+H)$, если

$$H \gg T^{\frac{1}{18}} (\ln T)^{\frac{2}{3}}.$$

При исследования задачи об оценке количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой, основным моментом является оценка специальных тригонометрических сумм вида

$$W_0 = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_1 = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} B\left(\frac{P}{\lambda_1}\right)\overline{B\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_2 = \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

где

$$A(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}, \quad T \le t \le T+H, \quad T^{\frac{1}{4}} < H < T^{\frac{1}{3}}$$

$$B(\varphi)=\left(\frac{\varphi^{i\eta}-1}{\ln\varphi}\right)^k,\qquad \overline{B(\psi)}=\left(\frac{\psi^{-i\eta}-1}{\ln\psi}\right)^k,\quad P=\sqrt{5T(2\pi)^{-1}},$$
$$r(n)=\frac{1-i\text{æ}}{2}\chi(n)+\frac{1+i\text{æ}}{2}\bar\chi(n),\quad h(\nu)\equiv\beta(\nu)\chi(\nu)=\beta(\nu)\overline{\chi}(\nu),$$

Для этих сумм А.А. Карацуба при $H\geq T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$ получил следующие нетривиальные оценки

$$W_j(T)\ll T^{-\varepsilon_1},\quad j=0,2;$$
$$W_1(T)\ll\left(\varepsilon_2^{-2k}(\ln T)^{-2k}+\varepsilon_2^{-k}\eta^k(\ln T)^{-k}\right)T^{-\varepsilon_1}.$$

В отличие от этих оценок в диссертационной работе получены новые равномерные по параметрам оценки тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j=0;1;2$, и задача о нетривиальности оценки этих сумм относительно параметра H сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар, и доказано: *Пусть ε_1 и ε_2 - малые произвольные положительные числа, не превосходящие $0,001$, $k\in\mathbb{N}$, $0<\eta<1$. Тогда при $H=T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon_1}$ имеют место оценки:*

$$W_1(T)\ll\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2}+\eta k\mathscr{L}\right)T^{-\varepsilon_1},$$
$$W_j(T)\ll T^{-\varepsilon_1},\quad j=0,\ j=2.$$

При нахождении оценки количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой используем оценки сумм $W(\theta)$ и $S(Y)$, которые определяются следующим образом:

$$W(\theta)=\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\left(\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4},$$
$$S(Y)=\sum_{\lambda\leq Y}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}},$$

где

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\left(1-\dfrac{\ln\nu}{\ln X}\right), & 1\le\nu<X, \\ 0, & \nu\ge X, \end{cases}$$

$$A(\lambda)=\sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}.$$

λ — положительное рациональное число, знаменатель которого не превосходит X.

В диссертационной работе для суммы $S(Y)$ получена асимптотическая формула, то есть, доказана теорема

Пусть $T^{0,1}\le Y\le T$, $\frac{1}{4}\le\theta\le\frac{1}{2}$, *тогда имеет место следующая асимптотическая формула:*

$$S(Y)=\frac{2(1+\text{æ}^2)}{5(1-2\theta)}Y^{1-2\theta}W(\theta)+\left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right)W(1-2\theta)+$$

$$+O\left(Y^{-2\theta}X^2\ln^2X\right).$$

Для суммы $W(\theta)$ получена следующая оценка сверху:

Пусть $0\le\theta\le\frac{1}{2}$, *тогда для суммы* $W(\theta)$ *справедлива следующая оценка*

$$W(\theta)=\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\left(\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4}=$$

$$=O\left(\frac{X^{2\theta}}{\sqrt{\ln X}}\right).$$

Следующая глава диссертационной работы посвящена исследованию нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой.

Количество нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой впервые исследовал А.А. Карацуба. Он в 1989 году доказал, что *если* ε *и* ε_1 *– произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* 0.001*, и* $T \geq T_0(\varepsilon,\varepsilon_1) > 0$ *и* $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$*, то выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon},$$

которое называется неравенством А.А.Карацубы.

Используя полученные в главе 3 равномерные по параметрам оценки тригонометрических сумм $W_j = W_j(T)$, $j = 0,1,2$, которые возникают при выводе оценки (4.1.2), удалось усилить неравенство (4.1.2) для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, притом для промежутков, имеющих более короткую длину. Доказано следующее утверждение

Пусть ε *и* ε_1 *– произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$*,* c_4*,* c_5*,* c_g *- абсолютные положительные постоянные, превосходящие* 1*,*

$$c_7 = \frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}.$$

Тогда при $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon_1}$*,* $T \geq T_0(\varepsilon,\varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq c_7 H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $T_0 = T_0(\varepsilon,\varepsilon_1)$ - такое, что выполняется соотношение

$$c_7(\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T_0 = \frac{(\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T_0 \cdot \varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}} \geq 1.$$

Поэтому из вышеуказанных утверждений следует вывод

Пусть ε *и* ε_1 *– произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$. *Тогда при* $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

В 1993 г. А.А.Карацуба, воспользовавшись новым усовершенствованным методом, при котором возникают почти такие же тригонометрические суммы, как при выводе оценки (4.1.2), получил более точную оценку вида

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}} \exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T}). \qquad (4.4.14)$$

Применяя равномерное по параметрам оценки тригонометрической суммы

$$W_3(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)d(\lambda_1)\overline{A}(\lambda_2)\overline{d}(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

где

$$d(\lambda) = \int\limits_{-h_1}^{h_1} e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu} du, \quad 0 < h < h_1 < 1,$$

$$A(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}, \quad P = \sqrt{\frac{5T}{2\pi}},$$

в диссертационном работе доказано неравенство (4.4.14) для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой для промежутков, имеющих более короткую длину.

Применяя метод экспоненциальных пар для тригонометрических сумм $W_3(T)$ получена новая нетривиальная оценка, то есть, доказано следующее утверждение

Пусть ε*-произвольное малое фиксированное положительное число,* *не превосходящее* 0.01, (κ, λ) — *произвольная экспоненциальная пара*

$$\theta(\kappa,\lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}, \quad \sigma(\kappa) = \frac{\ln \mathscr{L}}{(\kappa+1)\ln T}, \quad \mathscr{L} = \ln P.$$

Тогда при $H = T^{\theta(\kappa,\lambda)+\varepsilon+\sigma(\kappa)}$ *справедлива оценка:*

$$W_3(T) \ll h^2 T^{-0.98\varepsilon}.$$

Из этого утверждения получаем следующее

Пусть ε*-произвольное малое фиксированное положительное число не превосходящее* 0.01. *Тогда при* $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon}$ *имеет место оценка:*

$$W_3(T) \ll h^2 T^{-0.98\varepsilon}.$$

В последнем параграфе главы доказана следующая теорема, которая усиливает результаты, полученные А.А.Карацубой.

Пусть ε *– произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее 0.01, тогда при* $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon}$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H\sqrt{\log T}\exp(-c_8\sqrt{\log\log T}),$$

где $c_8 > 0$ *– абсолютная постоянная,*

которое является уточнением неравенства А.А.Карацубы, когда промежуток имеет более короткую длину. Основным утверждением, позволившим доказать эту теорему, является новая оценка специальной тригонометрической суммы $W_3 = W_3(T)$ равномерная по параметрам в терминах экспоненциальных пар.

Выводы

Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют теоретический интерес и состоят в следующем:

1. задача об оценке сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди, сведена к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар [1-А, 3-А, 9-А, 11-А, 19-А, 27-А, 32-А, 40-А];
2. найдены новые оценки сверху величины длин промежутков критической прямой, в которых заведомо содержатся нули нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди [3-А, 4-А, 5-А, 6-А, 7-А, 10-А, 13-А, 16-А, 17-А, 18-А, 20-А, 21-А, 22-А, 25-А, 26-А, 34-А, 38-А, 39-А];
3. получены новые равномерные по параметрам оценки тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0; 1; 2; 3$ в терминах экспоненциальных пар, которые возникают при исследовании нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой [2-А, 8-А, 12-А, 14-А, 15-А, 29-А, 31-А, 35-А, 36-А, 37-А];
4. с использованием новых равномерных по параметрам оценок тригонометрических сумм задача об оценке количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна сведена к задаче отыскания экспоненциальных пар [2-А, 8-А, 15-А, 23-А, 28-А, 37-А];
5. усилено неравенство А.А.Карацубы о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, притом для промежутков, имеющих более короткую длину [2-А, 8-А, 15-А, 24-А, 30-А, 33-А, 37-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применение в аналитической теории чисел при дальнейших исследованиях нулей рядов Дирихле, в том числе, линейных комбинациях L – рядов Дирихле, для которых не выполняется гипотеза Римана о нулях в критической полосе. Полученные результаты могут быть использованы в научных учреждениях и ВУЗах, где ведутся исследования по аналитической теории чисел, например, в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, в Таджикском национальном университете, в Таджикском государственном педагогическом университете им. С.Айни. Также материалы диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

Список литературы

[1]. Аминов А.С. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие в коротких промежутках критической прямой [Текст] /А.С. Аминов // ДАН РТ. —2016. —Т. 59. —№ 11-12. —С. 453–456.

[2]. Аминов А.С. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой [Текст] /А.С. Аминов// «Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам». Материалы XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложение», посвящённой 70-летию со дня рождения Г.И. Архипова и С.М. Воронина. —Саратов. —12-15 сентября 2016 г. —№ 8. —С. 3–5.

[3]. Аминов А.С. О приближенном функциональном уравнении функции Дэвенпорта-Хейльбронна [Текст]/А.С. Аминов // ДАН РТ. —2018. —Т. 61. —№ 9-10. —С. 714–720.

[4]. Аминов А.С. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие в коротких промежутках критической прямой [Текст] /А.С. Аминов // Канд. дисс. —2019. —Душанбе. —113 стр.

[5]. Архипов Г.И. Особые случаи теории кратных тригонометрических сумм [Текст] / Г.И. Архипов, А.А. Карацуба, В.Н. Чубариков // Изв. АН СССР. Сер. матем. —47:4. —1983. —С. 707–784.

[6]. Архипов Г.И. Теория кратных тригонометрических сумм [Текст] /Г.И. Архипов, А.А. Карацуба, В.Н. Чубариков // Наука. —М. —1987. —368 с.

[7]. Виноградов И.М. О среднем значении числа классов чисто коренных форм отрицательного определителя [Текст] /И.М. Виноградов // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. —1918.

[8]. Виноградов И.М. Избранные труды [Текст] /И.М. Виноградов —М.: Издательство АН СССР. —1952.

[9]. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. [Текст] /И.М. Виноградов —М.: Наука. —1971.

[10]. Виноградов И.М. Особые варианты методов тригонометрических сумм [Текст] /И.М. Виноградов —М.: Наука. —1976.

[11]. Виноградов И.М., Карацуба А.А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Алгебра, математическая логика, теория чисел, топология [Текст] /И.М. Виноградов, А.А. Карацуба // Сборник обзорных статей. 1. К 50-летию Института, Тр. МИАН СССР. —168. —1984. —С. 4–30.

[12]. Воронин С.М. О распределении ненулевых значений ζ–функции Римана [Текст] /С.М. Воронин // Тр. МИАН СССР. —128. —1972. —С. 131–150.

[13]. Воронин С.М. О дифференциальной независимости ζ–функций [Текст] /С.М. Воронин // Докл. АН СССР. —209:6. —1973. —С. 1264–1266.

[14]. Воронин С.М. О нулях частных сумм ряда Дирихле дзета-функции Римана [Текст] /С.М. Воронин // Докл. АН СССР. —216:5. —1974. —С. 964–967.

[15]. Воронин С.М. О функциональной независимости L-функций Дирихле [Текст] /С.М. Воронин // Acta Arithmetica. —1975. —Т. 27. —С. 493–503.

[16]. Воронин С.М. Теорема о распределении значений дзета-функции Римана [Текст] /С.М. Воронин // Докл. АН СССР. —221:4. —1975. —С. 771–780.

[17]. Воронин С.М. Теорема об универсальности дзета-функции Римана [Текст] /С.М. Воронин // Изв. АН СССР. Сер. матем. —39:3. —1975. —С. 475–486.

[18]. Воронин С.М. О нулях дзета-функций квадратичных форм [Текст] /С.М. Воронин // Тр. МИАН СССР. —142. —1976. —С. 135–147.

[19]. Воронин С.М. Аналитические свойства производящих функций Дирихле арифметических объектов [Текст] /С.М. Воронин: Диссертация на соискании доктора физ.-мат. наук. МИАН СССР. —М. —1977. —90 с.

[20]. Воронин С.М. Аналитические свойства производящих функций Дирихле арифметических объектов [Текст] /С.М. Воронин // Матем. заметки. — 24:6. —1978. —С. 879–884.

[21]. Воронин С.М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой [Текст] / С.М. Воронин // Известия АН СССР. Серия математическая. —1980. —Т. 44. —№ 1. —С. 63–91.

[22]. Воронин С.М. О распределении нулей некоторых рядов Дирихле [Текст] / С.М. Воронин // Труды МИАН. —1984. —Т. 163. —С. 74–77.

[23]. Воронин С.М. Об оценках снизу в теории дзета-функции Римана [Текст] /С.М. Воронин // Изв. АН СССР. Сер. матем. —52:4. —1988. —С. 882–892.

[24]. Воронин С.М. Об Ω-теоремах теории дзета-функции Римана [Текст] /С.М. Воронин // Изв. АН СССР. Сер. матем. —52:2. —1988. —С. 424–436.

[25]. Воронин С.М. Об аналитическом продолжении некоторых рядов Дирихле [Текст] /С.М. Воронин // Тр. МИАН СССР. —157. —1981. —С. 25–30.

[26]. Воронин С.М. Дзета–функция Римана [Текст] /С.М.Воронин, А.А.Карацуба —М.: Физматлит. —1994. —376 с. —ISBN 5–02–014120–8.

[27]. Гриценко С.А. Три аддитивные задачи [Текст] /С.А. Гриценко // Изв. РАН. Сер. матем. —56:6. —1992. —С. 1198–1216.

[28]. Гриценко С.А. О плотностной теореме [Текст] /С.А. Гриценко // Матем. заметки. —51:6. —1992. —С. 32–40.

[29]. Гриценко С.А. О плотностной теореме [Текст] /С.А. Гриценко // Тр. МИАН. —207. —1994. —С. 70–81.

[30]. Гриценко С.А. Уточнение одной константы в плотностной теореме [Текст] /С.А. Гриценко // Матем. заметки. —55:2. —1994. —С. 9–61.

[31]. Гриценко С.А. Приближенное функциональное уравнение для произведений двух L-функций Дирихле [Текст] /С.А. Гриценко // Изв. РАН. Сер. матем. —58:5. —1994. —С. 26–52.

[32] Гриценко С.А. Приближенное функциональное уравнение для $L(s, \chi_1)$, $L(s, \chi_2)$ [Текст] /С.А. Гриценко // Докл. РАН. —344:4. —1995. —С. 442–443.

[33]. Гриценко С.А. Об оценках тригонометрических сумм по третьей производной [Текст] /С.А. Гриценко // Матем. заметки. —60:3. —1996. —С. 383–389.

[34]. Гриценко С.А. О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле из класса Сельберга [Текст] /С.А. Гриценко // Матем. заметки. —60:4. —1996. —С. 601–605.

[35]. Гриценко С.А. О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с рядами Дирихле из класса Сельберга [Текст] /С.А. Гриценко // Изв. РАН. Сер. матем. —60:4. —1996. —С. 3–42.

[36]. Гриценко С.А. О нулях линейных комбинаций аналогов функции Римана [Текст] /С.А. Гриценко // Труды МИАН. —218. —1997. —С. 134–150.

[37]. Гриценко С.А. О нулях специального вида функций, связанных с L-функциями Гекке мнимых квадратичных полей [Текст] /С.А. Гриценко // Изв. РАН. Сер. матем. —61:1. —1997. —С. 45–68.

[38]. Гриценко С.А. О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле [Текст] /С.А. Гриценко // Чебышевский сборник. —2003. —Т .4. —№ 2. —С. 55–67.

[39]. Гриценко С.А. Об одной задаче А.А. Карацубы [Текст] /С.А. Гриценко // Матем. заметки. —88:4. —2010. —С. 517–528.

[40]. Гриценко С.А. Об одной аддитивной задаче и ее приложении к проблеме распределения нулей линейных комбинаций L-функций Гекке на критической прямой [Текст] /С.А. Гриценко // Труды МИАН. —276. —2012. —С. 96–108.

[41]. Гриценко С.А. Асимптотические формулы для дробных моментов некоторых рядов Дирихле [Текст] /С.А. Гриценко, Л.Н. Куртова // Чебышевский сб. —14:1. —2013. —С. 18–33.

[42]. Гриценко С.А. О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с L-функциями Гекке мнимых квадратичных полей, лежащих на коротких промежутках [Текст] /С.А. Гриценко, Д.Б. Демидов // Совр. пробл. матем. —Т. 17. —2013. —С. 164–178.

[43]. Гриценко С.А. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой [Текст] /С.А. Гриценко // Матем. заметки. —100:5. —2016. —С. 774–778.

[44]. Гриценко С.А. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой [Текст] /С.А. Гриценко // Конференция памяти А.А. Карацубы по теории чисел и приложениям. —28 января 2016 г. —С. 32–33.

[45]. Гриценко С.А. О нулях арифметических рядов Дирихле, лежащих на критической прямой [Текст] /С.А. Гриценко // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. —2016. —№ 8. —С. 120–121.

[46]. Гриценко С. А. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна [Текст] /С.А. Гриценко // Труды МИАН. —2017. —Т. 296. —С. 72–94.

[47]. Гриценко С. А. О дробных моментах успокоенных L-функций Дирихле [Текст] /С.А. Гриценко // Чебышевский сборник. —2017. —Т. 18. —№ 4. —С. 168–187.

[48]. Гриценко С.А. О дробных моментах некоторых успокоенных арифметических рядов Дирихле [Текст] /С.А. Гриценко // Конференция по теории чисел и приложениям в честь 80-летия А.А. Карацубы. —23 мая 2017 г. —С. 25–29.

[49]. Гриценко С.А. О нулях некоторых арифметических рядов Дирихле [Текст] /С.А. Гриценко // XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвящённая столетию со дня рождения профессора Н.М.Коробова. —29 мая 2018 г. —С. 122–124.

[50]. Гриценко С.А. Произведение L-функций Дирихле: перемены знака $S(t;\chi_1,\chi_2)$ [Текст] /С.А. Гриценко // Международная конференция по аналитической теории чисел, посвящённая 75-летию Г.И. Архипова и С.М. Воронина. —15 декабря 2020 г. —С. 351–355.

[51]. Джаббаров И.Ш. Дробные моменты ζ-функции [Текст] /И.Ш. Джаббаров // Матем. заметки. —38:4. —1985. —С. 481-–493.

[52]. Карацуба А.А. О расстоянии между соседними нулями дзета–функции Римана, лежащими на критической прямой [Текст] /А.А.Карацуба // Труды МИАН. —1981. —Т. 157. —С. 49–63.

[53]. Карацуба А.А. Метод тригонометрических сумм И.М. Виноградова [Текст] /А.А. Карацуба // Международная конференция по аналитическим методам в теории чисел и анализе (Москва, 14-19 сентября 1981 г.), Тр. МИАН СССР. —163. —1984. —С. 97–103.

[54]. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел [Текст] /А.А. Карацуба // 2-е изд. — М.: Наука. Главная редакция физико–математической литературы. —1983. —240 с.

[55]. Карацуба А.А. О нулях функции $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой [Текст] /А.А. Карацуба // Изв. АН СССР. Сер. матем. —1984. —Т. 49. —№ 2. —С. 326–383.

[56]. Карацуба А.А. О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой [Текст] /А.А. Карацуба // Изв. АН СССР. Сер. матем. —1984. —Т. 48. —№ 3. —С. 569–584.

[57]. Карацуба А.А. Распределение нулей функции $\zeta(0.5 + it)$ [Текст] /А.А. Карацуба // Изв. АН СССР. Сер. матем. —1984. —Т. 48. —№ 6. —С. 1214–1224.

[58]. Карацуба А.А. Дзета-функция Римана и ее нули [Текст] /А.А. Карацуба // УМН. —1985. —Т. 40. — Вып. 5 (245). —С. 19–70.

[59]. Карацуба А.А. О вещественных нулях функции $\zeta(1/2+it)$ [Текст] /А.А. Карацуба // УМН. —40:4(244). —1985. —С. 171–172.

[60]. Карацуба А.А. О нулях дзета-функции Римана на критической прямой [Текст] /А.А. Карацуба // Современные проблемы математики. Математический анализ, алгебра, топология, Сборник статей. Посвящается академику Льву Семеновичу Понтрягину к его семидесятипятилетию, Тр. МИАН СССР. —167. —1985. —С. 167–178.

[61]. Карацуба А.А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой [Текст] / А. А. Карацуба // Известия АН СССР. Серия математическая. —1990. —Т 54. —№ 2. —С. 303–315.

[62]. Карацуба А.А. О нулях некоторых рядов Дирихле [Текст] /А.А. Карацуба // УМН. —45:1(271). —1990. —С. 175–176.

[63]. Карацуба А.А. О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле [Текст] /А.А. Карацуба // Изв. АН СССР. Сер. матем. —55:3. —1991. —С. 483–514.

[64]. Карацуба А.А. О плотностной теореме [Текст] /А.А. Карацуба // Теория чисел, алгебра, математический анализ и их приложения, Сб. ст. Посвящается 100-летию со дня рождения Ивана Матвеевича Виноградова. —1991. —С. 185–196.

[65]. Карацуба А.А. О количестве нулей дзета-функции Римана, лежащих на почти всех коротких промежутках критической прямой [Текст] /А.А. Карацуба // Изв. АН СССР. Сер. матем. —1992. —Т. 56. —№ 2. —С. 372–397.

[66]. Карацуба А.А. Уточнение теорем о количестве нулей, лежащих на отрезках критической прямой, некоторых рядов Дирихле [Текст] /А.А. Карацуба // УМН. —47:2(284). —1992. —С. 193–194.

[67]. Карацуба А.А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих эйлерова произведения [Текст] /А.А.Карацуба // Известия РАН. Серия математическая. —1993. —Т 57. —№ 5. —С. 3–14.

[68]. Карацуба А.А. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле [Текст] / А.А. Карацуба // Труды МИАН. —1994. —Т. 207. —С. 180–196.

[69]. Карацуба А.А. Об одной арифметической функции [Текст] /А.А. Карацуба // УМН. —50:5(305). —1995. —С. 247–248.

[70]. Карацуба А.А. Плотностная теорема и поведение аргумента дзета-функции Римана [Текст] /А.А. Карацуба // Мат. заметки. —1996. —№ 3. —С. 448–449.

[71]. Карацуба А.А. О нижних оценках максимума модуля $\zeta(s)$ в малых областях критической полосы [Текст] /А.А. Карацуба // Матем. заметки. —70:5. —2001. —С. 796–797.

[72]. Карацуба А.А. О связи многомерной проблемы делителей Дирихле с границей нулей $\zeta(s)$ [Текст] /А.А. Карацуба // Матем. заметки. —70:3. —2001. —С. 477–480.

[73]. Карацуба А.А. Дробные моменты и нули $\zeta(s)$ на критической прямой [Текст] /А.А. Карацуба // Матем. заметки. —72:4. —2002. —С. 502–508.

[74]. Карацуба А.А. Омега-теоремы для дзетовых сумм [Текст] /А.А. Карацуба // Матем. заметки. —73:2. —2003. —С. 228–233.

[75]. Карацуба А.А. Нули и точки локальных экстремумов тригонометрических сумм [Текст] /А.А. Карацуба // Пробл. передачи информ. —39:1. —2003. —С. 88–102.

[76]. Карацуба А.А. О нижних оценках максимума модуля дзета-функции Римана на коротких промежутках критической прямой [Текст] /А.А. Карацуба // Изв. РАН. Сер. матем. —68:6. —2004. —С. 99–104.

[77]. Карацуба А.А. Аргумент дзета-функции Римана [Текст] / А.А. Карацуба, М.А.Королев // УМН. —60. —2005. —№ 3. —С. 41–96.

[78]. Карацуба А.А. Поведение аргумента дзета-функции Римана на критической прямой [Текст] /А.А. Карацуба, М.А. Королев // УМН. —61:3(369). —2006. —С. 3–92.

[79]. Киселева Л.В. О количестве нулей функции $\zeta(s)$ на «почти всех» коротких промежутках критической прямой [Текст] /Л.В. Киселева // Изв. АН СССР. Сер. мат. —1988. —Т. 52. —№ 3. —С. 479–500.

[80]. Королев М.А. Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой [Текст] /М.А. Королев // Дискретная геометрия и геометрия чисел, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова, Тр. МИАН. —239. —2002. —С. 215–238.

[81]. Королев М.А. Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой [Текст] /М.А.Королев // Изв. РАН. Сер. Матем. —67. —2003. —№ 2. —С. 21–60.

[82]. Королев М.А. Изменение знака функции $S(t)$ на коротких промежутках [Текст] /М.А. Королев // Изв. РАН. Сер. матем. —69:4. —2005. —С. 75–88.

[83]. Королев М.А. О больших значениях функции $S(t)$ на коротких промежутках [Текст] /М.А. Королев // Изв. РАН. Сер. матем. —69:1. —2005. —С. 115–124.

[84]. Королев М.А. О кратных нулях дзета-функции Римана [Текст] /М.А. Королев // Изв. РАН. Сер. матем. —70:3. —2006. —С. 3–22.

[85]. Королев М.А. О больших расстояниях между соседними нулями дзета-функции Римана [Текст] /М.А. Королев // Докл. РАН. —417:6. —2007. —С. 738–741.

[86]. Королев М.А. О первообразной функции Харди $Z(t)$ [Текст] /М.А. Королев // Докл. РАН. —413:5. —2007. —С. 599–602.

[87]. Королев М.А. О больших расстояниях между соседними нулями дзета-функции Римана [Текст] /М.А. Королев // Изв. РАН. Сер. матем. —72:2. —2008. —С. 91–104.

[88]. Королев М.А. О первообразной функции Харди $Z(t)$ [Текст] /М.А. Королев // Изв. РАН. Сер. матем. —72:3. —2008. —С. 19–68.

[89]. Королев М.А. Гипотеза Сельберга о рапределении мнимых частей нулей дзета-функции Римана // Докл. РАН. —421:3. —2008. —С. 308–311.

[90]. Королев М.А. Закон Грама и гипотеза Сельберга о распределении нулей дзета-функции Римана [Текст] /М.А. Королев // Изв. РАН. Сер. матем. —74:4. —2010. —С. 83–118.

[91]. Королев М.А. О законе Грама в теории дзета-функции Римана [Текст] /М.А. Королев // Изв. РАН. Сер. матем. —76:2. —2012. —С. 67–102.

[92]. Королев М.А. Моменты тригонометрических полиномов и их применение в теории дзета-функции Римана [Текст] /М.А. Королев // Докл. РАН. —456:3. —2014. —С. 272–274.

[93]. Королев М.А. О малых значениях дзета-функции Римана в точках Грама [Текст] /М.А. Королев // Матем. сб. —205:1. —2014. —С. 67–86.

[94]. Королев М.А. Большие значения дзета-функции Римана на коротких промежутках критической прямой [Текст] /М.А. Королев // Докл. РАН. —460:6. —2015. —С. 642–644.

[95]. Королев М.А. О горизонтальном распределении нулей функций $Re\zeta(s)$ и $Im\zeta(s)$ [Текст] /М.А. Королев // Матем. заметки. —98:6. —2015. —С. 941–943.

[96]. Королев М.А. Закон Грама в теории дзета-функции Римана [Текст] /М.А. Королев // Совр. пробл. матем. Ч.1. —2015. —162 с.

[97]. Королев М.А. Закон Грама в теории дзета-функции Римана [Текст] /М.А. Королев // Совр. пробл. матем., Часть 2. —2016. —С. 3–93.

[98]. Королев М.А. О формуле Римана-Зигеля для производных функции Харди [Текст] /М.А. Королев // Алгебра и анализ. —29:4. —2017. —С. 53–81.

[99]. Лаврик А.А. Аналитические свойства производных $Z-$ функции Харди [Текст] /А.А. Лаврик // Дис. канд. физ.-мат. наук. —М.: МГУ. —1989. —120 с.

[100]. Лаврик А.А. Равномерные приближения и нули в коротких интервалах производных функций Харди [Текст] /А.А. Лаврик // Докл. АН СССР. —307:1. —1989. —С. 28–31.

[101]. Лаврик А.А. Усиленная гипотеза Титчмарша в дискретной теории дзета-функции Римана [Текст] /А.А. Лаврик // Докл. АН СССР. —319:6. —1991. —С. 1305–1308.

[102]. Лаврик А.А. Проблема Титчмарша дискретной теории дзета-функции Римана [Текст] /А.А. Лаврик // Тр. МИАН. —207. —1994. —С. 197–230.

[103]. Лаврик А.Ф. Суммы по характерам степеней модуля L-функций Дирихле в критической полосе [Текст] /А.Ф. Лаврик // Докл. АН СССР. —154:1. —1964. —С. 34–37.

[104]. Лаврик А.Ф. О функциональных уравнениях функций Дирихле [Текст] /А.Ф. Лаврик // Докл. АН СССР. —171:2. —1966. —С. 278–280.

[105]. Лаврик А.Ф. Функциональное уравнение для L-функций Дирихле и задача делителей в арифметических прогрессиях [Текст] /А.Ф. Лаврик // Изв. АН СССР. Сер. матем. —30:2. —1966. —С. 433–448.

[106]. Лаврик А.Ф. О функциональных уравнениях функций Дирихле [Текст] /А.Ф. Лаврик // Изв. АН СССР. Сер. матем., 31:2. 1967. С. 431-442.

[107]. Лаврик А.Ф. Функциональные и приближенные функциональные уравнения функций Дирихле [Текст] /А.Ф. Лаврик // Матем. заметки. —3:5. —1968. —С. 613–622.

[108]. Лаврик А.Ф. О приближенном функциональном уравнении L-функций Дирихле [Текст] /А.Ф. Лаврик // Тр. ММО. —18. —1968. —С. 91–104.

[109]. Лаврик А.Ф. Приближенные функциональные уравнения функций Дирихле [Текст] /А.Ф. Лаврик // Изв. АН СССР. Сер. матем. —32:1. —1968. —С. 134–185.

[110]. Лаврик А.Ф. О нулях периодических функций Дирихле [Текст] /А.Ф. Лаврик // Докл. АН СССР. —192:6. —1970. —С. 1214–1216.

[111]. Лаврик А.Ф. Периодические функции Дирихле с функциональными уравнениями риманова типа. I [Текст] /А.Ф. Лаврик // Тр. МИАН СССР. —112. —1971. —С. 271–290.

[112]. Лаврик А.Ф. Принцип теории нестандартных функциональных уравнений функций Дирихле, его следствия и приложения [Текст] /А.Ф. Лаврик // Тр. МИАН СССР. —132. —1973. —С. 70–76.

[113]. Лаврик А.Ф. Развитие метода плотности нулей L-функций Дирихле [Текст] /А.Ф. Лаврик // Матем. заметки. —17:5. —1975. —С. 809–817.

[114]. Лаврик А.Ф. О главном члене проблемы делителей и степенном ряде дзета-функции Римана в окрестности ее полюса [Текст] /А.Ф. Лаврик // Тр. МИАН СССР. —142. —1976. —С. 165–173.

[115]. Лаврик А.Ф. Обзор по большому решету Ю.В. Линника и плоскостной теории нулей L-функций [Текст] /А.Ф. Лаврик // УМН. —35:2(212). —1980. —С. 55–65.

[116]. Лаврик А.Ф. Замкнутая тройственность функциональных уравнений дзета-функций [Текст] /А.Ф. Лаврик // Докл. АН СССР. —308:5. —1989. —С. 1044–1046.

[117]. Лаврик А.Ф. Функциональные уравнения с параметром дзета-функций [Текст] /А.Ф. Лаврик // Изв. АН СССР. Сер. матем. —54:3. —1990. —С. 501–521.

[118]. Лаврик А.Ф. Функциональное уравнение дзета-функции Римана и отрезка эйлерова произведения [Текст] /А.Ф. Лаврик // Докл. АН СССР. —320:1. —1991. —С. 29–33.

[119]. Лаврик А.Ф. Арифметические эквиваленты функциональных уравнений риманова типа [Текст] /А.Ф. Лаврик // Тр. МИАН. —200. —1991. —С. 213–221.

[120]. Лаврик А.Ф. Уравнения L-функций Дирихле и отрезков их эйлеровых произведений по простым числам [Текст] /А.Ф. Лаврик // УМН. —7:2(284). —1992. —С. 199–200.

[121]. Лаврик А.Ф. Приближенное функциональное уравнение дзета-функции и отрезка эйлерова произведения по простым числам [Текст] /А.Ф. Лаврик // Докл.РАН. —326:1. —1992. —С. 22–25.

[122]. Лаврик А.Ф. Уравнение дзета-функции и отрезка эйлерова произведения [Текст] /А.Ф. Лаврик // Тр. МИАН. —207. —1994. —С. 231–234.

[123]. Лаврик А.Ф. Простейший эквивалент гипотезы Римана [Текст] /А.Ф. Лаврик, А.А. Лаврик-Меннлин // Чебышевский сб. —1:1. —2001. —С. 50–51.

[124]. Мозер Я. Некоторые свойства дзета-функции Римана на критической прямой [Текст] /Я.Мозер // Acta Auith. —1974. —V. 26. —P. 33–39.

[125]. Мозер Я. Об одной сумме в теории дзета-функции Римана [Текст] /Я.Мозер // Acta arith. —1976. —V. 31. —P. 31–43.

[126]. Мозер Я. Об одной теореме Харди-Литтлвуда в теории дзета-функции Римана [Текст] /Я.Мозер // Acta Auith. —1976. —V. 31. —P. 45–51, Добавление // Acta Auith. —1979. —V. 35. —P. 403–404.

[127]. Мозер Я. Существенное улучшение одной теоремы Харди-Литтлвуда в теории $\zeta(s)$ [Текст] /Я.Мозер // Acta arith. —1980. —V. 38. —№ 4. —P. 112–121.

[128]. Мозер Я. Улучшение теоремы Харди-Литтлвуда о плотности нулей функции $\zeta(1/2+it)$ [Текст] /Я.Мозер // Acta math. Univ. Comen. Bratislava. —1983. —V. 42–43. —P. 41–50.

[129]. Мозер Я. Новые теоремы о среднем для функции $|\zeta(1/2+it)|^2$ [Текст] /Я.Мозер // Acta math. Univ. Comen. Bratialava. —1985. —V. 46–47. —С. 21–40.

[130]. Негматова Г. О нулях дзета-функции Римана в окрестности критической прямой [Текст] /Г. Негматова, З.Н. Хасанов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. —2001. —Т. XLIV. —№ 3-4. —С. 4–12.

[131]. Негматова Г. Об оценке специальной тригонометрической суммы [Текст] /Г. Негматова, Ш.А. Хайруллоев // В сборнике: Роль информационно-коммуникационных технологий в инновационном развитии Республики Таджикистан. Материалы международной научно-практической конференции. —2017. —С. 91–95.

[132]. Прахар К. Распределение простых чисел.[Текст] /К. Прахар//— М.: —Мир. —1967.

[133]. Рахмонов З.Х. Оценка плотности нулей дзета функции Римана [Текст] /З.Х. Рахмонов // УМН. —1994. —Т. 49. —вып. 1. —С. 161–162.

[134]. Рахмонов З.Х. Нули L-рядов Дирихле в коротких прямоугольниках критической полосы [Текст] /З.Х. Рахмонов // Сборник научных трудов налогово-правового института. —1999. —В. 1. —Душанбе. —С. 67–69.

[135]. Рахмонов З.Х. Плотность нулей дзета-функции Римана в коротких прямоугольниках критической полосы [Текст] /З.Х. Рахмонов // Вестник Хорогского университета. —2002. —Серия 1. —№ 5. —С. 1–25.

[136]. Рахмонов З.Х. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой [Текст] / З.Х. Рахмонов, Ш.А. Хайруллоев // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения и смежные вопросы анализа». —2005. —Душанбе. —С. 161–162.

[137]. Рахмонов З.Х. Нули дзета-функции Римана в коротких промежутках критической прямой [Текст] /З.Х. Рахмонов // Чебышевский сборник. —2006. —Т. 7. —В. 1. —С. 263–279.

[138]. Рахмонов З.Х. Нули дзета-функции Римана в коротких промежутках критической прямой [Текст] / З.Х. Рахмонов, З.Н. Хасанов // Чебышевский сборник. —2006. —Т. 6. —Вып. 3(19). —С. 45–58.

[139]. Рахмонов З.Х. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой [Текст] /З.Х. Рахмонов, Ш.А. Хайруллоев // Доклады АН Республики Таджикистан. —2006. —Т. 49. —№ 5. —С. 393–400.

[140]. Рахмонов З.Х. Нули дзета-функции Римана, лежащие в коротких интервалах критической прямой [Текст] /З.Х. Рахмонов // Материалы международной научной конференции «Актуальные вопросы математического анализа, дифференциальных уравнений и информатики», посвящённой 70-летию академика Усманова З.Д. Институт математики АН РТ. —Душанбе 2007. —С. 99–101.

[141]. Рахмонов З.Х. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой [Текст] / З.Х. Рахмонов // Материалы научно-практической конференции «Роль моделирования в процессе принятия решения и образовании», посвящённой 60-летию профессор Ф. Мирзоахмедова. —Душанбе. —11-12 октября 2008. —С. 74–76.

[142]. Рахмонов З.Х. Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой [Текст] / З.Х. Рахмонов, Ш.А. Хайруллоев // Доклады АН Республики Таджикистан. —2009. —Т. 52. —№ 5. —С. 331–337.

[143]. Рахмонов З.Х. Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой [Текст] /З.Х. Рахмонов, Ш.А. Хайруллоев // Материалы

международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и их приложений», посвящённой 60-летию академика К.Х. Бойматова. —Душанбе. —23-24 июня 2010 г. —С. 89.

[144]. Рахмонов З.Х. Плотность нулей L-рядов Дирихле в коротких прямоугольниках критической полосы [Текст] / З.Х. Рахмонов // Материалы международной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 60-летию академика АН РТ Шабозова М.Ш. —Душанбе. —29-30 июня 2012 г. —С. 133–134.

[145]. Рахмонов З.Х. Плотность нулей L-рядов Дирихле в коротких прямоугольниках критической полосы [Текст] / З.Х. Рахмонов, С.Н. Исматов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы теории дифференциальных уравнений и математического анализа», посвящённой 80-летию академика А.Джураева. —Душанбе 07-08 декабря 2012 г. —С. 72–74.

[146]. Рахмонов З.Х. О нулях нечетного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна, в коротких промежутках критической прямой [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.С. Аминов // Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвящённой 80-летию академика РАН В.А.Садовничего. Том 2. Издательство "МАКС Пресс". —С.498-501.

[147]. Рахмонов З.Х. О нулях нечетного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна, в коротких промежутках критической прямой [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.С. Аминов // Актуальные вопросы дифференциальных уравнений, математического анализа, алгебры и теории чисел и их приложения. Российско-Таджикский Славянский университет. —17 мая 2019 г. —С.275-281.

[148]. Рахмонов З.Х. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.С. Аминов //

Математический анализ и её приложения. Материалы республиканской научной конференции, посвящённой 80 летию Б.Имомназарова. Душанбе. —10-11 июня 2019. —С. 212–215.

[149]. Рахмонов З.Х. О нулях нечетного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна, в коротких промежутках критической прямой [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.С. Аминов // Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа. Материалы международной конференции, посвящённой 60-летию академика Рахмонова З.Х. и члена-корреспондента Исхокова С.А., Душанбе 13-14 декабря 2019. —С. 190–193.

[150]. Рахмонов З.Х. О нулях нечётного порядка функции Дэвенпорта–Хейлбронна, в коротких промежутках критической прямой [Текст] /З.Х. Рахмонов, А.С. Аминов // Доклады АН Республики Таджикистан. —2019. —Т. 62. —№ 3-4. —С. 133–138.

[151]. Рахмонов З.Х. О нулях нечетного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна, в коротких промежутках критической прямой [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.С. Аминов // Материалы Международной научной онлайн конференции «Современные проблемы математики: проблемы и их пути решения», г. Термез. Узбекистан. 21-23 октября 2020 г. —С. 15–18.

[152]. Рахмонов З.Х. О нулях нечетного порядка функции Дэвенпорта-Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.С. Аминов // Материалы международной конференции «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами», посвящённой 70-летию профессора Джангибекова Г. Душанбе 30-31 января 2020 г. —С. 254–257.

[153]. Резвякова И.С. О нулях производных кси-функции Римана [Текст] /И.С. Резвякова // Изв. РАН. Сер. матем. —69:3. —2005. —С. 109–178.

[154]. Резвякова И.С. О количестве нулей производных ζ-функции Римана на критической прямой [Текст] /И.С. Резвякова // Докл. РАН. —400:4. —2005. —С. 454–456.

[155]. Резвякова И.С. О простых нулях производных кси-функции Римана [Текст] /И.С. Резвякова // Изв. РАН. Сер. матем. —70:2. —2006. —С. 57–68.

[156]. Резвякова И.С. О нулях на критической прямой L-функций, соответствующих автоморфным параболическим формам [Текст] / И.С. Резвякова // Матем. заметки. —88:3. —2010. —С. 456–475.

[157]. Резвякова И.С. О нулях L-функций Гекке и их линейных комбинаций на критической прямой [Текст] /И.С. Резвякова // Докл. РАН. —431:6. —2010. —С. 741–746.

[158]. Резвякова И.С. О нулях линейных комбинаций L-функций Гекке на критической прямой [Текст] /И.С. Резвякова // Изв. РАН. Сер. матем. —74:6. —2010. —С. 183–222.

[159]. Резвякова И.С. Метод Сельберга в задаче о нулях линейных комбинаций L-функций на критической прямой [Текст] / И.С. Резвякова // Докл. РАН. —463:3. —2015. —С. 274–277.

[160]. Резвякова И.С. О нулях дзета-функции Эпштейна на критической прямой [Текст] /И.С. Резвякова // УМН. —70:4(424). —2015. —С. 213–214.

[161]. Резвякова И.С. О линейных комбинациях L–функций степени два на критической прямой: подход Сельберга [Текст] / И.С. Резвякова // Известия РАН. Серия математическая. —2016. —Т. 80. —№ 3. —С. 151–172.

[162]. Резвякова И.С. Аддитивная проблема с коэффициентами L-функций Гекке [Текст] /И.С. Резвякова// Аналитическая и комбинаторная теория чисел, Сборник статей. К 125-летию со дня рождения академика И.М. Виноградова, Тр. МИАН. —296. —МАИК. —М. —2017. —С. 243–251.

[163]. Риман Б. О числе простых чисел, не превышающих данной величини [Текст] /Б. Риман// Сочинения. —М.: ОГИЗ. —1948. —С. 216–224.

[164]. Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана [Текст] / Е.К. Титчмарш // —М.: —Ил. —1953. —652 стр.

[165]. Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой [Текст] /Ш.А. Хайруллоев // Канд. дисс. —2009. —Душанбе. —66 стр.

[166]. Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями функции $Z^{(j)}(t)$, $j \geq 1$ [Текст] /Ш.А. Хайруллоев // Доклады АН Республики Таджикистан. —2006. —Т. 49. —№ 9. —С. 803–809.

[167]. Хасанов З.Н. Нули дзета-функции Римана в коротких промежутках критической прямой [Текст] /З.Н. Хасанов // Доклады АН РТ. —2005. —№ 3-4. —С. 3–11.

[168]. Хасанов З.Н. Нули дзета-функции Римана в коротких промежутках критической прямой [Текст] /З.Н. Хасанов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. —2017. —№ 1-5. —С. 122–125.

[169]. Чанга М.Е. О нижних оценках модуля дзета-функции Римана на критической прямой [Текст] /М.Е. Чанга // Матем. заметки. —76:6. —2004. —С. 922–927.

[170]. Чанга М.Е. О нулях вещественных тригонометрических сумм [Текст] /М.Е. Чанга // Матем. заметки. —76:5. —2004. —С. 792–797.

[171]. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теории чисел [Текст] /К.Чандрасекхаран — М.: Мир. —1974. —188 стр.

[172]. Чубариков В.Н. О нулях одного класса рядов Дирихле, не имеющих эйлерова произведения [Текст] / В.Н. Чубариков, С.А. Гриценко // Конференция памяти А.А. Карацубы по теории чисел и приложениям. —30 января 2015 г. —С. 211–217.

[173]. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых [Текст] /Л. Эйлер — Т.1. —М.; —Л.; —ОНТИ. —1936.

[174]. Arkhipov G.I. Special cases of the theory of multiple trigonometric sums [Текст] / G.I. Arkhipov, A.A. Karatsuba, V.N. Chubarikov // Math. USSR-Izv. —23:1. —1984. —P. 17–82.

[175]. Bourgain J. and Watt N. Decoupling for perturbed cones and mean square of $|\zeta(0,5 + it)|$ [Текст] /J.Bourgain, N.Watt // http://arxiv.org/abs/1505.04161v1 [math.NT] 15 May 2015.

[176]. Changa M.E. Lower Bounds for the Riemann Zeta Function on the Critical Line [Текст] /M.E. Changa // Math. Notes. —76:6. —2004. —P. 859–864.

[177]. Changa M.E. On Zeros of Real Trigonometric Sums [Текст] /M.E. Changa // Math. Notes. —76:5. —2004. —P. 738–742.

[178]. Davenport H. On the zeros of certain Dirichlet series [Текст] /H.Davenport, H.Heilbronn // J. Lond. Math. Soc. —1936. —V. 11. —pp. 181 - 185 and 307 - 312.

[179]. Gabriel R.M. Some results concerning the integrals of moduli of regular functions along certain curves [Текст] /R.M. Gabriel // J.London Math.Soc. —1927. —V. 2. —P. 112–117.

[180]. Garaev M.Z. New estimates of double trigonometric sums with exponential functions [Текст] /M.Z. Garaev, A.A. Karatsuba // Arch. Math. (Basel). —87:1. —2006. —P. 33–40.

[181]. Graham S.W. Vander Corput's Method of Exponential sums [Текст] /S.W.Graham, G.Kolesnik // Cambridge university press. —1991. Cambridge, New Vork, Port Chester, Melbourne, Sydney.

[182]. Gritsenko S.A. On a density theorem [Текст] /S.A. Gritsenko // Math. Notes. —51:6. —1992. —P. 553–558.

[183]. Gritsenko S.A. Three additive problems [Текст] /S.A. Gritsenko // Russian Acad. Sci. Izv. Math. —41:3. —1993. —P. 447–464.

[184]. Gritsenko S.A. The refinement of a constant in the density theorem [Текст] /S.A. Gritsenko // Math. Notes. —55:2. —1994. —P. 142–143.

[185]. Gritsenko S.A. On a density theorem [Текст] /S.A. Gritsenko // Proc. Steklov Inst. Math. —207. —1995. —P. 67–76.

[186]. Gritsenko S.A. Approximate functional equation for the product of two Dirichlet L-functions [Текст] /S.A. Gritsenko // Russian Acad. Sci. Izv. Math. —45:2. —1995. —P. 255–280.

[187]. Gritsenko S.A. Estimates of trigonometric sums by the third derivative [Текст] /S.A. Gritsenko // Math. Notes. —60:3. —1996. —P. 283–287.

[188]. Gritsenko S.A. Zeros of special form of functions related to Dirichlet series from the Selberg class [Текст] /S.A. Gritsenko // Math. Notes. —60:4. —1996. —P. 449–453.

[189]. Gritsenko S.A. Zeros of linear combinations of functions of a special type that are connected with Selberg Dirichlet series [Текст] /S.A. Gritsenko // Izv. Math. —60:4. —1996. —P. 655–694.

[190]. Gritsenko S.A. Zeros of a special type of function associated with Hecke L-functions of imaginary quadratic fields [Текст] /S.A. Gritsenko // Izv. Math. —61:1. —1997. —P. 45–68.

[191]. Gritsenko S.A. On zeros of linear combinations of analogues of the Riemann function [Текст] /S.A. Gritsenko // Proc. Steklov Inst. Math. —218. —1997. —P. 129–145.

[192]. Gritsenko S.A. On a Problem of Karatsuba [Текст] /S.A. Gritsenko // Math. Notes. —88:4. —2010. —P. 492–502.

[193]. Gritsenko S.A. On an additive problem and its application to the problem of distribution of zeros of linear combinations of Hecke L-functions on the critical line [Текст] /S.A. Gritsenko // Proc. Steklov Inst. Math. —276. —2012. —P. 90–102.

[194]. Gritsenko S.A. On Zeros of Linear Combinations of Functions of Special Form Related to the Hecke L-Functions of Imaginary Quadratic Fields on Short Intervals [Текст] /S.A. Gritsenko, D.B. Demidov // Proc. Steklov Inst. Math. —282. —suppl. 1. —2013. —P. 150–164.

[195]. Gritsenko S.A. On the Zeros of the Davenport-Heilbronn Function Lying on the Critical Line [Текст] /S.A. Gritsenko // Math. Notes. —101:1. —2017. —P. 166–170.

[196]. Gritsenko S.A. On the zeros of the Davenport-Heilbronn function [Текст] /S.A. Gritsenko // Proc. Steklov Inst. Math. —296. —2017. —P. 65–87.

[197]. Hardy G.H. Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann [Текст] /G.H.Hardy // Compt.Rend. Acad.Sci. —1914. —V. 158. —P. 1012–1014.

[198]. Hardy G.H. The trigonometrical series associated with the elliptic θ function [Текст] /G.H.Hardy, J.E.Littlewood // Acta math. —1914. —V. 37. —P. 193–239.

[199]. Hardy G.H. Contributions to the theory of Riemann zeta–function and the theory of distribution of primes [Текст] /G.H.Hardy, J.E.Littlewood // Asta Math. —1918. —V. 41. —P. 119–196.

[200]. Hardy G.H. The zeros of Riemann's zeta–function on the critical line [Текст] /G.H.Hardy, J.E.Littlewood // Math.Z. —1921. —Bd 10. —S. 283–317.

[201]. Hardy G.H. The approximate functional equation in the theory of the zeta-function with applications to the divisor problems of Dirichlet and Pilth [Текст] /G.H.Hardy, J.E.Littlewood // Proc. London Math. Soc. (2). —1922. —V. 21. —P. 39–74.

[202]. Huxley M.N. Exponential Sums and Lattice Points [Текст] / M.N. Huxley // Proc. London Math. Soc. —1990. —60. —P. 471–502.

[203]. Huxley M.N. Corrigenda: Exponential Sums and Lattice Points [Текст] / M.N. Huxley // Proc. London Math. Soc. —1993. —66. —P. 70.

[204]. Huxley M.N. Exponential Sums and Lattice Points. II [Текст] /M.N. Huxley // Proc. London Math. Soc. —1993. —66. —P. 279–301.

[205]. Huxley M.N. Sums and Lattice Points III [Текст] / M.N. Huxley// Proc. London Math. Soc. —2003. —87. —P. 591–609.

[206]. Ivic A.P. On the distribution of values of the argument of the Riemann zeta-function [Текст] /A.P. Ivic, M.A. Korolev // J. Number Theory. —200. —2019. —P. 96–131.

[207]. Iwaniec H. On the divisor and circle problems [Текст] /H.Iwaniec, I.Mozzochi // J. Number Theory. —29. —1988. —P. 60–93.

[208]. Jabbarov I.Sh. Fractional moments of the ζ-function [Текст] /I.Sh. Jabbarov // Math. Notes. —38:4. —1985. —P. 771-–778.

[209]. Karatsuba A.A. On the distance between consecutive zeros of the Riemann zeta function that lie on the critical line [Текст] /A.A. Karatsuba // Proc. Steklov Inst. Math. —157. —1983. —P. 51–66.

[210]. Karatsuba A.A. Zeros of the Riemann zeta function in short intervals of the critical line // Докл. АН СССР. —272:6. —1983. —С. 1312–1314.

[211]. Karatsuba A.A. Zeros of the Riemann zeta function [Текст] /А.А. Карацуба // Докл. АН СССР, 276:3 1984. С. 535-539.

[212]. Karatsuba A.A. On the zeros of the function $\zeta(s)$ on short intervals of the critical line [Текст] /A.A. Karatsuba // Math. USSR-Izv. —24:3. —1984. —P. 523–537.

[213]. Karatsuba A.A. Vinogradov's method of trigonometric sums [Текст] /A.A. Karatsuba // Proc. Steklov Inst. Math. —163. —1985. —P. 117–123.

[214]. Karatsuba A.A. The distribution of zeros of the function $\zeta(1/2+it)$ [Текст] /A.A. Karatsuba // Math. USSR-Izv. —25:3. —1985. —P. 519–529.

[215]. Karatsuba A.A. On the real zeros of the function $\zeta(1/2+it)$ [Текст] /A.A. Karatsuba // Russian Math. Surveys. —40:4. —1985. —P. 191–192.

[216]. Karatsuba A.A. Zeros of the function $\zeta(1/2+it)$ [Текст] /А.А. Карацуба // Докл. АН СССР. —281:5. —1985. —С. 1038–1041.

[217]. Karatsuba A.A. The Riemann zeta function and its zeros [Текст] /A.A. Karatsuba // Russian Math. Surveys. —40:5. —1985. —P. 23–82.

[218]. Karatsuba A.A. Zeros of the Riemann zeta function on the critical line [Текст] /A.A. Karatsuba // Proc. Steklov Inst. Math. —167. —1986. —P. 187–200.

[219]. Karatsuba A.A. On the zeros of the function $\zeta(s)$ in the neighborhood of the critical line [Текст] /A.A. Karatsuba // Math. USSR-Izv. —26:2. —1986. —P. 307–313.

[220]. Karatsuba A.A. Zeros of certain Dirichlet series [Текст] /A.A. Karatsuba // Russian Math. Surveys. —45:1. —1990. —P. 207–208.

[221]. Karatsuba A.A. On the zeros of the Davenport-Heilbronn function lying on the critical line [Текст] /A.A. Karatsuba // Math. USSR-Izv. —36:2. —1991. —Pp. 311–324.

[222]. Karatsuba A.A. On the zeros of Riemann's zeta-function on the critical line [Текст] /A.A. Karatsuba // International Symposium in Memory of Hua Loo Keng, v. I. Springer. Berlin. —1991. —P. 117–162.

[223]. Karatsuba A.A. Zeros of linear combinations of Z-functions that correspond to Dirichlet series [Текст] /A.A. Karatsuba // Soviet Math. Dokl. —43:2. —1991. —P. 589–590.

[224]. Karatsuba A.A. On the zeros of a special type of function connected with Dirichlet series [Текст] /A.A. Karatsuba // Math. USSR-Izv. —38:3. —1992. —P. 471-502.

[225]. Karatsuba A.A. A refinement of theorems on the number of zeros lying on intervals of the critical line of certain Dirichlet series [Текст] /A.A. Karatsuba // Russian Math. Surveys. —47:2. —1992. —P. 219-220.

[226]. Karatsuba A.A. On zeros of the Davenport-Heilbronn function [Текст] /A.A. Karatsuba // Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory. Univ. Salerno. —1992. —P. 271–293.

[227]. Karatsuba A.A. On the distribution of real zeros of the function $\zeta(1/2+it)$ [Текст] /A.A. Karatsuba // Soviet Math. Dokl. —45:1. —1992. —P. 46–47.

[228]. Karatsuba A.A. On density theorem [Текст] /A.A. Karatsuba // Proc. Steklov Inst. Math. —200. —1993. —P. 205–217.

[229]. Karatsuba A.A. On the number of zeros of the Riemann zeta-function lying in almost all short intervals of the critical line [Текст] /A.A. Karatsuba // Russian Acad. Sci. Izv. Math. —40:2. —1993. —P. 353–376.

[230]. Karatsuba A.A. On the zeros of arithmetic Dirichlet series without Euler product [Текст] /A.A. Karatsuba // Russian Acad. Sci. Izv. Math. —43:2. —1994. —P. 193–203.

[231]. Karatsuba A.A. A new approach to the problem of the zeros of some Dirichlet series [Текст] /A.A. Karatsuba // Proc. Steklov Inst. Math. —207. —1995. —P. 163–177.

[232]. Karatsuba A.A. On a certain arithmetic function [Текст] /A.A. Karatsuba // Russian Math. Surveys. —50:5. —1995. —P. 1088–1089.

[233]. Karatsuba A.A. Density theorem and the behavior of the argument of the Riemann zeta function [Текст] /A.A. Karatsuba // Math. Notes. —60:3. —1996. —P. 333–334.

[234]. Karatsuba A.A. The multidimensional Dirichlet divisor problem and zero free regions for the Riemann zeta function [Текст] /A.A. Karatsuba // Funct. Approx. Comment. Math. —28. —2000. —P. 131–140.

[235]. Karatsuba A.A. On the Relationship between the Multidimensional Dirichlet Divisor Problem and the Boundary of Zeros of $\zeta(s)$ [Текст] /A.A. Karatsuba // Math. Notes. —70:3. —2001. —P. 432–435.

[236]. Karatsuba A.A. Lower Bounds for the Maximum Modulus of $\zeta(s)$ in Small Domains of the Critical Strip [Текст] /A.A. Karatsuba // Math. Notes. —70:5. —2001. —P. 724–726.

[237]. Карацуба А.А. On lower bounds for the Riemann zeta function [Текст] /А.А. Карацуба // Докл. РАН. —376:1. —2001. —С. 15–16.

[238]. Karatsuba A.A. Fractional Moments and Zeros of $\zeta(s)$ on the Critical Line [Текст] /A.A. Karatsuba // Math. Notes. —72:4. —2002. —P. 466–472.

[239]. Karatsuba A.A. Zeros and Local Extrema of Trigonometric Sums [Текст] /A.A. Karatsuba // Problems Inform. Transmission. —39:1. —2003. —P. 78–91.

[240].Karatsuba A.A. Omega Theorems for Zeta Sums [Текст] /A.A. Karatsuba // Math. Notes. —73:2. —2003. —P. 212–217.

[241]. Karatsuba A.A. Lower bounds for the maximum modulus of the Riemann zeta function on short segments of the critical line [Текст] /A.A. Karatsuba // Izv. Math. —68:6. —2004. —P. 1157–1163.

[242]. Karatsuba A.A. The argument of the Riemann zeta function [Текст] /A.A. Karatsuba, M.A. Korolev // Russian Math. Surveys. —60:3. —2005. —P. 433–488.

[243]. Karatsuba A.A. Zero multiplicity and lower bound estimates of $|\zeta(s)|$ [Текст] /A.A. Karatsuba // Funct. Approx. Comment. Math. —35. —2006. —P. 195–207.

[244]. Karatsuba A.A., Korolev M.A. Behaviour of the argument of the Riemann zeta function on the critical line [Текст] /A.A. Karatsuba, M.A. Korolev // Russian Math. Surveys. —61:3. —2006. —P. 389–482.

[245]. Korolev M.A. The Argument of the Riemann Zeta Function on the Critical Line [Текст] /M.A. Korolev // Proc. Steklov Inst. Math. —239. —2002. —P. 202–224.

[246]. Korolev M.A. The argument of the Riemann zeta-function on the critical line [Текст] /M.A. Korolev // Izv. Math. —67:2. —2003. —P. 225–264.

[247]. Korolev M.A. On large values of the function $S(t)$ on short intervals [Текст] /M.A. Korolev // Izv. Math. —69:1. —2005. —P. 113–122.

[248]. Korolev M.A. Sign changes of the function $S(t)$ on short intervals [Текст] /M.A. Korolev // Izv. Math. —69:4. —2005. —P. 719–731.

[249]. Korolev M.A. On multiple zeros of the Riemann zeta function [Текст] /M.A. Korolev // Izv. Math. —70:3. —2006. —P. 427–446.

[250]. Korolev M.A. On the primitive of the Hardy function $Z(t)$ [Текст] /M.A. Korolev // Dokl. Math. —75:2. —2007. —P. 295–298.

[251]. Korolev M.A. On large distances between neighboring zeros of the Riemann zeta function [Текст] /M.A. Korolev // Dokl. Math. —76:3. —2007. —P. 940–943.

[252]. Korolev M.A. On large distances between consecutive zeros of the Riemann zeta-function [Текст] /M.A. Korolev // Izv. Math. —72:2. —2008. —P. 291–304.

[253]. Korolev M.A. On the integral of Hardy's function $Z(t)$ [Текст] /M.A. Korolev// Izv. Math. —72:3. —2008. —P. 429–478.

[254]. Korolev M.A. Selberg's conjecture concerning the distribution of imaginary parts of zeros of the Riemann zeta function [Текст] /M.A. Korolev // Dokl. Math. —78:1. —2008. —P. 531–534.

[255]. Korolev M.A. Gram's law and Selberg's conjecture on the distribution of zeros of the Riemann zeta function [Текст] /M.A. Korolev // Izv. Math. —74:4. —2010. —P. 743–780.

[256]. Korolev M.A. On Gram's law in the theory of Riemann zeta function [Текст] /M.A. Korolev // Международная конференция «Диофантовы приближения. Современное состояние и приложения», Тезисы докладов, Институт математики НАН Беларуси. Минск. —2011. —С. 37-38.

[257]. Korolev M.A. Gram's law in the theory of Riemann's zeta function [Текст] /M.A. Korolev // 27th Journees Arithmetiques. Programme and Abstract book. Vilnius University. Vilnius. Lithuania. —2011. —P. 34.

[258]. Korolev M.A. On Gram's law in the theory of the Riemann zeta function [Текст] /M.A. Korolev // Izv. Math. —76:2. —2012. —P. 275–309.

[259]. Korolev M.A. On the small values of the Riemann zeta-function on the critical line [Текст] /M.A. Korolev // Elementare und Analytische Zahlentheorie. —2012. —P. 21–22.

[260]. Korolev M.A. Gram's law and the argument of the Riemann zeta function [Текст] /M.A. Korolev // Publ. Inst. Math. —92(106). —2012. —P. 53–78.

[261]. Korolev M.A. Negative values of the Riemann zeta function on the critical line [Текст] /J. Kalpokas, M.A. Korolev, J.Steuding // Mathematika. —59:2. —2013. —P. 443–462.

[262]. Korolev M.A. On large values of the Riemann zeta-function on short segments of the critical line [Текст] /M.A. Korolev // Acta Arith. —166:4. —2014. —P. 349–390.

[263]. Korolev M.A. Moments of trigonometric polynomials and their applications in the theory of the Riemann zeta-function [Текст] /M.A. Korolev // Dokl. Math. —89:3. —2014. —P. 305–307.

[264]. Korolev M.A. On small values of the Riemann zeta-function at Gram points [Текст] /M.A. Korolev // Sb. Math. —205:1. —2014. —P. 63–82.

[265]. Korolev M.A. On the Horizontal Distribution of Zeros of the Functions $Re\zeta(s)$ and $Im\zeta(s)$ [Текст] /M.A. Korolev // Math. Notes. —98:6. —2015. —P. 986–989.

[266]. Korolev M.A. Large values of the Riemann zeta-function on short intervals of the critical line [Текст] /M.A. Korolev // Dokl. Math. —91:1. —2015. —P. 102–104.

[267]. Korolev M.A. On the primitive of Hardy's function [Текст] /M.A. Korolev // The 29-th Journees Arithmetiques. Conference handbook, University of Debrecen. —2015. —P. 57–58.

[268]. Korolev M.A. On the large values of the Riemann zeta-function on the critical line II [Текст] /M.A. Korolev // Moscow J. Combin. Number Theory. —5:3. —2015. —P. 60–86.

[269]. Korolev M.A. Gram's Law in the Theory of Riemann Zeta-Function [Текст] /M.A. Korolev // Part 1, Proc. Steklov Inst. Math. —suppl. 2. —2016. —S1–S46.

[270]. Korolev M.A. Gram's Law in the Theory of Riemann Zeta-Function [Текст] /M.A. Korolev // Part 2, Proc. Steklov Inst. Math. —294. —suppl. 1. —2016. —P. 1–78.

[271]. Korolev M.A. On Rieman-Siegel formula for the derivatives of Hardy's function [Текст] /M.A. Korolev // St. Petersburg Math. J. —29:4. —2018. —P. 581–601.

[272]. Landau E. Uber die Hardysche Entdeckung unendlich vieler Nullstellen der Zeta-funktion mit reelen Teil $\frac{1}{2}$ [Текст] /E.Landau // Match. Ann. —1915. —B. 76. —S. 212–243.

[273]. Lavrik A.A. Uniform approximations and zeros in short intervals of the derivatives of the Hardy function [Текст] /A.A. Lavrik // Dokl. Math. —40:1. —1990. —P. 20–22.

[274]. Lavrik A.A. The strengthened Titchmarsh hypothesis in the discrete theory of the Riemann zeta function // Dokl. Math. —44:1. —1992. —P. 322–326.

[275]. Lavrik A.A. Titchmarsh's problem in the discrete theory of the Riemann zeta-function [Текст] /A.A. Lavrik // Proc. Steklov Inst. Math. —207. —1995. —P. 179–209.

[276]. Lavrik A.F. On functional equations of Dirichlet functions [Текст] /A.F. Lavrik // Math. USSR-Izv. —1:2. —1967. —P. 421–432.

[277]. Lavrik A.F. Functional and approximate functional equations of the Dirichlet function [Текст] /A.F. Lavrik // Math. Notes. —3:5. —1968. —P. 388–393.

[278]. Lavrik A.F. Approximate functional equations for Dirichlet functions [Текст] /A.F. Lavrik // Math. USSR-Izv. —2:1. —1968. —P. 129-179.

[279]. Lavrik A.F. Periodic Dirichlet functions with Riemann type functional equations. I [Текст] /A.F. Lavrik // Proc. Steklov Inst. Math. —112. —1971. —P. 281–300.

[280]. Lavrik A.F. The principal of nonstandard functional equations theory for Dirichlet's functions, consequences and applications of it [Текст] /A.F. Lavrik // Proc. Steklov Inst. Math. —132. —1973. —P. 77–85.

[281]. Lavrik A.F. Development of the method of density of zeros of Dirichlet L-functions [Текст] /A.F. Lavrik // Math. Notes. —17:5. —1975. —P. 483–488.

[282]. Lavrik A.F. The principal term of the divisor problem and the power series of the Riemann zeta-function in a neighborhood of a pole [Текст] /A.F. Lavrik // Proc. Steklov Inst. Math. —142. —1979. —P. 175–183.

[283]. Lavrik A.F. A survey of Linnik's large sieve and the density theory of zeros of L-functions [Текст] /A.F. Lavrik // Russian Math. Surveys. —35:2. —1980. —P. 63–76.

[284]. Lavrik A.F. Closed triplicity of functional equations of zeta functions [Текст] /A.F. Lavrik // Dokl. Math. —40:2. —1990. —P. 403–405.

[285]. Lavrik A.F. Functional equations with parameter of zeta-functions [Текст] /A.F. Lavrik // Math. USSR-Izv. —36:3. —1991. —P. 519–540.

[286]. Lavrik A.F. A functional equation of the Riemann zeta function and an interval of the Euler product [Текст] /A.F. Lavrik // Dokl. Math. —44:2. —1992. —P. 386–390.

[287]. Lavrik A.F. Equations of Dirichlet L-functions and the intervals of their Eulerian products according to prime numbers [Текст] /A.F. Lavrik // Russian Math. Surveys. —47:2. —1992. —P. 226–228.

[288]. Lavrik A.F. Arithmetical equivalents of functional equations of Riemannian type [Текст] /A.F. Lavrik // Proc. Steklov Inst. Math. —200. —1993. —P. 273–245.

[289]. Lavrik A.F. An approximate functional equation for the zeta function and a part of the Euler product over prime numbers [Текст] /A.F. Lavrik // Dokl. Math. —46:2. —1993. —P. 201–204.

[290]. Lavrik A.F. The equation of the zeta function and a segment of the Euler product [Текст] /A.F. Lavrik // Proc. Steklov Inst. Math. —207. —1995. —P. 211–213.

[291]. Levinson N. More than one third of the zeros of Riemann‘s zeta-function are on $\sigma = 1/2$ [Текст] /N.Levinson // Adv. in Math. —1974. —V. 13. —P. 383–436.

[292]. Mangoldt H. Zur Verteilung der Nullstellen der Rimanscher Funktion $\zeta(t)$ [Текст] /H. Mangoldt // Math.Ann. —1905. —Bd 60. —P. 1–19.

[293]. Mueller J.H. On the Riemann zeta-function $\zeta(s)$ – gaps between sign changes of $S(t)$ [Текст] /J.H. Mueller // Mathematika. —29. —1983. —№58. —P. 264–269.

[294]. Phillips E. The zeta-fucntion of Riemann: further developments of van der Corput's method [Текст] /E.Phillips // J. Math. (Oxfort). —1933. —V. 4. —P. 205–225.

[295]. Rakhmonov Z.Kh. Estimation of the density of the zeros of the Riemann zeta function [Текст] /Z.Kh. Rakhmonov // Russian Math. Surveys. —49. —1994. —no.2. —P. 168–169.

[296]. Rakhmonov Z.Kh. Zeros of the Riemann zeta function in short intervals of the critical line [Текст] /Z.Kh. Rakhmonov // Chebyshevskiy Sb. —7. —2006. —No. 1(17). —P. 263–269.

[297]. Rezvyakova I.S. Zeros of the derivatives of the Riemann ζ-function [Текст] /I.S. Rezvyakova // Izv. Math. —69:3. —2005. —P. 539–605.

[298]. Rezvyakova I.S. On the number of zeros of the derivatives of the Riemann ζ-function on the critical line [Текст] /I.S. Rezvyakova // Dokl. Math. —71:1. —2005. —P. 89–91.

[299]. Rezvyakova I.S. On simple zeros of derivatives of the Riemann ζ-function [Текст] /I.S. Rezvyakova // Izv. Math. —70:2. —2006. —P. 265–276.

[300]. Rezvyakova I.S. On zeros of Hecke L-functions and their linear combinations on the critical line [Текст] /I.S. Rezvyakova // Dokl. Math. —81:2. —2010. —P. 303–308.

[301]. Rezvyakova I.S. On the Zeros on the Critical Line of L-Functions Corresponding to Automorphic Cusp Forms [Текст] /I.S. Rezvyakova // Math. Notes. —88:3. —2010. —P. 423–439.

[302]. Rezvyakova I.S. Zeros of linear combinations of Hecke L-functions on the critical line [Текст] /I.S. Rezvyakova // Izv. Math. —74:6. —2010. —P. 1277–1314.

[303]. Rezvyakova I.S. On the zeros of the Epstein zeta-function on the critical line [Текст] /I.S. Rezvyakova // Russian Math. Surveys. —70:4. —2015. —P. 785–787.

[304]. Rezvyakova I.S. Selberg's method in the problem about the zeros of linear combinations of L-functions on the critical line [Текст] /I.S. Rezvyakova // Dokl. Math. —92:1. —2015. —P. 448–451.

[305]. Rezvyakova I.S. On the zeros of linear combinations of L-functions of degree two on the critical line Selberg's approach [Текст] /I.S. Rezvyakova // Izv. Math. —80:3. —2016. —P. 602–622.

[306]. Rezvyakova I.S. Additive Problem with the Coefficients of Hecke L-Functions [Текст] /I.S. Rezvyakova // Proc. Steklov Inst. Math. —296. —2017. —P. 234–242.

[307]. Selberg A. On the zeros of Riemann's zeta–function // Shr. Norske Vid. Akad. Oslo. —1942. —V. 10. —P. 1–59.

[308]. Titchmarsh E.C. On the remainder in the formula for $N(T)$, the number of zeros of $\zeta(s)$ in the strip $0 < t < T$ [Текст] /E.C. Titchmarsh // Proc. London Math. Soc. Sec.Ser. —27. —1928. —Part 6. —P. 449–458.

[309]. Titchmarsh E.C. The zeros of the Riemann zeta-function [Текст] / E.C. Titchmarsh – Proc. Royal Soc.(A). —151 —1935. —P. 234–255.

[310]. Tsang K.M. The large values of the Riemann zeta-function [Текст] /K.M.Tsang // Mathematika. —40(1993). —№2. —P. 203–214.

[311]. Vinogradov I.M. The method of trigonometric sums in number theory [Текст] /I.M. Vinogradov, A.A. Karatsuba // Proc. Steklov Inst. Math. —168. —1986. —P. 3–30.

[312]. Voronin S.M. The distribution of the nonzero values of the Riemann ζ–function [Текст] /S.M. Voronin // Proc. Steklov Inst. Math. —128. —1972. —P. 153–175.

[313]. Voronin S.M. Theorem on the universality of the Riemann zeta-function [Текст] /S.M. Voronin // Math. USSR-Izv. —9:3. —1975. —P. 443–453.

[314]. Voronin S.M. Analytic properties of Dirichlet generating functions of arithmetic objects [Текст] /S.M. Voronin // Math. Notes. —24:6. —1978. —P. 966–969.

[315]. Voronin S.M. The zeros of zeta-functions of quadratic forms [Текст] /S.M. Voronin // Proc. Steklov Inst. Math. —142. —1979. —P. 143–155.

[316]. Voronin S.M. On the zeros of some Dirichlet series lying on the critical line [Текст] /S.M. Voronin // Math. USSR-Izv. —16:1. —1981. —P. 55–82.

[317]. Voronin S.M. On analytic continuation of some Dirichlet series [Текст] /S.M. Voronin // Proc. Steklov Inst. Math. —157. —1983. —P. 25–30.

[318]. Voronin S.M. Distribution of zeros of certain Dirichlet series [Текст] /S.M. Voronin // Proc. Steklov Inst. Math. —163. —1985. —P. 89–92.

[319]. Voronin S.M. On lower estimates in the theory of the Riemann zeta-function [Текст] /S.M. Voronin // Math. USSR-Izv. —33:1. —1989. —P. 209–220.

[320]. Voronin S.M. On Ω-theorems in the theory of the Riemann zeta-function [Текст] /S.M. Voronin // Math. USSR-Izv. —32:2. —1989. —P. 429–442.

Публикации автора по теме диссертации в рецензируемых изданиях из списка ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-A]. Хайруллоев Ш.А. О нулях функции Харди и её производных, лежащих на критической прямой [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Чебышевский сборник. —2019. —Т. 20. — Вып. 4(72). —С. 335–348. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-4-357-370 **(SCOPUS)**

[2-A]. Хайруллоев Ш.А. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой [Текст] /З.Х.Рахмонов, Ш.А.Хайруллоев, А.С.Аминов // Чебышевский сборник. —2019. — Т. 20. — Вып. 4(72). —С. 271–293. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-4-306-329. **(SCOPUS)**

[3-A]. Хайруллоев Ш.А. О вещественных нулях производной функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Чебышевский сборник. —2021. —Т. 22. —Вып. 5 (81). —С. 235–242. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-5-234-240. **(SCOPUS)**

[4-A]. Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями производной j–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Доклады Национальной Академии наук Таджикистана. —2021. —Т. 64. —№ 3–4. —С. 129–134.

[5-A]. Хайруллоев Ш.А. О соседных нулях производной n–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Доклады АН Республики Таджикистан. —2019. —Т. 62. —№ 3-4. —С. 145–149.

[6-A]. Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями производной j–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Доклады АН Республики Таджикистан. —2016. —Т. 59. —№ 5-6. —С. 185–187.

[7-A]. Хайруллоев Ш.А. О расстоянии между соседними нулями производной первого порядка функции Харди [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Доклады АН Республики Таджикистан. —2014. —Т. 57. —№ 4. —С. 263–266.

[8-A]. Хайруллоев Ш.А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. —2018. —№ 4(173). —С. 7–25.

[9-A]. Хайруллоев Ш.А. О нулях дзета-функции Римана на критической прямой [Текст] /З.Х.Рахмонов, Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Спецвыпуск посвящён году образования и технических знаний. —2010. —С. 35–40.

[10-A]. Хайруллоев Ш.А. Нули производной первого порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия естественные и экономические науки. —2014. —№ 2(29), ч.1. —С. 335–336.

[11-A]. Хайруллоев Ш.А. Нули дзета-функции Римана, лежащие на коротких промежутках критической прямой [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия естественные и экономические науки. —2017. —№ 1(40). —С. 65–72.

[12-A]. Хайруллоев Ш.А. Об оценке специальной тригонометрической суммы [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. —2017. —№ 1/5. —С. 125–128.

[13-A]. Хайруллоев Ш.А. О нулях производной второго порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. —2019. —№ 2. —С. 57–61.

[14-A]. Хайруллоев Ш.А. Об оценке кратной тригонометрической суммы [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. —2019. —№ 4. —С. 25–32.

[15-A]. Хайруллоев Ш.А. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие на критической прямой и не имеющие Эйлерова произведения [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. —2020. —№ 1. —С. 45–56.

[16-A]. Хайруллоев Ш.А. О нулях производной j–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. —2021. —№ 2. —С. 52–60.

[17-A]. Хайруллоев Ш.А. Нули производной функции Харди, лежащие на критической прямой [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Вестник Бохтарского государственного университета им. Носира Хусрава. Серия естественных наук. —2021. —№ 2/4(93). —С. 9–18.

[18-A]. Хайруллоев Ш.А. О соседних нулях производной первого порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. —2017. —№ 1-1. —С. 25–28.

В других изданиях:

[19-A]. Хайруллоев Ш.А. Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной конференции «Современные проблемы анализа и преподавания математики», посвящённой 105-летию академика С.М.Николского. МГУ им. М.В. Ломоносов. —17-19 мая. —2010. —С. 78–79.

[20-A]. Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями производной первого порядка фукнции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Материалы VIII международной конференции «Алгебра и теории чисел: Современные проблемы и приложения», посвящённой 190-летию П.Л.Чебышева и 120-летию И.М. Виноградова. Саратов. —12-17 сентября 2011. —С. 75–77.

[21-A]. Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями производной j–го порядка фукнции Харди [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел». Белгород. —17-21 октября 2011. —С. 125–126.

[22-A]. Хайруллоев Ш.А. Соседние нули производной j–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной конференции «Современные проблемы теории дифференциальных уравнений и математического анализа», посвящённой 80-летию академика АН РТ Джураева А.Д. Душанбе. —07-08 декабря 2012. —С. 96–97.

[23-A]. Хайруллоев Ш.А. О соседних нулях производных функции Харди [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений», посвящённой 85-летию академика АН РТ Михайлова Л.Г. Душанбе. —17-18 июня 2013. —С. 140–141.

[24-A]. Хайруллоев Ш.А. О соседних нулях производной первого порядка функции Харди [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной научно-практическое конференции «Наука и инновационные разработки – северу». Россия. Мирный. —10-12 марта 2014. —С. 283–284.

[25-A]. Хайруллоев Ш.А. О расстоянии между соседними нулями производной первого порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Материалы XIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвящённой 80-летию со дня рождения профессора С.С. Рышкова. Россия. Тула. —25-30 мая 2015. —С. 252–254.

[26-А]. Хайруллоев Ш.А. О нулях производной j–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Материалы XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённой 70-летию со дня рождения Г.И.Архипова и С.М.Воронина. Саратов. —12-15 сентября 2016. —С. 106–108.

[27-А]. Хайруллоев Ш.А. Дзета-функция Римана и её нули [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Вестник Курган-Тюбинского университета им. Носира Хусрава. —2016. —№ 2/2(38). —С. 16–21.

[28-А]. Хайруллоев Ш.А. О нулях функции Харди и её производных [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики». Нальчик. —17-21 мая 2017. —С. 211.

[29-А]. Хайруллоев Ш.А. Об оценке специальной тригонометрической суммы [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Вестник Курган-Тюбинского университета им. Носира Хусрава. —2017. —№ 2/4(50). —С. 28–32.

[30-А]. Хайруллоев Ш.А. Нули производной функции Харди [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // IV Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики». Нальчик. —22-26 мая 2018. —С. 211–213.

[31-А]. Хайруллоев Ш.А. Об оценке специальной тригонометрической суммы [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения профессора Н.М. Коробова. Россия. Тула. —28-31 мая 2018. —С. 245–246.

[32-А]. Хайруллоев Ш.А. Об одной теореме о расстоянии между соседними нулями функции Харди, лежащими на критической прямой [Текст] /

Ш.А.Хайруллоев // Вестник Бохтарского государственного университета им. Носира Хусрава. Серия естественных наук. —2019. —№ 2/4(69). —С. 15–29.

[33-А]. Хайруллоев Ш.А. Теорема о нулях производной функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвящённой 80-летию академика РАН В.А. Садовничего. Москва. —2019. —13-15 мая 2019. —С. 517–520.

[34-А]. Хайруллоев Ш.А. Нули производной функции Харди [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVI Международной конференции, посвящённой 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Россия. г. Тула. —2019. —13-18 мая 2019 г. —С. 207–210.

[35-А]. Хайруллоев Ш.А. Об оценке кратной тригонометрической суммы [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Н.И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А.И.Виноградова, А.В. Малышева и Б.Ф. Скубенко. Тула. —23-28 сентября 2019. —С. 119–121.

[36-А]. Хайруллоев Ш.А. Об оценке кратной тригонометрической суммы [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной конференции «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа», посвящённой 60-летию академика Рахмонова З.Х. и члена-корреспондента Исхокова С.А. Душанбе. —13-14 декабря 2019. —С. 262–270.

[37-A]. Хайруллоев Ш.А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории Материалы XVIII Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения профессоров Б.М. Бредихина, В.И. Нечаева и С.Б. Стечкина. Тула. —23-26 сентября 2020. — С. 227–229.

[38-A]. Хайруллоев Ш.А. О нулях производной j–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XIX Международной конференции, посвящённой двухсотлетию со дня рождения академика П.Л. Чебышева. Тула. —18-22 мая 2021. —С. 193–194.

[39-A]. Хайруллоев Ш.А. О вещественных нулях производной первого порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // В сборнике: Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XX Международной конференции, посвящённой 130-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова. Тула. —21-24 сентября 2021. —С. 113–115.

Монографии:

[40-A]. Хайруллоев Ш.А. Нули функции Харди и её производной, лежащие на критической прямой [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Монография. Изд. Русайнс. —Москва. —2022. —88 с. —ISBN: 978-5-4365-5281-1