ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 511.331

На правах рукописи

Хайруллоев Шамсулло Амруллоевич

НУЛИ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ ХАРДИ И ДЭВЕНПОРТА-ХЕЙЛЬБРОННА, ЛЕЖАЩИЕ В КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКАХ КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности
01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Душанбе – 2022

Научная работа выполнена в Таджикском национальном университете

Научный консультант:	**Рахмонов Зарулло Хусенович,** доктор физико-математических наук, академик НАН Таджикистана, профессор, директор Института математики им. А. Джураева НАНТ.
Официальные оппоненты:	**Аллаков Исмаил,** доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии Термезского государственного университета
	Пачев Урусби Мухамедович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова
	Байзаев Саттор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математических дисциплин и современного естествознания Таджикского государственного университета права, бизнес и политики
Оппонирующая организация:	Таджикский государственный педагогический университет им. Садриддина Айни

Защита состоится 20 января 2023 г. в 10 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета 6D.KOA–009 при Институте математики имени А. Джураева НАН Таджикистана по адресу: 734063, г. Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики имени А. Джураева НАН Таджикистана, а также на сайте http://www.mintas.tj.

Автореферат разослан "___" __________________ 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 6D.KOA–009,
доктор физико-математических наук, доцент Каримов О.Х.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Исследования по теории дзета-функции Римана берёт своё начало с XIX века и отдельные разделы этой теории стали самостоятельными научными направлениями современной аналитической теории чисел.

В исследованиях по теории дзета-функции Римана одним из главных направлений является изучение нулей $\zeta(s)$, лежащих на критической прямой. А изучение нулей дзета-функции Римана на критической прямой сводится к изучению действительных нулей функции Харди.

Одним из вопросов относительно этих нулей является вопрос о величине промежутка, на котором заведомо лежит нуль функции Харди и её производные.

Гипотеза Римана не верна для функции Дэвенпорта-Хейльбронна, который является простейшим рядом Дирихле, удовлетворяющим функциональному уравнению риманова типа. Кроме того известно, что на критической прямой лежит очень много нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна.

Исследования нулей функции Харди и её производных, а также нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой, ранее рассматривались в работах английских математиков Г.Харди и Дж.Литтлвуда[1–5], Г.Дэвенпорта и Г.Хейльбронна[6], норвежского математика А.Сельберга[7], чешского математика

[1]Hardy G.H. Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // Compt.Rend. Acad.Sci. —1914. —V. 158. —P. 1012–1014.

[2]Hardy G.H., Littlewood J.E. The trigonometrical series associated with the elliptic θ function // Acta math. —1914. —V. 37. —P. 193–239.

[3]Hardy G.H., Littlewood J.E. Contributions to the theory of Riemann zeta–function and the theory of distribution of primes // Asta Math. —1918. —V. 41. —P. 119–196.

[4]Hardy G.H., Littlewood J.E. The zeros of Riemann's zeta–function on the critical line // Math.Z. —1921. —Bd 10. —S. 283–317.

[5]Hardy G.H., Littlewood J.E. The approximate functional equation in the theory of the zeta-function with applications to the divisor problems of Dirichlet and Pilth // Proc. London Math. Soc. (2). —1922. —V. 21. —P. 39–74.

[6]Davenport H., Heilbronn H. On the zeros of certain Dirichlet series // J. Lond. Math. Soc. —1936. —V. 11. —pp. 181 - 185 and 307 - 312.

[7]Selberg A. On the zeros of Riemann's zeta–function // Shr. Norske Vid. Akad. Oslo. —1942. —V. 10. —P. 1–59.

Я.Мозера[8–12] и советских математиков С.М.Воронина[13–16], А.А.Карацубы[17–22], С.А.Гриценко[23–25].

Актуальность и целесообразность данной работы определяются тем, что полученные результаты об оценке длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди, и оценка количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой являются новыми и наилучшими.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Дзета-функция Римана является аналитической функцией на всей s – плоскости, кроме точки $s = 1$, где она имеет полюс первого порядка с вычетом, равным 1, и имеет тривиальные нули при чётных отрицательных целых s. Нетривиальные нули $\zeta(s)$ находятся в полосе $0 \leq Res \leq 1$, которая называется критической полосой, и расположены симметрично относительно

[8] Мозер Я. Некоторые свойства дзета-функции Римана на критической прямой // Acta Auith. —1974. —V. 26. —P. 33–39.

[9] Мозер Я. Об одной сумме в теории дзета-функции Римана [Текст] /Я.Мозер // Acta arith. —1976. —V. 31. —P. 31–43.

[10] Мозер Я. Существенное улучшение одной теоремы Харди-Литтлвуда в теории $\zeta(s)$ // Acta arith. —1980. —V. 38. —№ 4. —P. 112–121.

[11] Мозер Я. Улучшение теоремы Харди-Литтлвуда о плотности нулей функции $\zeta(1/2+it)$ // Acta math. Univ. Comen. Bratislava. —1983. —V. 42–43. —P. 41–50.

[12] Мозер Я. Новые теоремы о среднем для функции $|\zeta(1/2+it)|^2$ // Acta math. Univ. Comen. Bratialava. —1985. —V. 46–47. —C. 21–40.

[13] Воронин С.М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой // Известия АН СССР. Серия математическая. —1980. —Т. 44. —№ 1. —С. 63–91.

[14] Воронин С.М. О распределении нулей некоторых рядов Дирихле // Труды МИАН. —1984. —Т. 163. —С. 74–77.

[15] Воронин С.М. Об аналитическом продолжении некоторых рядов Дирихле // Тр. МИАН СССР. —157. —1981. —С. 25–30.

[16] Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета–функция Римана —М.: Физматлит. —1994. —376 с.

[17] Карацуба А.А. О расстоянии между соседними нулями дзета–функции Римана, лежащими на критической прямой // Труды МИАН. —1981. —Т. 157. —С. 49–63.

[18] Карацуба А.А. Дзета-функция Римана и ее нули // УМН. —1985. —Т. 40. — Вып. 5 (245). —С. 19–70.

[19] Карацуба А.А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Известия АН СССР. Серия математическая. —1990. —Т 54. —№ 2. —С. 303–315.

[20] Карацуба А.А. О нулях некоторых рядов Дирихле // УМН. —45:1(271). —1990. —С. 175–176.

[21] Карацуба А.А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих эйлерова произведения // Известия РАН. Серия математическая. —1993. —Т 57. —№ 5. —С. 3–14.

[22] Карацуба А.А. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле [Текст] / А.А. Карацуба // Труды МИАН. —1994. —Т. 207. —С. 180–196.

[23] Гриценко С. А. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна // Труды МИАН. —2017. —Т. 296. —С. 72–94.

[24] Гриценко С. А. О дробных моментах успокоенных L-функций Дирихле // Чебышевский сборник. —2017. —Т. 18. —№ 4. —С. 168–187.

[25] Гриценко С.А. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Матем. заметки. —100:5. —2016. —С. 774–778.

прямой $Res = \frac{1}{2}$ и вещественной оси.

Л.Эйлер[26] изучал функцию $\zeta(s)$ при действительных s и с помощью своего тождества предложил аналитическое доказательство теоремы Евклида о бесконечности числа простых чисел. Б.Риман[27] изучал $\zeta(s)$ как функцию комплексного переменного. Он доказал, что применяя теорию функций комплексного переменного для $\zeta(s)$, можно получить новые результаты о распределении простых чисел.

До сих пор не доказанная гипотеза Римана утверждает следующее: *все нетривиальные нули дзета-функции Римана лежат на прямой* $Res = 1/2$.

Нули $\zeta(s)$ на критической прямой — это действительные нули функции $\zeta(1/2+it)$.

Нули функции $\zeta(1/2+it)$ впервые были исследованы в 1914 году в работах Г.Харди[1]. Он доказал теорему: $\zeta(1/2+it)$ *имеет бесконечно много вещественных нулей*. По поводу этой теоремы Э. Ландау[28] написал *«К самым значительным успехам математики настоящего времени принадлежит заметка господина Г. Харди о нулях дзета-функции Римана».*

Английские математики Г. Харди и Дж. Литтлвуд[2–5] в 1918-1921 гг. доказали следующие теоремы, которые значительно перекрыли теорему Харди:

- *промежуток* $(T, T+H)$ *при* $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{0,25+\varepsilon}$ *содержит нуль нечётного порядка* $\zeta(1/2+it)$;

- *в промежутке* $(T, T+H)$ *при* $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{0,5+\varepsilon}$ *содержится не меньше, чем* cH *нулей нечётного порядка* $\zeta(1/2+it)$, $c = c(\varepsilon) > 0$ *– постоянная.*

Эти утверждения порождали два направления исследований, одно – оценивает сверху расстояние между соседними действительными нулями функции $\zeta(1/2+it)$, а другое – «плотность» нулей $\zeta(1/2+it)$ на промежутках вида $(T, T+H)$, $H = T^{\alpha+\varepsilon}$ с возможными меньшими значениями α.

[26] Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых —Т.1. —М.; —Л.; —ОНТИ. —1936.

[27] Риман Б. О числе простых чисел, не превышающих данной величини // Сочинения. —М.: ОГИЗ. —1948. —С. 216–224.

[28] Landau E. Uber die Hardysche Entdeckung unendlich vieler Nullstellen der Zeta-funktion mit reelen Teil $\frac{1}{2}$ // Match. Ann. —1915. —B. 76. —S. 212–243.

А.Сельберг[29] в 1942 г. доказал усиленный вариант теоремы Г.Харди и Дж.Литтлвуда: *при выполнении вышеприведённого условия теоремы справедливо соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq cH \ln T.$$

Из формулы Мангольдта[30] о количестве $N(T)$ нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0 < Res < 1,\ 0 < Ims \leq T$:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T),$$

следует неулучшаемость результата А.Сельберга[29]. В связи с оценкой количества нулей функции $\zeta(1/2+it)$ на промежутке $(0,T)$ А.Сельберг высказал гипотезу, что его результат должен иметь место при $H = T^{\alpha+\varepsilon}$, где $\alpha-$ фиксированное положительное число, меньшее $1/2$. Эту гипотезу при $\alpha = 27/82$ решил А.А.Карацуба[31–33]. Он в своих работах отметил, что

$$\alpha = \frac{27}{82} = \frac{1}{3} - \frac{1}{246}$$

может быть заменено и меньшим числом, однако это связано с исключительно громоздкими оценками специального вида тригонометрических сумм.

Н.Левинсон[34] в 1974 г. доказал, что *по крайней мере треть всех нулей $\zeta(s)$ лежит на критической прямой.*

Новые результаты по этой проблеме получил чешский математик Я.Мозер в 1976–1980 гг. Я.Мозер[8–12] доказал следующее:

- при $T \geq T_0 > 0,\ H \geq T^{1/6} \ln^2 T$ промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечётного порядка функции $\zeta(1/2+it)$;

[29] Selberg A. On the zeros of Riemann's zeta–function // Shr. Norske Vid. Akad. Oslo. —1942. —V. 10. —P. 1–59.

[30] Mangoldt H. Zur Verteilung der Nullstellen der Rimanscher Funktion $\zeta(t)$ // Math.Ann. —1905. —Bd 60. —P. 1–19.

[31] Карацуба А.А. О нулях функции $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. —1984. —Т. 49. —№ 2. —С. 326–383.

[32] Карацуба А.А. О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. —1984. —Т. 48. —№ 3. —С. 569–584.

[33] Карацуба А.А. Распределение нулей функции $\zeta(0.5+it)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. —1984. —Т. 48. —№ 6. —С. 1214–1224.

[34] Levinson N. More than one third of the zeros of Riemann‘s zeta-function are on $\sigma = 1/2$ [Текст] /N.Levinson // Adv. in Math. —1974. —V. 13. —P. 383–436.

- при $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{5/12} \ln^3 T$ имеет место оценка

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq cH,$$

$c > 0$ – абсолютная постоянная.

А.А.Карацуба[17–18] в 1981-1985 гг. для специальной тригонометрической суммы

$$C(u, M) = \sum_{M<m\leq M_1} e\left(\frac{t\ln(P_1 - m)}{2\pi}\right),$$

с условиями

$$t \geq t_0 > 0, \quad \sqrt{P_1} \leq M \leq \frac{P_1}{10}, \quad M_1 \leq 2M, \quad P_1 = \left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right],$$

получил нетривиальную оценку, которая позволила ему получить более точный результат, чем Я.Мозер, то есть, он доказал теорему: *при $H \geq T^{\alpha} \ln^2 T$, $\alpha = 5/32$, $T \geq T_0 > 0$ промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечётного порядка функции $\zeta(1/2+it)$.* А.А.Карацуба при доказательстве этой теоремы, следуя Харди–Литттлвуду–Мозеру, исследовал действительные нули функции Харди $Z(t)$, которые являются действительными нулями $\zeta(1/2+it)$. Можно предполагать, что *при любом $\varepsilon > 0$, $T \geq T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{\varepsilon}$ промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечётного порядка функции $Z(t)$.*

А.А.Карацуба[17–18] вместе с задачей о нулях нечётного порядка функции Харди рассмотрел более общую задачу — о нулях производной k–го порядка функции Харди. Он доказал, что с увеличением порядка производных длина промежутка, на котором заведомо содержится нуль нечётного порядка функции $Z^{(k)}(t)$ уменьшается, то есть, доказал теорему: *Пусть k–натуральное число, $T \geq T_0(k) > 0$, $H \geq cT^{1/(6k+6)} \ln^{2/(k+1)} T$, $c = c(k) > 0$. Тогда промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечётного порядка функции $Z^{(k)}(t)$.*

А.А.Карацуба[16] отметил, что, если для оценки тригонометрических сумм $C(u, M)$ применить более сложные методы, например, метод экспоненциальных пар, то для этой суммы можно получить более точную оценку.

В работах[35–36], применяя метод экспоненциальных пар, для специальных тригонометрических сумм $C(u,M)$ по множеству всех экспоненциальных пар, авторами была получена новая нетривиальная оценка вида

$$|C(t,M)| \ll P_1^{\frac{1}{2}-\lambda} M^{-\frac{1}{2}+\kappa+2\lambda},$$

которая позволила получить более точный результат, чем результат А.А.Карацубы, т.е. доказано утверждение: *пусть* $T \geq T_0 > 0$. *Тогда промежуток* $(T, T+H)$ *при*

$$H \geq T^{\frac{5}{32}-\frac{\frac{5}{6}-R}{192(2R+1)}} \ln^2 T,$$

где $R = 0.829021356859133592409239777283112 0\ldots$, *константа Ранкина, имеет нуль нечётного порядка функции* $Z(t)$.

Полученный результат является уточнением результата А.А.Карацубы и в рамках метода оптимизации экспоненциальных пар, является окончательным.

Существуют функции, обладающие свойствами $\zeta(s)$, но не имеющие эйлерова произведения. Для некоторых из них удаётся показать, что гипотеза Римана неверна. Более того, нули некоторых таких функций встречаются в любой полосе. Примером таких функций является функция Дэвенпорта-Хейльбронна, которую впервые исследовали Г.Харди и Дж.Литтлвуд в 1936 г.

Функция Дэвенпорта-Хейльбронна обозначается через $f(s)$ и определяется равенством

$$f(s) = \frac{1-i\text{æ}}{2} L(s,\chi) + \frac{1+i\text{æ}}{2} L(s,\bar{\chi}),$$

$$\text{æ} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2}{\sqrt{5}-1},$$

где $L(s,\chi)$ – функция Дирихле, $\chi = \chi(n)$ – характер Дирихле по модулю 5 такой, что $\chi(2) = i$. Эта функция не имеет эйлерова произведения, но удовлетворяет уравнению риманова типа

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{-s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{-(1-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right) f(1-s).$$

[35] Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. —2006. —Т. 49. —№ 5. —С. 393–400.

[36] Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш.А. Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. —2009. —Т. 52. —№ 5. —С. 331–337.

В работе[6] Г.Дэвенпорт и Г.Хейльбронн в 1936 г. доказали, что при $Res > 1$, $0 < Ims \le T$ для функции $f(s)$ выполняется неравенство
$$N_0(1,T) \ge c_1 T,$$
где $c_1 > 0$ – абсолютная постоянная.

В 1980–1984 гг. С.М.Воронин[13–16] доказал, что при $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ справедливо неравенство
$$N(\sigma_2,T) - N(\sigma_1,T) \ge c_2 T, \quad c_2 = c_2(\sigma_1,\sigma_2) > 0.$$
В работах[13,37] он также доказал, что для $N_0(T)$ – числа нулей функции $f(s)$ в области $Res = 1/2$, $0 < Ims \le T$ имеет место оценка
$$N_0(T) \ge c_3 T \exp(0.05\sqrt{\log\log\log\log T}),$$
где $c_3 > 0$ – абсолютная постоянная, $T \ge T_0 > 0$. С.М.Воронин показал, что прямая $Res = 1/2$ является исключительным множеством для нулей функции $f(s)$.

В 1989 г. А.А.Карацуба[19,20] разработал новый метод, с помощью которого получил более точную оценку. Он доказал теорему: *при* $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$, $T \ge T_0(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon > 0$ *– сколь угодно малое фиксированное число, справедливо неравенство*
$$N_0(T) \ge T(\log T)^{0.5-\varepsilon}.$$

В 1993 г. А.А.Карацуба[21–22], развивая свой метод, получил еще более точную оценку, а именно, доказал следующее: *при* $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$, $T \ge T_0(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon > 0$ *– сколь угодно малое фиксированное число, выполняется соотношение*
$$N_0(T+H) - N_0(T) \ge H(\log T)^{0.5}\exp(-c_4\sqrt{\log\log T}),$$
где c_4 *– положительная абсолютная постоянная.*

С.А.Гриценко[23,25] в 2017 г. последнюю оценку усилил и получил неравенство
$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Потом он в работах[24,38,39] получил новые верхние и нижние оценки дробных моментов успокоенных рядов Дирихле, из которых следует
$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0.$$

[37] Voronin S.M. On the zeros of some Dirichlet series lying on the critical line // Math. USSR-Izv. —16:1. —1981. —P. 55–82.

[38] Gritsenko S.A. On the Zeros of the Davenport-Heilbronn Function Lying on the Critical Line // Math. Notes. —101:1. —2017. —P. 166–170.

[39] Gritsenko S.A. On the zeros of the Davenport-Heilbronn function // Proc. Steklov Inst. Math. —296. —2017. —P. 65–87.

Из приведённого выше краткого обзора результатов по теории нулей функции Харди и её производной, а также нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой, следует, что данные направления являются актуальными, и этим актуальным проблемам посвящается настоящая диссертационная работа.

Цель исследования. Целями диссертационной работы являются:

- нахождение по множеству всех экспоненциальных пар нижней грани длины промежутка критической прямой, содержащей нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди;
- получение новых равномерных по параметрам оценок специальных тригонометрических сумм в терминах экспоненциальных пар;
- усиление неравенства А.А.Карацубы о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой для промежутков, имеющих более короткую длину.

Задачи исследования. В соответствии с поставленными целями выделяются следующие задачи:

- свести задачу об оценке сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди, к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар;
- получить новые оценки сверху величины длин промежутков критической прямой, в которых заведомо содержатся нули нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди;
- получить новые равномерные по параметрам оценки специальных тригонометрических сумм, в терминах экспоненциальных пар;
- свести задачу об оценке количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна к задаче отыскания экспоненциальных пар;
- усилить неравенство А.А.Карацубы о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, притом для промежутков, имеющих более короткую длину.

Объект исследования. Объектами исследования являются нули производной j-го порядка функции Харди, лежащие на критической прямой, оценка специальных и кратных тригонометрических сумм и нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой.

Предмет исследования. Предметом исследования является получение новых равномерных по параметрам оценок специальных тригонометрических сумм в терминах экспоненциальных пар, получение новых оценок сверху величины длин промежутков критической прямой, в которых заведомо содержатся нули нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди, а также усиление неравенства А.А.Карацубы о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой, для промежутков, имеющих более короткую длину.

Научная новизна исследования. Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют теоретический интерес и состоят в следующем:

- задача об оценке сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди, сведена к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар;
- найдены новые оценки сверху величины длин промежутков критической прямой, в которых заведомо содержатся нули нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди;
- получены новые равномерные по параметрам оценки тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0; 1; 2; 3$ в терминах экспоненциальных пар, которые возникают при исследовании нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой;
- с использованием новых равномерных по параметрам оценок тригонометрических сумм задача об оценке количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна сведена к задаче отыскания экспоненциальных пар;
- усилено неравенство А.А.Карацубы о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, притом для промежутков, имеющих более короткую длину.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применения в аналитической теории чисел при дальнейших исследованиях нулей рядов Дирихле, в том числе, линейной комбинации L – рядов Дирихле, для которых не выполняется гипотеза Римана о нулях в критической полосе. Полученные результаты могут быть использованы в научных учреждениях и ВУЗах, где ведутся исследования по аналитической теории чисел, например, в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, в Таджикском национальном университете, в Таджикском государственном педагогическом университете им. С.Айни. Также материалы диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

Положения, выносимые на защиту:

1. Теорема о сведении задачи оценки сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди, к задачам оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар;
2. Теорема об оценке сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди.
3. Теорема о получении равномерных по параметрам оценок специальных тригонометрических сумм в терминах экспоненциальных пар.
4. Теорема о сведении задачи об оценке количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна, к задачам отыскания экспоненциальных пар.
5. Теорема о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, когда промежуток имеет более короткую длину.

Степень достоверности результатов. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В диссертационной работе исследуются задачи по аналитической теории чисел, которые соответствуют паспорту научной специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел (Пункт III параграф 3 паспорта научной специальности).

Личный вклад соискателя учёной степени. Задачи исследования были сформулированы совместно с научным консультантом работы, который оказывал консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, отражённые в разделе «Научная новизна», получены лично автором.

Апробация и реализация результатов диссертации. Основные результаты диссертации обсуждены и получили положительные отзывы на следующих конференциях и семинарах:

- международной конференции «Современные проблемы анализа и преподавания математики», посвящённой 105-летию академика С.М. Николского. г. Москва, МГУ им. М.В. Ломоносов, 17-19 мая 2010 г.;
- VIII-ой международной конференции «Алгебра и теории чисел: Современные проблемы и приложения», посвящённой 190-летию П.Л.Чебышева и 120-летию И.М.Виноградова, г. Саратов, 12-17 сентября 2011 г;
- международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел». г. Белгород. 17-21 октября 2011 г.;
- международной конференции «Современные проблемы теории дифференциальных уравнений и математического анализа», посвящённой 80-летию академика АН РТ Джураева А.Д., г. Душанбе, 07-08 декабря 2012 г.;
- международной научной конференции «Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений», посвящённой 85-летию академика АН РТ Л.Г.Михайлова, г. Душанбе, 17-18 июня 2013 г.;
- международной научно-практической конференции «Наука и инновационные разработки – северу». Россия, г. Мирный, 10-12 марта 2014 г.;
- XIII-ой международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвящённой 80-летию со дня рождения профессора С.С.Рышкова. Россия, г. Тула, 25-30 мая 2015 г.;
- XIV-ой международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённой 70-летию со дня рождения Г.И.Архипова и С.М.Воронина. г. Саратов, 12-15 сентября 2016 г.;

- международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики». г. Нальчик, 17-21 мая 2017 г.;
- IV-ой международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики». г. Нальчик, 22-26 мая 2018 г.;
- XV-ой международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвящённой столетию со дня рождения профессора Н.М.Коробова. Россия. г. Тула, 28-31 мая 2018 г.;
- международной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвящённой 80-летию академика РАН В.А.Садовничего. г. Москва, 13-15 мая 2019 г.;
- XVI-ой международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённой 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Россия. г. Тула, 13-18 мая 2019 г.;
- XVII-ой международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Н.И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А.И.Виноградова, А.В.Малышева и Б.Ф.Скубенко. г. Тула, 23-28 сентября 2019 г.;
- международной конференции «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа», посвящённой 60-летию академика З.Х.Рахмонова и члена-корреспондента С.А.Исхокова, г. Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.;
- XVIII-ой международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённой столетию со дня рождения профессоров Б.М.Бредихина, В.И.Нечаева и С.Б.Стечкина. г. Тула, 23-26 сентября 2020 г.;
- XIX-ой международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённой двухсотлетию со дня рождения академика П.Л.Чебышева. г. Тула, 18-22 мая 2021 г.;

- XX-ой международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённой 130-летию со дня рождения академика И.М.Виноградова. г. Тула, 21-24 сентября 2021 г.;
- семинар кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета;
- семинар отдела алгебры, теории чисел и топологии (2016-2020 гг.) и общеинститутский семинар (2016-2020 гг.) в Институте математики им. А.Джураева НАН Таджикистана.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 40 работах, список которых приведён в конце диссертации. Работы [1–18] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан, 16 из них написаны без соавторов. Работы [1–3] опубликованы в журналах, входящих в международные библиографические и реферативные базы данных и систем цитирования **Web of Science и Scopus**, одна из которых написана в соавторстве с научным консультантом, которому принадлежит постановка задачи.

Структура диссертации и объём. Диссертация состоит из списка обозначений, введения, общей характеристики работы, трёх глав, обсуждения полученных результатов, выводов, списка цитированной литературы из 360 наименований, занимает 218 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Главы разбиты на параграфы. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья-на порядковый номер теорем, лемм или формул в данном параграфе.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Материал и методы исследования. Материал исследования состоит из решения ряда задач аналитической теории чисел, относящегося к исследованию нулей нечётного порядка производной функции Харди и нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на коротких промежутках критической прямой.

В работе используются современные методы аналитической теории чисел, а именно, метод ван дер Корпута, метод экспоненциальных пар, метод успокаивающий множители Сельберга, метод производящих функций Дирихле и аналитические методы, применяемые в теории функции комплексного переменного.

Результаты исследования. Приводим краткое изложение результатов глав диссертационной работы.

Во введении даётся краткий исторический обзор результатов по затрагиваемым проблемам, обосновывается актуальность темы.

Первая глава диссертационной работы посвящена обзору изученной литературы по теме диссертационной работы. Приведены основные методы исследования.

Вторая глава состоит из пяти параграфов, посвящена оценке сверху величины длины промежутка критической прямой, заведомо содержащей нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди, которая сведена к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар для оценки специальных тригонометрических сумм.

В первом параграфе коротко изложены основные результаты о нулях производной j–го порядка функции Харди, отдельно в случае $j = 1$, $j = 2$ и в общем случае при $j \geq 3$.

Второй параграф носит вспомогательный характер, в нём приведены основные определения, алгоритм оптимизации экспоненциальных пар, известные леммы, которые применяются в последующих параграфах.

Функция Харди $Z(t)$, которая определяется равенством

$$Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right), \quad e^{i\theta(t)} = \pi^{-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right)\right|^{-1},$$

принимает действительные значения при действительных значениях t и действительные нули $Z(t)$ являются нулями дзета-функции Римана $\zeta(s)$, лежащими на критической прямой.

Наряду с задачей о соседних нулях функции Харди $Z(t)$, лежащих на критической прямой, можно рассмотреть более общую задачу — о соседних нулях производной j-го порядка функции Харди $Z^{(j)}(t)$, $j \geq 1$. С увеличением порядка производной j длина промежутка, на котором заведомо лежит нуль функции $Z^{(j)}(t)$, уменьшается.

В третьем параграфе второй главы задача об оценке сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди ($Z^{(j)}(t)$, $j \geq 1$), сведена к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар.

Основным результатом этого параграфа являются следующая

Теорема 2.3.1. *Пусть (κ, λ) – произвольная экспоненциальная пара, j – натуральное число, $T \geq T_0(j) > 0$, $c = c_0(j) > 0$, тогда функция $Z^{(j)}(t)$ имеет нуль нечётного порядка в промежутке $(T, T + H)$, если*

$$H \geq cT^{\omega_j(\kappa,\lambda)}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}, \quad \omega_j(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa + \lambda - 0.5}{2\kappa + 4\lambda + 2j - 1}. \tag{1}$$

Дробно-линейную функцию $\omega_j(\kappa, \lambda)$, определенную равенством (1), для удобства представляем в виде

$$\omega_j(\kappa, \lambda) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2 - \delta_j^{-1}(\kappa, \lambda)}\right), \quad \delta_j(\kappa, \lambda) = \frac{\lambda + j}{0,5 - \kappa + j},$$

и её минимизацию сводим к минимизации функции $\delta_j(\kappa, \lambda)$ по множеству всех экспоненциальных пар.

Заметим, что теорема А.А.Карацубы[17–18] является следствием теоремы 2.3.1, при следующих экспоненциальных парах

$$(\kappa, \lambda) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) = AB(0, 1), \quad \delta_j\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3j + 1},$$

$$\omega_j\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6j + 6}, \ j \in \mathbb{N}.$$

Доказательство теоремы 2.3.1 проводится по схеме доказательства теоремы А.А. Карацубы, идеями работ[36,37,40,41,42], в сочетании с методом экс-

[40] Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями функции $Z^{(j)}(t)$, $j \geq 1$ // Доклады АН Республики Таджикистан. —2006. —Т. 49. —№ 9. —С. 803–809.

[41] Неъматова Г., Хасанов З.Н. О нулях дзета-функции Римана в окрестности критической прямой // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. —2001. —Т. XLIV. —№ 3-4. —С. 4–12.

[42] Хайруллоев Ш.А., Неъматова Г. Об оценке специальной тригонометрической суммы // В сборнике: Роль информационно-коммуникационных технологий в инновационном развитии Республики Таджикистан. —2017. —С. 91–95.

поненциальных пар.

В четвёртом параграфе второй главы получена новая оценка сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором содержится нуль нечётного порядка производных j–го порядка функции Харди, когда $j \geq 3$.

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 2.4.1. *Пусть* $j \geq 3$ *— натуральное число,* $T \geq T_0(j) > 0$*,* $c = c(j) > 0$*, тогда функция* $Z^{(j)}(t)$ *имеет нуль нечётного порядка в промежутке* $(T, T+H)$*, если*

$$H \geq cT^{\frac{1}{6+6j}-\frac{1}{6(1+j)(19+18j)}}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}.$$

Доказательство теоремы проводится методом оптимизации экспоненциальных пар[43].

Полученный результат является улучшением оценки А.А.Карацубы при любом натуральном $j \geq 3$ и является окончательным в рамках данного метода.

В пятом параграфе главы методом оптимизации экспоненциальных пар получены новые оценки сверху величины длин промежутков критической прямой, в котором содержится нуль нечётного порядка производных первого и второго порядка функции Харди, что соответственно уточняет теоремы А.А.Карацубы при $j = 1$ и $j = 2$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.5.1. *Пусть* $T \gg 1$*, тогда функция* $Z'(t)$ *имеет нуль нечётного порядка в промежутке* $(T, T+H)$*, если*

$$H \gg T^{\frac{1}{12}-\frac{65601}{810284}}\ln T.$$

Теорема 2.5.2. *Пусть* $T \gg 1$*, тогда функция* $Z''(t)$ *имеет нуль нечётного порядка в промежутке* $(T, T+H)$*, если*

$$H \gg T^{\frac{1}{18}}(\ln T)^{\frac{2}{3}}.$$

---

[43]Graham S.W. Vander Corput's Method of Exponential sums [Текст] /S.W.Graham, G.Kolesnik // Cambridge university press. —1991. Cambridge, New Vork, Port Chester, Melbourne, Sydney.

Третья глава диссертационной работы посвящена оценкам специальных тригонометрических сумм $W_j = W_j(T,H)$, $j = 0,1,2$, которые возникают при выводе оценки количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой. Для этих сумм впервые получены равномерные по параметрам оценки тригонометрических сумм в терминах экспоненциальных пар, являющиеся обобщением оценок С.М.Воронина[13–14] и А.А.Карацубы[19–22].

В первом параграфе приведены формулировки основных результатов главы.

Пусть ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие $0,001$; $T \le t \le T+H$, $T \ge T_0(\varepsilon,\varepsilon_1) > 0$; $T^{\frac{1}{4}} < H < T^{\frac{1}{3}}$; $P = \sqrt{5T(2\pi)^{-1}}$; $X = T^{0,01\varepsilon_1}$; $\mathscr{L} = \ln P$; $k = [\ln \mathscr{L}]$; $\eta = c_1 k \mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}$; c_1, c_2, $\ldots$ — абсолютные положительные постоянные;

$$r(n) = \frac{1-i\text{æ}}{2}\chi(n) + \frac{1+i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(n).$$

Определяя число $A(\lambda)$ следующим образом

$$A(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2},$$

и вводя обозначениями функции $B(\varphi)$ и $\overline{B(\psi)}$, то есть, соотношениями

$$B(\varphi) = \left(\frac{\varphi^{i\eta}-1}{\ln\varphi}\right)^k, \qquad \overline{B(\psi)} = \left(\frac{\psi^{-i\eta}-1}{\ln\psi}\right)^k,$$

$$r(n) = \frac{1-i\text{æ}}{2}\chi(n) + \frac{1+i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(n),$$
$$h(\nu) \equiv \beta(\nu)\chi(\nu) = \beta(\nu)\overline{\chi}(\nu),$$

определим суммы $W_j = W_j(T)$ равенствами

$$W_0 = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_1 = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} B\left(\frac{P}{\lambda_1}\right)\overline{B\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_2 = \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Во втором параграфе третьей главы получены новые равномерные по параметрам оценки тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0; 1; 2$, и задача о нетривиальности оценки этих сумм относительно параметра H сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар. Оценки этих сумм затем применяются при получении оценки количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой.

Справедлива следующая

Лемма 3.2.1. *Пусть* (κ, λ) *— произвольная экспоненциальная пара,* ε_1 *и* ε_2 *- малые произвольные положительные числа, не превосходящие* $0,001$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \eta < 1$,

$$\theta(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2}, \qquad æ(\kappa, \lambda) = \frac{52 + \kappa - \lambda}{50\kappa + 50}, \qquad \sigma(\kappa) = \frac{\ln \mathscr{L}}{(\kappa + 1)\ln T}.$$

Тогда при $H = T^{\theta(\kappa,\lambda) + æ(\kappa,\lambda)\varepsilon_1 + \sigma(\kappa)}$ *для суммы* $W_j(T)$ *имеют место оценки*

$$\begin{aligned} &W_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}}\right)^{2k} \left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k \mathscr{L}\right) T^{-0,5(\lambda - \kappa)\varepsilon_2} \cdot T^{-\varepsilon_1}, \\ &W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \quad j = 0, \ j = 2. \end{aligned}$$

Отметим, что показатель

$$\theta(\kappa; \lambda) = \frac{\kappa + \lambda}{2(\kappa + 1)}$$

в лемме 3.2.1 также рассматривается в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге $x^2 + y^2 \le R$, то есть

$$K(R) = \#\left\{(x, y) : \ x^2 + y^2 \le R, \ x, y \in Z\right\} = \pi R + O\left(R^{\theta(\kappa;\lambda) + \varepsilon}\right),$$

также при оценке остаточного члена в проблеме делителей Дирихле о числе целых точек в гиперболе $xy \le N$, $x > 0$, $y > 0$. Наилучшая для $\theta(\kappa; \lambda)$ оценка сверху на данный момент принадлежит J.Bourgain and N.Watt[44]. Они доказали, что

$$\theta_0 = \min_{\kappa, \lambda \in \mathcal{P}} \theta(\kappa, \lambda) = \min_{\kappa, \lambda \in \mathcal{P}} \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2} \le \frac{1515}{4816} = \frac{1}{3} - \frac{271}{3 \cdot 4816} \approx 0.314576,$$

где $\mathcal{P}$ — множество всех экспоненциальных пар.

[44]Bourgain J. and Watt N. Decoupling for perturbed cones and mean square of $|\zeta(0,5 + it)|$ // http://arxiv.org/abs/1505.04161v1 [math.NT] 15 May 2015.

Отсюда из леммы 3.2.1 получаем следующее

Следствие 3.2.1.1. *Пусть* ε_1 *и* ε_2 *- малые произвольные положительные числа, не превосходящие* $0,001$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \eta < 1$. *Тогда при* $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon_1}$ *имеют место оценки*

$$
\begin{aligned}
&W_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}}\right)^{2k} \left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k \mathscr{L}\right) T^{-\varepsilon_1},\\
&W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \quad j = 0,\ j = 2.
\end{aligned}
$$

В третьем параграфе третьей главы получена асимптотическая формула для суммы $S(Y)$ и найдена оценка сверху для суммы $W(\theta)$, которая применяется при нахождении оценки количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой.

Определение 3.3.1. *Суммами* $W(\theta)$ *и* $S(Y)$ *назовём соответственно суммы вида*

$$
\begin{aligned}
W(\theta) &= \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4 < X} \left(\frac{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4},\\
S(Y) &= \sum_{\lambda \le Y} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}},
\end{aligned}
$$

где

$$
\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\left(1 - \dfrac{\ln \nu}{\ln X}\right), & 1 \le \nu < X,\\ 0, & \nu \ge X, \end{cases}
$$

$$
A(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2} = \lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}.
$$

λ *— положительное рациональное число, знаменатель которого не превосходит* X.

Имеют место следующие утверждения

Лемма 3.3.1. *Пусть* $T^{0,1} \le Y \le T$, $\frac{1}{4} \le \theta \le \frac{1}{2}$, *тогда имеет место следующая асимптотическая формула:*

$$
S(Y) = \frac{2(1+æ^2)}{5(1-2\theta)} Y^{1-2\theta} W(\theta) + \left(\frac{c_1}{1-2\theta} + c_2\right) W(1-2\theta) +
$$

$$+O\left(Y^{-2\theta}X^2\ln^2 X\right).$$

Лемма 3.3.2. *Пусть* $0 \le \theta \le \frac{1}{2}$, *тогда для суммы* $W(\theta)$ *справедлива следующая оценка:*

$$W(\theta) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \left(\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4} =$$

$$= O\left(\frac{X^{2\theta}}{\sqrt{\ln X}}\right).$$

В четвёртой главе изучено количество нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой. Воспользовавшись оценками тригонометрических сумм $W_j = W_j(T,H)$, $j = 0,1,2$, полученных в третьей главе, а также поведением сумм $S(Y)$ и $W(\theta)$, задача о количестве нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой, сведена к задаче отыскания экспоненциальных пар, также усилено неравенство А.А.Карацубы о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, притом для промежутков, имеющих более короткую длину.

В первом параграфе четвёртой главы приведена постановка задач и сформулированы основные результаты.

Пусть $\chi(n)$ комплексный характер по модулю 5 такой, что $\chi(2) = i$,

$$æ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2}{\sqrt{5}-1}, \qquad 0 < æ < 1.$$

Функцией Дэвенпорта-Хейльбронна называется функция, которая определяется равенством

$$f(s) = \frac{1-iæ}{2}L(s,\chi) + \frac{1+iæ}{2}L(s,\bar{\chi}),$$

где $L(s,\chi)$ — функция Дирихле. Функцию $f(s)$ ввели и исследовали Дэвенпорт и Хейльбронн[6]. Они показали, что $f(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению римановского типа

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)f(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right)f(1-s),$$

однако для $f(s)$ гипотеза Римана, не выполняется и, более того, число нулей $f(s)$ в области $Re\, s > 1$, $0 < Im\, s \leq T$ превосходит cT, $c > 0$ — абсолютная постоянная.

Количество нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой впервые исследовал А.А.Карацуба[19–20]. Он в 1989 году доказал, что если ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие 0.001, и $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ и $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$, то выполняется соотношение

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \qquad (2)$$

В 1993 г. А.А.Карацуба[21–22], воспользовавшись новым усовершенствованым методом, при котором возникают почти такие же тригонометрические суммы, как при выводе оценки (2), получил более точную оценку вида

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}} \exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T}). \qquad (3)$$

Второй параграф четвёртой главы носит вспомогательный характер. В нём приведены необходимые понятия и леммы, которые затем применяются при доказательстве основных теорем этой главы.

Определение 4.2.2. *Функции $F(t)$ и $\theta(t)$ определяются равенствами*

$$\begin{aligned}
F(t) =& \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{it}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|} f\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 = \\
=& e^{i\theta(t)} f\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2, \\
\theta(t) =& t\log P_1 - \frac{t}{2} + \frac{\pi}{8} + \Delta(t), \quad P_1 = \sqrt{\frac{5t}{2\pi}}, \\
\Delta(t) =& -\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{3}{2t} + \frac{t}{4}\log\left(1+\frac{9}{4t^2}\right) - \frac{t}{2}\int_0^\infty \frac{\rho(u)du}{\left(u+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{t^2}{4}}, \\
\rho(u) =& \frac{1}{2} - \{u\}.
\end{aligned}$$

Из равенства для $F(t)$ и функционального уравнения риманова типа функции $f(s)$ следует, что $F(t)$ при действительных t принимает действительные значения, а действительные нули нечётного порядка функции $F(t)$ являются нулями функции $f(s)$, которые лежат на критической прямой.

В третьем параграфе четвёртой главы, воспользовавшись полученными в главе 3 равномерными по параметрам оценками тригонометрических сумм $W_j = W_j(T)$, $j = 0,1,2$, которые возникают при выводе оценки (2) и (3), удалось усилить неравенство (2) для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, притом для промежутков, имеющих более короткую длину.

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 4.1.1. *Пусть* ε *и* ε_1 *– произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0{,}001$, c_4, c_5, c_g *- абсолютные положительные постоянные, превосходящие* 1,

$$c_7 = \frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5 \cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}.$$

Тогда при $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon,\varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq c_7 H (\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что число $T_0 = T_0(\varepsilon,\varepsilon_1)$ - такое, что выполняется соотношение

$$c_7(\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T_0 = \frac{(\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T_0 \cdot \varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5 \cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}} \geq 1.$$

Поэтому из теоремы 4.1.1 следует следующее

Следствие 4.1.1.1. *Пусть* ε *и* ε_1 *– произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0{,}001$. *Тогда при* $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon,\varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Теорема 4.1.1 доказывается методом работы[19], с идеями и методами работ[36,37,45,46,47]. Основным утверждением, позволившим доказать неравенство (2) для промежутков, имеющих более короткую длину является

[45] Аминов А.С. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна лежащих в коротких промежутках критической прямой // ДАН РТ. —2016. —Т. 59. —№ 11-12. —С. 453–456.

[46] Аминов А.С. О приближенном функциональном уравнении функции Дэвенпорта-Хейльбронна // ДАН РТ. —2018. —Т. 61. —№ 9-10. —С. 714–720.

[47] Аминов А.С. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие в коротких промежутках критической прямой // Канд. дисс. —2019. —Душанбе. —113 стр.

лемма 3.2.1 о новых равномерных по параметрам оценках специальных тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0,1,2$ в терминах экспоненциальных пар, в котором задача о нетривиальности оценки этих сумм относительно параметра H сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар.

В четвёртом параграфе четвёртой главы, применяя равномерные по параметрам оценки тригонометрической суммы

$$W_3(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)d(\lambda_1)\overline{A}(\lambda_2)\overline{d}(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

где

$$d(\lambda) = \int_{-h_1}^{h_1} e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu} du, \quad 0 < h < h_1 < 1,$$

$$A(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}, \quad P = \sqrt{\frac{5T}{2\pi}},$$

доказано неравенство (3) для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой для промежутков, имеющих более короткую длину.

Лемма 4.4.1. *Пусть ε-произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее 0.01, (κ,λ) — произвольная экспоненциальная пара*

$$\theta(\kappa,\lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}, \quad \sigma(\kappa) = \frac{\ln\mathscr{L}}{(\kappa+1)\ln T}, \quad \mathscr{L} = \ln P.$$

Тогда при $H = T^{\theta(\kappa,\lambda)+\varepsilon+\sigma(\kappa)}$ справедлива оценка:

$$W_3(T) \ll h^2 T^{-0.98\varepsilon}.$$

Из леммы 4.4.1 получаем следующее

Следствие 4.4.1.1. *Пусть ε-произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее 0.01. Тогда при $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon}$ имеет место оценка:*

$$W_3(T) \ll h^2 T^{-0.98\varepsilon}.$$

Основным результатом четвёртого параграфа четвёртой главы является следующая

Теорема 4.1.2. *Пусть* ε *— произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее 0.01, тогда при* $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon}$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H\sqrt{\log T}\exp(-c_8\sqrt{\log\log T}),$$

где $c_8 > 0$ *– абсолютная постоянная.*

Теорема 4.1.2 доказывается усовершенствованным методом А.А. Карацубы, изложенным в работах[21–22], как в теореме 4.1.1, в соединении с идеями и методами работ[48–50]. Основным утверждением, позволившим доказать эту теорему, является новая оценка специальных тригонометрических сумм $W_3 = W_3(T)$ равномерных по параметру в терминах экспоненциальных пар.

[48] Рахмонов З. Х., Аминов А.С. О нулях нечётного порядка функции Дэвенпорта–Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. —2019. —Т. 62. —№ 3-4. —С. 133–138.

[49] Рахмонов З. Х. Оценка плотности нулей дзета функции Римана // УМН. —1994. —Т. 49. —вып. 1. —С. 161–162.

[50] Рахмонов З.Х., Хасанов З.Н. Нули дзета-функции Римана в коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сборник. —2006. —Т. 6. —Вып. 3(19). —С. 45–58.

ВЫВОДЫ

Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют теоретический интерес и состоят в следующем:

1. задача об оценке сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержатся нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди, сведена к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар [1-А, 3-А, 9-А, 11-А, 19-А, 27-А, 32-А, 40-А];
2. найдены новые оценки сверху величины длин промежутков критической прямой, в которых заведомо содержатся нули нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди [3-А, 4-А, 5-А, 6-А, 7-А, 10-А, 13-А, 16-А, 17-А, 20-А, 21-А, 22-А, 25-А, 26-А, 34-А, 38-А, 39-А];
3. получены новые равномерные по параметрам оценки тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0; 1; 2; 3$ в терминах экспоненциальных пар, которые возникают при исследовании нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой [2-А, 8-А, 12-А, 14-А, 15-А, 29-А, 31-А, 35-А, 36-А, 37-А];
4. с использованием новых равномерных по параметрам оценок тригонометрических сумм задача об оценке количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна сведена к задаче отыскания экспоненциальных пар [2-А, 8-А, 15-А, 23-А, 28-А, 37-А];
5. усилено неравенство А.А. Карацубы о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, притом для промежутков, имеющих более короткую длину [2-А, 8-А, 15-А, 24-А, 30-А, 33-А, 37-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применение в аналитической теории чисел при дальнейших исследованиях нулей рядов Дирихле, в том числе, линейных комбинациях L – рядов Дирихле, для которых не выполняется гипотеза Римана о нулях в критической полосе. Полученные результаты могут быть использованы в научных учреждениях и ВУЗах, где ведутся исследования по аналитической теории чисел, например, в Математическом институте им.

В.А. Стеклова Российской Академии наук, в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, в Таджикском национальном университете, в Таджикском государственном педагогическом университете им. С.Айни. Также материалы диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ СТАТЕЙ СОИСКАТЕЛЯ

Статьи в рецензируемых журналах.

[1–А]. Хайруллоев Ш.А. О нулях функции Харди и её производных, лежащих на критической прямой [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Чебышевский сборник. —2019. —Т. 20. — Вып. 4(72). —С. 335–348. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-4-357-370 **(SCOPUS)**

[2–А]. Хайруллоев Ш.А. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой [Текст] /З.Х.Рахмонов, Ш.А.Хайруллоев, А.С.Аминов // Чебышевский сборник. —2019. — Т. 20. — Вып. 4(72). —С. 271–293. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-4-306-329. **(SCOPUS)**

[3–А]. Хайруллоев Ш.А. О вещественных нулях производной функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Чебышевский сборник. —2021. — Т. 22. —Вып. 5 (81). —С. 234–240. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-5-234-240. **(SCOPUS)**

[4–А]. Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями производной j–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Доклады Национальной Академии наук Таджикистана. —2021. —Т. 64. —№ 3–4. —С. 129–134.

[5–А]. Хайруллоев Ш.А. О соседных нулях производной n–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Доклады АН Республики Таджикистан. —2019. —Т. 62. —№ 3-4. —С. 145–149.

[6–А]. Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями производной j–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Доклады АН Республики Таджикистан. —2016. —Т. 59. —№ 5-6. —С. 185–187.

[7–А]. Хайруллоев Ш.А. О расстоянии между соседними нулями производной первого порядка функции Харди [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Доклады АН Республики Таджикистан. —2014. —Т. 57. —№ 4. —С. 263–266.

[8–A]. Хайруллоев Ш.А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. —2018. —№ 4(173). —С. 7–25.

[9–А]. Хайруллоев Ш.А. О нулях дзета-функции Римана на критической прямой [Текст] /З.Х.Рахмонов, Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Спецвыпуск посвящён году образования и технических знаний. —2010. —С. 35–40.

[10–А]. Хайруллоев Ш.А. Нули производной первого порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия естественные и экономические науки. —2014. —№ 2(29), ч.1. —С. 335–336.

[11–А]. Хайруллоев Ш.А. Нули дзета-функции Римана, лежащие на коротких промежутках критической прямой [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия естественные и экономические науки. —2017. —№ 1(40). —С. 65–72.

[12–А]. Хайруллоев Ш.А. Об оценке специальной тригонометрической суммы [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. —2017. —№ 1/5. —С. 125–128.

[13–А]. Хайруллоев Ш.А. О нулях производной второго порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. —2019. —№ 2. —С. 57–61.

[14–А]. Хайруллоев Ш.А. Об оценке кратной тригонометрической суммы [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. —2019. —№ 4. —С. 25–32.

[15–А]. Хайруллоев Ш.А. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие на критической прямой и не имеющие Эйлерова произведения [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. —2020. —№ 1. —С. 45–56.

[16–А]. Хайруллоев Ш.А. О нулях производной j–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. —2021. —№ 2. —С. 52–60.

[17–A]. Хайруллоев Ш.А. Нули производной функции Харди, лежащие на критической прямой [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Вестник Бохтарского государственного университета им. Носира Хусрава. Серия естественных наук. —2021. —№ 2/4(93). —С. 9–18.

[18–A]. Хайруллоев Ш.А. О соседних нулях производной первого порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. —2017. —№ 1-1. —С. 25–28.

В других изданиях:

[19–A]. Хайруллоев Ш.А. Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной конференции «Современные проблемы анализа и преподавания математики», посвящённой 105-летию академика С.М.Николского. МГУ им. М.В. Ломоносов. —17-19 мая. —2010. —С. 78–79.

[20–A]. Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями производной первого порядка фукнции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Материалы VIII международной конференции «Алгебра и теории чисел: Современные проблемы и приложения», посвящённой 190-летию П.Л.Чебышева и 120-летию И.М. Виноградова. Саратов. —12-17 сентября 2011. —С. 75–77.

[21–A]. Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями производной j–го порядка фукнции Харди [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел». Белгород. —17-21 октября 2011. —С. 125–126.

[22–A]. Хайруллоев Ш.А. Соседние нули производной j–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной конференции «Современные проблемы теории дифференциальных уравнений и математического анализа», посвящённой 80-летию академика АН РТ Джураева А.Д. Душанбе. —07-08 декабря 2012. —С. 96–97.

[23–A]. Хайруллоев Ш.А. О соседних нулях производных функции Харди [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений», посвящённой 85-летию академика АН РТ Михайлова Л.Г. Душанбе. —17-18 июня 2013. —С. 140–141.

[24–А]. Хайруллоев Ш.А. О соседних нулях производной первого порядка функции Харди [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной научно-практическое конференции «Наука и инновационные разработки – северу». Россия. Мирный. —10-12 марта 2014. —С. 283–284.

[25–А]. Хайруллоев Ш.А. О расстоянии между соседними нулями производной первого порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Материалы XIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвящённой 80-летию со дня рождения профессора С.С. Рышкова. Россия. Тула. —25-30 мая 2015. —С. 252–254.

[26–А]. Хайруллоев Ш.А. О нулях производной j–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Материалы XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённой 70-летию со дня рождения Г.И.Архипова и С.М.Воронина. Саратов. —12-15 сентября 2016. —С. 106–108.

[27–А]. Хайруллоев Ш.А. Дзета-функция Римана и её нули [Текст] /Ш.А. Хайруллоев // Вестник Курган-Тюбинского университета им. Носира Хусрава. —2016. —№ 2/2(38). —С. 16–21.

[28–А]. Хайруллоев Ш.А. О нулях функции Харди и её производных [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики». Нальчик. —17-21 мая 2017. —С. 211.

[29–А]. Хайруллоев Ш.А. Об оценке специальной тригонометрической суммы [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Вестник Курган-Тюбинского университета им. Носира Хусрава. —2017. —№ 2/4(50). —С. 28–32.

[30–А]. Хайруллоев Ш.А. Нули производной функции Харди [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // IV Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики». Нальчик. —22-26 мая 2018. —С. 211–213.

[31–А]. Хайруллоев Ш.А. Об оценке специальной тригонометрической суммы [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения профессора Н.М.Коробова. Россия. Тула. —28-31 мая 2018. —С. 245–246.

[32–А]. Хайруллоев Ш.А. Об одной теореме о расстоянии между соседними нулями функции Харди, лежащими на критической прямой [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Вестник Бохтарского государственного университета им. Носира Хусрава. Серия естественных наук. —2019. —№ 2/4(69). —С. 15–29.

[33–А]. Хайруллоев Ш.А. Теорема о нулях производной функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвящённой 80-летию академика РАН В.А.Садовничего. Москва. —2019. —13-15 мая 2019. —С. 517–520.

[34–А]. Хайруллоев Ш.А. Нули производной функции Харди [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVI Международной конференции, посвящённой 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Россия. г. Тула. —2019. —13-18 мая 2019 г. —С. 207–210.

[35–А]. Хайруллоев Ш.А. Об оценке кратной тригонометрической суммы [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Н.И.Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А.И.Виноградова, А.В.Малышева и Б.Ф.Скубенко. Тула. —23-28 сентября 2019. —С. 119–121.

[36–А]. Хайруллоев Ш.А. Об оценке кратной тригонометрической суммы [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной конференции «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа», посвящённой 60-летию академика З.Х.Рахмонова и члена-корреспондента С.А.Исхокова Душанбе. —13-14 декабря 2019. —С. 262–270.

[37–А]. Хайруллоев Ш.А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории Материалы XVIII Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения профессоров Б.М.Бредихина, В.И.Нечаева и С.Б.Стечкина. Тула. —23-26 сентября 2020. —С. 227–229.

[38–А]. Хайруллоев Ш.А. О нулях производной j–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XIX Международной конференции, посвящённой двухсотлетию со дня рождения академика П.Л.Чебышева. Тула. —18-22 мая 2021. —С. 193–194.

[39–А]. Хайруллоев Ш.А. О вещественных нулях производной первого порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // В сборнике: Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XX Международной конференции, посвящённой 130-летию со дня рождения академика И.М.Виноградова. Тула. —21-24 сентября 2021. —С. 113–115.

Монографии:

[40–А]. Хайруллоев Ш.А. Нули функции Харди и её производной, лежащие на критической прямой [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Монография. Изд. Русайнс. —Москва. —2022. —88 с. —ISBN: 978-5-4365-5281-1

ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК 511.331

Бо ҳуқуқи дастнавис

Хайруллоев Шамсулло Амруллоевич

НУЛҲОИ ҲОСИЛАҲОИ ФУНКСИЯҲОИ ХАРДИ ВА ДЭВЕНПОРТ-ХЕЙЛБРОНН, КИ ДАР ПОРЧАҲОИ КӮТОҲИ ХАТИ РОСТИ КРИТИКӢ МЕХОБАНД

Автореферати

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
доктори илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси
01.01.06 – Мантиқи математикӣ, алгебра ва назарияи ададҳо

Душанбе – 2022

Таҳқиқоти илмӣ дар Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст

Мушовири илмӣ: **Раҳмонов Зарулло Ҳусенович,**
доктори илмҳои физикаю математика,
узви пайвастаи АМИ Тоҷикистон,
профессор, директори Институти
математикаи ба номи А.Ҷӯраеви АМИТ.

Муқарризони расмӣ: **Аллаков Исмаил,**
доктори илмҳои физикаю математика,
профессори кафедраи алгебра ва геометрияи
Донишгоҳи давлатии Термез

Пачев Урусби Мухамедович,
доктори илмҳои физикаю математика,
профессори кафедраи алгебра ва муодилаҳои
дифференсиалии МТФДА ТО-и
Донишгоҳи давлатии Кабардино-Балкари
ба номи Х.М. Бербеков

Байзаев Саттор,
доктори илмҳои физикаю математика,
профессори кафедраи фанҳои математика
ва табиатшиносии муосири
Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ,
бизнес ва сиёсати Тоҷикистон

Муассисаи пешбар: Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон
ба номи Садриддин Айнӣ

Ҳимояи диссертатсия санаи 20 январи соли 2023 соати 10:00 дар маҷлиси Шӯрои диссертатсионии 6D.КОА-009 дар назди Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон аз рӯи нишонаи: 734063, ш. Душанбе, кӯчаи Айнӣ 299/4 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон ва тавассути сомонаи http://www.mintas.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат санаи “___” ________ соли 2022 тавзеъ шудааст.

Котиби илмии Шӯрои диссертатсионии 6D.КОА-009,
доктори илмҳои физикаю математика, дотсент Каримов О.Х.

ТАВСИФНОМАИ УМУМИИ ТАҲҚИҚОТ

Мубрамии мавзӯи таҳқиқот. Таҳқиқотҳо оиди назарияи зета-функсияи Риман аз асри XIX оғоз ёфта, фаслҳои алоҳидаи ин назария ба соҳаҳои мустақили илмии назарияи муосири аналитикии ададҳо табдил ёфтаанд.

Яке аз самтҳои асосии таҳқиқот дар назарияи зета-функсияи Риман ин омӯзиши тақсимоти нулҳои функсияи $\zeta(s)$ дар хатти рости критикӣ мебошад. Омӯзиши нулҳои зета-функсияи Риман дар хати рости критикӣ ба омӯзиши нулҳои ҳақиқии функсияи Харди оварда мешавад.

Яке аз масъалаҳои вобаста ба ин нулҳо ин масъалаи бузургии порчае мебошад, ки дар он нули функсияи Харди ва ҳосилаҳои он мехобад.

Функсияи Девенпорт-Хейлбронн яке аз оддитарин қаторҳои Дирихле мебошад, ки дорои муодилаи функсионалии навъи Риман буда, барои он гипотезаи Риман иҷро намегардад. Аммо маълум аст, ки дар хати рости критикӣ ба таври ғайримуқаррарӣ нулҳои зиёди ин функсия мехобанд.

Омӯзиши нулҳои функсияи Харди ва ҳосилаҳои он, инчунин нулҳои функсияи Девенпорт-Хейлбронн, ки дар хати рости критикӣ мехобанд, қаблан дар корҳои математикони англис Г.Харди ва Ҷ.Литтлвуд[1–5], Г.Дэвенпорт ва Г.Хейлбронн[6], математики норвегӣ А.Сельберг[7], математики чехӣ

[1]Hardy G.H. Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // Compt.Rend. Acad.Sci. —1914. —V. 158. —P. 1012–1014.

[2]Hardy G.H., Littlewood J.E. The trigonometrical series associated with the elliptic θ function // Acta math. —1914. —V. 37. —P. 193–239.

[3]Hardy G.H., Littlewood J.E. Contributions to the theory of Riemann zeta–function and the theory of distribution of primes // Asta Math. —1918. —V. 41. —P. 119–196.

[4]Hardy G.H., Littlewood J.E. The zeros of Riemann's zeta–function on the critical line // Math.Z. —1921. —Bd 10. —S. 283–317.

[5]Hardy G.H., Littlewood J.E. The approximate functional equation in the theory of the zeta-function with applications to the divisor problems of Dirichlet and Pilth // Proc. London Math. Soc. (2). —1922. —V. 21. —P. 39–74.

[6]Davenport H., Heilbronn H. On the zeros of certain Dirichlet series // J. Lond. Math. Soc. —1936. —V. 11. —pp. 181 - 185 and 307 - 312.

[7]Selberg A. On the zeros of Riemann's zeta–function // Shr. Norske Vid. Akad. Oslo. —1942. —V. 10. —P. 1–59.

Я.Мозер[8–12] ва математикони шӯравӣ С.М.Воронин[13–16], А. А. Каратсуба[17–22], С.А.Гритсенко[23–25] дида баромада шудаанд.

Мубрамият ва ба мақсад мувофиқ будани кор аз он иборат аст, ки натиҷаҳои бадастомада оиди баҳои дарозии порчаи хати рости критикӣ, ки дорои нули тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби j–уми функсияи Харди ва баҳои миқдори нулҳои функсияи Девенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ нав ва беҳтарин мебошанд.

Дараҷаи таҳқиқи мавзӯи илмӣ. Зета-функсияи Риман ба истисноии нуқтаи $s = 1$ дар тамоми s – ҳамвории комплексӣ функсияи аналитикӣ буда, дар ин нуқта функсия дорои қутби тартиби якум бо тафриқи 1 ва дорои нулҳои тривиалӣ ҳангоми s-ҳои бутуни ҷуфти манфӣ мебошад. Нулҳои ғайритривиалии $\zeta(s)$ дар тасмаи $0 \leq Res \leq 1$ ҷойгиранд, ки онро тасмаи критикӣ меноманд ва онҳо нисбат ба хати рости $Res = \frac{1}{2}$ ва тири ҳақиқӣ симметрӣ ҷойгиранд.

---

[8] Мозер Я. Некоторые свойства дзета-функции Римана на критической прямой // Acta Auith. —1974. —V. 26. —P. 33–39.

[9] Мозер Я. Об одной сумме в теории дзета-функции Римана [Текст] /Я.Мозер // Acta arith. —1976. —V. 31. —P. 31–43.

[10] Мозер Я. Существенное улучшение одной теоремы Харди-Литтлвуда в теории $\zeta(s)$ // Acta arith. —1980. —V. 38. —№ 4. —P. 112–121.

[11] Мозер Я. Улучшение теоремы Харди-Литтлвуда о плотности нулей функции $\zeta(1/2 + it)$ // Acta math. Univ. Comen. Bratislava. —1983. —V. 42–43. —P. 41–50.

[12] Мозер Я. Новые теоремы о среднем для функции $|\zeta(1/2 + it)|^2$ // Acta math. Univ. Comen. Bratialava. —1985. —V. 46–47. —C. 21–40.

[13] Воронин С.М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой // Известия АН СССР. Серия математическая. —1980. —Т. 44. —№ 1. —С. 63–91.

[14] Воронин С.М. О распределении нулей некоторых рядов Дирихле // Труды МИАН. —1984. —Т. 163. —С. 74–77.

[15] Воронин С.М. Об аналитическом продолжении некоторых рядов Дирихле // Тр. МИАН СССР. —157. —1981. —С. 25–30.

[16] Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета–функция Римана —М.: Физматлит. —1994. —376 с.

[17] Карацуба А.А. О расстоянии между соседними нулями дзета–функции Римана, лежащими на критической прямой // Труды МИАН. —1981. —Т. 157. —С. 49–63.

[18] Карацуба А.А. Дзета-функция Римана и ее нули // УМН. —1985. —Т. 40. — Вып. 5 (245). —С. 19–70.

[19] Карацуба А.А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Известия АН СССР. Серия математическая. —1990. —Т 54. —№ 2. —С. 303–315.

[20] Карацуба А.А. О нулях некоторых рядов Дирихле // УМН. —45:1(271). —1990. —С. 175–176.

[21] Карацуба А.А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих эйлерова произведения // Известия РАН. Серия математическая. —1993. —Т 57. —№ 5. —С. 3–14.

[22] Карацуба А.А. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле [Текст] / А.А. Карацуба // Труды МИАН. —1994. —Т. 207. —С. 180–196.

[23] Гриценко С. А. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна // Труды МИАН. —2017. —Т. 296. —С. 72–94.

[24] Гриценко С. А. О дробных моментах успокоенных L-функций Дирихле // Чебышевский сборник. —2017. —Т. 18. —№ 4. —С. 168–187.

[25] Гриценко С.А. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Матем. заметки. —100:5. —2016. —С. 774–778.

Л.Эйлер[26] функсияи $\zeta(s)$-ро барои s-ҳои хақиқӣ таҳқиқ намуда, бо истифодаи айнияти худ исботи теоремаи Евклидро оиди беохир будани миқдори ададҳои содa пешниҳод намуд. Б.Риман[27] $\zeta(s)$–ро ҳамчун функсияи тағйирёбандаи комплексӣ омӯхтааст. Ӯ исбот намуд, ки бо истифода аз назарияи функсияҳои тағйирёбандаашон комплексӣ барои $\zeta(s)$ натиҷаҳои нав оиди тақсимшавии ададҳои сода ба даст овардан мумкин аст.

Гипотезаи то ҳол исботнагардидаи Риман тасдиқ менамояд, ки *ҳамаи нулҳои гайритривиалии зета-функсияи Риман дар хати рости* $Res = 1/2$ *ҷойгиранд.*

Нулҳои $\zeta(s)$ дар хати рости критикӣ — ин нулҳои ҳақиқии функсияи $\zeta(1/2 + it)$ мебошанд.

Нулҳои функсияи $\zeta(1/2+it)$–ро аввалин маротиба соли 1914 Г.Харди[1] мавриди омӯзиш қарор дода буд. Ӯ исбот намуд, ки $\zeta(1/2 + it)$ *дорои беохир бисёр нулҳои ҳақиқӣ мебошад.* Вобаста ба ин теорема Э. Ландау[28] навиштааст: *«Эзоҳи ҷаноби Г.Харди дар бораи нулҳои зета-функсияи Риман ба пешрафти муҳимтарини математикаи замони ҳозира тааллуқ дорад».*

Математикони англис Г. Харди ва Ҷ. Литлвуд[2–5] солҳои 1918-1921 ду теоремаи зеринро исбот намудаанд, ки онҳо теоремаи Хардиро ба таври назаррас беҳтар менамоянд:

- *порчаи* $(T, T + H)$ *ҳангоми* $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{0,25+\varepsilon}$ *дорои нули тартиби тоқи функсияи* $\zeta(1/2 + it)$ *мебошад;*

- *дар порчаи* $(T, T + H)$ *ҳангоми* $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{0,5+\varepsilon}$ *на кам аз* cH *нулҳои тартиби тоқи функсияи* $\zeta(1/2+it)$ *мехобанд, ки дар ин ҷо* $c = c(\varepsilon) > 0$ *доимӣ мебошад.*

Ин тасдиқотҳо ду самти тадқиқотро ба вуҷуд оварданд, ки яке аз онҳо баҳои болоии масофаи байни нулҳои ҳамсояи ҳақиқии функсияи $\zeta(1/2+it)$ ва дигаре «зичи»-и нулҳои $\zeta(1/2 + it)$ дар порчаҳои намуди $(T, T + H)$, $H = T^{\alpha+\varepsilon}$ бо мавҷуд будани қимати хурдтари α мебошанд.

[26]Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых —Т.1. —М.; —Л.; —ОНТИ. —1936.

[27]Риман Б. О числе простых чисел, не превышающих данной величини // Сочинения. —М.: ОГИЗ. —1948. —С. 216–224.

[28]Landau E. Uber die Hardysche Entdeckung unendlich vieler Nullstellen der Zeta-funktion mit reelen Teil $\frac{1}{2}$ // Match. Ann. —1915. —B. 76. —S. 212–243.

Соли 1942 А.Селберг[29] теоремаи Г.Харди ва Ҷ.Литтлвудро ба таври қатъӣ исбот намуд, яъне *барои ихтиёрӣ* $\varepsilon > 0$ *чунин* $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$, $c = c(\varepsilon) > 0$ *ёфт мешавад, ки ҳангоми* $T \geq T_0$, $H = T^{1/2+\varepsilon}$ *нобаробарии зерин ҷой дорад:*

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq cH \ln T,$$

ки дар ин ҷо $N_0(T)$ *– миқдори нулҳои тартиби тоқи функсияи* $\zeta(1/2 + it)$ *дар порчаи* $(0, T)$ *хобанда мебошад.*

Аз формулаи Манголдт[30] оиди миқдори нулҳои $N(T)$ функсияи $\zeta(s)$ дар росткунҷаи $0 < Res < 1$, $0 < Ims \leq T$:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T),$$

натиҷаи беҳтарнашавандаи А.Селберг[29] бармеояд. Оиди баҳои миқдори нулҳои функсияи $\zeta(1/2 + it)$ дар порчаи $(0, T)$ А. Селберг гипотезаеро баён намуд, ки дар он гуфта мешавад, ки натиҷаи гирифташудаи ӯ метавонад ҳангоми $H = T^{\alpha+\varepsilon}$, ки дар ин ҷо $\alpha-$ адади мусбати қайдкардашудаи аз $1/2$ хурдбуда ҷой дошта бошад.

Ин гипотезаро ҳангоми $\alpha = 27/82$ А.А. Карацуба[31–33] ҳал намуд. Ӯ дар корҳои худ қайд намуд, ки адади

$$\alpha = \frac{27}{82} = \frac{1}{3} - \frac{1}{246}$$

-ро метавон ба адади хурдтар иваз намуд, аммо ин ба баҳои ниҳоят вазнини суммаҳои махсуси тригонометрӣ алоқаманд мебошад.

Н. Левинсон[34] соли 1974 исбот намуд, ки *ҳадди ақал сеяки нулҳои функсияи* $\zeta(s)$ *дар хати рости критикӣ мехобанд.*

Оиди ин масъала математики чехӣ Я.Мозер солҳои 1976–1980 натиҷаҳои нав ба даст овард. Я.Мозер[8–12] исбот намуд, ки:

- ҳангоми $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{1/6} \ln^2 T$ порчаи $(T, T + H)$ дорои нули тартиби тоқи функсияи $\zeta(1/2 + it)$ мебошад;

[29] Selberg A. On the zeros of Riemann's zeta–function // Shr. Norske Vid. Akad. Oslo. —1942. —V. 10. —P. 1–59.

[30] Mangoldt H. Zur Verteilung der Nullstellen der Rimanscher Funktion $\zeta(t)$ // Math.Ann. —1905. —Bd 60. —P. 1–19.

[31] Карацуба А.А. О нулях функции $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. —1984. —Т. 49. —№ 2. —С. 326–383.

[32] Карацуба А.А. О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. —1984. —Т. 48. —№ 3. —С. 569–584.

[33] Карацуба А.А. Распределение нулей функции $\zeta(0.5 + it)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. —1984. —Т. 48. —№ 6. —С. 1214–1224.

[34] Levinson N. More than one third of the zeros of Riemann‘s zeta-function are on $\sigma = 1/2$ [Текст] /N.Levinson // Adv. in Math. —1974. —V. 13. —P. 383–436.

- ҳангоми $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{5/12}\ln^3 T$ баҳои зерин ҷой дорад:
$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq cH,$$
ки дар ин ҷо $c > 0$ – доимии мутлақ мебошад.

А.А.Каратсуба[17–18] солҳои 1981–1985 барои суммаҳои тригонометрии махсуси
$$C(u, M) = \sum_{M<m\leq M_1} e\left(\frac{t\ln(P_1 - m)}{2\pi}\right),$$
бо шартҳои
$$t \geq t_0 > 0, \quad \sqrt{P_1} \leq M \leq \frac{P_1}{10}, \quad M_1 \leq 2M, \quad P_1 = \left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right],$$
баҳои ғайритривиалӣ гирифт, ки он ба ӯ имкон дод, ки натиҷаи гирифтаи Я. Мозерро беҳтар намояд, яъне ӯ исбот намуд: *ҳангоми* $H \geq T^{\alpha}\ln^2 T$, $\alpha = 5/32$, $T \geq T_0 > 0$ *порчаи* $(T, T+H)$ *дорои нули тартиби тоқи функсияи* $\zeta(1/2+it)$ *мебошад.* А.А.Каратсуба ҳангоми исботи ин теорема ба монанди Харди–Литллвуд-Мозер рафтор намуда, нулҳои ҳақиқии функсияи Харди $Z(t)$–ро тадқиқ намуд, ки онҳо нулҳои ҳақиқии функсияи $\zeta(1/2+it)$ мебошанд. Фарз кардан мумкин аст, ки *барои ихтиёрӣ* $\varepsilon > 0$, $T \geq T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{\varepsilon}$ *порчаи* $(T, T+H)$ *дорои нули тартиби тоқи функсияи* $Z(t)$ *мебошад.*

А.А.Каратсуба дар баробари масъалаи нулҳои тартиби тоқи функсияи Харди масъалаи умумитар — нулҳои ҳосилаҳои тартиби k-юми функсияи Хардиро тадқиқ намуд. Вай исбот кард, ки ҳангоми афзудани тартиби ҳосила дарозии порчае, ки дар он нули тартиби тоқи функсияи $Z^{(k)}(t)$ мехобад, хурд мешавад, яъне ӯ исбот намуд: *бигзор* k *адади натуралӣ буда,* $T \geq T_0(k) > 0$, $H \geq cT^{1/(6k+6)}\ln^{2/(k+1))} T$, $c = c(k) > 0$ *бошад. Пас порчаи* $(T, T+H)$ *дорои нули тартиби тоқи функсияи* $Z^{(k)}(t)$ *мебошад.*

А.А. Каратсуба[16] қайд кард, ки агар барои баҳои суммаи тригонометрии $C(u, M)$ усулхои мураккабтар татбиқ карда шавад, масалан, усули ҷуфтҳои экспоненсиалӣ, пас барои ин сумма баҳои дақиқтар гирифтан мумкин аст.

Дар корҳои[35–36] бо истифода аз усули ҷуфтҳои экспоненсиалӣ барои

[35] Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. —2006. —Т. 49. —№ 5. —С. 393–400.

[36] Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш.А. Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. —2009. —Т. 52. —№ 5. —С. 331–337.

суммаҳои махсуси тригонометрии $C(u, M)$ дар маҷмӯи ҳамаи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ, баҳои нави ғайритривиалии намуди

$$|C(t, M)| \ll P_1^{\frac{1}{2}-\lambda} M^{-\frac{1}{2}+\kappa+2\lambda},$$

гирифта шудааст, ки он имкон дод, то натиҷаи беҳтар нисбат ба натиҷаи А.А.Карацуба ҳосил карда шавад, яъне исбот карда шуд: *бигузор* $T \geq T_0 > 0$ *бошад, он гоҳ порчаи* $(T, T+H)$ *ҳангоми*

$$H \geq T^{\frac{5}{32}-\frac{\frac{5}{6}-R}{192(2R+1)}} \ln^2 T$$

дорои нули тартиби тоқи функсияи $Z(t)$ *мебошад, ки дар ин ҷо* $R = 0.8290213568591335924092397772831120\ldots$ *доимии Ранкин аст.*

Натиҷаи ба даст овардашуда натиҷаи А.А.Каратсубаро аниқ намуда, дар доираи усули оптимилии ҷуфтҳои экспоненсиалӣ ниҳоӣ мебошад.

Функсияҳое мавҷуданд, ки хосиятҳои $\zeta(s)$–ро доро буда, аммо ҳосили зарби эйлерӣ надоранд. Барои баъзеи онҳо гипотезаи Риман иҷронашаванда аст. Ғайр аз ин, нулҳои баъзе аз ин функсияҳо дар ҳама гуна тасмаҳо вомехӯранд. Намунаи чунин функсияҳо функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн мебошад, ки онро бори аввал соли 1936 Г.Харди ва Ҷ.Литлвуд омӯхта буданд.

Функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн бо $f(s)$ ишора карда шуда, бо баробарии

$$f(s) = \frac{1-i\text{æ}}{2} L(s, \chi) + \frac{1+i\text{æ}}{2} L(s, \bar{\chi})$$

муайян карда мешавад, ки дар ин ҷо

$$\text{æ} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2}{\sqrt{5}-1},$$

$L(s, \chi)$ – функсияи Дирихле, $\chi = \chi(n)$ – характери Дирихле аз рӯи модули 5 мебошад, ки $\chi(2) = i$ аст. Ин функсия ҳосили зарби эйлерӣ надорад, аммо муодилаи навъи Риманро қаноат менамояд:

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{-s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{-(1-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right) f(1-s).$$

Соли 1936 Г.Дэвенпорт ва Г.Хейлбронн[6] исбот намуданд, ки ҳангоми $Res > 1,\ 0 < Ims \leq T$ будан, барои функсияи $f(s)$ нобаробарии зерин иҷро мегардад:

$$N_0(1, T) \geq c_1 T,$$

ки дар ин ҷо $c_1 > 0$ – доимии мутлақ мебошад.

Солҳои 1980–1984 С.М.Воронин[13–16] исбот намуд, ки ҳангоми $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ будан, нобаробарии зерин иҷро мегардад:

$$N(\sigma_2, T) - N(\sigma_1, T) \geq c_2 T, \quad c_2 = c_2(\sigma_1, \sigma_2) > 0.$$

С.М.Воронин[13,37], инчунин исбот намуд, ки барои $N_0(T)$ – миқдори нулҳои функсияи $f(s)$ дар соҳаи $Res = 1/2,\ 0 < Ims \leq T$ баҳои зерин ҷой дорад:

$$N_0(T) \geq c_3 T \exp(0.05\sqrt{\log\log\log\log T}),$$

ки дар ин ҷо $c_3 > 0$ – доимии мутлақ буда, $T \geq T_0 > 0$ аст. С.М. Воронин исбот намуд, ки хати рости $Res = 1/2$ маҷмӯи махсус барои нулҳои функсияи $f(s)$ мебошад.

Соли 1989 А.А.Карастуба усули наверо кор карда баромад, ки бо ёрии он баҳои дақиқтар ба даст овард. Ӯ исбот намуд: *ҳангоми* $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon > 0$ *– адади кифоя хурди фиксиронидашуда будан, нобаробарии зерин ҷой дорад:*

$$N_0(T) \geq T(\log T)^{0.5-\varepsilon}.$$

Соли 1993 А.А.Каратсуба усули худро якчанд маротиба инкишоф дода, баҳои боз ҳам дақиқтареро ба даст овард, яъне ӯ исбот кард: *ҳангоми* $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon > 0$ *– адади кифоя хурди фиксиронидашуда будан, нобаробарии зерин иҷро мегардад:*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\log T)^{0.5}\exp(-c_4\sqrt{\log\log T}),$$

ки дар ин ҷо c_4 *– доимии мутлақи мусбат мебошад.*

С.А.Гритсенко[23,25] соли 2017 баҳои охиронро пурзӯр намуда, нобаробарии зеринро ҳосил намуд:

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Баъдан С.А.Гритсенко[24,38,39] барои моментҳои касрии қаторҳои оромшудаи Дирихле, баҳоҳои нави болоӣ ва поёниро ба даст овард, ки аз онҳо бармеояд:

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0.$$

[37] Voronin S.M. On the zeros of some Dirichlet series lying on the critical line // Math. USSR-Izv. —16:1. —1981. —P. 55–82.

[38] Gritsenko S.A. On the Zeros of the Davenport-Heilbronn Function Lying on the Critical Line // Math. Notes. —101:1. —2017. —P. 166–170.

[39] Gritsenko S.A. On the zeros of the Davenport-Heilbronn function // Proc. Steklov Inst. Math. —296. —2017. —P. 65–87.

Аз шарҳи мухтасари натиҷаҳо оид ба назарияи нулҳои функсияи Харди ва ҳосилаи он, инчунин нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн, ки дар хати рости критикӣ мехобанд, бармеояд, ки ин самтҳо актуалӣ мебошанд ва ба ин масъалаҳои актуалӣ рисолаи диссертатсионӣ бахшида шудааст.

Мақсади таҳқиқот. Мақсадҳои кори диссертатсионӣ инҳоянд:

- дар маҷмӯи ҳамаи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ ёфтани сарҳади поёнии дарозии порчаи хати рости критикӣ, ки дорои нули тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби j – юми функсияи Харди мебошад;
- гирифтани баҳои нави мунтазам аз рӯи параметрҳо барои суммаҳои махсуси тригонометрӣ дар маҷмӯи ҳамаи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ;
- пурзур намудани нобаробарии А.А.Каратсуба оиди миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ хобанда барои порчаҳое, ки дарозии кӯтоҳтар доранд.

Вазифаҳои таҳқиқот. Вобаста ба мақсади гузошташуда вазифаҳои зенин ҷудо карда шудаанд:

- масъалаи баҳои болоии бузургии дарозии порчаҳои хати рости критикӣ, ки дорои нули тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби j–юми функсияи Харди мебошад, ба масъалаи оптимизатсия дар маҷмӯи ҳамаи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ овардан;
- гирифтани баҳоҳои нави болоии бузургиҳои дарозии порчаҳои хати рости критикӣ, ки дорои нулҳои тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби j–юми функсияи Харди мебошанд;
- гирифтани баҳои нави мунтазам аз рӯи параметрҳо барои суммаҳои махсуси тригонометрӣ дар истилоҳи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ;
- масъалаи баҳои миқдори нулҳои тартиби тоқи функсияи Дэвенпорт-Хейлброннро ба масъалаи ҷустуҷӯи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ овардан;
- пурзӯр намудани нобаробарии А.А.Каратсуба оиди миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн, ки дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ мехобанд, илова бар ин барои порчаҳое, ки дарозии кӯтоҳтар доранд.

Объекти таҳқиқот. Объектҳои таҳқиқот ин тадқиқи нулҳои ҳосилаҳои тартиби j-юми функсияи Харди, ки дар хати рости критикӣ мехобанд, баҳои суммаҳои махсус ва каратии тригонометрӣ ва нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ хобанда мебошанд.

Предмети таҳқиқот. Предмети таҳқиқот ин ҳосил намудани баҳоҳои мунтазам нави суммаҳои махсуси тригонометрӣ аз рӯи параметрҳо дар истилоҳи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ, ҳосил намудани баҳои нави болоии бузургии дарозии порчаҳои хати рости критикӣ, ки дорои нули тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби j–юми функсияи Харди, инчунин пурзӯр намудани нобаробарии А.А.Каратсуба оиди миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ, барои порчаҳое, ки дарозии кӯтоҳтар доранд, иборат мебошанд.

Навгонии илмии таҳқиқот. Ҳамаи натиҷаҳои илмии диссертатсия нав буда, характери назарявӣ дошта, аз инҳо иборатанд:

- масъалаи баҳои болоии бузургии дарозии порчаҳои хати рости критикӣ, ки дорои нули тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби j–юми функсияи Харди мебошад, ба масъалаи оптимизатсия дар маҷмӯи ҳамаи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ оварда шудааст;
- баҳоҳои нави болоии бузургиҳои дарозии порчаҳои хати рости критикӣ, ки дорои нулҳои тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби j–юми функсияи Харди мебошанд, гирифта шудааст;
- баҳоҳои нави мунтазам аз рӯи параметрҳо барои суммаҳои махсуси тригонометрии $W_j(T)$, $j = 0; 1; 2; 3$ дар истилоҳи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ, ки ҳангоми тадқиқи нулҳои тартиби тоқи функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ хобанда ба миён меоянд, гирифта шудааст;
- бо истифода аз баҳоҳои нави мунтазам аз рӯи параметрҳои суммаҳои тригонометрӣ, масъалаи баҳодиҳии миқдори нулҳои тартиби тоқи функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн ба масъалаи ҷустуҷӯи чуфтҳои экспоненсиалӣ оварда шудааст;
- нобаробарии А.А.Каратсуба оиди миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ хобанда пурзӯр карда шуда, барои порчаҳои дарозиашон кӯтоҳтар исбот карда шудааст.

Аҳамияти назариявӣ ва илмию амалии таҳқиқот. Натиҷаҳои дар диссертатсия ба даст овардашуда характери назариявӣ доранд. Онҳоро метавон дар назарияи аналитикии ададҳо дар таҳқиқотҳои минбаъдаи нулҳои қаторҳои Дирихле, аз ҷумла комбинатсияи хаттии L – қаторҳои Дирихле, ки барои онҳо гипотезаи Риман оиди нулҳо дар тасмаи критикӣ иҷронашавандаанд, истифода бурд. Натиҷаҳои ба даст овардашударо метавон дар муассисаҳои илмӣ ва донишгоҳҳо, ки дар онҳо таҳқиқотҳо оиди назарияи аналитикии ададҳо гузаронда мешаванд, масалан, дар Института математикаи ба номи В.А.Стеклови Академияи фанҳои Руссия, дар Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В. Ломоносов, дар Донишгоҳи миллии Точикистон, дар Донишгохи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ истифода бурда шаванд. Инчунин маводи диссертатсия ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯён ва магистрони муассисаҳои таҳсилоти олии касбӣ, ки аз рӯи ихтисоси «Математика» таҳсил мекунанд, истифода бурдан мумкин аст.

Нуқтаҳои ба ҳимоя пешниҳодшаванда.

1. Теорема оиди овардани масъалаи баҳои болоии бузургии дарозии порчаҳои хати рости критикии дорои нули тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби j–юми функсияи Харди ба масъалаи оптимизатсия дар маҷмӯи ҳамаи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ;
2. Теорема оиди баҳои болоии бузургии дарозии порчаҳои хати рости критикӣ, ки дорои нули тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби j–юми функсияи Харди мебошад.
3. Теорема оиди гирифтани баҳои аз рӯи параметрҳо мунтазам барои суммаҳом махсуси тригонометрӣ дар истилоҳи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ.
4. Теорема оиди овардани масъалаи миқдори нулҳои тартиби тоқи функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн ба масъалаи ҷустуҷӯи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ.
5. Теорема оиди миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ хобанда барои порчаҳои дарозиашон кӯтоҳтар.

Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳо. Эътимоднокии натиҷаҳои кори диссертатсионӣ бо исботҳои қатъии математикии ҳамаи тасдиқотҳо, ки дар диссертатсия оварда шудааст, таъмин карда шуда, аз тарафи таҳқиқотҳои муаллифони дигар асоснок карда мешаванд.

Мутобиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисоси илмӣ. Дар кори диссертатсионӣ масъалаҳои назарияи аналитикии ададҳо, ки ба шиносномаи ихтисоси илмии 01.01.06 – Мантиқи математикӣ, алгебра ва назарияи ададҳо мувофиқат мекунанд, таҳқиқ карда мешаванд (банди III параграфи 3 шиносномаи ихтисоси илмӣ).

Саҳми шахсии довталаби дарёфти дараҷаи илмӣ дар таҳқиқот. Масъалаҳои таҳқиқот дар якҷояги̅ бо мушовири илмии кор, ки кӯмаки машваратӣ расонидааст, таҳия карда шуданд. Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ, ки дар қисмати «Навгонии илмӣ» инъикос ёфтаанд, аз ҷониби муаллиф шахсан ба даст оварда шудаанд.

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар конференсияҳо ва семинарҳои зерин муҳокима карда шуда, тақризҳои мусбӣ гирифтанд:

- конференсияи байналхалқии «Муаммоҳои муосири таҳлил ва таълими математика», бахшида ба 105-солагии академик С.М.Николский, ш.Москва, ДДМ ба номи М.В.Ломоносов, 17-19 майи соли 2010;
- VIII-умин конференсияи байналхалқии «Алгебра ва назарияи ададҳо: Муаммоҳои муосир ва тадбиқи онҳо», бахшида ба 190-солагии П.Л.Чебишев ва 120-солагии И.М. Виноградов, ш. Саратов, 12-17 сентябри соли 2011;
- конференсияи байналхалқии «Таҳлили комплексӣ ва татбиқи он дар муодилаҳои дифференсиалӣ ва назарияи ададҳо», ш. Белгород, 17-21 октябри соли 2011;
- конференсияи байналхалқии «Муаммоҳои муосири назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва таҳлили математикӣ», бахшида ба 80-солагии академики АИ ҶТ Ҷӯраев А.Ҷ., ш. Душанбе, 07-08 декабри соли 2012;
- конференсияи илмии байналхалқии «Муаммоҳои муосири назарияи функсияҳо ва муодилаҳои дифференсиалӣ», бахшида ба 85-солагии академики АИ ҶТ Михайлов Л.Г., ш. Душанбе, 17-18 июни соли 2013;
- конференсияи илмӣ-амалии байналхалқии «Илм ва инноватсияи – шимол», Руссия, ш. Мирний, 10-12 марти соли 2014;
- XIII-умин конференсияи байналхалқии «Алгебра ва назарияи ададҳо: Муаммоҳои муосир ва тадбиқи онҳо», бахшида ба 80-солагии профессор С.С. Ришков, Руссия, ш. Тула, 25-30 майи соли 2015;
- XIV-умин конференсияи байналхалқии «Алгебра ва назарияи ададҳо: Муаммоҳои муосир ва тадбиқи онҳо», бахшида ба 70-солагии Г.И.Архипов ва С.М.Воронин, ш. Саратов, 12-15 сентябри соли 2016;
- конференсияи илмии байналхалқии «Муаммоҳои актуалии математика ва физикаи амалӣ», ш. Налчик, 17-21 майи соли 2017;
- IV-умин конференсияи илмии байналхалқии «Муаммоҳои актуалии математикаи амалӣ», ш. Налчик, 22-26 майи соли 2018;

- XV-умин конференсияи байналхалқии «Алгебра, назарияи ададҳо ва геометрияи дискретӣ: муаммоҳои муосир ва татбиқи онҳо», бахшида ба сад солагии профессор Н.М. Коробов. Руссия, ш. Тула, 28-31 майи соли 2018;
- конференсияи байналхалқии «Муаммоҳои муосири математика ва механика», бахшида ба 80-солагии академики АИР В.А. Садовничий, ш. Москва, 13-15 майи соли 2019;
- XVI-умин конференсияи байналхалқии «Алгебра, назарияи ададҳо ва геометрияи дискретӣ: муаммоҳои муосир ва татбиқи онҳо ва масъалаҳои таърих», бахшида ба 80-солагии профессор Мишел Деза. Руссия, ш. Тула, 13-18 майи соли 2019;
- XVII-умин конференсияи байналхалқии «Алгебра, назарияи ададҳо ва геометрияи дискретӣ: муаммоҳои муосир ва татбиқи онҳо ва масъалаҳои таърих», бахшида ба 100-солагии профессор Н.И.Фелдман ва 90-солагии профессорон А.И.Виноградов, А.В.Малишев ва Б.Ф. Скубенко, ш. Тула, 23-28 сентябри соли 2019;
- конференсияи байналхалқии «Муаммоҳои муосир ва татбиқи алгебра, назарияи ададҳо ва таҳлили математикӣ», бахшида ба 60-солагии академик Рахмонов З.Х. ва узви вобаста Исхоков С.А., ш. Душанбе, 13-14 декабри соли 2019;
- XVIII-умин конференсияи байналхалқии «Алгебра, назарияи ададҳо ва геометрияи дискретӣ: муаммоҳои муосир ва татбиқи онҳо ва масъалаҳои таърих», бахшида ба 100 – солагии профессорон Б.М. Бредихин, В.И. Нечаев ва С.Б. Стечкин, ш. Тула, 23-26 сентябри соли 2020;
- XIX-умин конференсияи байналхалқии «Алгебра, назарияи ададҳо ва геометрияи дискретӣ ва моделсозии бисёрҷониба: муаммоҳои муосир, татбиқи онҳо ва масъалаҳои таърих», бахшида ба 200 – солагии академик П.Л. Чебишев, ш. Тула, 18-22 майи соли 2021;
- XX-умин конференсияи байналхалқии «Алгебра, назарияи ададҳо ва геометрияи дискретӣ ва моделсозии бисёрҷониба: муаммоҳои муосир, татбиқи онҳо ва масъалаҳои таърих», бахшида ба 130 – солагии академик И. М. Виноградов, ш. Тула, 21-24 сентябри соли 2021;
- семинари кафедраи алгебра ва назарияи ададҳои Донишгоҳи миллии Тоҷикистон;

- семинари шӯъбаи алгебра, назарияи ададҳо ва топология (солҳои 2016-2020) ва семинари умумиинститутии (солҳои 2016-2020) Института математикаи ба номи А.Ҷӯраеви АМИ Тоҷикистон.

Интишорот аз рӯйи мавзӯи диссертатсия. Натиҷахои асосии диссертация дар 40 мақолаҳои илмӣ чоп карда шуда, рӯйхати онҳо дар охири диссертатсия оварда шудаанд. Корҳои [1–18] дар маҷаллаҳои аз рӯйхати маҷаллаҳои илмии тақризшавандаи Комиссияи олии аттестатсионии назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон тавсия намуда, ба чоп расидаанд, ки аз онҳо 16-тоашон бе ҳаммуаллифӣ навишта шудаанд. Корҳои [1–3] дар маҷаллаҳое нашр шудаанд, ки онҳо ба базаҳои байналмилалии библиографӣ ва реферативӣ ва системаҳои истинодии **Web of Science ва Scopus** дохил шудаанд, ки як тои он дар ҳамкорӣ бо мушовири илмӣ, ки ба он таҳияи масъалаҳои гузошташуда таалluқ дорад, навишта шудааст.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз номгӯи ихтисораҳо, муқаддима, тавсифи умумии кор, се боб, муҳокимаи натиҷаҳои бадастомада, хулосаҳо, номгӯи адабиёти истинодшуда, ки 360 номгӯйро дар бар мегиранд, иборат буда, 218 саҳифаи матни чопи компютериро, ки дар редактори LaTeX ҳуруфчинӣ шудааст, дар бар мегирад. Бобҳо ба параграфҳо тақсим карда шудаанд. Барои қулайӣ дар диссертатсия рақамгузории доимии теоремаҳо, леммаҳо ва формулаҳоро истифода бурда шудаанд. Онҳо дорои рақамгузории сегона буда, рақами аввал бо рақами боб мувофиқат мекунад, рақами дуюм параграфро нишон медиҳад ва рақами сеюм тартиби теоремаҳо, леммаҳо ё формулаҳои ин параграфро нишон медиҳад.

ҚИСМИ АСОСИИ ТАҲҚИҚОТ

Мавод ва методҳои таҳқиқот. Маводи таҳқиқот аз ҳалли як қатор масъалаҳои назарияи аналитикии ададҳо, ки ба тадқиқи нулҳои тартиби тоқи ҳосилаҳои функсияи Харди ва нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн, ки дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ мехобанд, иборат мебошад.

Дар кор усулҳои муосири назарияи аналитикии ададҳо, ба монанди усули Ван дер Корпут, усули ҷуфтҳои экспоненсиалӣ, усули зарбкунандаҳои оромкунандаи Селберг, усули функсияҳои тавлидкунандаи Дирихле ва усулҳои аналитикие, ки дар назарияи функсияҳои тағйирёбандаашон комплексӣ татбиқшавандаанд, истифода бурда шудаанд.

Натиҷаҳои таҳқиқот. Мазмуни мухтасари натиҷаҳои бобҳои кори диссертатсиониро меорем.

Дар муқаддима шарҳи мухтасари таърихии натиҷаҳо оид ба муаммоҳои дахлдори мавзӯъ оварда шуда, аҳамияти мавзӯъ асоснок карда шудааст.

Боби якуми кори диссертатсионӣ ба шарҳи адабиёти омӯхташуда оид ба мавзӯи диссертатсия бахшида шудааст. Усулҳои асосии таҳқиқот оварда шудааст.

Боби дуюм аз панҷ параграф иборат буда, ба баҳои болоии дарозии порчаи хати рости критикӣ, ки дорои нули тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби j-юми функсияи Харди мебошад, бахшида шуда, ба масъалаи оптимизатсия дар маҷмӯи ҳамаи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ барои баҳои суммаҳои махсуси тригонометрӣ оварда шудааст.

Дар параграфи якум кӯтоҳ дар бораи натиҷаҳои асосии бадастомада оиди нулҳои ҳосилаҳои тартиби j–юми функсияи Харди, дар ҳолатҳои $j=1$, $j=2$ ва дар ҳолати умумӣ, ҳангоми $j\geq 3$ баён карда шудааст.

Параграфи дуюм хусусияти ёрирасонӣ дошта, дар он таърифҳои асосӣ, алгоритми оптимизатсияи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ, леммаҳои ёрирасон оварда шудаанд, ки дар параграфҳои минбаъда истифода мешаванд.

Функсияи Харди $Z(t)$, ки бо баробарии

$$Z(t)=e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right),\quad e^{i\theta(t)}=\pi^{-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|^{-1}$$

муайян карда мешавад, қиматҳои ҳақиқиро ҳангоми ҳақиқӣ будани t қабул намуда, нулҳои ҳақиқии $Z(t)$ ин нулҳои зета-функсияи Риман $\zeta(s)$ дар хати рости критикӣ хобанда мебошанд.

Дар баробари масъалаи нулҳои ҳамсояи функсияи Харди $Z(t)$, ки дар хати рости критикӣ мехобанд, метавон масъалаи умумӣ — нулҳои ҳамсояи ҳосилаҳои тартиби j–юми функсияи Харди $Z^{(j)}(t)$, $j \geq 1$ – ро баррасӣ намуд. Бо афзудани тартиби ҳосила j дарозии порчае, ки дар он нули функсияи $Z^{(j)}(t)$ мехобад, хурд мешавад.

Дар параграфи сеюми боби дуюм, масъалаи баҳои болоии бузургии дарозии порчаи хати рости критикӣ, ки дорои нули тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби j–юми функсияи Харди мебошанд ($Z^{(j)}(t)$, $j \geq 1$), ба масъалаи оптимизатсия дар маҷмӯи ҳамаи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ овар-да шудааст.

Натиҷаи асосии ин параграфро теоремаи зерин ташкил медиҳад.

Теоремаи 2.3.1. *Бигузор (κ, λ) – ихтиёрӣ ҷуфти экспоненсиалӣ буда, j – адади натуралӣ, $T \geq T_0(j) > 0$, $c = c_0(j) > 0$ бошад. Он гоҳ функсияи $Z^{(j)}(t)$ дорои нули тартиби тоқ дар порчаи $(T, T+H)$ мебошад, агар*

$$H \geq cT^{\omega_j(\kappa,\lambda)}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}, \quad \omega_j(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa + \lambda - 0.5}{2\kappa + 4\lambda + 2j - 1} \tag{1}$$

бошад.

Функсияи хаттӣ-касрии $\omega_j(\kappa, \lambda)$-ро, ки бо баробарии (1) муайян шудааст, дар намуди

$$\omega_j(\kappa, \lambda) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2 - \delta_j^{-1}(\kappa, \lambda)}\right), \quad \delta_j(\kappa, \lambda) = \frac{\lambda + j}{0,5 - \kappa + j}$$

навишта, минимизатсияи онро ба минимизатсияи функсияи $\delta_j(\kappa, \lambda)$ дар маҷмӯи ҳамаи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ меорем.

Қайд менамоем, ки теоремаи А.А.Каратсуба[17–18] натиҷаи теоремаи 2.3.1, ҳангоми ҷуфтҳои экспоненсиалии

$$(\kappa, \lambda) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) = AB(0,1), \quad \delta_j\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3j+1},$$

$$\omega_j\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6j+6}, \ j \in \mathbb{N}$$

мебошад.

Исботи теоремаи 2.3.1 аз рӯи схемаи исботи теоремаи А.А.Каратсуба, идеяҳои корҳои[36,37,40,41,42], бо истифодаи усули ҷуфтҳои экспоненсиалӣ, гузаронида мешавад.

Дар параграфи чоруми боби дуюм баҳои нави болоии бузургии дарозии порчаи хати рости критикӣ, ки дорои нули тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби j–юми функсияи Харди мебошанд, ҳангоми $j \geq 3$ гирифта шудааст.

Натиҷаи асосии ин параграфро меорем.

Теоремаи 2.4.1. *Бигузор $j \geq 3$ — адади натуралӣ буда, $T \geq T_0(j) > 0$, $c = c(j) > 0$ бошад, он гоҳ функсияи $Z^{(j)}(t)$ дорои нули тартиби тоқ дар порчаи $(T, T+H)$ мебошад, агар*

$$H \geq cT^{\frac{1}{6+6j}-\frac{1}{6(1+j)(19+18j)}}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}$$

бошад.

Ин теорема бо усули оптимизатсияи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ исбот карда мешавад[43].

Натиҷаи ба даст овардашуда, натиҷаи гирифташудаи А.А.Каратсубаро барои ихтиёрӣ натуралиҳои $j \geq 3$ беҳтар намуда, дар доираи ин усул ниҳоӣ мебошад.

Дар параграфи панҷуми боби дуюм бо усули оптимизатсияи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ баҳои нави болоии бузургиҳои дарозиҳои порчаҳои хати рости критикӣ, ки дорои нули тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби якум ва дуюми функсияи Харди мебошанд, гирифта шудаанд, ки мутаносибан баҳоҳои гирифташудаи А.А.Каратсубаро ҳангоми $j = 1$ ва $j = 2$ беҳтар менамоянд.

Тасдиқотҳои зерин ҷой доранд:

Теоремаи 2.5.1. *Бигузор $T \gg 1$ бошад, он гоҳ функсияи $Z'(t)$ дорои нули тартиби тоқ дар порчаи $(T, T+H)$ мебошад, агар*

$$H \gg T^{\frac{1}{12}-\frac{65601}{810284}}\ln T$$

---

[40]Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями функции $Z^{(j)}(t)$, $j \geq 1$ // Доклады АН Республики Таджикистан. —2006. —Т. 49. —№ 9. —С. 803–809.

[41]Неъматова Г., Хасанов З.Н. О нулях дзета-функции Римана в окрестности критической прямой // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. —2001. —Т. XLIV. —№ 3-4. —С. 4–12.

[42]Хайруллоев Ш.А., Неъматова Г. Об оценке специальной тригонометрической суммы // В сборнике: Роль информационно-коммуникационных технологий в инновационном развитии Республики Таджикистан. —2017. —С. 91–95.

[43]Graham S.W. Vander Corput's Method of Exponential sums [Текст] /S.W.Graham, G.Kolesnik // Cambridge university press. —1991. Cambridge, New Vork, Port Chester, Melbourne, Sydney.

бошад.

Теоремаи 2.5.2. *Бигузор* $T \gg 1$ *бошад, он гоҳ функсияи* $Z''(t)$ *дорои нули тартиби тоқ дар порчаи* $(T,\, T+H)$ *мебошад, агар*

$$H \gg T^{\frac{1}{18}}(\ln T)^{\frac{2}{3}}$$

бошад.

Боби сеюми диссертатсия ба баҳои суммаҳои махсуси тригонометрии $W_j = W_j(T, H)$, $j = 0, 1, 2$, ки ҳангоми баҳодиҳии миқдори нулҳои тартиби тоқи функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ ба вуҷуд меоянд, бахшида шудааст. Барои ин суммаҳо аввалин маротиба баҳои мунтазам аз рӯйи параметрҳо барои суммаҳои тригонометрӣ дар истилоҳи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ гирифта шудааст, ки баҳоҳои гирифташудаи С.М. Воронин[13–14] ва А.А. Карацубаро[19–22] умумӣ мегардонад.

Дар параграфи якуми боби сеюм натиҷаҳои асосии боб баён карда шудаанд.

Бигузор ε и ε_1 – ададҳои ихтиёрии хурди фиксиронидашудаи мусбати аз $0,001$ зиёднабуда бошанд; $T \le t \le T + H$, $T \ge T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$; $T^{\frac{1}{4}} < H < T^{\frac{1}{3}}$; $P = \sqrt{5T(2\pi)^{-1}}$; $X = T^{0,01\varepsilon_1}$; $\mathscr{L} = \ln P$; $k = [\ln \mathscr{L}]$; $\eta = c_1 k \mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}$; $c_1,\ c_2,\ \ldots$ — доимиҳои мусбати мутлақ буда,

$$r(n) = \frac{1 - i\text{æ}}{2}\chi(n) + \frac{1 + i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(n).$$

Ададҳои $A(\lambda)$ аз баробариҳои

$$A(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2} = \lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}$$

ва функсияҳои $B(\varphi)$ ва $\overline{B(\psi)}$–ро бо баробариҳои зерин

$$B(\varphi) = \left(\frac{\varphi^{i\eta} - 1}{\ln \varphi}\right)^k, \qquad \overline{B(\psi)} = \left(\frac{\psi^{-i\eta} - 1}{\ln \psi}\right)^k,$$

$$r(n) = \frac{1 - i\text{æ}}{2}\chi(n) + \frac{1 + i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(n),$$

$$h(\nu) \equiv \beta(\nu)\chi(\nu) = \beta(\nu)\overline{\chi}(\nu),$$

муаяйн намуда, суммаҳои $W_j = W_j(T)$–ро бо баробариҳои зенин

$$W_0 = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_1 = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} B\left(\frac{P}{\lambda_1}\right)\overline{B\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_2 = \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)$$

муайян мекунем.

Дар параграфи дуюми боби сеюм баҳои нави мунтазам аз рӯи параметрҳо барои суммаҳои тригонометрии $W_j(T)$, $j = 0; 1; 2$ гирифта шуда, масъалаи баҳои ғайритривиалии ин гуна суммаҳо нисбат ба параметри H ба масъалаи ҷустуҷӯи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ оварда шудааст. Баҳои ин суммаҳо баъдан ҳангоми гирифтани баҳои миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ истифода бурда мешаванд.

Тасдиқоти зерин ҷой дорад:

Леммаи 3.2.1. *Бигузор* (κ, λ) *– ихтиёрӣ ҷуфтҳои экспоненсиалӣ буда,* ε_1 *ва* ε_2 *- ададҳои хурди мусбати аз* $0,001$ *зиёднабуда бошанд,* $k \in \mathbb{N}$, $0 < \eta < 1$,

$$\theta(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}, \qquad æ(\kappa,\lambda) = \frac{52+\kappa-\lambda}{50\kappa+50}, \qquad \sigma(\kappa) = \frac{\ln\mathscr{L}}{(\kappa+1)\ln T}.$$

Он гоҳ, ҳангоми $H = T^{\theta(\kappa,\lambda)+æ(\kappa,\lambda)\varepsilon_1+\sigma(\kappa)}$ *барои суммаҳои* $W_j(T)$ *баҳоҳои зерин ҷой доранд:*

$$W_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2}+\eta k\mathscr{L}\right)T^{-0,5(\lambda-\kappa)\varepsilon_2}\cdot T^{-\varepsilon_1},$$
$$W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \quad j=0,\ j=2.$$

Қайд менамоем, ки нишондиҳандаи

$$\theta(\kappa;\lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2(\kappa+1)}$$

дар леммаи 3.2.1 ҳамчунин дар муаммои Гаусс оиди миқдори нуқтаҳои бутун дар доираи $x^2+y^2 \le R$, яъне

$$K(R) = \#\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le R,\ x,y\in Z\right\} = \pi R + O\left(R^{\theta(\kappa;\lambda)+\varepsilon}\right)$$

ва ҳангоми баҳодиҳии аъзои боқимонда дар муаммои тақсимкунандаҳои Дирихле оиди миқдори нуқтаҳои бутун дар гиперболаи $xy \le N$, $x > 0$, $y > 0$ низ дида баромада мешавад. Дар айни ҳол баҳои беҳтарин аз боло барои $\theta(\kappa;\lambda)$ ба J. Bourgain ва N. Watt[44] тааллуқ доранд. Онҳо исбот намудаанд, ки

$$\theta_0 = \min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}} \theta(\kappa,\lambda) = \min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}} \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2} \le \frac{1515}{4816} = \frac{1}{3} - \frac{271}{3\cdot 4816} \approx 0.314576,$$

ки дар ин ҷо $\mathcal{P}$ — маҷмӯи ҳамаи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ мебошад.

Аз ин ҷо ва аз леммаи 3.2.1 натиҷаи зеринро ҳосил мекунем:

Натиҷаи 3.2.1.1. *Бигузор ε_1 ва ε_2 - ададҳои хурди мусбати аз $0,001$ зиёднабуда бошанд, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \eta < 1$. Он гоҳ ҳангоми $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon_1}$ будан, баҳоҳои зерин ҷой доранд:*

$$W_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2}+\eta k\mathscr{L}\right)T^{-\varepsilon_1},$$
$$W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \quad j=0,\ j=2.$$

Дар параграфи сеюми боби сеюм барои суммаи $S(Y)$ формулаи асимптотикӣ ҳосил карда шуда, барои суммаи $W(\theta)$ баҳои болоӣ гирифта шудааст, ки онҳо ҳангоми ҳосил намудани баҳои миқдори нулҳои тартиби тоқи функсияи Дэвенпорт-Хейлбронни дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ хобанда истифода бурда мешаванд.

Таърифи 3.3.1. *Суммаҳои $W(\theta)$ ва $S(Y)$ гуфта, мувофиқан суммаҳои намуди зеринро меноманд:*

$$W(\theta) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \left(\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4},$$
$$S(Y) = \sum_{\lambda\le Y}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}},$$

ки дар ин ҷо

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\left(1-\dfrac{\ln\nu}{\ln X}\right), & 1\le\nu<X,\\ 0, & \nu\ge X,\end{cases}$$

[44]Bourgain J. and Watt N. Decoupling for perturbed cones and mean square of $|\zeta(0,5+it)|$ // http://arxiv.org/abs/1505.04161v1 [math.NT] 15 May 2015.

$$A(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}.$$

λ — ададҳои мусбати ратсионалие мебошанд, ки махраҷашон аз X зиёд нестанд.

Тасдиқотҳои зерин ҷой доранд:

Леммаи 3.3.1. *Бигузор $T^{0,1} \leq Y \leq T$, $\frac{1}{4} \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ бошанд, он гоҳ формулаи асимптотикии зерин ҷой дорад:*

$$S(Y) = \frac{2(1+\text{æ}^2)}{5(1-2\theta)} Y^{1-2\theta} W(\theta) + \left(\frac{c_1}{1-2\theta} + c_2\right) W(1-2\theta) +$$
$$+ O\left(Y^{-2\theta} X^2 \ln^2 X\right).$$

Леммаи 3.3.2. *Бигузор $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ бошад, он гоҳ барои суммаи $W(\theta)$ баҳои зерин ҷой дорад:*

$$W(\theta) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \left(\frac{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4} = O\left(\frac{X^{2\theta}}{\sqrt{\ln X}}\right).$$

Дар боби чорум миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн, ки дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ мехобанд, омӯхта шудаанд. Бо истифода аз баҳоҳои суммаҳои тригонометрии $W_j = W_j(T, H)$, $j = 0, 1, 2$, ки дар боби сеюм гирифта шудаанд, инчунин рафтори суммаҳои $S(Y)$ ва $W(\theta)$ масъалаи миқдори нулҳои тартиби тоқи функсияи Дэвенпорт-Хайлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ ба масъалаи ҷустуҷӯи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ оварда шуда, нобаробарии А.А.Каратсуба оиди миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн, ки дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ мехобанд, пурзӯр карда шуда, барои порчаҳои дарозиашон кӯтоҳтар исбот карда шудааст.

Дар параграфи якуми боби чорум гузориши масъалаҳо ва натиҷаҳои асосии гирифташуда оварда шудаанд.

Бигузор $\chi(n)$ характери комплексӣ аз рӯи модули 5 бошад, ки $\chi(2) = i$ ва

$$\text{æ} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2}{\sqrt{5}-1}, \qquad 0 < \text{æ} < 1$$

аст. Функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн гуфта, функсияеро меноманд, ки бо баробарии зерин муайян карда мешавад:

$$f(s) = \frac{1-i\text{æ}}{2} L(s,\chi) + \frac{1+i\text{æ}}{2} L(s,\bar{\chi}),$$

ки дар ин ҷо $L(s,\chi)$ — функсияи Дирихле мебошад. Функсияи $f(s)$–ро Дэвенпорт ва Хейлбронн[6] дохил ва таҳқиқ намудаанд. Онҳо нишон доданд, ки $f(s)$ муодилаи функсионалии навъи Риманро қонеъ мегардонад:

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)f(s)=\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right)f(1-s),$$

аммо барои $f(s)$ гипотезаи Риман иҷронашаванда аст, илова бар ин, миқдори нулҳои функсияи $f(s)$ дар соҳаи $Re\,s>1,\ 0<Im\,s\le T$ аз cT зиёд мебошад, ки $c>0$ — доимии мутлақ аст.

Миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн $f(s)$ дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ бори аввал аз ҷониби А.А.Карацуба[19–20] омӯхта шудааст. Ӯ соли 1989 исбот намуд, ки агар ε ва ε_1 – ихтиёрӣ ададҳои мусбати хурди фиксиронидашудаи аз 0.001 зиёднабуда ва $T\ge T_0(\varepsilon,\varepsilon_1)>0,\ H=T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$ бошанд, он гоҳ муносибати зерин иҷро мегардад:

$$N_0(T+H)-N_0(T)\ge H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \qquad (2)$$

Соли 1993 А.А.Карацуба[21–22] бо истифода аз усули нави такмилёфта, ки дар он тақрибан ҳамон суммаҳои тригонометрӣ, ки ҳангоми ҳосил намудани баҳои (2) ба вуҷуд меоянд, баҳои нисбатан дақиқтари зеринро ба даст овард:

$$N_0(T+H)-N_0(T)\ge H(\ln T)^{\frac{1}{2}}\exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T}). \qquad (3)$$

Параграфи дуюми боби чорум хусусияти ёрирасон дорад. Дар он мафҳумҳо ва леммаҳои зарурӣ оварда шудаанд, ки баъдан дар исботи теоремаҳои асосии ин боб истифода мешаванд.

Таърифи 4.2.2. *Функсияҳои $F(t)$ ва $\theta(t)$ бо баробариҳои зерин муайян карда мешаванд:*

$$\begin{aligned}
F(t)=&\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{it}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|}f\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2=\\
=&e^{i\theta(t)}f\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2,\\
\theta(t)=&t\log P_1-\frac{t}{2}+\frac{\pi}{8}+\Delta(t),\quad P_1=\sqrt{\frac{5t}{2\pi}},\\
\Delta(t)=&-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{3}{2t}+\frac{t}{4}\log\left(1+\frac{9}{4t^2}\right)-\frac{t}{2}\int\limits_0^\infty\frac{\rho(u)du}{\left(u+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{t^2}{4}},\\
\rho(u)=&\frac{1}{2}-\{u\}.
\end{aligned}$$

Аз баробарии $F(t)$ ва муодилаи функсионалии навъи Риман барои функсияи $f(s)$ бармеояд, ки $F(t)$ ҳангоми ҳақиқӣ будани t қиматҳои ҳақиқӣ қабул намуда, нулҳои ҳақиқии тартиби тоқи функсияи $F(t)$ ин нулҳои функсияи $f(s)$, ки дар хати рости критикӣ мехобанд, мебошанд.

Дар параграфи сеюми боби чорум бо истифода аз баҳоҳои аз рӯи параметрҳо мунтазами суммаҳои тригонометрии $W_j = W_j(T)$, $j = 0, 1, 2$ – и дар боби 3 гирифташуда, ки ҳангоми ҳосил намудани баҳоҳои (2) ва (3) ба миён меоянд, имконият пайдо шуд, ки нобаробарии (2) барои миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ пурзӯр карда шуда, илова бар ин, барои порчаҳои дарозиашон кӯтоҳтар исбот карда шавад.

Натиҷаи асосии ин параграфро баён мекунем.

Теоремаи 4.1.1. *Бигузор ε ва ε_1 – ададҳои ихтиёрӣ фиксиронидашудаи аз $0,001$ зиёднабуда ва c_4, c_5, c_g - доимиҳои мутлақи мусбати аз 1 калонбуда бошанд,*

$$c_7 = \frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5 \cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}.$$

Он гоҳ ҳангоми $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ муносибати зерин иҷро мегардад:

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq c_7 H (\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T.$$

Умумиятро маҳдуд накарда, метавонем чунин $T_0 = T_0(\varepsilon, \varepsilon_1)$–ро интихоб намоем, ки муносибати

$$c_7 (\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T_0 = \frac{(\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T_0 \cdot \varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5 \cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}} \geq 1$$

иҷро гардад. Бинобар ин, аз теоремаи 4.1.1 натиҷаи зерин мебарояд:

Натиҷаи 4.1.1.1. *Бигузор ε ва ε_1 – ададҳои ихтиёрӣ фиксиронидашудаи аз $0,001$ зиёднабуда бошанд. Он гоҳ, ҳангоми $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ муносибати зерин ҷой дорад:*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H (\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Теоремаи 4.1.1 бо усули кори[19] дар якҷояги̅ бо идеяҳо ва усулҳои корҳои[36,37,45,46,47] исбот карда мешавад. Тасдиқи асосие, ки имкон дод нобаробарии (2) барои порчаҳои дарозиашон кӯтоҳтар исбот карда шавад, ин леммаи 3.2.1 оиди баҳои аз рӯи параметрҳо мунтазами суммаҳои махсуси тригонометрии $W_j(T),\ j = 0, 1, 2$ дар истилоҳҳои ҷуфтҳои экспоненсиали̅, ки дар он масъалаи баҳои ғайритрвиалии ин гуна суммаҳо нисбат ба параметри H ба масъалаи ҷустуҷӯи ҷуфтҳои экспоненсиали̅ оварда шудааст, мебошад.

Дар параграфи чоруми боби чор бо истифода аз баҳои мунтазам аз рӯи параметрҳои суммаҳои тригонометрии

$$W_3(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)d(\lambda_1)\overline{A}(\lambda_2)\overline{d}(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

ки дар ин ҷо

$$d(\lambda) = \int_{-h_1}^{h_1} e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu} du, \quad 0 < h < h_1 < 1,$$

$$A(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}, \quad P = \sqrt{\frac{5T}{2\pi}},$$

нобаробарии (3) барои миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критики̅ барои порчаҳои дарозиашон кӯтоҳтар исбот карда шудааст.

Леммаи 4.4.1. *Бигузор ε – адади ихтиёри̅ хурди мусбати фиксиронидашудаи аз 0.01 зиёднабуда бошад ва (κ, λ) – ихтиёри̅ ҷуфтҳои экспоненсиали̅ буда,*

$$\theta(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2}, \quad \sigma(\kappa) = \frac{\ln \mathscr{L}}{(\kappa + 1)\ln T}, \quad \mathscr{L} = \ln P.$$

Он гоҳ, ҳангоми $H = T^{\theta(\kappa,\lambda)+\varepsilon+\sigma(\kappa)}$ баҳои зерин ҷой дорад:

$$W_3(T) \ll h^2 T^{-0.98\varepsilon}.$$

[45]Аминов А.С. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна лежащих в коротких промежутках критической прямой // ДАН РТ. —2016. —Т. 59. —№ 11-12. —С. 453–456.

[46]Аминов А.С. О приближенном функциональном уравнении функции Дэвенпорта-Хейльбронна // ДАН РТ. —2018. —Т. 61. —№ 9-10. —С. 714–720.

[47]Аминов А.С. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие в коротких промежутках критической прямой // Канд. дисс. —2019. —Душанбе. —113 стр.

Аз леммаи 4.4.1 натиҷаи зеринро ҳосил мекунем:

Натиҷаи 4.4.1.1. *Бигузор* ε *– адади ихтиёрӣ хурди мусбати фиксиронидашудаи аз* 0.01 *зиёднабуда бошад. Он гоҳ, ҳангоми* $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon}$ *баҳои зерин ҷой дорад:*

$$W_3(T) \ll h^2 T^{-0.98\varepsilon}.$$

Натиҷаи асосии параграфи чоруми ин боб теоремаи зерин мебошад.

Теоремаи 4.1.2. *Бигузор* ε *— адади ихтиёрӣ хурди мусбати фиксиронидашудаи аз* 0.01 *зиёднабуда бошад. Он гоҳ, ҳангоми* $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon}$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$ *муносибати зерин иҷро мегардад:*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H\sqrt{\log T}\exp(-c_8\sqrt{\log\log T}),$$

ки дар ин ҷо $c_8 > 0$ *– доимии мутлақ аст.*

Теоремаи 4.1.2 тавассути усули такмилёфтаи А.А.Каратсуба, ки дар корҳои[21–22] дарҷ гардидаанд, инчунин ба монанди теоремаи 4.1.1 дар якҷоягӣ бо ғояҳо ва усулҳои корҳои[48–50] исбот карда шудааст. Тасдиқи асосие, ки барои исботи ин теорема имкон дод, ин баҳои нави суммаҳои махсуси тригонометрии $W_3 = W_3(T)$ мунтазам аз рӯи параметрҳо дар термини ҷуфтҳои экспоненсиалӣ мебошад.

---

[48]Рахмонов З. Х., Аминов А.С. О нулях нечётного порядка функции Дэвенпорта–Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. —2019. — Т. 62. —№ 3-4. —С. 133–138.

[49]Рахмонов З. Х. Оценка плотности нулей дзета функции Римана // УМН. —1994. —Т. 49. — вып. 1. —С. 161–162.

[50]Рахмонов З.Х., Хасанов З.Н. Нули дзета-функции Римана в коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сборник. —2006. —Т. 6. —Вып. 3(19). —С. 45–58.

ХУЛОСА

Натиҷаҳои асосии илмии таҳқиқот.

Ҳамаи натиҷаҳои илмии диссертатсия нав буда, характери назарявӣ дошта, аз инҳо иборатанд:

1. масъалаи баҳои болоии бузургии дарозии порчаҳои хати рости критикӣ, ки дорои нули тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби j–юми функсияи Харди мебошад, ба масъалаи оптимизатсия дар маҷмӯи ҳамаи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ оварда шудааст [1-М, 3-М, 9-М, 11-М, 19-М, 27-М, 32-М, 40-М];
2. баҳоҳои нави болоии бузургиҳои дарозии порчаҳои хати рости критикӣ, ки дорои нулҳои тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби j–юми функсияи Харди мебошанд, гирифта шудааст [3-М, 4-М, 5-М, 6-М, 7-М, 10-М, 13-М, 16-М, 17-М, 20-М, 21-М, 22-М, 25-М, 26-М, 34-М, 38-М, 39-М];
3. баҳоҳои нави мунтазам аз рӯи параметрҳо барои суммаҳои махсуси тригонометрии $W_j(T)$, $j = 0; 1; 2; 3$ дар истилоҳи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ, ки ҳангоми тадқиқи нулҳои тартиби тоқи функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ хобанда ба миён меоянд, гирифта шудааст [2-М, 8-М, 12-М, 14-М, 15-М, 29-М, 31-М, 35-М, 36-М, 37-М];
4. бо истифода аз баҳоҳои нави мунтазам аз рӯи параметрҳои суммаҳои тригонометрӣ, масъалаи баҳодиҳии миқдори нулҳои тартиби тоқи функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн ба масъалаи ҷустуҷӯи чуфтҳои экспоненсиалӣ оварда шудааст [2-М, 8-М, 15-М, 23-М, 28-М, 37-М];
5. нобаробарии А.А.Каратсуба оиди миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ хобанда пурзӯр карда шуда, барои порчаҳои дарозиашон кӯтоҳтар исбот карда шудааст [2-М, 8-М, 15-М, 24-М, 30-М, 33-М, 37-М].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳои таҳқиқот.

Натиҷаҳои дар диссертатсия ба даст овардашуда характери назариявӣ доранд. Онҳоро метавон дар назарияи аналитикии ададҳо дар таҳқиқотҳои минбаъдаи нулҳои қаторҳои Дирихле, аз ҷумла комбинатсияи хаттии L – қаторҳои Дирихле, ки барои онҳо гипотезаи Риман оиди нулҳо дар тасмаи критикӣ иҷронашавандаанд, истифода бурд. Натиҷаҳои ба даст овардашударо метавон дар муассисаҳои илмӣ ва донишгоҳҳо, ки дар онҳо таҳқиқотҳо оиди назарияи аналитикии ададҳо гузаронда мешавад, масалан, дар Институти математикаи ба номи В.А.Стеклови Академияи фанҳои Руссия, дар Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В. Ломоносов, дар Донишгоҳи миллии Точикистон, дар Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ истифода бурда шаванд. Инчунин маводи диссертатсияро ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯён ва магистрони муассисаҳои таҳсилоти олии касбӣ, ки аз рӯи ихтисоси «Математика» таҳсил мекунанд, истифода бурдан мумкин аст.

ФЕҲРИСТИ ИНТИШОРОТИ ДОВТАЛАБИ ДАРЁФТИ ДАРАҶАИ ИЛМӢ

Мақолаҳо дар маҷаллаҳои тақризшаванда.

[1–М]. Хайруллоев Ш.А. О нулях функции Харди и её производных, лежащих на критической прямой [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Чебышевский сборник. —2019. —Т. 20. — Вып. 4(72). —С. 335–348. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-4-357-370 **(SCOPUS)**

[2–М]. Хайруллоев Ш.А. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой [Текст] /З.Х.Рахмонов, Ш.А.Хайруллоев, А.С.Аминов // Чебышевский сборник. —2019. —Т. 20. — Вып. 4(72). —С. 271–293. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-4-306-329. **(SCOPUS)**

[3–М]. Хайруллоев Ш.А. О вещественных нулях производной функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Чебышевский сборник. —2021. —Т. 22. —Вып. 5 (81). —С. 235–242. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-5-234-240. **(SCOPUS)**

[4–М]. Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями производной j–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Доклады Национальной Академии наук Таджикистана. —2021. —Т. 64. —№ 3–4. —С. 129–134.

[5–М]. Хайруллоев Ш.А. О соседных нулях производной n–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Доклады АН Республики Таджикистан. —2019. —Т. 62. —№ 3-4. —С. 145–149.

[6–М]. Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями производной j–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Доклады АН Республики Таджикистан. —2016. —Т. 59. —№ 5-6. —С. 185–187.

[7–М]. Хайруллоев Ш.А. О расстоянии между соседними нулями производной первого порядка функции Харди [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Доклады АН Республики Таджикистан. —2014. —Т. 57. —№ 4. —С. 263–266.

[8–М]. Хайруллоев Ш.А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. —2018. —№ 4(173). —С. 7–25.

[9–М]. Хайруллоев Ш.А. О нулях дзета-функции Римана на критической прямой [Текст] /З.Х.Рахмонов, Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Спецвыпуск посвящён году образования и технических знаний. —2010. —С. 35–40.

[10–М]. Хайруллоев Ш.А. Нули производной первого порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия естественные и экономические науки. —2014. —№ 2(29), ч.1. —С. 335–336.

[11–М]. Хайруллоев Ш.А. Нули дзета-функции Римана, лежащие на коротких промежутках критической прямой [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия естественные и экономические науки. —2017. —№ 1(40). —С. 65–72.

[12–М]. Хайруллоев Ш.А. Об оценке специальной тригонометрической суммы [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. —2017. —№ 1/5. —С. 125–128.

[13–М]. Хайруллоев Ш.А. О нулях производной второго порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. —2019. —№ 2. —С. 57–61.

[14–М]. Хайруллоев Ш.А. Об оценке кратной тригонометрической суммы [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. —2019. —№ 4. —С. 25–32.

[15–М]. Хайруллоев Ш.А. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие на критической прямой и не имеющие Эйлерова произведения [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. —2020. —№ 1. —С. 45–56.

[16–M]. Хайруллоев Ш.А. О нулях производной j–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. —2021. —№ 2. —С. 52–60.

[17–M]. Хайруллоев Ш.А. Нули производной функции Харди, лежащих на критической прямой [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Вестник Бохтарского государственного университета им. Носира Хусрава. Серия естественных наук. —2021. —№ 2/4(93). —С. 9–18.

[18–M]. Хайруллоев Ш.А. О соседних нулях производной первого порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. —2017. —№ 1-1. —С. 25–28.

Мақолаҳо ва фишурдаи интишорот дар маҷмӯаи маводи конфронсҳо

[19–M]. Хайруллоев Ш.А. Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной конференции «Современные проблемы анализа и преподавания математики», посвящённой 105-летию академика С.М.Николский. МГУ им. М.В. Ломоносов. —17-19 мая. —2010. —С. 78–79.

[20–M]. Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями производной первого порядка фукнции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Материалы VIII международной конференции «Алгебра и теории чисел: Современные проблемы и приложения», посвящённой 190-летию П.Л.Чебышева и 120-летию И.М. Виноградова. Саратов. —12-17 сентября 2011. —С. 75–77.

[21–M]. Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями производной j–го порядка фукнции Харди [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел». Белгород. —17-21 октября 2011. —С. 125–126.

[22–M]. Хайруллоев Ш.А. Соседние нули производной j–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной конференции «Современные проблемы теории дифференциальных уравнений и математического анализа», посвященной 80-летию академика АН РТ Джураева А.Д. Душанбе. —07-08 декабря 2012. —С. 96–97.

[23–М]. Хайруллоев Ш.А. О соседних нулях производных функции Харди [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений», посвящённой 85-летию академика АН РТ Михайлова Л.Г. Душанбе. —17-18 июня 2013. —С. 140–141.

[24–М]. Хайруллоев Ш.А. О соседних нулях производной первого порядка функции Харди [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной научно-практическое конференции «Наука и инновационные разработки – северу». Россия. Мирный. —10-12 марта 2014. —С. 283–284.

[25–М]. Хайруллоев Ш.А. О расстоянии между соседними нулями производной первого порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Материалы XIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвящённой 80-летию со дня рождения профессора С.С. Рышкова. Россия. Тула. —25-30 мая 2015. —С. 252–254.

[26–М]. Хайруллоев Ш.А. О нулях производной j–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Материалы XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённой 70-летию со дня рождения Г.И.Архипова и С.М.Воронина. Саратов. —12-15 сентября 2016. —С. 106–108.

[27–М]. Хайруллоев Ш.А. Дзета-функция Римана и её нули [Текст] /Ш.А. Хайруллоев // Вестник Курган-Тюбинского университета им. Носира Хусрава. —2016. —№ 2/2(38). —С. 16–21.

[28–М]. Хайруллоев Ш.А. О нулях функции Харди и её производных [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики». Нальчик. —17-21 мая 2017. —С. 211.

[29–М]. Хайруллоев Ш.А. Об оценке специальной тригонометрической суммы [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Вестник Курган-Тюбинского университета им. Носира Хусрава. —2017. —№ 2/4(50). —С. 28–32.

[30–М]. Хайруллоев Ш.А. Нули производной функции Харди [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // IV Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики». Нальчик. —22-26 мая 2018. —С. 211–213.

[31–М]. Хайруллоев Ш.А. Об оценке специальной тригонометрической суммы [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения профессора Н.М. Коробова. Россия. Тула. —28-31 мая 2018. —С. 245–246.

[32–М]. Хайруллоев Ш.А. Об одной теореме о расстоянии между соседними нулями функции Харди, лежащими на критической прямой [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Вестник Бохтарского государственного университета им. Носира Хусрава. Серия естественных наук. —2019. —№ 2/4(69). —С. 15–29.

[33–М]. Хайруллоев Ш.А. Теорема о нулях производной функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвящённой 80-летию академика РАН В.А. Садовничего. Москва. —2019. —13-15 мая 2019. —С. 517–520.

[34–М]. Хайруллоев Ш.А. Нули производной функции Харди [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVI Международной конференции, посвящённой 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Россия. г. Тула. —2019. —13-18 мая 2019 г. —С. 207–210.

[35–М]. Хайруллоев Ш.А. Об оценке кратной тригонометрической суммы [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Н.И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А.И.Виноградова, А.В. Малышева и Б.Ф. Скубенко. Тула. —23-28 сентября 2019. —С. 119–121.

[36–М]. Хайруллоев Ш.А. Об оценке кратной тригонометрической суммы [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // Материалы международной конференции «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа», посвящённой 60-летию академика Рахмонова З.Х. и члена-корреспондента Исхокова С.А. Душанбе. —13-14 декабря 2019. —С. 262–270.

[37–M]. Хайруллоев Ш.А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории Материалы XVIII Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения профессоров Б.М. Бредихина, В.И. Нечаева и С.Б. Стечкина. Тула. —23-26 сентября 2020. —С. 227–229.

[38–M]. Хайруллоев Ш.А. О нулях производной j–го порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XIX Международной конференции, посвящённой двухсотлетию со дня рождения академика П.Л. Чебышева. Тула. —18-22 мая 2021. —С. 193–194.

[39–M]. Хайруллоев Ш.А. О вещественных нулях производной первого порядка функции Харди [Текст] /Ш.А.Хайруллоев // В сборнике: Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XX Международной конференции, посвящённой 130-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова. Тула. —21-24 сентября 2021. —С. 113–115.

Монографияҳо

[40–M]. Хайруллоев Ш.А. Нули функции Харди и её производной, лежащие на критической прямой [Текст] / Ш.А.Хайруллоев // Монография. Изд. Русайнс. —Москва. —2022. —88 с. —ISBN: 978-5-4365-5281-1

АННОТАЦИЯ

диссертации Хайруллоева Шамсулло Амруллоевича на тему «Нули производных функций Харди и Дэвенпорта-Хейльбронна лежащее в коротких промежутках критической прямой», представленной на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел

Ключевые слова: экспоненциальная пара, критическая прямая, функция Харди, оптимизация экспоненциальных пар, функция Дэвенпорта-Хейльбронна, специальная тригонометрическая сумма, равномерная по параметрам оценка.

Объекты исследования: Объектами исследования являются нули производной j-го порядка функции Харди, лежащих на критической прямой, оценка специальных и кратных тригонометрических сумм и нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой.

Цель исследования: Целью диссертационной работы являются нахождение по множество всех экспоненциальных пар нижнюю грань длины промежутка критической прямой, содержащей нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди, получение новых равномерных по параметрам оценки специальных тригонометрических сумм в терминах экспоненциальных пар, усиление неравенство А.А.Карацубы о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна лежащих в коротких промежутках критической прямой для промежутков имеющих более короткую длину.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют теоретический интерес и состоят в следующем: задача об оценке сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди сведена к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар; найдены новые оценки сверху величины длин промежутков критической прямой, в которых заведомо содержится нули нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди; получены новые равномерные по параметрам оценки тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0; 1; 2; 3$ в терминах экспоненциальных пар, которые возникают при исследовании нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой; воспользовавшись новыми равномерными по параметрам оценками тригонометрических сумм, задача об оценке количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна сведена к задаче отыскания экспоненциальных пар; усилено неравенство А.А.Карацубы о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна лежащих в коротких промежутках критической прямой, притом для промежутков, имеющих более короткую длину.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применения в аналитической теории чисел при дальнейших исследованиях нулей рядов Дирихле, в том числе линейных комбинациях L – рядов Дирихле, для которых не выполняется гипотеза Римана о нулях в критической полосе. Материалы диссертации могут использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

ШАРҲИ МУХТАСАР

Диссертатсияи Хайруллоев Шамсулло Амруллоевич «Нулҳои ҳосилаҳои функсияи Харди ва Дэвенпорт-Хейлбронн, ки дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ мехобанд», ки барои дарёфти дараҷаи илмии доктори илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.06–Мантиқи математикӣ, алгебра ва назарияи ададҳо пешниҳод шудааст

Вожаҳои калидӣ: ҷуфти экспоненсиалӣ, хати рости критикӣ, функсияи Харди, оптимизатсияи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ, функсияи Девенпорт-Хейлбронн, суммаи махсуси тригонометрӣ, баҳои аз рӯи параметрҳо мунтазам.

Объекти таҳқиқот. Объектҳои таҳқиқот ин тадқиқи нулҳои ҳосилаҳои тартиби j-юми функсияи Харди, ки дар хати рости критикӣ мехобанд, баҳои суммаҳои махсус ва каратии тригонометрӣ ва нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ хобанда мебошанд.

Мақсади таҳқиқот. Мақсади кори диссертатсионӣ дар маҷмӯи ҳамаи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ ёфтани сарҳади поёнии дарозии порчаи хати рости критикӣ, ки дорои нули тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби j – юми функсияи Харди мебошад, гирифтани баҳои нави мунтазам аз рӯи параметрҳо барои суммаҳои махсуси тригонометрӣ дар маҷмӯи ҳамаи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ, пурзӯр намудани нобаробарии А.А.Каратсуба оиди миқдори нулҳои функсияи Девенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ хобанда барои порчаҳое, ки дарозии кӯтоҳтар доранд.

Навгонии илмии таҳқиқот. Ҳамаи натиҷаҳои илмии диссертатсия нав буда, характери назариявӣ дошта, аз инҳо иборатанд: масъалаи баҳои болоии бузургии дарозии порчаҳои хати рости критикӣ, ки дорои нули тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби j–юми функсияи Харди мебошад, ба масъалаи оптимизатсия дар маҷмӯи ҳамаи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ оварда шудааст; баҳоҳои нави болоии бузургиҳои дарозии порчаҳои хати рости критикӣ, ки дорои нулҳои тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби j–юми функсияи Харди мебошанд, гирифта шудааст; баҳоҳои нави мунтазам аз рӯи параметрҳо барои суммаҳои махсуси тригонометрии $W_j(T)$, $j = 0; 1; 2; 3$ дар истилоҳи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ, ки ҳангоми тадқиқи нулҳои тартиби тоқи функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ хобанда ба миён меоянд, гирифта шудааст; бо истифода аз баҳоҳои нави мунтазам аз рӯи параметрҳои суммаҳои тригонометрӣ, масъалаи баҳодиҳии миқдори нулҳои тартиби тоқи функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн ба масъалаи ҷустуҷӯи чуфтҳои экспоненсиалӣ оварда шудааст; нобаробарии А.А.Каратсуба оиди миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ хобанда пурзӯр карда шуда, барои порчаҳои дарозиашон кӯтоҳтар исбот карда шудааст.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Натиҷаҳои дар диссертатсия ба даст овардашуда хусусияти назариявӣ доранд. Онҳо метавонанд дар рушди назарияи аналитикии ададҳо дар таҳқиқотҳои минбаъдаи нулҳои қаторҳои Дирихле, аз ҷумла комбинатсияи хаттии L – қаторҳои Дирихле, ки барои онҳо гипотезаи Риман оиди нулҳо дар тасмаи критикӣ иҷронашавандаанд, истифода шаванд. Маводҳои диссертатсияро метавон ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ ва магистрони донишгоҳҳои олӣ аз рӯйи ихтисоси «Математика» истифода бурд.

SUMMARY

of the dissertation of Khairulloev Shamsullo Amrulloevich on the topic «Zeros of the derivatives of Hardy and Davenport-Heilbronn functions lying in short intervals of the critical line», submitted for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences in the specialty 01.01.06 - Mathematical Logic, Algebra and Theory numbers

Key words: exponential pair, critical line, Hardy function, optimization of exponential pairs, Davenport-Heilbronn function, special trigonometric sum, estimate uniform in parameters.

Research objects: The objects of study are the zeros of the j-th order derivative of the Hardy function lying on the critical line, the estimate of special and multiple trigonometric sums, and the zeros of the Davenport-Heilbronn function in short intervals of the critical line.

Purpose of research: The purpose of the dissertation work is to find, for the set of all exponential pairs, the infimum of the length of the interval of the critical line containing the zero of the odd order of the j-th order derivative of the Hardy function, to obtain new estimates of special trigonometric sums uniform in parameters in terms of exponential pairs, amplification of AA Karatsuba's inequality on the number of zeros of the Davenport-Heilbronn function lying in short intervals of the critical line for intervals having a shorter length.

Scientific novelty. All the main results of the dissertation are new, of theoretical interest and are as follows: the problem of estimating from above the length of the interval of the critical line, which obviously contains the zero of the odd order of the jth order derivative of the Hardy function, is reduced to an optimization problem over the set of all exponential pairs; new upper bounds are found for the lengths of intervals of the critical line, which certainly contain zeros of odd order of the j-th order derivative of the Hardy function; new estimates of the trigonometric sums $W_j(T)$, $j = 0; 1; 2; 3$, uniform in parameters, are obtained in terms of exponential pairs that arise in the study of zeros of odd order of the Davenport-Heilbronn function in short intervals of the critical line ; using new estimates of trigonometric sums uniform in parameters, the problem of estimating the number of zeros of an odd order of the Davenport-Heilbronn function is reduced to the problem of finding exponential pairs; the inequality of A.A. Karatsuba about the number of zeros of the Davenport-Heilbronn function lying in short intervals of the critical line is strengthened, moreover, for intervals that have a shorter length.

Theoretical and practical value. The results obtained in the dissertation are of a theoretical nature. They can find applications in analytic number theory in further studies of the zeros of Dirichlet series, including linear combinations of L – Dirichlet series, for which the Riemann hypothesis about zeros in the critical strip does not hold. The dissertation materials can be used when reading special courses for students and masters in higher educational institutions studying in the specialty «Mathematics».