

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу Хайруллоева Шамсулло Амруллоевича «Нули производных функций Харди и Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие в коротких промежутках критической прямой», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 - Математическая логика алгебра и теория чисел

Актуальность выбранной темы. Одной из актуальных задач теории дзета-функции Римана является доказательство существования её нулей на коротких промежутках критической прямой или, что же самое, вещественных нулей функции Харди $Z(t)$. Вместе с этой задачей профессор А.А.Карацуба ставил задачу о соседних точках экстремума или точках перегиба функций $Z(t)$ или в более общей подстановке — о соседних нулях функции $Z^{(j)}(t)$, $j \geq 1$. Исследованием этих задач посвящены работы Г.Харди, Дж.Литтлвуд, А.Сельберг, Я.Мозер, А.А.Карацуба, М.А.Королёв и другие.

Функция Дэвенпорта-Хейльбронна является простейшим рядом Дирихле, удовлетворяющим функциональному уравнению риманова типа, для которого гипотеза Римана неверна. Тем не менее, известно, что на критической прямой лежит аномально много нулей этой функции, естественно возникает вопрос настолько их много в коротких промежутках критической прямой. Этим задачам и их обобщениям для линейных комбинации L -рядов Дирихле посвящены работы С.М.Воронина, А.А.Карацуба, С.А.Гриценко, И.С.Резвякова и другие.

Диссертационная работа Ш.А.Хайруллоева посвящена этим актуальным проблемам аналитической теории чисел.

Содержание работы. Диссертационная работа Ш.А.Хайруллоева занимает 218 страниц текста и состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы, который включает 360 источников.

Во введении даётся исторический обзор результатов по теории нулей функции Харди и её производных, а также нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой, обосновывается актуальность выбранной темы и сформулированы основные результаты работы.

В первой главе работы приведены обзор изученной литературы по теме диссертационной работе.

Во второй главе диссертационной работы автор исследует нули нечётного порядка производной j -го порядка функции Харди. В этой главе задача об оценке сверху длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j -го порядка функции Харди, сведена к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар. Методом оптимизации экспоненциальных пар получена новая оценка сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором содержится нуль нечётного порядка функции $Z^{(j)}(t)$, $j \in N$.

В третьей главе работы получены равномерные по параметрам оценки специальных тригонометрических сумм вида

$$W_0(T) = \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 < P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_1(T) = \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 < P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} B\left(\frac{P}{\lambda_1}\right) \overline{B\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_2(T) = \sum_{P^{1-\varepsilon_2} < \lambda_1 < \lambda_2 < P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)$$

в терминах экспоненциальных пар. Также в этой главе найдены оценки суммы Сельберга, которые применяются при оценки количество нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой.

В заключительной четвёртой главе диссертационной работы воспользовавшись полученные равномерные оценки по параметрам тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j=0,1,2,3$, задача о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой, сведена к задаче отыскания экспоненциальных пар и усилено неравенства А.А.Карацубы о количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, также доказано неравенство

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H\sqrt{\log T} \exp(-c_8\sqrt{\log \log T})$$

для промежутков, имеющих более короткую длину.

Степень обоснованности и достоверности результатов диссертации. Результаты диссертации приведены с подробными доказательствами и их достоверность не вызывает сомнений. Они обоснованы строгими математическими выкладками и хорошо согласуются с известными результатами других авторов в этом направлении.

Новизна полученных результатов. Основными достижениями автора при выполнении диссертационной работы являются следующие результаты:

- задача об оценке сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j -го порядка функции Харди, сведена к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар;
- найдены новые оценки сверху величины длин промежутков критической прямой, в которых заведомо содержатся нули нечётного порядка производной j -го порядка функции Харди;
- получены новые равномерные по параметрам оценки тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0; 1; 2; 3$ в терминах экспоненциальных пар, которые возникают при исследовании нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой;
- с использованием новых равномерных по параметрам оценок тригонометрических сумм задача об оценке количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна сведена к задаче отыскания экспоненциальных пар;
- усилено неравенство А.А.Карацубы о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, притом для промежутков, имеющих более короткую длину.

Теоретическая значимость полученных результатов. Результаты, полученные в диссертационной работе, носят теоретический характер. Они могут найти применение при исследовании нулей рядов Дирихле, линейное

комбинации L-рядов Дирихле, а также в процессе доказательств новых теорем о нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой.

Представленные в работе методы могут играть существенную роль в дальнейшем развитии теории дзета-функции Римана, при исследовании плотности распределения нулей дзета-функция Римана в критической полосе.

Полученные в диссертационной работе результаты могут применяться в дальнейших научных исследованиях, проводимых в Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН, в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, в Таджикском национальном университете, в Таджикском государственном педагогическом университете им. С.Айни и др.

Соответствие автореферата основному содержанию диссертации.

По теме диссертации автором опубликовано 40 работ, из них 18 в изданиях из Перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертационной работы на соискание ученой степени доктора наук, в которых материалы диссертации отражены достаточно полно.

Автореферат диссертации правильно и полно отражает содержание, актуальность темы исследования, новизну и значимость полученных результатов, содержит все основные положения и выводы. Диссертация и автореферат оформлены в соответствии с существующими требованиями.

Замечания к содержанию и оформлению диссертации.

Диссертационная работа и автореферат оформлены грамотно, легко читаются. Имеются лишь отдельные технические и орфографические ошибки, например:

- на стр. 116 диссертация пятая строка сверху равенство интегралов $K_5(\delta, d, \theta)$ и $K_6(\delta, d, \theta)$ нужно написать по абсолютной величине;
- на стр. 118 диссертация третья строка сверху пропущена знак модуля и неправильно перенесена этого неравенство;
- на стр. 121 диссертация, в первая и вторая строка сверху слова «применяем» и «не превосходящих» не правильно перенесена на другую строку.

Отметим, что эти замечания легко исправимы и не влияют на качество диссертационной работы.

Заключение. Подводя итог, на основании вышеизложенного считаем, что в диссертационной работе Хайруллоева Шамсулло Амруллоевича «Нули производных функций Харди и Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие в коротких промежутках критической прямой» получены новые весомые научные результаты по исследованию нулей производной функции Харди и нулей Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой. Работа удовлетворяет всем требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, предъявляемым к докторским диссертациям, а её автор Хайруллоев Шамсулло Амруллоевич заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент, доктор физико-математических наук по специальности

01.01.06 – Математическая логика, алгебра

и теория чисел, профессор кафедры алгебры и геометрии Термезского государственного университета



И. Аллаков

190111, Узбекистан, Сурхандарьинская обл.,

г. Термез, ул. Ф. Ходжаева, 43

Веб сайт: www.tersu.uz

E-mail: iallakov@mail.ru

Телефон: (+998)905197576

Подпись Аллакова И. заверяю:

Начальник ОК и СЧ Термезского государственного университета



Б. Джураева

19.12.2022 г.