ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Хайруллоева Шамсулло Амруллоевича “Нули производных функций Харди и Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие в коротких промежутках критической прямой”, представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06- Математическая логика, алгебра и теория чисел

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена новой оценке сверху длине промежутка критической прямой, в которой содержится вещественный нуль нечётного порядка производных функции Харди $Z^{(j)}(t)$, а также новой оценке для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$, лежащих в коротких промежутках критической прямой, притом для промежутков, имеющих более короткую длину.

Риман высказал гипотезу, что все нетривиальные нули $\zeta(s)$ лежат на прямой $Res = \frac{1}{2}$, которую называют “критической” прямой. Гипотеза Римана является одной из центральных проблем аналитической теории чисел и математического анализа. К настоящему времени она не доказана. Г.Харди в 1914 г. доказал, что $\zeta(1/2+it)$ имеет бесконечно много вещественных нулей, что является первым результатом о нулях $\zeta(s)$ на критической прямой. Затем в 1918 г. Г.Харди и Дж.Литтлвуд показали, что промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечётного порядка $\zeta(1/2+it)$, при

$$H \geq T^{æ}(\ln T)^{\eta}, \qquad æ = \frac{1}{4}+\varepsilon, \quad \eta = 0.$$

Я.Мозер (1976 г.) А.А.Карацуба (1981 г.), З.Х.Рахмонов и Ш.А.Хайруллоев (2008 г.) доказали теорему Г.Харди и Дж.Литтлвуда, соответственно при $\eta = 2$, и

$$æ = \frac{1}{6}, \qquad æ = \frac{5}{32}, \qquad æ = \frac{5}{32} - \frac{\frac{5}{6}-R}{192(2R+1)},$$

где $R = 0,829021356859\ldots$ — постоянная Ранкина. В 1981 г. А.А.Карацуба наряду с задачей о соседних нулях функции Харди $Z(t)$, рассмотрел задачу соседних точек экстремума или точек перегиба функции $Z(t)$, или в более общей постановке — о соседних нулях функции $Z^{(j)}(t)$, $j \geq 1$ и обнаружил эффект «сближения» с ростом j нулей функции $Z^{(j)}(t)$, то есть он доказал: *если j натуральное число, то функция $Z^{(j)}(t)$ содержит нуль нечётного порядка в промежутке $(T, T+H)$ при*

$$H \gg T^{\theta_j}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}, \qquad \theta_j = \frac{1}{6j+6}. \qquad (1)$$

Функцию $f(s)$ ввели и исследовали Дэвенпорт и Хейльбронн и показали, что $f(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению римановского типа, однако для $f(s)$ гипотеза Римана не выполняется, и более того, число нулей $f(s)$ в области $Re\,s > 1$, $0 < Im\,s \leq T$

превосходит cT, $c > 0$ — абсолютная постоянная. С.М. Воронин доказал, что тем не менее, критическая прямая $Res = \frac{1}{2}$ является исключительным множеством для нулей $f(s)$, то есть для $N_0(T)$ — числа нулей $f(s)$ на отрезке $Res = 1/2$, $0 < Ims \leq T$ имеет место оценка

$$N_0(T) > cT\exp\left(0,05\sqrt{\ln\ln\ln\ln T}\right),$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная, $T \geq T_0 > 0$.

Количество нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой впервые исследовал А.А.Карацуба. Он в 1989 г. пользуясь оценками специальных тригонометрических сумм $W_j = W_j(T)$, $j = 0, 1, 2$ доказал, что если ε и ε_1 – малые фиксированные положительные числа, и $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$, то при

$$H \geq T^{\theta}, \qquad \theta = \frac{27}{82} + \varepsilon_1, \tag{2}$$

выполняется соотношение

$$N_0(T + H) - N_0(T) \gg H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \tag{3}$$

В 1993 г. А.А.Карацуба, воспользовавшись новым усовершенствованным методом, при котором возникают почти такие же тригонометрические суммы, как при выводе оценки (3), получил оценку вида

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}}\exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T}). \tag{4}$$

Структура и содержание работы. Диссертационная работа Ш.А. Хайруллоева состоит из списка обозначений, введения, общей характеристики работы, четырёх глав, обсуждения полученных результатов, выводов, рекомендации по практическому использованию результатов и списка литературы, насчитывающего 360 наименований. Полный объём диссертации 218 страниц.

Во введении изложена краткая история исследуемых задач, основываются актуальность темы и степень её научной разработанности, а также приведены методы исследования, научная новизна, положения выносимые на защиту.

В первой главе состоящей из двух параграфов даётся обзор изученной литературы по теме диссертационной работы и приведены основные методы исследования.

Вторая глава диссертации, состоящая из пяти параграфов, посвящена исследованию нулей функции Харди и её производных в критической прямой.

В первом параграфе сформулированы основные результаты второй главы, состоящих из теорем 2.3.1, 2.4.1 и 2.5.1.

Во втором параграфе носящем вспомогательный характер, известные результаты приведены в виде лемм, которые применяются в последующих параграфах.

В третьем параграфе (теорема 2.3.1) задача об оценке сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди $Z(t)$, сведена к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар, то есть *если* (κ, λ) *— произвольная экспоненциальная пара,* $j \in \mathbb{N}$, $T \geq T_0(j) > 0$, *то при* $H \geq cT^{\omega_j(\kappa,\lambda)}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}$ *функция* $Z^{(j)}(t)$ *имеет нуль нечётного порядка в промежутке* $(T,\ T+H)$, *где*

$$\omega_j(\kappa, \lambda) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2 - \delta_j^{-1}(\kappa, \lambda)}\right), \qquad \delta_j(\kappa, \lambda) = \frac{\lambda + j}{0,5 - \kappa + j}.$$

Заметим, что отсюда при $(\kappa, \lambda) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$ следует оценка (1) принадлежащая А.А.Карацубе.

В четвёртом и пятом параграфах (теоремы 2.4.1 и 2.5.1.) получены новые оценки сверху величины длины промежутка $(T,\ T+H)$ критической прямой, в котором $Z^{(j)}(t)$ имеет нуль нечётного порядка, то есть в соотношении (1) для параметра θ_j найдено новое значение:

$$\theta_j = \begin{cases} \dfrac{1}{12} - \dfrac{65601}{810284}, & \text{если } j = 1; \\ \dfrac{1}{6+6j} - \dfrac{1}{6(1+j)(19+18j)}, & \text{если } j \geq 3, \end{cases}$$

что при $j \neq 2$ является усилением оценки (1), доказанной А.А.Карацубой в 1981 г.

Третья глава состоит из трёх параграфов и посвящена выводу асимптотической формулы (лемма 3.3.1) для суммы А. Сельберга вида $S(Y)$, оценке сверху (лемма 3.3.2) для суммы А. Сельберга вида $W(\theta)$, доказательство которых проводится методом А. Сельберга с применением формулы обращения Мёбиуса, природы чисел ν, свойств рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами, формулы Перрона, метода производящих функций и метода комплексного интегрирования.

В третьей главе также найдены (лемма 3.2.1) новые равномерные по параметрам оценки специальных тригонометрических сумм $W_j = W_j(T)$, $j = 0, 1, 2$, и задача о нетривиальности оценки этих сумм относительно параметра H, сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар, следствием которых является новые нетривиальные оценки этих сумм, если для параметра H выполняется условие

$$H \geq T^{\theta+\varepsilon_1}, \qquad \theta = \frac{1515}{4816} = \frac{1}{3} - \frac{271}{14448} \approx \frac{1}{3} - 0,0187569214. \tag{5}$$

В 1989 г. А.А. Карацуба получил нетривиальные оценки таких сумм $W_j(T)$, при

$$\theta = \frac{27}{82} = \frac{1}{3} - \frac{1}{246} \approx \frac{1}{3} - 0,0040650407.$$

Четвёртая глава состоит из четырёх параграфов и посвящена оценке количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках вида $[T, T+H]$ критической прямой.

В первом и втором параграфе соответственно сформулированы основные результаты главы (теоремы 4.1.1 и 4.1.2) и известные результаты в виде лемм, которые применяются при доказательстве этих теорем.

В третьем параграфе, воспользовавшись результатами третьей главы о новых нетривиальных оценках специальных тригонометрических сумм $W_j = W_j(T)$, $j = 0, 1, 2$, для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, доказано: *если* ε *и* ε_1 *произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$, c_4, c_5, c_g *- абсолютные положительные постоянные, превосходящие* 1, *то при* $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ *и выполнении соотношения* (5), *имеет место оценка*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq c_7 H (\ln T)^{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T. \tag{6}$$

где c_7 *эффективно вычисляемая постоянная, имеющая вид*

$$c_7 = \frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5 \cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}\, c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}\, c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}.$$

Оценка (6) является усилением оценки (3), принадлежащей А.А.Карацбе, притом для промежутков, имеющих более короткую длину, которая определяется соотношением (5).

В четвёртом параграфе теорема А.А.Карацубы для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, то есть неравенство (4) доказана для промежутков, имеющих более короткую длину, которая также определяется соотношением (5).

Новизна полученных результатов. Основные научные результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми и заключаются в следующем:

- задача об оценке сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j-го порядка функции Харди, сведена к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар;
- найдены новые оценки сверху величины длин промежутков критической прямой, в которых заведомо содержатся нули нечетного порядка производной j-го порядка функции Харди;
- получены новые равномерные по параметрам оценки тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0, 1, 2, 3$ в терминах экспоненциальных пар, которые возникают при исследовании нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой;
- с использованием новых равномерных по параметрам оценок тригонометрических сумм задача об оценке количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна сведена к задаче отыскания экспоненциальных пар;

- усилено неравенство А.А.Карацубы о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, притом для промежутков, имеющих более короткую длину.

Степень достоверности и апробация результатов исследования. Научные положения, выводы и рекомендации, приведённые в диссертации являются обоснованными, снабжены корректными математическими доказательствами с применением современных методов аналитической теории чисел, математического анализа и теории функции комплексного переменного, что свидетельствует об их достоверности.

Основные результаты диссертации неоднократно обсуждались на международных научных конференциях, проходивших в Республике Таджикистан, Российской Федерации и в Республике Узбекистан. Они опубликованы в научной печати, в том числе, 18 работ в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан, 3 работы в журналах, входящих в международные библиографические и реферативные базы данных и систем цитирования **Web of Science и Scopus**, в которых материалы диссертации отражены достаточно полно.

Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов. Основные результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в научных институтах и организациях, занимающихся аналитической теорией чисел, в том числе в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Институте математики им. А. Джураева НАН Таджикистана, в МГУ им. М.В.Ломоносова, в Таджикском национальном университете, в Кабардино-Балкарском государственном университете им. Х.М.Бербекова и в других учебных заведениях в учебном процессе при чтении спецкурсов

Соответствие автореферата основному содержанию диссертации. Автореферат диссертации правильно и полно отражает содержание, актуальность темы исследования, новизну и значимость полученных результатов, содержит все основные положения и выводы. Диссертация и автореферат оформлены в соответствии с существующими требованиями

Замечания по содержанию и оформлению диссертации. В диссертации имеются отдельные опечатки и стилистические погрешности, например:

- стр. 45 восьмая строка снизу в формуле (2.3.2) вместо знака “+” должен быть знак “=”;
- стр. 143 восьмая строка снизу в формуле (4.3.13) вместо знака “=” должен быть знак “$\leq$”.

однако они не влияют на положительную оценку диссертационной работы.

Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным «Положением о присуждении учёных степеней». Диссертационная работа «Нули производных функций Харди и Девенпорта-Хейльбронна, лежащие в коротких промежутках критической прямой», представленная на соискание учёной степени доктора физико-математических наук является завершённой научно-квалификационной работой, в которой получены законченные научные результаты по оценке специальных тригонометрических сумм, исследованию нулей производной функции Харди и нулей Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой, имеющих существенное значение для аналитической теории чисел, и полностью соответствует всем требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, а её автор Хайруллоев Ш.А. заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06- Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук по специальности
01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел,
профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений
ФГБОУ ВО Кабардино-Балкарского государственного
университета им. Х.М.Бербекова Пачев У.М.

Адрес: 360004, Кабардино-Балкарская Республика,
г. Нальчик, ул. Чернышевского, д. 173.
E-mail: urusbi@rambler.ru, тел.: +79287070208.

Подпись Пачева У.М. заверяю
Зам. начальника управления
кадрового и правового
обеспечения КБГУ
М.В. Арипшева
«12» 12 2022 г.

Подпись У.М. Пачева заверяю,
зам. начальника управления кадрового и правового
обеспечения ФГБОУ ВО Кабардино-Балкарского
государственного университета им. Х.М. Бербекова М.В. Арипшева