

«УТВЕРЖДАЮ»



Ректор Таджикского государственного педагогического университета имени Садриддина Аини

Ибодуллозода А.И.
2022 г.

ОТЗЫВ

оппонирующей организации на диссертационную работу Хайруллоева Шамсулло Амруллоевича «Нули производных функций Харди и Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие в коротких промежутках критической прямой», представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика алгебра и теория чисел

Актуальность избранной темы. Исследования по теории дзета-функции Римана ведутся с большой интенсивностью вот уже на протяжении полутора столетий, и отдельные разделы теории стали самостоятельными научными направлениями современной аналитической теории чисел и математического анализа. Одним из главных направлений исследований в этой теории является изучение распределения нулей дзета-функция Римана, лежащих на критической прямой. Изучение нулей дзета-функция Римана на критической прямой сводится к изучению вещественных нулей функции Харди. Одним из вопросов относительно этих нулей является вопрос о величине промежутка, на котором заведомо лежат нуль функции Харди и её производных.

Функция Дэвенпорта-Хейльбронна является простейшим рядом Дирихле, удовлетворяющим функциональному уравнению риманова типа, для которого гипотеза Римана неверна. Известно, тем не менее, что в критической прямой лежит аномально много нулей этой функции.

Исследования нулей функции Харди и её производных, а также нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой, ранее рассматривались в работах Г.Харди и Дж.Литтлвуда, Г.Дэвенпорта и Г.Хейльбронна, А.Сельберга, Я.Мозера, С.М.Воронина и А.А.Карацубы.

Автор диссертации обобщает и уточняет результаты полученных ранее авторов о нулях производной функции Харди и нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой. Доказательство основных результатов диссертации проводится самостоятельно и не опирается на ранее известные результаты по теории нулей функции Харди и её производных, а также нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой. Это свидетельствует об актуальности выбранной тематики.

Структура и основные результаты диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, списка литературы из 360 наименований, составляет 218 страниц текста, набранных на LaTeX.

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, степень научной разработанности изучаемой проблемы и связь работы с научными темами.

Первая глава состоит из трёх параграфов и посвящена обзору изученной литературы по теме диссертации.

Во второй главе диссертационной работы состоящий из пяти параграфов, оценивается сверху величины длины промежутка критической прямой, заведомо содержащей нуль нечётного порядка производной j -го порядка функции Харди, что сводится к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар для оценки специальных тригонометрических сумм.

В первом параграфе изложены основные результаты о нулях производной j -го порядка функции Харди. Во втором параграфе приведены основные определения, алгоритм оптимизации экспоненциальных пар, известные леммы, которые применяются в последующих параграфах. В третьем параграфе задача об оценке сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j -го порядка

функции Харди, сведена к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар. В четвертом параграфе главы получена новая оценка сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором содержится нуль нечётного порядка производной j -го порядка функции Харди. В пятом параграфе этой главы методом оптимизации экспоненциальных пар получены новые оценки сверху величины длин промежутков критической прямой, в которых содержатся нули нечётного порядка производных первого и второго порядка функции Харди.

Третья глава диссертационной работы состоит из трёх параграфов и посвящена оценкам специальных тригонометрических сумм $W_j = W_j(T, H)$, $j = 0, 1, 2$, которые возникают при выводе оценки количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой. Для этих сумм впервые получены равномерные по параметрам оценки тригонометрических сумм в терминах экспоненциальных пар, являющиеся обобщением оценок С.М.Воронина и А.А.Карацубы.

В первом параграфе приведены формулировки основных результатов главы. Во втором параграфе третьей главы получены новые равномерные по параметрам оценки тригонометрических сумм $W_j = W_j(T, H)$, $j = 0, 1, 2$, и задача о нетривиальности оценки этих сумм относительно параметра H сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар. В третьем параграфе третьей главы получена асимптотическая формула для суммы

$$S(Y) = \sum_{\lambda \leq Y} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}, \quad A(\lambda) = \sum_{\substack{nv_1 = \lambda \\ v_2}} \frac{h(v_1)h(v_2)r(n)}{v_2}.$$

и найдена оценка сверху для суммы

$$W(\theta) = \sum_{v_1, v_2, v_3, v_4 < X} \left(\frac{(v_1 v_4, v_2 v_3)}{v_1 v_3} \right)^{1-\theta} \frac{\beta(v_1)\beta(v_2)\beta(v_3)\beta(v_4)}{v_2 v_4},$$

которые применяются при оценке количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой.

В четвёртой главе диссертационной работы изучено количество нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой. Данная глава состоит из четырёх параграфов. В первом параграфе главы сформулированы основные результаты. Во втором параграфе приведены необходимые понятия и леммы, которые применяются при доказательстве основных теорем этой главы. В третьем параграфе главы усилено неравенство А.А.Карацубы для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, притом для промежутков имеющих более короткую длину. В четвёртом параграфе с применением равномерных по параметрам оценок тригонометрической суммы

$$W_3(T) = \left| \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 < P} \frac{A(\lambda_1)d(\lambda_1)\bar{A}(\lambda_2)\bar{d}(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \log \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) \right|$$

доказано неравенство

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq H\sqrt{\log T} \exp(-c_8\sqrt{\log \log T}),$$

для промежутков, имеющих более короткую длину.

Достоверность и научная новизна. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно, снабжены полными и подробными доказательствами и состоят в следующем:

- задача об оценке сверху величины длины промежутка критической прямой, в котором заведомо содержится нуль нечётного порядка производной j -го порядка функции Харди, сведена к задаче оптимизации по множеству всех экспоненциальных пар;
- найдены новые оценки сверху величины длин промежутков критической

прямой, в которых заведомо содержатся нули нечётного порядка производной j -го порядка функции Харди;

- получены новые равномерные по параметрам оценки тригонометрических сумм $W_j(T)$, ($j = 0; 1; 2; 3$) в терминах экспоненциальных пар, которые возникают при исследовании нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой;
- с использованием новых равномерных по параметрам оценок тригонометрических сумм задача об оценке количества нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна сведена к задаче отыскания экспоненциальных пар;
- усилено неравенство А.А.Карацубы о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, притом для промежутков, имеющих более короткую длину.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

Работа носит теоретический характер. Используемые в ней методы и полученные результаты могут быть применены в аналитической теории чисел при исследованиях нулей рядов Дирихле, в том числе, линейной комбинации L -рядов Дирихле, для которых не выполняется гипотеза Римана о нулях в критической полосе.

Материалы диссертационной работы могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистров высших учебных заведений, обучающихся по специальности «математика».

Апробация работы. Основные результаты диссертации опубликованы в 40 публикациях автора в научных журналах и материалах международных научных конференций, из которых 18 входят в перечень рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК МОРФ, 3 из которых индексируются базами данных “Web of Science” и “Scopus”. Они также докладывались на множестве

международных научных конференций, проходивших в Российской Федерации и Республики Таджикистан.

Диссертация и автореферат написаны ясным и понятным научным языком. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Замечания по содержанию и оформлению работы. В работе имеются некоторые неточности редакционного характера, например на странице 139 диссертации в формуле (4.3.9) вместо $W(\theta)$ написано $W(0)$, также имеются некоторые грамматические ошибки.

Отмеченные замечания не влияют на общую положительную оценку диссертации.

Заключение по диссертации. На основании вышеизложенного можно заключить, что диссертация Ш.А.Хайруллоева «Нули производных функций Харди и Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие в коротких промежутках критической прямой», представленная на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, является научно-квалификационной работой, в которой решены научные проблемы аналитической теории чисел, а именно, по множеству всех экспоненциальных пар найдена нижняя грань длины промежутка критической прямой, содержащей нуль нечётного порядка производной j -го порядка функции Харди, усилено неравенство А.А.Карацубы о количестве нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой, притом для промежутков, имеющих более короткую длину.

Диссертация полностью удовлетворяет требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» ВАК при Президенте Республики Таджикистан, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а её автор Ш.А.Хайруллоев, несомненно, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел».

Ш.А.Хайруллоев 09 ноября 2022 г. выступил с докладом по материалам диссертации на объединённом семинаре кафедр Математического анализа и Алгебры и теории чисел факультета Математики и информатики Таджикского государственного педагогического университета имени Садриддина Айни.

Отзыв подготовил заведующей кафедрой Математического анализа, доктор физико-математических наук, Юсупов Гулзорхон Амиршоевич. Отзыв был заслушан, обсужден и единогласно утвержден на совместном заседании кафедр Математического анализа и Алгебры и теории чисел 09 ноября 2022 года, протокол № 3/1.

Председатель заседания, декан
математического факультета,
кандидат физико-математических наук

Холикова М.Б.

Эксперт, доктор физико-математических
наук по специальности 01.01.01-Веществен-
ный, комплексный и функциональный
анализ

Юсупов Г.А.

Секретарь заседания, заведующий кафедрой
Алгебры и теории чисел ТГПУ им. С.Айни,
кандидат физико-математических наук по
специальности 01.01.06 – Математическая
логика, алгебра и теория чисел

Давлатбеков А.А.

Сведения об оппонировавшей организации
Таджикский государственный педагогический
университет им. Садриддина Айни
734003, г. Душанбе, проспект Рудаки 121
Тел: +992(37) 224-13-83;
E-mail: info@tgpu.tj,
Сайт: <http://www.tgpu.tj>

Подписи Холиковой М.Б., Юсупова Г.А. и
Давлатбекова А.А. заверяю
Начальник ОК и СЧ ТГПУ им. С.Айни



Мустафозода А.