Институт математики им. А.Джураева
Национальной Академии наук Таджикистана

На правах рукописи

УДК 511.325

ФОЗИЛОВА ПАРИНОЗ МИРАЛИБЕКОВНА

Асимптотическая формула в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми

Специальность 01.01.06 - Математическая логика, алгебра, теория чисел

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико–математических наук,
академик НАН Таджикистана, профессор
Рахмонов Зарулло Хусенович

Душанбе — 2022

Содержание

Обозначения

$$e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha} = \cos 2\pi\alpha + i \sin 2\pi\alpha\,.$$

Теоремы, леммы и формулы нумеруются двумя индексами: номер главы, номер утверждения.

$c, c_1, c_2, \cdots$, — положительные постоянные, не всегда одни и те же.

ε–положительные сколь угодно малые постоянные.

$p, p_1, p_2, \cdots$ — простые натуральные числа.

n, m, l, r, k, d — целые либо натуральные числа в зависимости от контекста.

$\varphi(q)$ – функция Эйлера.

$\mu(n)$ – функция Мёбиуса.

$\Lambda(n)$ – функция Мангольдта.

$\tau(n)$ – число делителей числа n.

$\tau_r(n)$ – число решений уравнения $x_1x_2\dots x_r = n$ в натуральных числах $x_1, x_2, \dots, x_r$.

Запись $A \asymp B$ означает, что $c_1A \le B \le c_2A$.

При положительном A запись $B = O(A)$ или $B \ll A$ означает, что существует $c > 0$ такое, что $|B| \le cA$.

(a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b.

$[t]$ – целая часть числа t.

$\{t\}$ – дробная часть числа t.

$\|t\| = \min\Big(\{t\}, 1 - \{t\}\Big)$ – расстояние до ближайшего целого числа;

x — достаточно большое положительное вещественное число;

N — достаточно большое натуральное число;

$\mathscr{L}_x = \ln x$;

$\mathscr{L} = \ln N$;

$\mathscr{L}_{\mu_3} = \ln\,(\mu_3 N)^{\frac{1}{3}}$,

Введение

Актуальность темы исследования. Настоящая диссертация является исследованием в аналитической теории чисел, относящимся к области теории коротких тригонометрических сумм, и её приложениям к классическим аддитивным проблемам с более жёсткими условиями, а именно, когда слагаемые почти пропорциональны. Аддитивными проблемами называются задачи о разложении целых чисел на слагаемые заданного вида, к которым относятся теорема Лагранжа о представлении натуральных чисел суммой не более четырёх квадратов натуральных чисел и её обобщение, предложенное Варингом [1] в 1770 г., которое утверждает, что последовательность, образованная фиксированной степенью n чисел натурального ряда, образует в нём базис конечного порядка $G(n)$, то есть каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = N, \tag{1}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — натуральные числа и количество слагаемых r не превосходит фиксированной величины $G(n)$, называемой порядком базиса последовательности $\{x^n\}$, или функцией Харди.

Эти классические аддитивные задачи с дополнительным условием *«с почти пропорциональными слагаемыми»* впервые изучил английский математик Мейтленд Райт в тридцатые годы прошлого века. Остановимся на некоторых его результатах.

- В работах [2, 3] он показал, что если $r \geq 5$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — фиксированные положительные числа, $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r = 1$,
$$\alpha = \frac{r-4}{4(r-3)}, \quad r = 5,\ 6,\ 7; \qquad \alpha = \frac{r-2}{2(2r-1)}, \quad r \geq 8,$$
и $0 < \beta < \alpha$, тогда любое натуральное число N представимо в виде
$$N = x_1^2 + \ldots + x_r^2, \qquad |x_i^2 - \mu_i N| \ll N^{1-\beta}.$$

- В работе [4] доказал, что, если γ, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 — произвольные положительные числа, $\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4=1$, $N=2^\xi N_1$, N_1 — нечётное целое число, $N_1>N_0=N_0(\gamma,\mu_1,\ldots,\mu_4)$, и выполняется условие
$$|x_i^2-\mu_iN|\le\gamma\mu_iN,\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4,$$
тогда число N представимо в виде
$$N=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2; \tag{2}$$
если же N нечётное число то оно представимо в виде (2) при условии
$$x_i=\frac{1}{2}N^{\frac{1}{2}}(1+o(1)),\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

- В работе ([5]) он доказал, что если $0<\beta<0,2$, то существует число c, $0<c<\frac{5}{12}\left(\frac{1}{5}-\beta\right)$, что имеет место соотношение
$$\#\left\{N:\ N\le X,\, N\ne x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2,\quad |x_i^2-\mu_in|\ll N^{1-\beta}\right\}\ll X^{1-c}.$$

- В этой работе он также доказал, что если $0<\beta<0,2$, то существует число c, $0<c<\frac{3}{7}\left(\frac{1}{6}-\beta\right)$, что для всех $N\ne 4^a(8l+7)$, имеет место соотношение
$$\#\left\{N:\ N\le X,\, N\ne x_1^2+x_2^2+x_3^2,\ |x_i^2-\mu_iN|\ll N^{1-\beta}\right\}\ll X^{1-c}.$$

- Мейтленд Райт, исследуя проблему Варинга с почти пропорциональными слагаемыми [6, 7], доказал, *пусть* $r\ge r_0$, $A_1,\ldots,A_r$, $\mu_1,\ldots,\mu_r$ — *фиксированные положительные числа,* $\mu_1+\ldots+\mu_r=1$, $0<\beta<\alpha$, $\alpha=\alpha_1=\dfrac{5(r-8)}{3(13r-32)}$, *при* $9\le r\le 24$, $\alpha=\alpha_2=\dfrac{r-4}{3(3r-2)}$, *при* $r\ge 24$, *то существует* $N_0=N_0(n,r,\mu_1,\ldots,\mu_r,A_1,\ldots,A_r)$, *такое, что для всех* $N>N_0$ *уравнение* (1) *с условием* $|x_i^n-\mu_iN|\le A_iN^{1-\beta}$ *разрешимо в целых положительных числах.*

Аддитивные задачи с почти равными слагаемыми являются частным случаем аддитивных задач с почти пропорциональными слагаемыми, так как при $\mu_1 = \ldots = \mu_r$ аддитивная задача с почти пропорциональными слагаемыми превращается в задачу с почти равными слагаемыми.

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \qquad 1 \le q \le \tau, \qquad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \le P$, $P < Q$ через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

Для произвольного фиксированного n поведения коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида

$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\le x} e(\alpha m^n),$$

в больших дугах было исследовано З.Х.Рахмоновым и его учениками в работах [8–27]. Воспользовавшись этими работами в сочетании с работами [28–30], были решены следующие аддитивные задачи с почти равными слагаемыми:

- проблема Варинга с почти равными слагаемыми в случаях $n = 3, 4, 5$, точнее были найдены [22, 31–34], асимптотические формулы для количество решений диофантова уравнения (5), с условиями
$$\left| x_i - \left(\frac{N}{2^n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \right| \le H, \qquad i = 1, \ldots, 2^n+1, \qquad H \ge N^{\frac{1}{n}-\theta(n)+\varepsilon};$$
где
$$\theta(3) = \frac{1}{30}, \qquad \theta(4) = \frac{1}{108}, \qquad \theta(5) = \frac{1}{340}.$$
- обобщение [8, 11, 29, 35–37] тернарной проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми о представлении достаточно большого натурального

числа в виде

$$p_1 + p_2 + m^n = N,$$

при $n = 2, 3, 4$, в простых числах p_1, p_2 и натурального m, с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2, \qquad \left|m^n - \frac{N}{3}\right| \le H, \qquad H \ge N^{1-\theta(n)}\mathscr{L}^{c_n},$$

соответственно при

$$\theta(2) = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 2; \qquad \theta(3) = \frac{1}{6}, \quad c_3 = 3; \qquad \theta(4) = \frac{1}{12}, \quad c_4 = \frac{40}{3}.$$

Дж.Лю и Т.Жан [38–42] исследовали в больших, так и малых дугах поведение коротких квадратичных тригонометрических сумм с простыми числами, то есть при $k = 2$ сумму вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n)e(\alpha n^k),$$

воспользовавшись которой решили обобщение проблемы Эстермана для квадратов простых чисел с почти равными слагаемыми, о представлении достаточно большого натурального числа N, в виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3^n, \tag{3}$$

при $n = 2$, с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2, \quad \left|p_3^n - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad H \ge N^{\frac{27}{32}+\varepsilon}.$$

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней получены правильные по порядку оценки интегралов по периоду от модулей коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами, изучено поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами $S_3(\alpha; x, y)$, и оно приложено к решению проблемы Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми, точнее к выводу асимптотической формулы для более редкой последовательности и с более общими условиями, а именно для количества решений диофантова уравнения (3) при $n=3$, с условиями

$$|p_i-\mu_iN|\le H,\qquad i=1,2,\qquad |p_3^3-\mu_3N|\le H,\qquad \mu_1+\mu_2+\mu_3=1$$

для $H\ge N^\theta\mathscr{L}_{\mu_3}^c$, с возможно наименьшим θ.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Решение классических аддитивных проблем привело к созданию новых методов в теории чисел. Наиболее мощным и универсальным является круговой метод Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М. Виноградова. Воспользовавшись этим методом, был получен ряд выдающихся результатов по решению классических аддитивных проблем, к которым относятся:

- решение проблемы Варинга в 1909 г. Д. Гильбертом [43, 44], что тем самым он установил существование функции $G(n)$;
- новое доказательство проблемы Варинга Харди и Литтлвудом [45], и именно они ввели функцию $G(n)$ и доказали, что

  $$n<G(n)\le n2^{n-1}h;\ \lim_{n\to\infty}h=1,$$

  также при $r>(n-2)2^{n-1}+5$ для числа $J(N)$ представлений числа N в виду (1) нашли асимптотическую формулу вида

  $$J(N)=\frac{(\Gamma(1+1/n))^r}{\Gamma(r/n)}N^{\frac{r}{n}-1}\mathfrak{S}+O(N^{\frac{r}{n}-1-c(n,r)}),\tag{4}$$

  где $\mathfrak{S}$ — некоторый *особый ряд*, сумма которого, как они показали, превосходит некоторое число $c_1(n,r)$ и $c_1(n,r)>0$;
- теорема И.М. Виноградова [46–49] о справедливости асимптотической формулы Харди и Литтлвуда при

  $$r\ge 2[n^2(2\ln n+\ln\ln n+3)];$$

- доказанная в 1934 г. И.М. Виноградовым [50] принципиальная новая оценка
$$G(n) < n(6\ln n + 10),$$
которую он несколько раз уточнял [51–54], и, наконец [55] в 1959 г. доказал, что
$$G(n) < n(2\ln n + 4\ln\ln n + 2\ln\ln\ln n + 13);$$

- доказанная своим p–адическим методом оценка А.А. Карацубы [49, 56]
$$G(n) < n(2\ln n + 2\ln\ln n + 12);$$
величина $G(n)$ найдена только для $k = 2$ и $k = 4$, именно $G(2) = 4$, $G(4) = 16$, что доказали Лагранж и Давенпорт [57], Ю.В. Линник [58–61] доказал, что $G(3) \leq 7$, Вон [62, 63] доказал, что асимптотическая формула Харди и Литтлвуда (4) имеет место при $r = 8$ и $n = 3$;

- решение И.М. Виноградовым [46, 49, 64–66] в 1937 г. тернарной проблемы Гольдбаха о представлении нечётного натурального числа как суммы трёх простых чисел;

- решение Ю.В.Линником [67–71] проблемы Харди-Литлвуда о представлении всякого целого числа в виде суммы простого и двух квадратов (сформулирована в 20-х гг. 20 в.);

- решение И.М. Виноградовым [49, 72] проблемы Гольдбаха – Варинга [73] о том, что фиксированная степень n простых чисел p при любом натуральном n образует базис конечного порядка $V(n)$ в натуральном ряде, что каждое достаточно большое натуральное N может быть представлено в виде
$$p_1^n + p_2^n + \cdots + p_k^n = N,$$
где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа и $k \leq V(n)$; заметим, что в асимптотической формуле И.М. Виноградова вопрос положительности особого ряда $\sigma = \sigma(k; N)$, до 2009 г. оставался открытим;

- В.Н. Чубариков [74, 75], используя свою теорию кратных тригонометрических сумм с простыми числами [76, 77], являющейся дальнейшим развитием метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова, полностью решил проблему Гольдбаха – Варинга.

- теорема Эстермана [78] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде
$$p_1 + p_2 + m^2 = N,$$
где p_1 и p_2 — простые числа, m — целое число.

Существенный вклад в исследованиях аддитивных задач с почти пропорциональными слагаемыми и являющихся их частным случаем — с почти равными слагаемыми, а также в изучениях поведения коротких тригонометрических сумм Г. Вейля, возникающих при решении этих проблем внесли М.Райт [2–7] И.М.Виноградов [46, 79], С.Б.Хейзелгроув [80], В. Статулявычус [81], Цзя Чаохуа [82–85], Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо [86], Т.Жан [87], Дж.Лю и Т.Жан [38–42].

Связь работы с научными программами (проектами), темами Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации следующих проектов научно-исследовательской работ института математики им. А. Джураева Национальной Академии наук Таджикистана:

- «Поведение тригонометрических сумм, их приложения в аддитивных проблемах теории чисел, избранные задачи теории приближении функций», ГР 0116TJ00532, с 2016 года по 2020 годов;

- «Оценка коротких смешанных тригонометрических сумм и их приложения к теории нулей специальных рядов Дирихле», ГР 0121TJ1178, с 2021 года по 2025 годов.

Общая характеристика работы

Цель исследования. Целью работы является изучение поведения интегралов по периоду от модулей коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами, и поведения коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами и их приложения к выводу асимптотической формулы в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми.

Задачи исследования. В соответствие с поставленной целю выделяются следующие задачи:

1. оценка средних значений коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами;
2. исследование поведения коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг;
3. оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах за исключением малой окрестности их центров;
4. исследование проблемы Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми, то есть вывод асимптотической формулы для количества представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы трёх почти пропорциональных слагаемых, два из которых — простые числа, а третье является кубом простого числа;

Научная новизна исследования. Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют теоретический интерес и состоят в следующем:

- обобщена теорема Хуа Ло-кена для коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами, а именно найдены правильные по порядку оценки интегралов по периоду от степени модуля этих сумм;

- доказана асимптотическая формула с остаточным членом для коротких кубических тригонометрических сумм Г. Вейля с простыми числами в малой окрестности центров больших дуг;
- найдена нетривиальная оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах за исключением малой окрестности их центров;
- доказана асимптотическая формула в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применение в аналитической теории чисел при исследованиях проблем теории коротких тригонометрических сумм с простыми числами и аддитивных задач с простыми числами. Материалы диссертации также могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

Методы исследования. В основе исследований лежат современные методов аналитической теории чисел, а именно:

- методы L-рядов Дирихле, методы Ю.В. Линника и Н.Г. Чудакова, основанные на плотности нулей L-рядов Дирихле в критической полосе;
- метод оценки специальных тригонометрических сумм и интегралов Ван дер Корпута.
- круговой метод Г. Харди, Д. Литтлвуда и С. Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М. Виноградова.

Объект исследования. Объектами исследования являются интегралы по периоду от модулей коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрические сумм с простыми числами, короткие кубические тригонометрические суммы с простыми числами, тернарные диофантовы уравнения

Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми, малая окрестность центров больших дуг, большие дуги за исключением малой окрестности их центров, малые дуги

Предмет исследования. Предметом исследования является получение правильной по порядку оценки интегралов по периоду от модулей коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами, асимптотической формулы для короткой кубической тригонометрической суммы Г. Вейля с простыми числами в малой окрестности центров больших дуг, нетривиальной оценки короткой кубической тригонометрической суммы с простыми числами в больших дугах за исключением малой окрестности их центров, и асимптотической формулы для количества представлений большого натурального числа в виде суммы трёх почти пропорциональных слагаемых, два из которых — простые числа, а третье является кубом простого числа.

Личный вклад соискателя учёной степени. Задачи исследования были сформулированы научным руководителем работы, который оказывал консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, отраженные в разделе «Научная новизна», кроме пунктов 2 и 3 получены лично автором. Результаты пунктов 2 (параграф 1.3) и 3 (параграф 1.4) получены совместно с А.А. Собировым и опубликованы в [1-А, 2-А].

Соответствия диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел и является разделом аналитической теории чисел, указанной в пункте III параграфа 3 паспорта научной специальности.

Положения, выносимые на защиту.

1. теорема об обобщении оценки Хуа Ло-кена для коротких квадратичных тригонометрические сумм с простыми числами;

2. теорема об обобщении оценки Хуа Ло-кена для коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами;
3. теорема об асимптотической формуле с остаточным членом для коротких кубических тригонометрических сумм Г. Вейля с простыми числами в малой окрестности центров больших дуг;
4. теорема об оценке коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах за исключением малой окрестности их центров;
5. теорема об асимптотической формуле для количества представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы трёх почти пропорциональных слагаемых, два из которых — простые числа, а третье является кубом простого числа.

Степень достоверности проведенных исследований. Достоверность научных результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- республиканская научно-теоретическая конференция «Современные проблемы алгебры и теории чисел», посвящённая 90-летию со дня рождения профессора Гафура Бабаевича Бабаева, Душанбе, 27 ноября 2018 года;
- международная конференция «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа», посвящённая 60-летию академика Рахмонова З.Х. и члена-корреспондента Академии наук Республики Таджикистана Исхокова С.А., Душанбе, 13-14 декабря 2019 года;
- международная научная конференция «Современные проблемы математики, проблемы и их пути решения», г. Термез. Узбекистан. 21—23 октября 2020 года;

- международная конференция «Актуальные проблемы современной математики», посвящённая 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова, Душанбе, 25-26 июня 2021 года;
- международная конференция «Современные проблемы теории чисел и математического анализа», посвящённой 80–летию с дня рождения доктора физика–математических наук, профессора Дододжона Исмоилова, Душанбе, 29–30 апреля 2022 года.

- семинар отдела алгебры, теории чисел и топологии (2013 – 2016 гг.) и общеинститутский семинар (2014 – 2016 гг.) в Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан;
- семинар кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в восьми научных работах. Работы [1-А, 2-А, 3-А, 4-А] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан. Три работы написаны автором лично. Четыре работы написаны в соавторстве с А.А. Собирова, а также с научным руководителем, которому принадлежат постановка задач. Одна работа написана совместно с А.А. Собирова.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из обозначений, введения, общей характеристики работ, двух глав, заключения, списка цитированной литературы из 127 наименований, занимает 124 страниц машинописного текста и набрана на редакторе LaTeX.

Глава 1

Анализ литературы по коротким тригонометрическим суммам с простыми числами и аддитивным задачи с почти пропорциональными слагаемыми

В этой главе излагается анализ изученной литературы по теме диссертационной работы, приводятся основы теоретико-методологического исследования, анализ существующих проблем и полученных результатов, а также нерешенные задачи по теме диссертационной работы.

1.1. Краткий исторический обзор по коротким квадратичным и кубическим тригонометрическим суммам с простыми числами

Г.Вейль [88] построил метод, с помощью которого, в частности, впервые получил нетривиальную оценку тригонометрических сумм вида

$$T_n(\alpha, x) = \sum_{m\le x} e\left(\alpha m^n\right),$$

которые в его честь И.М.Виноградов [46] назвал суммами Вейля. Глубоким усилением метода Вейля является метод тригонометрических сумм И.М.Виноградова, применившим его к решению многих проблем теории чисел.

Хуа Ло–кен [89, 90] для средних значений сумм Вейля доказал следующую оценку

$$\int\limits_0^1 \left|T_n(\alpha, x)\right|^{2^k} \ll x^{2^k-k+\varepsilon}, \qquad 1\le k\le n.$$

В работах [22, 91–94] оценка Хуа Ло-кена обобщена для коротких тригонометрических сумм Вейля вида

$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m<x} e(\alpha m^n),$$

при $n=3;\ 4;\ 5$, то есть для среднего значения $T_n(\alpha;x,y)$ — сумм Г.Вейля, переменное суммирование которых принимает значения из коротких интервалов, получены правильные по порядку оценка вида

$$\int\limits_0^1 |T_n(\alpha;x,y)|^{2^k}\,d\alpha \ll y^{2^k-k+\varepsilon}, \qquad 1\le k\le n.$$

Эти оценки были приложены при выводе асимптотических формул в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми [22, 31, 33, 34].

При решении аддитивным задачи с почти пропорциональными слагаемыми, причём когда слагаемые являются степенями простых чисел возникает задача об оценке средних значений коротких тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$\mathbb{S}_k(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<p\le x} e(\alpha p^k).$$

В теоремах 2.1 и 2.2 соответственно получены правильные по порядку оценки интегралов по периоду от степени модулей коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами.

Короткую тригонометрическую сумму с простыми числами впервые оценил И.М.Виноградов [46]. Применяя свой метод оценок сумм с простыми числами он доказал, что если $\delta\le\frac{1}{6}$ — произвольное малое положительное постоянное и

$$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\le\frac{1}{q^2}, \qquad (a,q)=1, \qquad 1\le q\le x,$$

то для короткой линейной тригонометрической суммы с простыми числами, имеет место оценка

$$\mathbb{S}_1(\alpha;x,y)\ll y\exp\left(\frac{\ln^2\mathscr{L}_x}{\ln(1+\delta)}+\sigma\ln\mathscr{L}_x\right)\left(\frac{x^{\frac{2+\delta}{3}}}{y}+\frac{1}{q}\right)^{1/2}.$$

Это оценка становится нетривиальной, если

$$\exp(c\ln^2\mathscr{L}_x)\ll q\ll x^{1/3}, \qquad y>x^{2/3+\varepsilon}.$$

В этой работе И.М.Виноградов подчеркнул, что для малых q $(q \le \exp(\mathscr{L}_x^\beta)$, β — правильная дробь, немногим превосходящая 0,5) весьма точные оценки суммы $\mathbb{S}_1(\alpha; x, y)$ являются непосредственным следствием известных теорем, относящихся к распределению простых чисел в арифметических прогрессиях, но только при условии, если y есть величина порядка близкого к x и α — рациональное число вида $\frac{a}{q}$, где $(a, q) = 1$. Для величин y, порядок которых меньше порядка x (то есть $y = x^\theta$, $\theta < 1$), и произвольных α вопрос оставался открытым.

Сумму $\mathbb{S}_1(\alpha; x, y)$ впервые для всех значений α исследовал английский математик К.В.Хазелгров [80]. Он получил для суммы $\mathbb{S}_1(\alpha; x, y)$ нетривиальную оценку в $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^b)$ и асимптотическую формулу $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ при

$$y \ge x^\theta, \qquad \theta = \frac{63}{64} + \varepsilon.$$

Наилучший результат принадлежит Т. Жан [87]. Он, пользуясь методом работы Пан Чен-дона и Пан Чен-бьяо и оценкой М. Ютилы [95] о четвёртом моменте L-функций Дирихле в критической прямой, доказал для суммы $\mathbb{S}_1(\alpha; x, y)$ асимптотическую формулу в $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ и нетривиальную оценку в $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^b)$ при

$$y \ge x^\theta, \qquad \theta = \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

В случае, когда α — рациональное число вида $\frac{a}{q}$, $(a, q) = 1$, получены нетривиальные оценки для более коротких сумм $S_1(\alpha; x, y)$. В 1986 г.Балог и Перелли [96] доказали нетривиальную оценку для $S_1(\alpha; x, y)$ при

$$y \gg x^{\frac{3}{5}} \mathscr{L}_x^{200},$$

а Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо [97] доказали такую же оценку при

$$y \gg x^{\frac{7}{12}} + \varepsilon.$$

Впервые исследуя короткие нелинейные тригонометрические суммы с простыми числами И.М.Виноградов [46], при $x^{\frac{2}{3}+\varepsilon_1} q \le y \le x$ и $q \ge \mathscr{L}_x^{\varepsilon_2}$

в случае, когда α — рациональное число вида $\frac{a}{q}$, $(a,q)=1$, получил оценку

$$\mathbb{S}_k\left(\frac{a}{q}; x, y\right) = \sum_{x-y<p\le x} e\left(\frac{ap^k}{q}\right) \ll yq^{-\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

где ε, ε_1, ε_2 — произвольные малые положительные постоянные.

Короткую квадратичную тригонометрическую сумму с простыми числами $S_2(\alpha; x, y)$ для всех значений α исследовали Дж.Лю и Т.Жан [38]. В предположении справедливости расширенной гипотезы Римана, они при

$$y \ge x^{\frac{2}{3}+\varepsilon},$$

доказали, что для вского $A>0$ существуют постоянные $c_i>0$, $i=1,2,3$, что имеет место соотношение

$$S_2(\alpha; x, y) = \begin{cases} M(\alpha; x, y) + O\left(\dfrac{y}{\mathscr{L}_x^A}\right), & q \le \mathscr{L}_x^{c_1}, \quad |\lambda| \le \dfrac{1}{xy\mathscr{L}_x^{c_2}}; \\ O\left(\dfrac{y}{\mathscr{L}_x^A}\right), & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{1.1}$$

где

$$M(\alpha; x, y) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^{q} e\left(-\frac{ah^k}{q}\right) \int\limits_{x-y}^{x} e(\lambda u^k) du, \qquad \tau = \frac{y^3}{x\mathscr{L}_x^{c_3}}.$$

Воспользовавшись методом оценки тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградова, плотностной теоремой для нулей L-рядов Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы и теоремой М.Ютилы [95] о четвёртом моменте L-функций Дирихле в критической прямой, такую оценку они получили безусловно при

$$y \ge x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}.$$

А.В.Кумчев [98] получил нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$, $\tau = x^{k-\frac{2}{2k+3}}P^{-1}$ при $y \ge x^{1-\frac{1}{2k+3}+\varepsilon}$.

З.Х. Рахмонов и Ф.З. Рахмонов [99–101], пользуясь методом работы [102] и результатами работ [103–105], показали, что если A — абсолютная постоянная, то при

$$y \geq x^{\frac{4}{5}} \mathscr{L}_x^{8A+151},$$

на малых дугах $\mathfrak{m}\left(\mathscr{L}_x^{32(A+20)}\right)$, $\tau = y^5 x^{-2} \mathscr{L}_x^{-32(A+20)}$, справедлива оценка

$$S_3(\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}_x^A}.$$

1.2. Краткий исторический обзор по аддитивным задачи с почти пропорциональными слагаемыми

Аддитивные задач и с почти пропорциональными слагаемыми сформулировал и впервые изучил английский математик Мейтленд Райт в тридцатые годы прошлого века. К аддитивным задачам, которые он исследовал с почти пропорциональными слагаемыми, относятся теорема Лагранжа о представлении натуральных чисел суммой не более четырёх квадратов натуральных чисел и её обобщение, предложенное Варингом [1] в 1770 г., которое утверждает, что последовательность, образованная фиксированной степенью n чисел натурального ряда, образует в нём базис конечного порядка $G(n)$, то есть каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = N, \tag{1.2}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — натуральные числа и количество слагаемых r не превосходит фиксированную величину $G(n)$, называемую порядком базиса последовательности $\{x^n\}$, или функцией Харди. Их вкратце можно характеризовать следующим образом:

- в работах [2, 3] показано, что, если $r \geq 5$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — фиксированные положительные числа, $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r = 1$,

$$\alpha = \frac{r-4}{4(r-3)}, \quad r = 5,\ 6,\ 7, \qquad \alpha = \frac{r-2}{2(2r-1)}, \quad r \geq 8,$$

и $0 < \beta < \alpha$, тогда любое натуральное число N представимо в виде

$$N = x_1^2 + \ldots + x_r^2, \qquad |x_i^2 - \mu_i N| = O(N^{1-\beta});$$

- в работе [4] доказано, что если γ, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 — произвольные положительные числа, $\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4 = 1$, $N = 2^{\xi}N_1$, N_1 — нечётное целое число, $N_1 > N_0 = N_0(\gamma, \mu_1, \ldots, \mu_4)$, и выполняется условие

$$|x_i^2 - \mu_i N| \leq \gamma \mu_i N, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

тогда число n представимо в виде

$$N = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2; \tag{1.3}$$

- в работе [5] доказано, что, если $0 < \beta < 0,2$, то количество чисел N, не превосходящих X и которые при выполнении условия

$$|x_i^2 - \mu_i N| \ll N^{1-\beta}, \qquad i = 1, 2, 3, 4, \tag{1.4}$$

не представимы в виде (1.3), равно $O(X^{1-c})$, где $0 < c < \frac{5}{12}\left(\frac{1}{5} - \beta\right)$, то есть

$$\#\left\{N:\ N \leq X,\ N \neq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad |x_i^2 - \mu_i N| \ll N^{1-\beta}\right\} \ll X^{1-c};$$

- в работе [5] также доказано, что если $0 < \beta < 0,2$, то количество чисел N, не превосходящих X, и которые не имеют форму $4^a(8l+7)$, при условии выполнения условия (1.4) не представимы в виде

$$N = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

равно $O(X^{1-c})$, где $0 < c < \frac{3}{7}\left(\frac{1}{6} - \beta\right)$;

- Мейтленд Райт [6, 7], исследуя проблему Варинга с почти пропорциональными слагаемыми, доказал, *пусть* $\mu_1, \ldots, \mu_r$ *— фиксированные положительные числа,* $\mu_1 + \ldots + \mu_r = 1$, $r \geq r_0$,

$$0 < \beta < \alpha = \min\left(\frac{r-4}{4(r-3)}, \frac{r-2}{2(r-1)}\right), \qquad \gamma = \frac{r}{k} - 1 - (r-1)\beta,$$

$\mathbb{I}(N)$ — число решений уравнения (1.2) относительно $x_1, \ldots, x_r$ с условием $|x_i^n - \mu_i N| \leq A_i N^{1-\beta}$, тогда справедлива асимптотическая формула

$$\mathbb{I}(N) = \frac{c\left(\prod \mu_i\right)^{\alpha-1}}{n^r \Gamma(r)} \mathfrak{S}(N) N^{\gamma} + O\left(N^{\gamma-d}\right),$$

где $c = c(A_1, \ldots, A_s)$ — абсолютная постоянная, $d = d(r, \beta) > 0$.

Если в аддитивной задаче с почти пропорциональными слагаемыми $\mu_1, \ldots, \mu_r$ равны между собой, то есть $\mu_1 = \ldots = \mu_r = \frac{1}{r}$, то она превращается в задачу с почти равными слагаемыми.

З.Х.Рахмонов с учениками в работах [8, 10, 11, 13, 22] в больших дугах полностью изучили поведения коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида

$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e(\alpha m^n),$$

для произвольного фиксированного n, пользуясь которыми доказали

- асимптотическую формулу в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми в случаях $n = 3, 4, 5$, точнее были найдены [22, 31, 33, 34], асимптотические формулы для количества решений диофантова уравнения (1.2), с условиями

$$\left|x_i - \left(\frac{N}{2^n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\right| \leq H, \qquad i = 1, \ldots, 2^n+1, \qquad H \geq N^{\frac{1}{n}-\theta(n)+\varepsilon};$$

  где

$$\theta(3) = \frac{1}{30}, \qquad \theta(4) = \frac{1}{108}, \qquad \theta(5) = \frac{1}{340}.$$

- асимптотическую формулу в обобщении тернарной проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми о представлении достаточно большого натурального числа в виде

$$p_1 + p_2 + m^n = N,$$

при $n = 2, 3, 4$, в простых числах p_1, p_2 и натурального m, с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \le H, \quad i = 1, 2, \qquad \left| m^n - \frac{N}{3} \right| \le H, \qquad H \ge N^{1-\theta(n)} \mathscr{L}^{c_n},$$

соответственно при

$$\theta(2) = \frac{1}{4}, \qquad c_2 = 2;$$
$$\theta(3) = \frac{1}{6}, \qquad c_3 = 3;$$
$$\theta(4) = \frac{1}{12}, \qquad c_4 = \frac{40}{3}.$$

Т. Жан и Дж. Лю [40] решили обобщение проблемы Эстермана для квадратов простых чисел с почти равными слагаемыми, о представлении достаточно большого натурального числа N, в виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3^n,$$

при $n = 2$, с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \le H, \quad i = 1, 2, \quad \left| p_3^n - \frac{N}{3} \right| \le H, \quad H \ge N^{\theta},$$

и воспользовавшись для суммы $S_2(\alpha, x, y)$ оценкой (1.1) доказали асимптотическую формулу

- условно (в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана), при

$$\theta = \frac{5}{6} + \varepsilon;$$

- безусловно при

$$\theta = \frac{27}{32} + \varepsilon.$$

Глава 2

Короткие квадратичные и кубические тригонометрические суммы с простыми числами

2.1. Вспомогательные леммы

Лемма 2.1. *Пусть действительная функция — $f(u)$, и монотонная функция — $g(u)$ удовлетворяют условиям: $f'(u)$ — монотонна, $|f'(u)| \geq m_1 > 0$ и $|g(u)| \leq M$. Тогда справедлива оценка:*

$$\int_a^b g(u)e(f(u))du \ll \frac{M}{m_1}.$$

Доказательство см. [106]

Лемма 2.2. *Пусть действительная функция–$f(u)$, и монотонная функция–$g(u)$ удовлетворяют условиям: $f'(u)$ — монотонна, $|f''(u)| \geq m_2 > 0$ и $|g(u)| \leq M$. Тогда справедлива оценка:*

$$\int_a^b g(u)e(f(u))du \ll \frac{M}{\sqrt{m_2}}.$$

Доказательство см. [106]

Лемма 2.3. *Пусть $2 \leq T_0 \leq x$, $\rho = \beta + i\gamma$ — нетривиальные нули функции $L(s,\chi)$. Тогда*

$$\psi(x,\chi) = E_0 x - \sum_{|\gamma|\leq T_0} \frac{x^\rho}{\rho} + R_1(x,T_0,\chi), \quad R_1(x,T_0,\chi) \ll \frac{x\mathscr{L}_x^2}{T_0},$$

где $E_0 = 1$, если $\chi = \chi_0$; $E_0 = 0$, если $\chi \neq \chi_0$.

Доказательство см. [107]

Лемма 2.4. *При подходящем $c > 0$ функция $L(s, \chi)$, $s = \sigma + it$ не имеет нулей в области*

$$\sigma \geq 1 - \delta(q,t), \quad \delta(q,t) = \frac{c}{\max(\ln q, \ln^{3/4}(|t|+3)\ln^{3/4}\ln(|t|+3))},$$

для всех характеров χ по $\mod q$, за исключением, быть может простого действительного нуля β_1 у L–функции, определенной исключительным характером χ_1.

Доказательство см. [108]

Лемма 2.5. *Число нулей ρ функции $L(s, \chi)$, $\chi \pmod q$, для которых $T \leq |\gamma| \leq T+1$, не превосходит $\ln qT$.*

Доказательство см. [109].

Лемма 2.6. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $c = c(\varepsilon)$ такое, что если χ_1 — действительный характер по модулю q и β_1 — действительный нуль $L(s, \chi_1)$, то*

$$\beta_1 \leq 1 - \frac{c(\varepsilon)}{q^{\varepsilon}}.$$

Доказательство см. [109].

Лемма 2.7. *Пусть ε сколь угодна малая положительная постоянная, и $T^{\frac{35}{108}+\varepsilon} \leq H \leq T$, тогда справедливы оценки*

$$\sum_{\chi \bmod q} (N(u, T+H, \chi) - N(u, T, \chi)) \ll \begin{cases} (qH)^{\frac{4}{3-2u}(1-u)}(\ln qH)^9, & \text{для } \dfrac{1}{2} \leq u \leq \dfrac{3}{4}, \\ (qH)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}, & \text{для } \dfrac{3}{4} \leq u \leq 1, \end{cases}$$

$$\sum_{\chi \bmod q} (N(u, T+H, \chi) - N(u, T, \chi)) \ll (qH)^{\frac{8}{3}(1-u)}(\ln qH)^{216}.$$

Доказательство см. [110, 111].

Лемма 2.8. *Пусть a, k и q — натуральные числа, $(a,q)=1$, $\nu_k(q)$ — число вычетов степени k по модулю q,*

$$\tau(\chi,a,k)=\sum_{h=1}^{q}\chi(h)e\left(\frac{ah^k}{q}\right),$$

Тогда имеет место неравенство

$$|\tau(\chi,a,k)|\le 2(\tau(q))^{\frac{\ln k}{\ln 2}}\sqrt{q}.$$

Доказательство Утверждение леммы следует из задач $8.\alpha)$ и $8.\beta)$, стр. 103 учебника [112].

2.2. Среднее значение коротких квадратичных и кубических тригонометрических сумм с простыми числами

Хуа Ло–кен [90] для средних значений сумм Вейля вида

$$T_n(\alpha,x)=\sum_{m\le x}e\left(\alpha m^n\right)$$

получил правильную по порядку оценку

$$\int_0^1\left|T_n(\alpha;x)\right|^{2^k}d\alpha\ll x^{2^k-k+\varepsilon},\qquad 1\le k\le n.$$

В работах [22, 91–94] оценка Хуа Ло-кена обобщена для коротких тригонометрических сумм Вейля вида

$$T_n(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<m<x}e(\alpha m^n),$$

при $n=3;\ 4;\ 5$, то есть для среднего значения $T_n(\alpha;x,y)$ — сумм Г.Вейля, переменное суммирование которых принимает значения из коротких интервалов, получена правильная по порядку оценка вида

$$\int_0^1\left|T_n(\alpha;x,y)\right|^{2^k}d\alpha\ll y^{2^k-k+\varepsilon},\qquad 1\le k\le n,$$

соответственно были приложены при выводе асимптотических формул в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми [22, 31, 33, 34].

В этом параграфе эта оценка Хуа Ло-кена обобщается для коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрические сумм с простыми числами, то есть при $k = 2,\ 3$ для сумм вида

$$\mathbb{S}_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<p\le x} e(\alpha p^3).$$

Теорема 2.1. *Пусть x и y — натуральные числа, $\sqrt{x} < y \le 0,01x$, тогда имеет место оценка*

$$\int\limits_0^1 |\mathbb{S}_2(\alpha; x, y)|^4 \, d\alpha \ll y^{2+\varepsilon}.$$

Доказательство. **1.** Имеем

$$|\mathbb{S}_2(\alpha; x, y)|^2 = \sum_{x-y<p\le x} \sum_{x-y<p_1\le x} e(\alpha(p_1^2 - p^2)) =$$
$$= \sum_{x-y<p\le x} \sum_{p<p_1\le x} e(\alpha(p_1^2 - p^2)) + \sum_{x-y<p\le x} \sum_{x-y<p_1<p} e(\alpha(p_1^2 - p^2)) + \pi(x) - \pi(x-y) =$$
$$= \sum_{x-y<p\le x} \sum_{p<p_1\le x} e(\alpha(p_1^2 - p^2)) + \sum_{x-y<p_1\le x} \sum_{p_1<p\le x} e(\alpha(p_1^2 - p^2)) + \pi(x) - \pi(x-y) =$$
$$= 2 \sum_{x-y<p\le x} \sum_{p<p_1\le x} \cos(2\pi\alpha(p_1^2 - p^2)) + \pi(x) - \pi(x-y) =$$
$$= 2 \sum_{x-y<p\le x} \sum_{0<p_1-p\le x-p} \cos(2\pi\alpha(p_1^2 - p^2)) + \pi(x) - \pi(x-y).$$

Переменную суммирования p_1, обозначая как $p_1 = p + h_1$, имея в виду, что

$$p_1^2 - p^2 = (p_1 - p)(p_1 + p) = h_1(2p + h_1),$$

и обозначая через $\mathcal{P}$ множество всех простых чисел, найдём

$$|\mathbb{S}_2(\alpha;x,y)|^2 = 2\sum_{x-y<p\le x}\sum_{\substack{0<h_1\le x-p\\ h_1+p\in\mathcal{P}}}\cos(2\pi\alpha h_1(2p+h_1)) + \pi(x)-\pi(x-y) =$$

$$= 2\sum_{0<h_1<y}\sum_{\substack{x-y<p\le x\\ p\le x-h_1\\ h_1+p\in\mathcal{P}}}\cos(2\pi\alpha h_1(2p+h_1)) + \pi(x)-\pi(x-y) =$$

$$= 2\sum_{0<h_1<y}\sum_{\substack{x-y<p\le x-h_1\\ h_1+p\in\mathcal{P}}}\cos(2\pi\alpha h_1(2p+h_1)) + \pi(x)-\pi(x-y).$$

Обозначая интервал изменения переменной p в последней сумме через $\mathcal{P}_1$, имея в виду, что

$$\mathcal{P}_1=\mathcal{P}_1(h_1)=(x-y,x-h_1)\cap(\mathcal{P}-h_1),$$

где $\mathcal{P}-h_1$ множество всех сдвинутых простых чисел вида p_1-h_1 (то есть $\mathcal{P}_1$ множество простых чисел p из интервала $(x-y,x-h_1)$, причем $p+h_1$ также является простым), имеем

$$|\mathbb{S}_2(\alpha,x,y)|^2 =2\sum_{0<h_1<y}\sum_{p\in\mathcal{P}_1}\cos(2\pi\alpha h_1(2p+h_1)) + \pi(x)-\pi(x-y). \tag{2.1}$$

Обозначая через $r(h)$ число решений диофантова уравнения

$$h=h_1(h_1+2p),$$

относительно h_1 и p, или число решений диофантова уравнения $h=p_1^2-p^2$, относительно p_1 и p, $x-y<p<p_1\le x$, то есть

$$r(h)=\sum_{\substack{h=h_1(h_1+2p)\\ 0<h_1<y,\ p\in\mathcal{P}_1}}1=\sum_{\substack{h=p_1^2-p^2\\ x-y<p<p_1\le x}}1$$

представим правую часть формулы (2.1) в виде

$$|\mathbb{S}_2(\alpha;x,y)|^2=2\sum_h r(h)cos(2\pi\alpha h)+\pi(x)-\pi(x-y), \tag{2.2}$$

Так как $h>0$, то с учётом следующего неравенства

$$h=h_1(h_1+2p)\le h_1(h_1+2x-2h_1)=h_1(2x-h_1)\le(y-1)(2x-1)=2xy-2x-y+1,$$

имеем

$$r(h)\le\sum_{h=h_1h_2}1=\tau(h)\ll x^{0.4\varepsilon}\ll y^{0.8\varepsilon}. \qquad (2.3)$$

Из условий

$$p\in\mathcal{P}_1=(x-y,x-h_1)\cap(\mathcal{P}-h_1),\qquad 1\le h_1<y$$

следует неравенство

$$h_1(2p+h_1)\ge 2x-2y-1=2x-y\ge 2x-0.01x=1.99x>0.$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}|\mathbb{S}_2(\alpha;x,y)|^2&=2\sum_{x-y<p\le x}\sum_{p<p_1\le x}\cos(2\pi\alpha(p_1^2-p^2))+\pi(x)-\pi(x-y)=\\&=2\sum_h s(h)\cos(2\pi\alpha h)+\pi(x)-\pi(x-y), \qquad (2.4)\\ s(h)&=\sum_{\substack{h=p_1^2-p_2^3\\ x-y<p<p_1\le x}}1,\\ 2x-y&\le h=p_1^2-p^2\le 2xy-y^2.\end{aligned}$$

Далее в (2.4), полагая $\alpha=0$, находим

$$\begin{aligned}2\sum_h s(h)&=\mathbb{S}_2^2(0;x,y)-(\pi(x)-\pi(x-y))=\\&=(\pi(x)-\pi(x-y))^2-(\pi(x)-\pi(x-y))\ll\frac{y^2}{\mathscr{L}_x^2}. \qquad (2.5)\end{aligned}$$

Умножая (2.2) и (2.4), интегрируя по α, а затем пользуясь тем, что параметры h и h_1 положительны, найдём

$$\int_0^1 |\mathbb{S}_3(\alpha;x,y)|^4 d\alpha = \int_0^1 \left(2\sum_h r(h)\cos(2\pi\alpha h) + \pi(x) - \pi(x-y)\right)$$

$$\left(2\sum_{h'} s(h')\cos(2\pi\alpha h') + \pi(x) - \pi(x-y)\right) d\alpha =$$

$$= 4\sum_h r(h)\sum_{h'} s(h')\int_0^1 \cos(2\pi\alpha h)\cos(2\pi\alpha h')d\alpha + (\pi(x)-\pi(x-y))^2 +$$

$$+ 2\left(\pi(x)-\pi(x-y)\right)\left(\sum_h r(h)\int_0^1 \cos(2\pi\alpha h)d\alpha + \sum_{h'} s(h')\int_0^1 \cos(2\pi\alpha h')d\alpha\right)$$

$$= 2\sum_h r(h)\sum_{h'} s(h')\int_0^1 \left(\cos(2\pi\alpha(h+h')) + \cos(2\pi\alpha(h-h'))\right) d\alpha +$$

$$= (\pi(x)-\pi(x-y))^2 = 2\sum_h r(h)s(h) + (\pi(x)-\pi(x-y))^2 .$$

Переходя к оценкам и воспользовавшись оценкой (2.3) и соотношением (2.5), имеем

$$\int_0^1 |\mathbb{S}_3(\alpha;x,y)|^4 d\alpha \le 2\max_h r(h)\sum_h s(h) + (\pi(x)-\pi(x-y))^2 \ll$$

$$\ll y^{0.8\varepsilon}\sum_h s(h) + (\pi(x)-\pi(x-y)) \ll y^{0.8\varepsilon}\frac{y^2}{\mathscr{L}^2} + \frac{y^2}{\mathscr{L}^2} \ll y^{2+\varepsilon}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Пусть x и y — натуральные числа, $\sqrt{x} < y \le 0,01x$, тогда имеет место оценка*

$$\int_0^1 |\mathbb{S}_3(\alpha;x,y)|^{2^k} d\alpha \ll y^{2^k-k+\varepsilon}, \qquad 1 \le k \le 3.$$

Доказательство. **1.** Имеем

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{S}_3(\alpha;x,y)|^2 &= \mathbb{S}_3(\alpha;x,y)\cdot\overline{\mathbb{S}_3(\alpha,x,y)} = \\
&= \sum_{x-y<p_1\le x} e(\alpha p_1^3) \sum_{x-y<p\le x} e(-\alpha p^3) = \\
&= \sum_{x-y<p\le x}\ \sum_{x-y<p_1\le x} e(\alpha(p_1^3-p^3)) = \\
&= \sum_{x-y<p\le x}\ \sum_{x-y<p_1\le x} e(\alpha(p_1-p)(p_1^2+p_1p+p^2)) = \\
&= \sum_{x-y<p\le x}\ \sum_{x-y-p<p_1-p\le x-p} e(\alpha(p_1-p)(p_1^2+p_1p+p^2)).
\end{aligned}
$$

Переменную суммирования p_1, обозначая как $p_1=p+h_1$, имея в виду, что

$$p_1^2+p_1p+p^2=(p+h_1)^2+(p+h_1)p+p^2=h_1^2+3ph_1+3p^2,$$

и обозначая через $\mathcal{P}$ множество всех простых чисел, найдём

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{S}_3(\alpha,x,y)|^2 &= \sum_{x-y<p\le x}\ \sum_{\substack{x-y-p<h_1\le x-p\\ h_1+p\in\mathcal{P}}} e(\alpha h_1(h_1^2+3ph_1+3p^2)) = \\
&= \sum_{-y<h_1<y}\ \sum_{\substack{x-y<p\le x\\ h_1+p\in\mathcal{P}\\ x-y-h_1<p\le x-h_1}} e(\alpha h_1(h_1^2+3ph_1+3p^2)).
\end{aligned}
$$

Обозначая интервал изменения переменной p в последней сумме через $\mathcal{P}_1$, имея в виду, что

$$\mathcal{P}_1=\mathcal{P}_1(h_1)=(x-y,x)\cap(x-y-h_1,x-h_1)\cap(\mathcal{P}-h_1),$$

где $\mathcal{P}-h_1$ множество всех сдвинутых простых чисел вида $p-h_1$, имеем

$$|\mathbb{S}_3(\alpha,x,y)|^2=\sum_{|h_1|<y}\sum_{p\in\mathcal{P}_1} e(\alpha h_1(h_1^2+3ph_1+3p^2)). \tag{2.6}$$

Обозначая через $r_1(h)$ число решений диофантова уравнения

$$h=h_1(h_1^2+3ph_1+3p^2) \tag{2.7}$$

относительно h_1 и p, то есть

$$r_1(h)=\sum_{\substack{h=h_1(h_1^2+3ph_1+3p^2)\\ |h_1|\le y,\ p\in\mathcal{P}_1}}1$$

представим правую часть формулы (2.6) в виде

$$|\mathbb{S}_3(\alpha;x,y)|^2=\sum_h r_1(h)e(\alpha h), \tag{2.8}$$

Заметим, что при $h\neq 0$, с учетом следующей неравенство

$$|h|=|h_1(h_1^2+3ph_1+3p^2)|\le y(y^2+3xy+3x^2)\le 4x^3,$$

имеем

$$r_1(h)\le\sum_{h=h_1h_2}1=\tau(h)\ll x^{0.4\varepsilon}. \tag{2.9}$$

Из условий

$$p\in\mathcal{P}_1=(x-y,x)\cap(x-y-h_1,x-h_1)\cap(\mathcal{P}-h_1),\qquad |h_1|<y$$

следует неравенство

$$h_1^2+3ph_1+3p^2\ge -3xy+3(x-y)^2=3(x^2-3xy+y^2)\ge$$
$$\ge 3(x^2-0.03x^2+x)>0,$$

то есть, множитель $h_1^2+3ph_1+3p^2$ в правой части диофантово уравнение (2.7) положителен и следовательно это уравнение при $h=0$, то есть

$$h_1(h_1^2+3ph_1+3p^2)=0,$$

имеет только решение вида $(0,p)$, $p\in\mathcal{P}_1$, поэтому

$$r_1(0)=\sum_{\substack{0=h_1(h_1^2+3ph_1+3p^2)\\ |h_1|\le y,\ p\in\mathcal{P}_1}}=\sum_{p\in\mathcal{P}_1}\le y.$$

С другой стороны

$$|\mathbb{S}_3(\alpha;x,y)|^2=\sum_{x-y<p_1,p_2\le x}e(\alpha(p_1^3-p_2^3))=\sum_h s_1(h)e(-\alpha h),\qquad(2.10)$$

$$s_1(h)=\sum_{\substack{h=p_1^3-p_2^3\\ x-y<p_1,p_2\le x}}1,$$

и так как p_1 и p_2 простые числа и положительны, то уравнения $p_1^3=p_2^3$ и $p_1=p_2$ эквивалентны, поэтому имеет место неравенство

$$s_1(0)=\sum_{\substack{p_1^3=p_2^3\\ x-y<p_1,p_2\le x}}1=\sum_{x-y<p_1\le x}1=\pi(x)-\pi(x-y)\le y.$$

Далее в (2.10), полагая $\alpha=0$, находим

$$\sum_h s_1(h)=\mathbb{S}_3^2(0;x,y)=\left(\sum_{x-y<p_1\le x}1\right)^2\le y^2.\qquad(2.11)$$

Умножая (2.8) и (2.10), интегрируя по α, а затем пользуясь значением $r_1(0)$, $s_1(0)$, оценкой (2.9) и соотношением (2.11), найдём

$$\int\limits_0^1|\mathbb{S}_3(\alpha;x,y)|^4d\alpha=\int\limits_0^1\sum_h r_1(h)e(\alpha h)\sum_{h'}s_1(h')e(-\alpha h')d\alpha=$$

$$=\sum_h r_1(h)\sum_{h'}s_1(h')\int\limits_0^1 e(\alpha(h-h'))d\alpha=\sum_h r_1(h)s_1(h)=$$

$$=r_1(0)s_1(0)+\sum_{h\ne0}r_1(h)s_1(h)\le y^2+\max_{h\ne0}r_1(h)\sum_h s_1(h)\ll$$

$$\ll y^2+x^{0.4\varepsilon}\cdot y^2\ll y^{2+0.9\varepsilon}.\qquad(2.12)$$

2. Возводя обе части равенства (2.6) в квадрат, затем применяя к сумме по h_1 неравенство Коши, имеем

$$|\mathbb{S}_3(\alpha;x,y)|^4=\left(\sum_{|h_1|<y}\sum_{p\in\mathcal{P}_1}e(\alpha h_1(h_1^2+3ph_1+3p^2))\right)^2\le$$

$$\le\sum_{|h_1|<y}1\cdot\sum_{|h_1|<y}\left|\sum_{p\in\mathcal{P}_1}e(\alpha h_1(h_1^2+3ph_1+3p^2))\right|^2=$$

$$=(2y-1)\sum_{|h_1|<y}\sum_{p\in\mathcal{P}_1}\sum_{p_1\in\mathcal{P}_1}e(3\alpha h_1(ph_1+p^2-p_1h_1-p_1^2).$$

В правой части последнего равенства переменной суммирования p_1, обозначая как $p_1=p+h_2$ и имея в виду, что

$$ph_1+p^2-p_1h_1-p_1^2=(p-p_1)(p+p_1+h)=h_2(2p+h_1+h_2),$$

получим

$$\begin{aligned}|\mathbb{S}_3(\alpha;x,y)|^4\le&(2y-1)\sum_{|h_1|<y}\sum_{p\in\mathcal{P}_1}\sum_{p+h_2\in\mathcal{P}_1}e(3\alpha h_1h_2(2p+h_1+h_2))=\\=&(2y-1)\sum_{|h_1|<y}\sum_{|h_2|<y}\sum_{\substack{p\in\mathcal{P}_1\\p+h_2\in\mathcal{P}_1}}e(3\alpha h_1h_2(2m+h_1+h_2)).\end{aligned}$$

Обозначая в последней сумме интервал изменения переменного p через

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_2=\mathcal{P}_1\cap\{p:p+h_2\in\mathcal{P}_1\}=(x-y,x)\cap(x-y-h_1,x-h_1)\cap(\mathcal{P}-h_1)\cap\\\cap(x-y-h_2,x-h_2)\cap(x-y-h_1-h_2,x-h_1-h_2)\cap(\mathcal{P}-h_1-h_2),\end{aligned}$$

найдём

$$|\mathbb{S}_3(\alpha;x,y)|^4\le(2y-1)\sum_{|h_1|<y}\sum_{|h_2|<y}\sum_{p\in\mathcal{P}_2}e(3\alpha h_1h_2(2p+h_1+h_2)).\tag{2.13}$$

Обозначая через $r_2(h)$ число решений диофантова уравнения

$$h=3h_1h_2(2p+h_1+h_2)\tag{2.14}$$

относительно h_1, h_2 и p, то есть

$$r_2(h)=\sum_{\substack{h=3h_1h_2(2p+h_1+h_2)\\|h_1|\le y,\ |h_2|\le y\ \ p\in\mathcal{P}_2}}1,$$

представим правую часть формулы (2.13) в виде

$$|\mathbb{S}_3(\alpha; x, y)|^4 \le (2y-1)\sum_h r_2(h)e(\alpha h). \tag{2.15}$$

Заметим, что при $h \ne 0$, с учётом следующего неравенства

$$h = |3h_1h_2(2p+h_1+h_2)| \le 3y^2(2x+2y) \le x^3,$$

имеем

$$r_2(h) \le \sum_{h=h_1h_2h_3} 1 = \tau_3(h) \ll x^{0.4\varepsilon}. \tag{2.16}$$

Из условий $p \in \mathcal{P}_2$, $|h_1| < y$, $|h_2| < y$ следует неравенство

$$2p + h_1 + h_2 \ge 2x - 2y - y - y = 2x - 4y \ge 2x - 0.04x = 1.96x > 0$$

то есть, множитель $2p+h_1+h_2$ в правой части диофантова уравнения (2.14) положителен и следовательно это уравнение при $h=0$, то есть

$$3h_1h_2(2p+h_1+h_2) = 0,$$

имеет только решения видов $(0, h_2, p)$ и $(h_1, 0, p)$, поэтому

$$r_2(0) = \sum_{\substack{0=3h_1h_2(2p+h_1+h_2)\\ |h_1|\le y,\ |h_2|\le y,\ p\in\mathcal{P}_2}} 1 = \sum_{|h_2|\le y,\ p\in\mathcal{P}_2} 1 + \sum_{|h_1|\le y,\ p\in\mathcal{P}_2} 1 < y^2.$$

С другой стороны имеем

$$|\mathbb{S}_3(\alpha; x, y)|^4 = \sum_{x-y<p_1,p_2,p_3,p_4\le x} e(\alpha(p_1^3+p_2^3-p_3^3-p_4^3)) = \sum_h s_2(h)e(-\alpha h), \tag{2.17}$$

где

$$s_2(h) = \sum_{\substack{h=p_1^3+p_2^3-p_3^3-p_4^3\\ x-y<p_1,p_2,p_3,p_4\le x}} 1.$$

Пользуясь соотношением (2.12), найдём

$$s_2(0) = \int\limits_0^1 |\mathbb{S}_3(\alpha; x, y)|^4 d\alpha \ll y^{2+0.9\varepsilon}.$$

В равенстве (2.17) полагая $\alpha = 0$, находим

$$\sum_h s_2(h) = \mathbb{S}_3^4(0; x, y) = \left(\sum_{x-y<p\le x} \Lambda(n) \right)^4 = (\pi(x) - \pi(x-y))^4 \le y^4. \quad (2.18)$$

Умножая почленно соотношения (2.15) и (2.17), интегрируя по α, получим

$$\int_0^1 |\mathbb{S}_3(\alpha; x, y)|^8 d\alpha \le \int_0^1 (2y+1) \sum_h r_2(h) e(\alpha h) \sum_{h'} s_2(h') e(-\alpha h') d\alpha =$$

$$= (2y+1) \sum_h r_2(h) \sum_{h'} s_2(h') \int_0^1 e(\alpha(h-h')) d\alpha = (2y+1) \sum_h r_2(h) s_2(h) =$$

$$= (2y+1) \left(r_2(0) s_2(0) + \sum_{h\ne 0} r_2(h) s_2(h) \right) \le$$

$$\le (2y+1) \left(r_2(0) s_2(0) + \max_{h\ne 0} r_2(h) \sum_{h\ne 0} s_2(h) \right).$$

Здесь, воспользовавшись значениями $r_2(0)$, $s_2(0)$, оценкой (2.16) и соотношением (2.18), находим

$$\int_0^1 |\mathbb{S}_3(\alpha; x, y)|^8 d\alpha \ll y \left(y^2 \ln^4 x \cdot y^{2+0.9\varepsilon} + x^{0.4\varepsilon} \cdot y^4 \right) \ll y^{5+\varepsilon}.$$

Теорема доказана.

2.3. Короткие кубические тригонометрические суммы с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1. \qquad 1 \le q \le \tau, \qquad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \leq P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

В этом параграфе, воспользовавшись плотностной теоремой для нулей L-функций Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы, являющиеся следствием теоремы о втором моменте L-функций Дирихле в критической прямой докажем теорему о поведении коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$S_3(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n) e(\alpha n^3),$$

в малой окрестности центра больших дуг $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ при $\tau = y^5 x^{-2} \mathscr{L}_x^{-b_1}$.

Теорема 2.3. *Пусть $x \geq x_0$, A, b — произвольные фиксированные положительные числа, $1 \leq q \leq \mathscr{L}_x^b$. Тогда при $\lambda \leq \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$ и $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}_x^{1.5A+0.25b+18}$ справедлива асимптотическая формула:*

$$S_3(\alpha; x, y) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e\left(\frac{an^3}{q}\right) \int\limits_{x-y}^{x} e(\lambda u^3) du + O\left(y \mathscr{L}_x^{-A}\right).$$

Доказательство теоремы. Имеем

$$S_3(\alpha; x, y) = \sum_{\substack{x-y<n\leq x \\ (n,q)=1}} \Lambda(n) e(\alpha n^3) + O(\mathscr{L}_x^2) =$$

$$= \sum_{\substack{x-y<n\leq x \\ (n,q)=1}} \Lambda(n) e\left(\left(\frac{a}{q} + \lambda\right) n^3\right) \sum_{\substack{h=1 \\ h\equiv n \, (\mathrm{mod}\ q)}}^{q} 1 + O(\mathscr{L}_x^2) =$$

$$= \sum_{h=1}^{q} e\left(\frac{ah^3}{q}\right) \sum_{\substack{x-y<n\leq x \\ (n,q)=1, \ h\equiv n \, (\mathrm{mod}\ q)}} \Lambda(n) e\left(\lambda n^3\right) + O(\mathscr{L}_x^2).$$

Воспользовавшись свойством ортогональности характеров, получим:

$$S_3(\alpha;x,y)=\sum_{h=1}^{q}e\left(\frac{ah^3}{q}\right)\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)e\left(\lambda n^3\right)\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\overline{\chi}(h)\chi(n)+O(\mathscr{L}_x^2)=$$
$$=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\tau(\bar{\chi},a,3)\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n^3)+O(\mathscr{L}_x^2). \qquad (2.19)$$

Применяя к последней сумме преобразование Абеля в интегральной форме, находим:

$$\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n^3)=-\int_{x-y}^{x}\left(\psi(u,\chi)-\psi(x-y,\chi)\right)de(\lambda u^3)+$$
$$+e(\lambda x^3)\left(\psi(x,\chi)-\psi(x-y,\chi)\right)=$$
$$=-\int_{x-y}^{x}\psi(u,\chi)de(\lambda u^3)+e(\lambda x^3)\psi(x,\chi)-e(\lambda(x-y)^3)\psi(x-y,\chi).$$

Применяя ко всем ψ-функциям Чебышева в последней формуле лемму 2.3 при $T_0=\left(xy^{-1}+|\lambda|x^3\right)q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_x^{A+3}$, имеем:

$$\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n^3)=-\int_{x-y}^{x}\left(E_0u-\sum_{|\gamma|\le T_0}\frac{u^\rho}{\rho}\right)de(\lambda u^3)+$$
$$+e(\lambda x^3)\left(E_0x-\sum_{|\gamma|\le T_0}\frac{x^\rho}{\rho}\right)-e(\lambda(x-y)^3)\left(E_0(x-y)-\sum_{|\gamma|\le T_0}\frac{(x-y)^\rho}{\rho}\right)$$
$$-\int_{x-y}^{x}R_1(u;T_0,\chi)d(e(\lambda u^3))+e(\lambda x^3)R_1(x;T_0,\chi)-e(\lambda(x-y)^3)R_1(x-y;T_0,\chi).$$

Применяя формулу интегрирования по частям, к первому интегралу и переходя к второму интегралу к оценкам, найдём:

$$\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n^3)=E_0\int_{x-y}^{x}e(\lambda u^3)du-\sum_{|\gamma|\le T_0}I(\rho,\lambda)+O((1+|\lambda|yx^2)|R_1(x;T_0,\chi)|),$$

$$I(\rho,\lambda)=\int_{x-y}^{x}\frac{u^{\rho-1}}{\rho}e(\lambda u^3)du=\int_{x-y}^{x}u^{\beta-1}e\left(\lambda u^3+\frac{\gamma}{2\pi}\ln u\right)du.$$

Подставляя правую часть последней формулу в (2.19), находим:

$$S_3(\alpha;x,y)=\frac{\tau(\chi_0,a,3)}{\varphi(q)}\int\limits_{x-y}^{x}e(\lambda u^3)du-W(\alpha;x,y)-E_1W_1(\alpha;x,y)+R_2(\alpha;x,y), \tag{2.20}$$

$$W(\alpha;x,y)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\tau(\bar{\chi},a,3)\sum_{\substack{|\gamma|\le T_0\\ \rho\ne\beta_1}}I(\rho,\lambda),$$

$$W_1(\alpha;x,y)=\frac{\tau(\chi_1,a,3)}{\varphi(q)}I(\beta_1,\lambda),$$

$$R_2(\alpha;x,y)\ll(1+|\lambda|yx^2)\max_{\chi \bmod q}\left|\tau(\chi,a,3)R_1(x;T_0,\chi)\right|,$$

где $E_1=1$, если по модулю q существует действительный характер χ_1 такой, что $L(s,\chi_1)$ имеет действительный нуль β_1, $\beta_1\ge 1-c/\ln q$ и $E_1=0$ в противном случае.

Оценка $|W_1(\alpha;x,y)|$**.** Воспользовавшись тривиальными оценками суммы $\tau(\chi_1,a,3)$ и интегралом $I(\beta_1,\lambda)$, найдём

$$|W_1(\alpha;x,y)|=\left|\frac{\tau(\chi_1,a,3)}{\varphi(q)}\int\limits_{x-y}^{x}\frac{u^{\beta_1-1}}{\beta_1}e(\lambda u^3)du\right|\ll yx^{\beta_1-1}.$$

Согласно лемме 2.6, имея в виду, что $q\le\mathscr{L}_x^b$, при $\varepsilon=(2b)^{-1}$ имеем:

$$x^{\beta_1-1}=\exp\left((\beta_1-1)\mathscr{L}_x)\right)\le\exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\mathscr{L}_x}{q^{\varepsilon}}\right)\le$$
$$\le\exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\mathscr{L}_x}{\mathscr{L}_x^{b\varepsilon}}\right)=\exp(-c(\varepsilon)\sqrt{\mathscr{L}_x}).$$

Следовательно

$$|W_1(\alpha;x,y)|\ll y\exp(-c(\varepsilon)\sqrt{\mathscr{L}_x})\ll y\mathscr{L}_x^{-A}. \tag{2.21}$$

Оценка $R_2(\alpha;x,y)$**.** Из условия $1\le q\le\mathscr{L}_x^b$ следует, что

$$\frac{q\left(\tau(q)\right)^{\frac{\ln 3}{\ln 2}}}{\varphi(q)}\ll\mathscr{L}_x.$$

Применяя к сумме $\tau(\chi, a, 3)$ лемму 2.8, а затем последнюю оценку найдем

$$|\tau(\chi, a, 3)| \leq 2\sqrt{q}\,(\tau(q))^{\frac{\ln 3}{\ln 2}} \ll \frac{\varphi(q)\mathscr{L}_x}{\sqrt{q}}. \tag{2.22}$$

Пользуясь явным значением параметра $T_0 = \left(xy^{-1} + |\lambda|x^3\right) q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_x^{A+3}$ и последней оценкой, находим

$$R_2(\alpha; x, y) \ll \left(x + |\lambda|yx^3\right) \frac{\varphi(q)\mathscr{L}_x^3}{\sqrt{q}\,T_0} \ll \frac{\varphi(q)}{q}\frac{(x + |\lambda|yx^3)q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_x^3}{T_0} \ll y\mathscr{L}_x^{-A}. \tag{2.23}$$

Преобразование $|W(\alpha; x, y)|$. Переходя к оценкам имеем

$$|W(\alpha; x, y)| \leq \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} |\tau(\bar{\chi}, a, 3)|\mathcal{W}(\lambda, \chi), \tag{2.24}$$

$$\mathcal{W}(\lambda, \chi) = \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} |I(\rho, \lambda)|\,,$$

где β_1 — действительный нуль, если по модулю q существует действительный характер χ_1 такой, что $L(s, \chi_1)$ имеет действительный нуль $\beta_1 \geq 1 - c/\ln q$. $|W(\alpha; x, y)|$ будем оценивать только в случае $\lambda \geq 0$. Случай $\lambda \leq 0$, сводится к случаю $\lambda \geq 0$ с помощью соотношения

$$\mathcal{W}(\lambda, \chi) = \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} \left|\overline{I(\rho, \lambda)}\right| = \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} \left|\int_{x-y}^{x} u^{\beta-1} e\left(-\lambda u^3 - \frac{1}{2\pi}\gamma \ln u\right) du\right| =$$

$$= \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} |I(\bar{\rho}, -\lambda)| = \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} |I(\rho, -\lambda)| = \mathcal{W}(\chi, -\lambda),$$

Воспользовавшись леммой 2.1 при $M = x^{\beta-1}$, $f(u) = \lambda u^3 + \frac{\gamma}{2\pi}\ln u$ и $m_1 = \min f'(u)$,оценим тригонометрический интеграл $I(\rho, \lambda)$. Найдём

$$|I(\rho, \lambda)| \leq \frac{x^{\beta-1}}{\min|f'(u)|} = \frac{x^{\beta}}{\min|xf'(u)|}, \quad f'(u) = 3\lambda u^2 + \frac{\gamma}{2\pi u} = \frac{\gamma + 6\pi\lambda u^3}{2\pi u}.$$

Оценивая тригонометрический интеграл $I(\rho,\lambda)$ также при помощи леммы 2.2, полагая $M=x^{\beta-1}$, $m_2=\min f''(u)$, находим

$$|I(\rho,\lambda)|\le\frac{x^{\beta-1}}{\sqrt{\min|f''(u)|}}=\frac{x^{\beta}}{\sqrt{\min|x^2f''(u)|}},\qquad f''(u)=\frac{12\pi\lambda u^3-\gamma}{2\pi u^2}.$$

Отсюда и из тривиальной оценкой

$$|I(\rho,\lambda)|\le\int\limits_{x-y}^{x}u^{\beta-1}du\le yx^{\beta-1},$$

получим

$$|I(\rho,\lambda)|\le x^{\beta}\min\left(\frac{y}{x},\frac{1}{\min|xf'(u)|},\frac{1}{\sqrt{\min|x^2f''(u)|}}\right).$$

Полученную оценку, пользуясь соотношениями

$$\begin{gathered}|xf'(u)|=|\gamma+6\pi\lambda u^3|\frac{x}{2\pi u}\ge\frac{1}{2\pi}|\gamma+6\pi\lambda u^3|,\\ |x^2f''(u)|=\frac{|12\pi\lambda u^3-\gamma|x^2}{2\pi u^2}\ge\frac{|12\pi\lambda u^3-\gamma|}{2\pi},\end{gathered}$$

представим в виде

$$|I(\rho,\lambda)|\ll x^{\beta}\min\left(\frac{y}{x},\frac{1}{\min|\gamma+6\pi\lambda u^3|},\frac{1}{\sqrt{|12\pi\lambda u^3-\gamma|}}\right). \tag{2.25}$$

Подставляя последную оценку и (2.22) в (2.24), получим

$$|W(\alpha;x,y)|\ll\frac{\mathscr{L}_x}{\sqrt{q}}\sum_{\chi\bmod q}\mathcal{W}(\lambda,\chi). \tag{2.26}$$

Далее не ограничивая общности всюду в этом параграфе будем считать, что для параметра y выполняется условие

$$x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}_x^{1,5A+0,25b+18}\le y\le x\mathscr{L}_x^{-A-0,5b+3}. \tag{2.27}$$

Все нетривиальные нули $\rho=\beta+i\gamma$ функции $L(s,\chi)$ с условием $|\gamma|\le T_0$ следующим образом разобьём на множества D_1, D_2 и D_3:

$$\begin{aligned}
D_1&=\left\{\rho:\ -T_0\le\gamma<-6\pi\lambda x^3-\frac{x}{y}\right\},\\
D_2&=\left\{\rho:\ -6\pi\lambda x^3-\frac{x}{y}\le\gamma\le-6\pi\lambda(x-y)^3+\frac{x}{y}\right\},\\
D_3&=\left\{\rho:\ -6\pi\lambda(x-y)^3+\frac{x}{y}<\gamma\le T_0\right\}.
\end{aligned}$$

Через $\mathcal{W}_j(\lambda,\chi)$, $j=1,\ 2,\ 3$ обозначая сумму модулей интеграла $I(\rho,\lambda)$ по нулям ρ, принадлежащим множеству D_j, представим сумму $\mathcal{W}(\lambda,\chi)$ в (2.24) в виде:

$$\mathcal{W}(\lambda,\chi)=\mathcal{W}_1(\lambda,\chi)+\mathcal{W}_2(\lambda,\chi)+\mathcal{W}_3(\chi,\lambda). \tag{2.28}$$

Оценка $\mathcal{W}_1(\lambda,\chi)$. Ко всем трём членам неравенства, с помощью которого определяется множества D_1, прибавляя слагаемое $6\pi\lambda u^3$, $x-y\le u\le x$, получим

$$D_1=\left\{\rho:\ -T_0+6\pi\lambda u^3\le\gamma+6\pi\lambda u^3<-6\pi\lambda x^3+6\pi\lambda u^3-\frac{x}{y}\right\},$$

Функция $6\pi\lambda u^3$ в отрезке $x-y\le u\le x$ монотонно возрастает, поэтому для правой границы множество D_1, имеем

$$-6\pi\lambda x^3+6\pi\lambda u^3-\frac{x}{y}\le-\frac{x}{y}.$$

Следовательно, если $\rho\in D_1$, то выполняются неравенство $\gamma+6\pi\lambda u^3<-\frac{x}{y}$, поэтому в отрезке $x-y\le u\le x$ для монотонной возрастающей функции $\gamma+6\pi\lambda u^3$ справедливо соотношение

$$\min|\gamma+6\pi\lambda u^3|=-\max(\gamma+6\pi\lambda u^3)=-\gamma-6\pi\lambda x^3\ge\frac{x}{y},\quad \text{если}\quad \rho\in D_1,$$

Отсюда и из второй оценки (2.34), находим

$$\mathcal{W}_1(\lambda,\chi)\ll\sum_{\rho\in D_1}\frac{x^\beta}{-\gamma-6\pi\lambda x^3}.$$

Все нетривиальные нули в множестве

$$D_1 = \left\{\rho:\ -T_0 \le \gamma < -6\pi\lambda x^3 - \frac{x}{y}\right\} = \left\{\rho:\ \frac{x}{y} \le -\gamma - 6\pi\lambda x^3 < T_0 - 6\pi\lambda x^3\right\},$$

разобьём на классы $D_{11},\ \ldots,\ D_{1r}$, $r \ll T_0 x^{-1} y$, в класс D_{1n} отнесём те нули ρ, для которых выполняется условие:

$$\frac{nx}{y} < -\gamma - 6\pi\lambda x^3 \le \frac{(n+1)x}{y}.$$

Поэтому

$$\mathcal{W}_1(\lambda,\chi) \ll \sum_{\rho\in D_1} \frac{x^\beta}{-\gamma - 6\pi\lambda x^3} = \sum_{n=1}^{r} \sum_{\rho\in D_{1n}} \frac{x^\beta}{-\gamma - 6\pi\lambda x^3} \le \frac{y}{x} \sum_{n=1}^{r} \sum_{\rho\in D_{1n}} \frac{x^\beta}{n} \le$$
$$\le \frac{y\mathscr{L}_x}{x} \max_{1\le n\le r} \sum_{\rho\in D_{1n}} x^\beta \le \frac{y\mathscr{L}_x}{x} \max_{|T|\le T_0} \sum_{T-\frac{x}{y}<\gamma\le T} x^\beta.$$

Оценка $\mathcal{W}_3(\chi,\lambda)$. Ко всем трём членам неравенства, с помощью которых определяется множество D_3, прибавляя слагаемое $6\pi\lambda u^3$, $x-y \le u \le x$, получим

$$D_3 = \left\{\rho:\ 6\pi\lambda u^3 - 6\pi\lambda(x-y)^3 + \frac{x}{y} < \gamma + 6\pi\lambda u^3 \le T_0 + 6\pi\lambda u^3\right\}.$$

Функция $6\pi\lambda u^3$ в отрезке $x-y \le u \le x$ монотонно возрастает, поэтому на левой границе множества D_3 имеет место неравенство

$$6\pi\lambda u^3 - 6\pi\lambda(x-y)^3 + \frac{x}{y} \ge \frac{x}{y}.$$

Отсюда следует, что если $\rho \in D_3$, то имеет место неравенство $\gamma + 6\pi\lambda u^3 > \frac{x}{y}$. Следовательно в отрезке $x-y \le u \le x$ для монотонной возрастающей функции $\gamma + 6\pi\lambda u^3$ справедливо соотношение

$$\min|\gamma + 6\pi\lambda u^3| = \min(\gamma + 6\pi\lambda u^3) = \gamma + 6\pi\lambda(x-y)^3 \ge \frac{x}{y}, \quad \text{если} \quad \rho \in D_3.$$

Отсюда и из второй оценки (2.34), находим

$$\mathcal{W}_3(\chi,\lambda) \ll \sum_{\rho\in D_3} \frac{x^\beta}{\gamma + 6\pi\lambda(x-y)^3}.$$

Все нетривиальные нули в множестве

$$D_3 = \left\{\rho : \ -6\pi\lambda(x-y)^3 + \frac{x}{y} < \gamma \le T_0\right\} = \\ = \left\{\rho : \ \frac{x}{y} \le \gamma + 6\pi\lambda(x-y)^3 < T_0 + 6\pi\lambda(x-y)^3\right\},$$

разобьём на классы $D_{31}, \ \ldots, \ D_{3r}$, $r \ll T_0 x^{-1} y$, в класс D_{3n} отнесём те нули ρ, для которых выполняется условие:

$$\frac{nx}{y} < \gamma + 6\pi\lambda(x-y)^3 \le \frac{(n+1)x}{y}, \qquad \text{если} \qquad 1 \le n \le r.$$

Поэтому

$$\mathcal{W}_3(\chi,\lambda) \ll \sum_{n=1}^{r} \sum_{\rho\in D_{3n}} \frac{x^\beta}{\gamma + 6\pi\lambda(x-y)^3} \le \frac{y}{x} \sum_{n=1}^{r} \sum_{\rho\in D_{3n}} \frac{x^\beta}{n} \le \\ \le \frac{y\mathscr{L}_x}{x} \max_{1\le n\le r} \sum_{\rho\in D_{3n}} x^\beta \le \frac{y\mathscr{L}_x}{x} \max_{|T|\le T_0} \sum_{T-\frac{x}{y}<\gamma\le T} x^\beta.$$

Оценка $\mathcal{W}_2(\lambda,\chi)$. Представляя множество нетривиальных нулей D_2 в виде

$$D_2 = \left\{\rho : \ T_1 - 6\pi\lambda(x^3 - (x-y)^3) + \frac{2x}{y} \le -\gamma \le T_1\right\}, \qquad T_1 = 6\pi\lambda x^3 + \frac{x}{y} \le T_0,$$

и, имея ввиду, что для длины множество D_2 при $\lambda \le \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$ выполняется неравенство

$$6\pi\lambda(x^3 - (x-y)^3) + \frac{2x}{y} \le 18\pi\lambda x^2 y + \frac{2x}{y} \le \frac{3x}{y},$$

а также воспользовавшись тривиальной оценкой тригонометрического интеграла $I(\rho,\lambda)$, получим

$$\mathcal{W}_2(\lambda,\chi) \le \sum_{\rho\in D_2} |I(\rho,\lambda)| \le \frac{y}{x} \sum_{T_1 - \frac{3x}{y} \le -\gamma \le T_1} x^\beta \ll \frac{y}{x} \max_{|T|\le T_0} \sum_{T-\frac{x}{y}\le\gamma\le T} x^\beta.$$

Подставляя найденные оценки для $\mathcal{W}_1(\lambda,\chi)$, $\mathcal{W}_3(\chi,\lambda)$ и $\mathcal{W}_3(\chi,\lambda)$ в (2.28), а затем (2.26), найдём:

$$\ll \frac{y\mathscr{L}_x^2}{\sqrt{q}\,x}\max_{|T|\le T_0}\mathcal{V}_q=\mathcal{V}_q\left(T,\frac{x}{y}\right), \tag{2.29}$$
$$\mathcal{V}_q=\mathcal{V}_q(T,U)=\sum_{\chi \bmod q}\sum_{T-U<\gamma\le T}x^{\beta}.$$

Для оценки суммы $\mathcal{V}_q=\mathcal{V}_q(T,U)$ воспользовавшись теоремой о плотности нулей в узких прямоугольниках критической полосы для нулей L-рядов Дирихле, последовательно имеем

$$\mathcal{V}_q=\sum_{\chi \bmod q}\sum_{T-U<\gamma\le T}\left(\mathscr{L}_x\int\limits_0^{\beta}x^u du+1\right)=$$
$$=\mathscr{L}_x\int\limits_0^1 x^u\sum_{\chi \bmod q}\sum_{\substack{T-U<\gamma\le T\\ \beta\ge u}}du+\sum_{\chi \bmod q}\sum_{T-U<\gamma\le T}1=$$
$$=\mathscr{L}_x\int\limits_0^1 x^u\sum_{\chi \bmod q}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-U,\chi)\right)du+\sum_{\chi \bmod q}\left(N(T,\chi)-N(T-U,\chi)\right).$$

Нетривиальные нули $\rho=\beta+i\gamma$ расположены симметрично относительно критической прямой $\sigma=0.5$. Воспользовавшись этим свойством нулей, правую часть последнего равенства представим в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_q(T,U) \le \mathscr{L}_x \int\limits_{0,5}^{1} x^u \sum_{\chi \bmod q} \left(N(u,T,\chi) - N(u,T-U,\chi)\right) du+ \\ + \left(\frac{\sqrt{x}\mathscr{L}_x}{2}+1\right) \sum_{\chi \bmod q} \left(N(T,\chi)-N(T-U,\chi)\right) \le \\ \le \mathscr{L}_x \max_{u\ge 0,5} x^u \sum_{\chi \bmod q} \left(N(u,T,\chi) - N(u,T-U,\chi)\right) + \\ + \left(\frac{\sqrt{x}\mathscr{L}_x}{2}+1\right) \sum_{\chi \bmod q} \left(N(T,\chi)-N(T-U,\chi)\right) \le \\ \le 2\mathscr{L}_x \max_{u\ge 0,5} x^u \sum_{\chi \bmod q} \left(N(u,T,\chi) - N(u,T-U,\chi)\right).\end{aligned}$$

Согласно лемме 2.4 функция $L(u+it,\chi)$ не имеет нулей в области

$$u \ge 1-\delta(q,t), \qquad \delta(q,t) = \frac{c_1}{\max\left(\ln q,\ (\ln(t+3)\ln\ln(t+3))^{\frac{3}{4}}\right)},$$

для всех характеров $\chi \mod q$, за исключением, быть может простого действительного нуля β_1 у L-функции, определенной исключительным характером χ_1. Поэтому имея в виду, что $\delta(q,T)\ge\delta(q,T_0)$, найдём

$$\mathcal{V}_q\left(T,U\right) \le 2\mathscr{L}_x \max_{0,5\le u\le 1-\delta} x^u \sum_{\chi \bmod q} \left(N(u,T,\chi) - N(u,T-U,\chi)\right). \qquad (2.30)$$

Подставляя правую часть этого неравенства при $U=\frac{x}{y}$ в (2.29), найдем

$$|W(\alpha;x,y)| \ll \frac{y\mathscr{L}_x^3}{\sqrt{q}\,x} \max_{|T|\le T_0} \max_{0,5\le u\le 1-\delta} x^u \sum_{\chi \bmod q} \left(N(u,T,\chi) - N\left(u, T-\frac{x}{y},\chi\right)\right).$$

Из определения T_0, условия $\lambda \le \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$ и (2.27) имеем

$$\begin{aligned}\frac{T}{(xy^{-1})^3} \le \frac{T_0}{(xy^{-1})^3} = \frac{\left(xy^{-1}+|\lambda|x^3\right) q^{\frac12}\mathscr{L}_x^{A+3}}{(xy^{-1})^3} = \left(\frac{y^2}{x^2}+\lambda y^3\right) q^{\frac12}\mathscr{L}_x^{A+3} \le \\ \le \left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{18\pi x}\right) q^{\frac12}\mathscr{L}_x^{A+3} \le 1.\end{aligned}$$

Таким образом, в последней сумме по $\chi \bmod q$ выполняется условие $\frac{x}{y} \ge T^{\frac{1}{3}}$, и к этой сумме можно применить теорему о плотности нулей в узких прямоугольных критической полосы Ж.Тао (лемму 2.7). Полагая в этой теореме $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$, имеем

$$
\begin{aligned}
&|W(\alpha; x, y)| \ll \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2, \\
&\mathscr{A}_1 = \frac{y\mathscr{L}_x^{12}}{\sqrt{q}\,x} \max_{0,5 \le u \le 0,75} x^u \left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{4-4u}{3-2u}}, \\
&\mathscr{A}_2 = \frac{y\mathscr{L}_x^{3}}{\sqrt{q}\,x} \max_{0,75 \le u \le 1-\delta} x^u \left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

Оценка $\mathscr{A}_1$. Имеем

$$
\mathscr{A}_1 = \frac{q^{1,5}x\mathscr{L}_x^{12}}{y} \max_{0,5 \le u \le 0,75} f_1(u), \qquad f_1(u) = x^u \left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{1}{u-1,5}} > 0,
$$

$$
f_1'(u) = f_1(u)\left(\ln x + \frac{\ln\left(\frac{y}{qx}\right)}{(u-1,5)^2}\right) = \frac{f_1(u)}{(u-1,5)^2} \ln \frac{y}{qx^{-u^2+3u-1,25}}.
$$

Воспользовавшись условиями $y \ge x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}_x^{1,5A+0,25b+18}$ и $q \le \mathscr{L}_x^b$, а также соотношением

$$
\max_{0,5 \le u \le 0,75} \left(-u^2 + 3u - 1,25\right) = \left.\left(-u^2 + 3u - 1,25\right)\right|_{u=0,75} = \frac{7}{16},
$$

находим

$$
\frac{y}{qx^{-u^2+3u-1,25}} \ge \frac{x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}_x^{1,5A+0,25b+18}}{\mathscr{L}_x^b x^{\frac{7}{16}}} \ge x^{\frac{3}{16}}\mathscr{L}_x^{1,5A+18-0,75b} > x^{\frac{1}{8}}.
$$

В свою очередь отсюда получим, что на отрезке $0,5 \le u \le 0,75$ выполняется неравенство

$$
f_1'(u) \ge \frac{f(u)}{(u-1,5)^2} \ln x^{\frac{1}{8}} > 0,
$$

то есть $f_1'(u) > 0$ и $f_1(u)$ возрастающая функция в интервале $0,5 \le u \le 0,75$. Пользуясь этим свойством, а затем соотношением $y \ge x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}_x^{1,5A+0,25b+18}$, имеем

$$\mathscr{A}_1 = \frac{xq^{1,5}\mathscr{L}_x^{12}}{y} x^{\frac{3}{4}} \left(\frac{qx}{y}\right)^{-\frac{4}{3}} = y \cdot \frac{x^{\frac{5}{12}} q^{\frac{1}{6}} \mathscr{L}_x^{12}}{y^{\frac{2}{3}}} = y \cdot \left(\frac{x^{\frac{5}{8}} q^{\frac{1}{4}} \mathscr{L}_x^{18}}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \leq$$

$$\leq y \cdot \left(\frac{x^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}_x^{0,25b+18}}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \ll y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

Оценка $\mathscr{A}_2$. Сумму $\mathscr{A}_2$, представим в виде

$$\mathscr{A}_2 = \frac{y^{3-\varepsilon}\mathscr{L}_x^3}{q^{2,5-\varepsilon}x^{3-\varepsilon}} \max_{0,75\leq u\leq 1-\delta} f_2(u), \qquad f_2(u) = x^u \left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{2}{u}} > 0, \qquad \delta = \delta(q, T_0).$$

$$f_2'(u) = f_2(u) \left(\ln x + \frac{\ln\left(\frac{y}{qx}\right)}{u^2}\right) = \frac{f_2(u)}{u^2} \ln \frac{y}{qx^{1-u^2}}.$$

Отсюда, из условий $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}_x^{1,5A+025b+18}$ и $q \leq \mathscr{L}_x^b$, а также из соотношения

$$\max_{0,75\leq u\leq 1-\delta} \left(-u^2+1\right) = \left(-u^2+1\right)\Big|_{u=0,75} = \frac{7}{16},$$

получим

$$\frac{y}{qx^{1-u^2}} \geq \frac{x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}_x^{1,5A+0,25b+18}}{\mathscr{L}_x^b x^{\frac{7}{16}}} \geq x^{\frac{3}{16}} \mathscr{L}_x^{1,5A+18-0,75b}.$$

Из полученного неравенства свою очередь получим, что на отрезке $0,75 \leq u \leq 1-\delta$ выполняется неравенство

$$f_2'(u) \geq \frac{f_2(u)}{u^2} \ln x^{\frac{3}{16}} > 0,$$

и $f_2(u)$ в интервале $0,75 \leq u \leq 1-\delta$ является возрастающей функцией. Из этого свойства, имеем

$$\mathscr{A}_2 = \frac{y^{3-\varepsilon}\mathscr{L}_x^3}{q^{2,5-\varepsilon}x^{3-\varepsilon}} x^{1-\delta} \left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{2}{1-\delta}} = y \cdot \frac{x^{\frac{2\delta}{1-\delta}-\delta+\varepsilon}\mathscr{L}_x^3}{q^{0,5+\frac{2\delta}{1-\delta}-\varepsilon} y^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}} \leq y \cdot \frac{x^{\frac{2\delta}{1-\delta}-\delta+\varepsilon}\mathscr{L}_x^3}{y^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}} =$$

$$= y\mathscr{L}_x^3 \left(\frac{x^{\frac{\delta+\delta^2+(1-\delta)\varepsilon}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}}}{y}\right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon} = y\mathscr{L}_x^3 \left(\frac{x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}_x^{1,5A+0,25b+18}}{y} x^{f(\delta,\varepsilon)} \mathscr{L}_x^{-1,5A-0,25b-18}\right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon},$$

$$f(\delta, \varepsilon) = \frac{\delta+\delta^2+(1-\delta)\varepsilon}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon} - \frac{5}{8}.$$

Из этого равенство с учётом условия $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}_x^{1,5A+0,25b+18}$, имеем

$$\mathscr{A}_2 \ll y \cdot x^{f(\delta,\varepsilon)\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta}} \mathscr{L}_x^3.$$

Выбирая $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$, а также воспользовавшись соотношением

$$f(\delta,\varepsilon)\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta} = -\frac{\delta}{8} + \frac{3}{8}\left(\varepsilon - \frac{\delta}{3} - \frac{\delta^2}{3(1-\delta)}\right) \leq -\frac{\delta}{8},$$

получим

$$\mathscr{A}_2 \ll yx^{-0,125\delta}\mathscr{L}_x^3 \ll y\mathscr{L}_x^3 \exp\left(-0,125\delta\mathscr{L}_x\right).$$

Воспользовавшись условиями $\lambda \leq \left(18\pi xy^2\right)^{-1}$ и $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}_x^{1,5A+0,25b+18}$, имеем

$$\begin{aligned} T_0 = \left(\frac{x}{y} + \lambda x^3\right) q^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}_x^{A+3} &\leq \left(\frac{x}{y} + \frac{x^2}{18\pi y^2}\right) \mathscr{L}_x^{A+0,5b+3} \leq \\ &\leq \frac{x^2}{y^2}\mathscr{L}_x^{A+0,5b+3} \leq \frac{x^2 \mathscr{L}_x^{A+0,5b+3}}{x^{\frac{5}{4}}\mathscr{L}_x^{3A+0,5b+36}} < x, \end{aligned}$$

При помощи этих неравенств, оценивая снизу параметр $\delta = \delta(q, T_0)$, имеем

$$\begin{aligned} \delta(q,T_0) &= \frac{c_1}{\max\left(\ln q,\ \left(\ln(T_0+3)\ln\ln(T_0+3)\right)^{\frac{3}{4}}\right)} \geq \\ &\geq \frac{c_1}{\max\left(b\ln\mathscr{L}_x,\ \left(\mathscr{L}_x\ln\mathscr{L}_x\right)^{\frac{3}{4}}\right)} \geq c_1\mathscr{L}_x^{-0,76}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\mathscr{A}_2 \ll y\mathscr{L}_x^3 \exp\left(-0,125c_1\mathscr{L}_x^{0,24}\right) \ll y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

Подставляя найденную оценку и оценку для суммы $\mathscr{A}_1$ в (2.31), получим

$$|W(\alpha;x,y)| \ll y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

Отсюда, из оценок (2.21) и (2.23) ввиду (2.32) получим утверждение теоремы.

2.4. Короткие кубические тригонометрические суммы с простыми числами в больших дугах за исключением малой окрестности их центров

В этом параграфе воспользовавшись плотностной теоремой для нулей L-функций Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы, как мы уже отметили в предыдущем параграфе, являющиеся следствием теоремы о втором моменте L-функций Дирихле в критической прямой, получим нетривиальную оценку коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$S_3(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)e(\alpha n^3),$$

в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ за исключением малой окрестности их центров при $\tau=y^5x^{-2}\mathscr{L}_x^{-b_1}$.

Теорема 2.4. *Пусть $x\ge x_0$, A, b_1, b — произвольные фиксированные положительные числа, $1\le q\le\mathscr{L}_x^b$, $\tau=y^5x^{-2}\mathscr{L}_x^{-b_1}$,*

$$\eta_3=\frac{2}{7+4\sqrt{3}}\approx 0.1435935394,\qquad c_3=\frac{2A+24+\left(\sqrt{3}-1\right)b_1}{4\sqrt{3}-3}.$$

Тогда при $y\ge x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}_x^{c_3}$ и $\lambda>\left(18\pi xy^2\right)^{-1}$ имеет место оценка

$$S_3(\alpha;x,y)\ll y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

Доказательство теоремы. В процессе доказательства теоремы 2.3 при выполнении следующих условий:

- $x\ge x_0$, $1\le q\le\mathscr{L}_x^b$, A, b — произвольные фиксированные положительные числа,
- $T_0=\left(xy^{-1}+|\lambda|x^k\right)q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_x^{A+3}$

была доказана формула

$$S_3(\alpha;x,y)-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{n=1\\(a,q)=1}}^{q}e\left(\frac{an^3}{q}\right)\int\limits_{x-y}^{x}e(\lambda u^k)du\ll|W(\alpha;x,y)|+y\mathscr{L}_x^{-A},\quad(2.32)$$

$$|W(\alpha;x,y)|\le\frac{\mathscr{L}_x}{\sqrt{q}}\sum_{\chi\bmod q}\mathcal{W}(\lambda,\chi),\quad \mathcal{W}(\lambda,\chi)=\sum_{\substack{|\gamma|\le T_0\\ \rho\ne\beta_1}}|I(\rho,\lambda)|\,,\tag{2.33}$$

$$|I(\rho,\lambda)|\ll x^{\beta}\min\left(\frac{y}{x},\frac{1}{\min|\gamma+6\pi\lambda u^3|},\frac{1}{\sqrt{|12\pi\lambda u^3-\gamma|}}\right).\tag{2.34}$$

Также нами было показано, что в этой формуле, не ограничивая общности можно считать $\lambda\ge0$. Случай $\lambda\le0$ с помощью соотношения

$$\mathcal{W}(\lambda,\chi)=\mathcal{W}(\chi,-\lambda)$$

сводится к случаю $\lambda\ge0$.

Вводим дополнительный параметр $H=18\pi\lambda x^2y$, удовлетворяющий при $\lambda>\left(18\pi xy^2\right)^{-1}$ условию

$$H\ge\frac{x}{y}.\tag{2.35}$$

Все нетривиальные нули $\rho=\beta+i\gamma$ функции $L(s,\chi)$ с условием $|\gamma|\le T_0$ разобьём на множества D_1, D_2 и D_3:

$$\begin{aligned}D_1&=\left\{\rho:\ -T_0\le\gamma<-6\pi\lambda x^3-H\right\},\\ D_2&=\left\{\rho:\ -6\pi\lambda x^3-H\le\gamma\le-6\pi\lambda(x-y)^3+H\right\},\\ D_3&=\left\{\rho:\ -6\pi\lambda(x-y)^3+H<\gamma\le T_0\right\}.\end{aligned}$$

Через $\mathcal{W}_j(\lambda,\chi)$, $j=1,\ 2,\ 3$ обозначим сумму модулей интеграла $I(\rho,\lambda)$ по нулям ρ, принадлежащим множеству D_j. Воспользовавшись этим обозначением, представим сумму $\mathcal{W}(\lambda,\chi)$ в виде

$$\mathcal{W}(\lambda,\chi)=\mathcal{W}_1(\lambda,\chi)+\mathcal{W}_2(\lambda,\chi)+\mathcal{W}_3(\chi,\lambda).\tag{2.36}$$

Оценка $\mathcal{W}_1(\lambda,\chi)$. Ко всем трём членам неравенства, с помощью которых определяется множество D_1, прибавляя слагаемое $6\pi\lambda u^3$, $x-y\le u\le x$, получим

$$D_1 = \left\{\rho: \ -T_0 + 6\pi\lambda u^3 \le \gamma + 6\pi\lambda u^3 < -6\pi\lambda x^3 + 6\pi\lambda u^3 - H\right\},$$

Функция $6\pi\lambda u^3$ в отрезке $x - y \le u \le x$ монотонно возрастает, поэтому для правой границы множества D_1, имеем

$$-6\pi\lambda x^3 + 6\pi\lambda u^3 - H \le -H.$$

Поэтому, если $\rho \in D_1$, то выполняются неравенство $\gamma + 6\pi\lambda u^3 < -H$. Следовательно для монотонной возрастающей функции $\gamma + 6\pi\lambda u^3$ в отрезке $x - y \le u \le x$ имеет место соотношение

$$\min|\gamma + 6\pi\lambda u^3| = -\max(\gamma + 6\pi\lambda u^3) = -\gamma - 6\pi\lambda x^3 \ge H, \quad \text{если} \quad \rho \in D_1,$$

Отсюда из второй оценки формулы (2.34), находим

$$\mathcal{W}_1(\lambda, \chi) \ll \sum_{\rho \in D_1} \frac{x^\beta}{-\gamma - 6\pi\lambda x^3}.$$

Все нетривиальные нули в множестве

$$D_1 = \left\{\rho: \ -T_0 \le \gamma < -6\pi\lambda x^3 - H\right\} = \left\{\rho: \ H \le -\gamma - 6\pi\lambda x^3 < T_0 - 6\pi\lambda x^3\right\},$$

разобьём на классы $D_{11}, \ \ldots, \ D_{1t}$, $t \ll T_0 H^{-1}$. В класс D_{1n} отнесём те нули ρ, для которых выполняется условие:

$$nH < -\gamma - 6\pi\lambda x^3 \le (n+1)H, \qquad \text{если} \quad 1 \le n \le t.$$

Следовательно получим

$$\mathcal{W}_1(\lambda, \chi) \ll \sum_{n=1}^{t} \sum_{\rho \in D_{1n}} \frac{x^\beta}{-\gamma - 6\pi\lambda x^3} \le \sum_{n=1}^{t} \sum_{\rho \in D_{1n}} \frac{x^\beta}{nH} \le \frac{\mathcal{L}_x}{H} \max_{1 \le n \le t} \sum_{\rho \in D_{1n}} x^\beta \le$$
$$\le \frac{\mathcal{L}_x}{H} \max_{|T| \le T_0} \sum_{T - H < \gamma \le T} x^\beta \ll \frac{\mathcal{L}_x}{\lambda x^2 y} \max_{|T| \le T_0} \sum_{T - \lambda x^2 y < \gamma \le T} x^\beta.$$

Оценка $\mathcal{W}_3(\lambda,\chi)$. Ко всем трём членам неравенства, определяющее множества D_3 прибавляя слагаемое $6\pi\lambda u^3$, $x-y\le u\le x$, получим

$$D_3=\left\{\rho:\ 6\pi\lambda u^3-6\pi\lambda(x-y)^3+H<\gamma+6\pi\lambda u^3\le T_0+6\pi\lambda u^3\right\}.$$

Функция $6\pi\lambda u^3$ в отрезке $x-y\le u\le x$ монотонно возрастает, поэтому для левой границы множества D_3 имеем

$$6\pi\lambda u^3-6\pi\lambda(x-y)^3+H\ge H.$$

Таким образом, если $\rho\in D_3$, то выполняются неравенство $\gamma+6\pi\lambda u^3>H$. Следовательно для монотонной возрастающей функции $\gamma+6\pi\lambda u^3$ в отрезке $x-y\le u\le x$ имеет место соотношение

$$\min|\gamma+6\pi\lambda u^3|=\min(\gamma+6\pi\lambda u^3)=\gamma+6\pi\lambda(x-y)^3\ge H,\quad \text{если}\quad \rho\in D_3.$$

Отсюда и из второй оценки (2.34), находим

$$\mathcal{W}_3(\lambda,\chi)\ll\sum_{\rho\in D_1}\frac{x^\beta}{\gamma+6\pi\lambda(x-y)^3}.$$

Все нетривиальные нули в множестве

$$\begin{aligned}D_3&=\left\{\rho:\ -6\pi\lambda(x-y)^3+H<\gamma\le T_0\right\}=\\&=\left\{\rho:\ H\le\gamma+6\pi\lambda(x-y)^3<T_0+6\pi\lambda(x-y)^3\right\},\end{aligned}$$

разобьём на классы $D_{31},\ \dots,\ D_{3t},$, $t\ll T_0H^{-1}$. В класс D_{3n} отнесём те нули ρ, для которых выполняется условие:

$$nH<\gamma+6\pi\lambda(x-y)^3\le(n+1)H,\qquad \text{если}\quad 1\le n\le t.$$

Следовательно

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_3(\lambda,\chi)\ll&\sum_{n=1}^{t}\sum_{\rho\in D_{3n}}\frac{x^\beta}{\gamma+6\pi\lambda(x-y)^3}\le\sum_{n=1}^{t}\sum_{\rho\in D_{3n}}\frac{x^\beta}{nH}\le\frac{\mathscr{L}_x}{H}\max_{1\le n\le t}\sum_{\rho\in D_{3n}}x^\beta\le\\&\le\frac{\mathscr{L}_x}{H}\max_{|T|\le T_0}\sum_{T-H<\gamma\le T}x^\beta\ll\frac{\mathscr{L}_x}{\lambda x^2y}\max_{|T|\le T_0}\sum_{T-\lambda x^2y<\gamma\le T}x^\beta.\end{aligned}$$

Оценка $\mathcal{W}_2(\lambda,\chi)$. При $x-y<u\le x$ с помощью следующих обозначений

$$T_1=6\pi\lambda x^3+H,\qquad H_1=6\pi\lambda(x^3-(x-y)^3)+2H,\qquad T_2=T_1+12\pi\lambda u^3,$$

представим множество D_2 в виде

$$\begin{aligned}D_2&=\left\{\rho:\ -6\pi\lambda x^3-H\le\gamma\le-6\pi\lambda(x-y)^3+H\right\}=\\&=\{\rho:\ T_1-H_1\le-\gamma\le T_1\}=\left\{\rho:\ T_2-H_1\le 12\pi\lambda u^3-\gamma\le T_2\right\}.\end{aligned}\tag{2.37}$$

Пользуясь очевидным неравенством $(x-y)^3\ge x^3-3x^2y$ и явным значением параметра $H=18\pi\lambda x^2y$, получим

$$\begin{aligned}T_2-H_1&=12\pi\lambda u^3+6\pi\lambda(x-y)^3-H\ge 18\pi\lambda(x-y)^3-18\pi\lambda x^2y\ge\\&\ge 18\pi\lambda x^3-72\pi\lambda x^2y=9\pi\lambda x^3+9\pi\lambda x^2(x-4y)>9\pi\lambda x^3,\end{aligned}$$

Таким образом, если ρ принадлежит множеству D_2, то пользуясь третьей оценкой формулы (2.34), имеем

$$|I(\rho,\lambda)|\ll\frac{x^\beta}{\sqrt{12\pi\lambda u^3-\gamma}}\le\frac{x^\beta}{\sqrt{T_2-H_1}}\le\frac{x^\beta}{\sqrt{9\pi\lambda x^3}}\ll\frac{x^\beta}{\sqrt{\lambda x^3}}.$$

Из этой оценки для тригонометрического интеграла и из представления множества D_2 в виде (2.37), получим

$$\mathcal{W}_2(\lambda,\chi)=\sum_{\rho\in D_2}|I(\rho,\lambda)|\ll\sum_{T_2-H_1\le 12\pi\lambda u^3-\gamma\le T_2}\frac{x^\beta}{\sqrt{\lambda x^3}}=\sum_{T_1-H_1\le-\gamma\le T_1}\frac{x^\beta}{\sqrt{\lambda x^3}}.\tag{2.38}$$

Воспользовавшись неравенством $x^3-(x-y)^3\le 3x^2y$ и явным значением параметра $H=18\pi\lambda x^2y$, оценим сверху длину множества D_2, а также его нижнюю границу T_1-H_1. Имеем:

$$\begin{aligned}H_1&=6\pi\lambda(x^3-(x-y)^3)+2H\le 54\pi\lambda x^2y,\\T_1-H_1&=6\pi\lambda(x-y)^3-18\pi\lambda x^2y=6\pi\lambda x^3\left(1+\frac{3y^2}{x^2}-\frac{y^3}{x^3}\right)\ge 6\pi\lambda x^3.\end{aligned}$$

Отсюда и из выбора параметра $T_1=6\pi\lambda x^3\left(1+\frac{3y}{x}\right)$ следует, что границы суммы по γ в (2.38), то есть параметры T_1-H_1 и T_1 являются величинами порядка λx^3. Длина этой суммы, то есть параметр H_1, является величиной порядка $\lambda x^2 y$. Далее, разбивая в сумме по γ в (2.38) интервал суммирования $T_1 - H_1 \le \gamma \le T_1$ на не более 54π интервалов вида

$$æ\lambda x^3 - \lambda x^2 y < \gamma \le æ\lambda x^3,$$

где постоянная величина æ принимает значение из интервала

$$6\pi\left(1+\frac{3y^2}{x^2}-\frac{y^3}{x^3}\right) < æ \le 6\pi\left(1+\frac{3y}{x}\right),$$

правую часть суммы в формуле (2.38) представим в виде

$$\mathcal{W}_2(\lambda,\chi) \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda x^3}} \sum_{æ\lambda x^3 - \lambda x^2 y < \gamma \le æ\lambda x^3} x^\beta.$$

В этой оценке, не ограничивая общности для удобства будем считать, что $æ = 1$, а также воспользовавшись неравенством $\lambda x^3 < T_0$, имеем

$$\mathcal{W}_2(\lambda,\chi) \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda x^3}} \max_{|T|\le T_0} \sum_{T-\lambda x^2 y < \gamma \le T} x^\beta.$$

Подставляя эту оценку и оценки $\mathcal{W}_1(\lambda,\chi)$ и $\mathcal{W}_3(\lambda,\chi)$ в (2.36), а затем воспользовавшись условием $\lambda > \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$, получим:

$$\mathcal{W}(\lambda,\chi) \ll \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda x^3}} + \frac{\mathscr{L}_x}{\lambda x^2 y}\right) \max_{|T|\le T_0} \sum_{T-\lambda x^2 y < \gamma \le T} x^\beta =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda q x^3}} \left(1 + \frac{\mathscr{L}_x}{\sqrt{\lambda x^{k-2} y}}\right) \max_{|T|\le T_0} \sum_{T-\lambda x^2 y < \gamma \le T} x^\beta \ll$$
$$\ll \frac{\mathscr{L}_x}{\sqrt{\lambda q x^3}} \max_{|T|\le T_0} \sum_{T-\lambda x^2 y < \gamma \le T} x^\beta.$$

Отсюда и из оценки (2.33), а также пользовавшись обозначениями в формуле (2.29), найдём

$$|W(\alpha;x,y)| \ll \frac{\mathscr{L}_x^2}{\sqrt{\lambda q x^3}} \max_{|T|\le T_0} \sum_{\chi \bmod q} \sum_{T-\lambda x^2 y < \gamma \le T} x^\beta = \frac{\mathscr{L}_x^2}{\sqrt{\lambda q x^3}} \max_{|T|\le T_0} \mathcal{V}_q(T, \lambda x^2 y).$$

Воспользовавшись для $\mathcal{V}_q(T,U)$ при $U=\lambda x^2y$ формулой (2.30), получим

$$|W(\alpha;x,y)|\ll\frac{\mathscr{L}_x^3}{\sqrt{\lambda qx^3}}\max_{|T|\le T_0}\max_{0{,}5\le u\le 1-\delta}x^u\sum_{\chi\bmod q}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-\lambda x^2y,\chi)\right),\tag{2.39}$$

$$\delta=\delta(q,T_0)=\frac{c_1}{\max\left(\ln q,\ (\ln(T_0+3)\ln\ln(T_0+3))^{\frac{3}{4}}\right)}.$$

Всюду ниже в этом параграфе будем считать, что для параметра y выполняется условие

$$x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}_x^{c_3}\le y\le x\mathscr{L}_x^{-A-0{,}5b-10}.\tag{2.40}$$

Из явного значения параметра T_0, условия $\lambda>\left(18\pi xy^2\right)^{-1}$ и соотношения (2.40), находим

$$\frac{T}{(\lambda x^2y)^3}\le\frac{T_0}{(\lambda x^2y)^3}=\frac{\left(xy^{-1}+|\lambda|x^3\right)q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_x^{A+3}}{(\lambda x^2y)^3}=\frac{\sqrt{q}\mathscr{L}_x^{A+3}}{\lambda^3x^5y^4}+\frac{\sqrt{q}\mathscr{L}_x^{A+3}}{\lambda^2x^3y^3}\le$$
$$\le\frac{(18\pi)^3\,y^2\mathscr{L}_x^{A+0{,}5b+3}}{x^2}+\frac{(18\pi)^2\,y\mathscr{L}_x^{A+0{,}5b+3}}{x}\ll\mathscr{L}_x^{-7}.$$

Из этого неравенства следует, что в сумме по $\chi \bmod q$ в (2.39) выполняется условие $\lambda x^2y\ge T^{\frac{1}{3}}$, то есть к ней можно применить лемму 2.7. Взяв в этой лемме

$$\varepsilon=\min\left(\frac{\eta_3}{16},\ \frac{1+\eta_3}{2}\delta\right),\tag{2.41}$$

имеем

$$|W(\alpha;x,y)|\ll\mathscr{B}_1+\mathscr{B}_2,\tag{2.42}$$
$$\mathscr{B}_1=\frac{\mathscr{L}_x^{12}}{\sqrt{\lambda qx^3}}\max_{0{,}5\le u\le 0{,}75}x^u\left(q\lambda x^2y\right)^{\frac{4-4u}{3-2u}},$$
$$\mathscr{B}_2=\frac{\mathscr{L}_x^{3}}{\sqrt{q\lambda x^3}}\max_{0{,}75\le u\le 1-\delta(q,T_0)}x^u\left(q\lambda x^2y\right)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}.$$

Оценка $\mathscr{B}_1$. Имеем

$$\mathscr{B}_1=\frac{y^{\frac12}\mathscr{L}_x^{12}}{x^{\frac12}}\max_{0{,}5\le u\le 0{,}75}\exp\left(f_1(u)\right),$$
$$f_1(u)=u\ln x+\left(\frac{1}{u-1,5}+\frac32\right)\ln\left(q\lambda x^2y\right),$$
$$f_1'(u)=\ln x-\frac{\ln\left(q\lambda x^2y\right)}{(u-1,5)^2},\qquad f_1''(u)=\frac{2\ln\left(q\lambda x^2y\right)}{(u-1,5)^3}<0.$$

Покажем, что выполняется неравенство $f_1'(0,5)>0$. Ползуясь условиями $0\le\lambda\le\frac{1}{q\tau}$, $\tau=\frac{y^5}{x^2\mathscr{L}_x^{b_1}}$ и $y\ge x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}_x^{c_3}$, находим

$$-f_1'(0,5)=\ln\left(q\lambda xy\right)\le\ln\left(\frac{xy}{\tau}\right)=\ln\left(\frac{x^3\mathscr{L}_x^{b_1}}{y^4}\right)\le\ln\left(\frac{x^3\mathscr{L}_x^{b_1}}{x^{4-\frac{4}{5+\eta_3}}\mathscr{L}_x^{4c_3}}\right)=$$
$$=\ln\left(x^{-\frac{1+\eta_3}{5+\eta_3}}\mathscr{L}_x^{b_1-4c_3}\right)=-\frac{1+\eta_3}{5+\eta_3}\mathscr{L}_x+(b_1-4c_3)\ln\mathscr{L}_x<0.$$

Случай $q\lambda x^2y<x^{\frac{9}{16}}$. Представим сумму $\mathscr{B}_1$ в следующей удобной форме

$$f_1'(u)\ge f_1'(0,75)=\ln x-\frac{16}{9}\ln(q\lambda x^2y)>\ln x-\frac{16}{9}\ln x^{\frac{9}{16}}=0,$$

то есть $f_1(u)$ возрастающая функция в интервале $0,5\le u\le 0,75$, воспользовавшись которой, а затем соотношением (2.40), имеем

$$\mathscr{B}_1=\frac{y^{\frac12}\mathscr{L}_x^{12}}{x^{\frac12}}\exp\left(f_1(0,75)\right)=\frac{y^{\frac12}\mathscr{L}_x^{12}}{x^{\frac12}}\exp\left(\frac34\ln x+\frac16\ln(q\lambda x^2y)\right)=$$
$$=\left(q\lambda x^2y\right)^{\frac16}x^{\frac14}y^{\frac12}\mathscr{L}_x^{12}<x^{\frac{11}{32}}y^{\frac12}\mathscr{L}_x^{12}=y\left(\frac{x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}_x^{c_3}}{y}\right)^{\frac12}x^{-\frac{9+5\eta_3}{32(5+\eta_3)}}\mathscr{L}_x^{12-0{,}5c_3}\ll y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

Случай $q\lambda x^2y\ge x^{\frac{9}{16}}$. Вводя обозначение

$$y=x^{1-\mu^2}\mathscr{L}_x^{c},\tag{2.43}$$

будем искать наибольшее значение параметра μ и наименьшее значение параметра c, для которого выполняется оценка

$$\mathscr{B}_1\ll y\mathscr{L}_x^{-A}.\tag{2.44}$$

Ползуясь условиями $0 \le \lambda \le \frac{1}{q\tau}$, $\tau = \frac{y^5}{x^2 \mathscr{L}_x^{b_1}}$ и $y \ge x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}} \mathscr{L}_x^{c_3}$, имеем

$$q\lambda x^2 y \le \frac{x^2 y}{\tau} = \left(\frac{x}{y}\right)^4 \mathscr{L}_x^{b_1} \le \left(x^{\frac{1}{5+\eta_3}} \mathscr{L}_x^{-c_3}\right)^4 \mathscr{L}_x^{b_1} = x^{1-\frac{1+\eta_3}{5+\eta_3}} \mathscr{L}_x^{b_1-4c_3}.$$

Поэтому

$$f_1'(0,5) = \ln x - \ln(q\lambda x^2 y) > 0, \qquad f_1'(0,75) = \ln x - \frac{16}{9} \ln(q\lambda x^2 y) \le 0,$$

и точка

$$u_0 = \frac{3}{2} - \left(\frac{\ln(q\lambda x^2 y)}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $f_1'(u_0) = 0$ принадлежит интервалу интегрирования. В этом интервале также выполняется условие $f''(u) < 0$, поэтому в интервале $0,5 \le u \le 0,75$ график функции $f(u)$ является выпуклым вверх, следовательно

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}_1 &= \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}_x^{12}}{x^{\frac{1}{2}}} \exp\left(f_1(u_0)\right) = \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}_x^{12}}{x^{\frac{1}{2}}} \exp\left(u_0 \ln x + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{u_0 - 1,5}\right) \ln\left(q\lambda x^2 y\right)\right) \\
&= \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}_x^{12}}{x^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\left(\frac{3}{2} - \left(\frac{\ln(q\lambda x^2 y)}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \ln x + \left(\frac{3}{2} - \left(\frac{\ln x}{\ln(q\lambda x^2 y)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \ln\left(q\lambda x^2 y\right)\right) \\
&= x y^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}_x^{12} \exp\left(\frac{3}{2} \ln\left(q\lambda x^2 y\right) - 2\left(\ln(q\lambda x^2 y) \ln x\right)^{\frac{1}{2}}\right) = x y^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}_x^{12} \exp\left(g\left(q\lambda x^2 y\right)\right),
\end{aligned} \tag{2.45}$$

здесь $g(t) = \frac{3}{2} \ln t - 2\left(\ln t \ln x\right)^{\frac{1}{2}}$. Из условий

$$q\lambda x^2 y \ge x^{\frac{9}{16}}, \qquad \lambda \le \frac{1}{q\tau}, \qquad \tau = \frac{y^5}{x^2 \mathscr{L}_x^{b_1}},$$

и формулы (2.43) следует, что

$$x^{\frac{9}{16}} \le q\lambda x^2 y \le \frac{x^2 y}{\tau} = \frac{x^4 \mathscr{L}_x^{b_1}}{y^4} = x^u \mathscr{L}_x^v, \qquad u = 4\mu^2, \quad v = b_1 - 4c. \tag{2.46}$$

Поэтому с учётом соотношения $t = q\lambda x^2 y \ge x^{\frac{9}{16}}$, имеем

$$g'(t) = \frac{3}{2t} - \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{t(\ln t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{9 \ln t - 4 \ln x}{2t(\ln t)^{\frac{1}{2}}(3(\ln t)^{\frac{1}{2}} + 2(\ln x)^{\frac{1}{2}})} > 0,$$

то есть $g(t)$ в интервале своего изменения является возрастающей функцией, поэтому

$$g\left(q\lambda x^2 y\right) \le g\left(x^u \mathscr{L}_x^v\right).$$

Из этого неравенства и из соотношения

$$y^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}+\frac{u}{8}} \mathscr{L}_x^{-\frac{b_1-v}{8}},$$

правую часть (2.45) оценим следующим образом

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_1 &\le xy^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}_x^{12} \exp\left(g\left(x^u \mathscr{L}_x^v\right)\right) = yx^{\frac{1}{2}+\frac{u}{8}} \mathscr{L}_x^{12-\frac{b_1-v}{8}} \exp\left(g\left(x^u \mathscr{L}_x^v\right)\right) = \\ &= yx^{\frac{1}{2}+\frac{u}{8}} \mathscr{L}_x^{12-\frac{b_1-v}{8}} \exp\left(\frac{3}{2}\ln\left(x^u \mathscr{L}_x^v\right) - 2\left(\ln\left(x^u \mathscr{L}_x^v\right)\mathscr{L}_x\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \\ &= y\mathscr{L}_x^{12-\frac{b_1}{8}+\frac{13v}{8}} \cdot x^{\frac{1}{2}+\frac{13u}{8}} \exp\left(-2\left(u\mathscr{L}_x^2 + v\mathscr{L}_x \ln \mathscr{L}_x\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \\ &= y\mathscr{L}_x^{12-\frac{b_1}{8}+\frac{13v}{8}} x^{\frac{13u}{8}+\frac{1}{2}} \exp\left(-2\sqrt{u}\mathscr{L}_x\left(1+\frac{v\ln\mathscr{L}_x}{u\mathscr{L}_x}\right)^{\frac{1}{2}}\right).\end{aligned} \tag{2.47}$$

Пользуясь при $|t| \le 0,1$ формулой

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{t}{2} + R_1(t), \qquad R_1(t,\theta) = -\frac{(1-\theta)t^2}{8(1+\theta t)^{\frac{3}{2}}},$$

которая является следствием разложения функции $f(t) = (1+t)^{\frac{1}{2}}$ в ряд Маклорена с остаточным членом в форме Коши вида

$$f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} t^n + R_m(t,\theta),$$

$$R_m(t,\theta) = \frac{f^{(m+1)}(\theta t)}{(m+1)!}(1-\theta)^m t^{m+1}, \qquad 0 < \theta < 1,$$

$$f'(t) = \frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \qquad f''(t) = -\frac{1}{4}(1+t)^{-\frac{3}{2}},$$

при $m = 1$. В этой формуле, рассматривая остаточный член $R_1(t,\theta)$ как функцию от θ, имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_1(t,\theta)}{\partial\theta} &= \frac{t^2(1+\theta t)^{\frac{3}{2}} + (1-\theta)t^2 \cdot \frac{3}{2}(1+\theta t)^{\frac{1}{2}} t}{8(1+\theta t)^3} = \\ &= \frac{t^2(1+\theta t) + (1-\theta)t^2 \cdot \frac{3}{2}t}{8(1+\theta t)^{\frac{5}{2}}} = \frac{((3-\theta)t+2)t^2}{16(1+\theta t)^{\frac{5}{2}}} > 0.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\min R_1(t,\theta)=R_1(t,0)=-\frac{t^2}{8},\qquad (1+t)^{\frac12}=1+\frac{t}{2}+R_1(t)\ge 1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}.$$

Следовательно

$$-2\sqrt{u}\mathscr{L}_x\left(1+\frac{v\ln\mathscr{L}_x}{u\mathscr{L}_x}\right)^{\frac12}\le -2\sqrt{u}\mathscr{L}_x\left(1+\frac{v\ln\mathscr{L}_x}{2u\mathscr{L}_x}-\frac{v^2\ln^2\mathscr{L}_x}{8u^2\mathscr{L}_x^2}\right)=$$
$$=\ln x^{-2\sqrt{u}}+\ln\mathscr{L}_x^{-\frac{v}{\sqrt{u}}}+\frac{v^2\ln^2\mathscr{L}_x}{4u^{\frac32}\mathscr{L}_x}\le \ln x^{-2\sqrt{u}}+\ln\mathscr{L}_x^{-\frac{v}{\sqrt{u}}}+1.$$

Подставляя найденную оценку в правую часть (2.47), находим

$$\mathscr{B}_1\ll y\mathscr{L}_x^{12-\frac{b_1}{8}+\frac{13v}{8}}x^{\frac{13u}{8}+\frac12}\cdot x^{-2\sqrt{u}}\mathscr{L}_x^{-\frac{v}{\sqrt{u}}}=yx^{\frac{13}{8}u-2\sqrt{u}+\frac12}\mathscr{L}_x^{12-\frac{b_1}{8}+\left(\frac{13}{8}-\frac{1}{\sqrt{u}}\right)v}. \quad (2.48)$$

Пользуясь соотношениями в формуле (2.46), показатели x и $\mathscr{L}_x$ в правой части последнего неравенства выражаем через параметры μ и c, обозначив их соответственно через æ(μ) и $\omega(\mu,c)$, имеем

$$æ(\mu)=\frac{13}{2}\mu^2-4\mu+\frac12=\frac12\left(13\mu^2-8\mu+1\right),$$
$$\omega(\mu,c)=12-\frac{b_1}{8}+\left(\frac{13}{8}-\frac{1}{2\mu}\right)(b_1-4c)=$$
$$=12+\left(\frac32-\frac{1}{2\mu}\right)b_1-\left(\frac{13}{2}-\frac{2}{\mu}\right)c.$$

Величина æ $=$ æ(μ) является квадратичным многочленом относительно μ, имеющим два положительных корня. Большим корнем является

$$\mu_3=\frac{4+\sqrt3}{13}=\frac{1}{4-\sqrt3},$$

квадрат которого равен

$$\mu_3^2=\frac{1}{19-8\sqrt3}=\frac{1}{5+\eta_3},\qquad \eta_3=\frac{2}{7+4\sqrt3}. \quad (2.49)$$

Поэтому наибольшее значение параметра μ, при котором $æ = æ(\mu)$ — показатель x в оценке (2.48) равен нулю, является корень μ_3. При этом $\omega(\mu, c)$ — показатель $\mathscr{L}_x$ при $\mu = \mu_3$ определяется следующим образом

$$\omega(\mu_3, c) = 12 + \left(\frac{3}{2} - \frac{4-\sqrt{3}}{2}\right) b_1 - \left(\frac{13}{2} - 2(4-\sqrt{3})\right) c = \\ = 12 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) b_1 - \left(2\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) c,$$

и при $c = c_3$, где

$$c_3 = \frac{A + 12 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) b_1}{2\sqrt{3} - \frac{3}{2}} = \frac{2A + 24 + \left(\sqrt{3} - 1\right) b_1}{4\sqrt{3} - 3},$$

имеет место равенство $\omega(\mu_k, c_3) = -A$, то есть оценка (2.48) превращается в оценку (2.44). Таким образом, из представлений параметра y в виде (2.43) и параметра μ_k^2 в виде (2.49) следует, что оценка (2.44) имеет место при

$$y \geq x^{1 - \frac{1}{5+\eta_3}} \mathscr{L}_x^{c_3}, \qquad \eta_3 = \frac{2}{7 + 4\sqrt{3}}.$$

Оценка $\mathscr{B}_2$. Сумму $\mathscr{B}_2$ представим в виде

$$\mathscr{B}_2 = \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}_x^3}{x^{\frac{1}{2}}} \left(q\lambda x^2 y\right)^{-\frac{1}{2}} \max_{0{,}75 \leq u \leq 1-\delta} f_2(u), \\ f_2(u) = x^u \left(q\lambda x^2 y\right)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}, \qquad \delta = \delta(q, T_0),$$

где функция $f_2(u)$ и её производная второго порядка $f''(u)$ положительны:

$$f_2'(u) = f_2(u) \left(\ln x - \frac{2}{u^2} \ln\left(q\lambda x^2 y\right)\right), \\ f_2''(u) = f_2(u) \left(\left(\ln x - \frac{2}{u^2} \ln\left(q\lambda x^2 y\right)\right)^2 + \frac{4}{u^3} \ln\left(q\lambda x^2 y\right)\right) \geq \\ \geq \frac{4 f_2(u)}{u^3} \ln\left(q\lambda x^2 y\right) \geq \frac{4 f_2(u)}{u^3} \ln\left(\frac{qx}{18\pi y}\right) > 0.$$

Следовательно график функции $f_2(u)$ является выпуклым вниз, поэтому

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_2 \leq & \frac{y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_x^2}{x^{\frac{1}{2}}}\left(q\lambda x^2 y\right)^{-\frac{1}{2}}\left(f_2(0,75)+f_2(1-\delta)\right) = \\ & = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\left(x^{\frac{3}{4}}\left(q\lambda x^2 y\right)^{\frac{1}{6}+\varepsilon} + x^{1-\delta}\left(q\lambda x^2 y\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}\right)\mathscr{L}_x^2.\end{aligned}$$

Пользуясь условием рассматриваемого случая

$$\frac{1}{18\pi x y^2} < \lambda \leq \frac{1}{q\tau} = \frac{x^2\mathscr{L}_x^{b_1}}{q y^5},$$

найдем

$$\begin{aligned}&\mathscr{B}_2 \ll \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\left(x^{\frac{3}{4}}\left(\frac{x^4\mathscr{L}_x^{b_1}}{y^4}\right)^{\frac{1}{6}+\varepsilon} + x^{1-\delta}\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}\right)\mathscr{L}_x^2 = \\ &= y\left(\left(\frac{x^{4+\frac{3}{2(1+6\varepsilon)}}\mathscr{L}_x^{b_1}}{y^{4+\frac{3}{1+6\varepsilon}}}\right)^{\frac{1}{6}+\varepsilon} + \left(\frac{x^{\frac{\delta+\delta^2+(1-\delta)\varepsilon}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}}}{y}\right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}\right)\mathscr{L}_x^2 = \\ &= y\left(\left(\frac{x^{1-\frac{3}{14+48\varepsilon}}\mathscr{L}_x^{\frac{b_1+6\varepsilon}{7+24\varepsilon}}}{y}\right)^{\frac{7}{6}+4\varepsilon} + \left(\frac{x^{\frac{\delta+\delta^2+(1-\delta)\varepsilon}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}}}{y}\right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}\right)\mathscr{L}_x^2 = \\ &= y\left(\left(\frac{x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}_x^{c_3}}{y}x^{g(\varepsilon)}\mathscr{L}_x^{h(\varepsilon)}\right)^{\frac{7}{6}+4\varepsilon} + \left(\frac{x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}_x^{c_3}}{y}x^{f(\delta,\varepsilon)}\mathscr{L}_x^{-c_3}\right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}\right)\mathscr{L}_x^2,\end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned}&g(\varepsilon) = \frac{1}{5+\eta_3} - \frac{3}{14+48\varepsilon} = -\frac{1+3\eta_3-48\varepsilon}{2(5+\eta_3)(7+24\varepsilon)}, \\ &h(\varepsilon) = \frac{b_1+6\varepsilon}{7+24\varepsilon} - c_3, \\ &f(\delta,\varepsilon) = \frac{\delta+\delta^2+(1-\delta)\varepsilon}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon} - \left(1-\frac{1}{5+\eta_3}\right) = \frac{\delta(1-\delta)}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon} + \frac{1}{5+\eta_3}.\end{aligned}$$

$$h(\varepsilon)\left(\frac{7}{6}+12\varepsilon\right)=\left(\frac{b_1+6\varepsilon}{7+24\varepsilon}-c_3\right)\frac{7+24\varepsilon}{6}=$$
$$=\frac{b_1+6\varepsilon-(7+24\varepsilon)c_3}{6}=\frac{b_1-7c_3+(6-24c_3)\varepsilon}{6}$$

Из правой части оценки для $\mathscr{B}_2$ с учётом $y\geq x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}_x^{c_3}$ и $c_3>0$, получим

$$\mathscr{B}_2\ll y\left(\left(x^{g(\varepsilon)}\mathscr{L}_x^{h(\varepsilon)}\right)^{\frac{7+24\varepsilon}{6}}+x^{f(\delta,\varepsilon)\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta}}\right)\mathscr{L}_x^2. \tag{2.50}$$

Далее, пользуясь значением параметра ε, то есть формулой (2.51), условием $\eta_3>0$, имеем

$$\varepsilon=\min\left(\frac{\eta_3}{16},\ \frac{1+\eta_3}{2}\delta\right), \tag{2.51}$$

$$g(\varepsilon)\frac{7+24\varepsilon}{6}=-\frac{1+3\eta_3-48\varepsilon}{2(5+\eta_3)(7+24\varepsilon)}\cdot\frac{7+24\varepsilon}{6}=-\frac{1+3\eta_3-48\varepsilon}{12(5+\eta_3)}=$$
$$=-\frac{1}{12(5+\eta_3)}+\left(\varepsilon-\frac{\eta_3}{16}\right)\frac{4}{5+\eta_3}\leq-\frac{1}{12(5+\eta_3)},$$

$$f(\delta,\varepsilon)\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta}=\left(\frac{\delta(1-\delta)}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}+\frac{1}{5+\eta_3}\right)\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta}=$$
$$=-\delta+\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{(1-\delta)(5+\eta_k)}\leq-\delta+\frac{2\delta+\varepsilon}{\left(1-\frac{1}{6}\right)(5+\eta_k)}=-\frac{2}{5}\delta+$$
$$+\frac{6}{5}\left(-\frac{1}{2}\delta+\frac{2\delta+\varepsilon}{5+\eta_k)}\right)=-\frac{2}{5}\delta+\frac{6}{5(5+\eta_k)}\left(\varepsilon-\frac{1+\eta_k}{2}\delta\right)\leq-\frac{2}{5}\delta.$$

Воспользовавшись этими двумя неравенствами, представим оценку (2.50), в виде

$$\mathscr{B}_2\ll y\left(x^{-\frac{1}{12(5+\eta_3)}}\mathscr{L}_x^{\frac{b_1-(2k+1)c_3+(6-2(k-1)c_3)\varepsilon}{6}}+x^{-0,4\delta}\right)\mathscr{L}_x^2\ll$$
$$\ll y\mathscr{L}_x^{-A}+y\mathscr{L}_x^2\exp\left(-0,4\delta\mathscr{L}_x\right).$$

Воспользовавшись условием (2.40), получим

$$T_0=\left(xy^{-1}+\lambda x^3\right)q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_x^{A+3}\leq\left(\frac{x\sqrt{q}}{y}+\frac{x^3}{\sqrt{q}\tau}\right)\mathscr{L}_x^{A+3}\leq$$
$$\leq\left(\frac{x\sqrt{q}}{y}+\frac{x^5\mathscr{L}_x^{b_1}}{y^5}\right)\mathscr{L}_x^{A+3}\ll\frac{x^5}{y^5}\mathscr{L}_x^{A+b_1+3}\leq x^{\frac{5}{5+\eta_3}}\mathscr{L}_x^{A+b_1+3-(5)c_3}<0,1x,$$

При помощи этой оценки параметр $\delta = \delta(q, T_0)$ оценим снизу. Имеем

$$\delta(q,T_0) = \frac{c_1}{\max\left(\ln q,\ \left(\ln(T_0+3)\ln\ln(T_0+3)\right)^{\frac{3}{4}}\right)} \geq$$
$$\geq \frac{c_1}{\max\left(b\ln \mathscr{L}_x,\ \left(\mathscr{L}_x \ln \mathscr{L}_x\right)^{\frac{3}{4}}\right)} \geq c_1 \mathscr{L}_x^{-0,76}.$$

Поэтому

$$\mathscr{B}_2 \ll y\mathscr{L}_x^{-A} + y\mathscr{L}_x^2 \exp\left(-0,4c_1\mathscr{L}_x^{0,24}\right) \ll y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

Отсюда и из оценки для $\mathscr{B}_1$ с учетом формулы (2.42), имеем

$$|W(\alpha; x, y)| \ll y\mathscr{L}_x^{-A}. \tag{2.52}$$

Пользуясь оценкой (2.22), оценивая тригонометрический интеграл по величине первой производной (лемма 2.1), при условиях $\lambda > \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$ и (2.40), имеем

$$\left|\frac{\tau(\chi_0, a, 3)}{\varphi(q)} \int\limits_{x-y}^{x} e(\lambda u^3) du\right| \ll \frac{\mathscr{L}_x}{\sqrt{q}} \cdot \frac{1}{\lambda x^2} \ll \frac{y^2 \mathscr{L}_x}{\sqrt{q} x} \ll y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

Наконец, подставляя эту оценку, также оценки (2.52), (2.21) и (2.23) в (2.32), получим утверждение теоремы.

Глава 3

Асимптотическая формула в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми

3.1. Формулировка результатов

В тридцатые годы прошлого века английский математик Мейтленд Райт сформулировал и исследовал ряд аддитивных задач с почти пропорциональными слагаемыми. Остановимся на некоторых из них.

- В работах [2, 3] он показал, что если $s\geq 5$, $\mu_1,\ldots,\mu_s$ — фиксированные положительные числа, $\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_s=1$,
$$\alpha=\frac{s-4}{4(s-3)},\quad s=5,\ 6,\ 7;\qquad \alpha=\frac{s-2}{2(2s-1)},\quad s\geq 8,$$
и $0<\beta<\alpha$, тогда любое натуральное число представимо в виде
$$n=m_1^2+\ldots+m_s^2,\qquad |m_i^2-\mu_in|=O(n^{1-\beta}).$$

- В работе [4] доказал, что если $\gamma,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4$ — произвольные положительные числа, $\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4=1$, $n=2^{\xi}n'$, n' — нечётное целое число, $n'>n_0=n_0(\gamma,\mu_1,\ldots,\mu_4)$, и выполняется условие
$$|m_i^2-\mu_in|\leq\gamma\mu_in,\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4,$$
тогда число n представимо в виде
$$n=m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2; \tag{3.1}$$
если же n нечётное число, то оно представимо в виде (3.1) при условии
$$m_i=\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}(1+o(1)),\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

- А в работе ([5]) он доказал, что если $0 < \beta < 0,2$, то количество чисел n не превосходящих N, и которые при выполнении условия
$$|m_i^2 - \mu_i n| \ll n^{1-\beta}, \tag{3.2}$$
$i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, не представимы в виде (3.1), равно $O(N^{1-c})$, где c — некоторое положительное число меньше $\frac{5}{12}\left(\frac{1}{5} - \beta\right)$, то есть
$$\#\left\{n:\ n \neq m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2, \quad |m_i^2 - \mu_i n| \ll n^{1-\beta}\right\} \ll N^{1-c}.$$
В работе ([5]) он также доказал, что если $0 < \beta < 0,2$, то количество чисел n не превосходящих N, и которые не имеют форму $4^a(8l+7)$, при условии выполнении условия (3.2) не представимы в виде
$$n = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2,$$
равно $O(N^{1-c})$, где c — некоторое положительное число меньше $\frac{3}{7}\left(\frac{1}{6} - \beta\right)$, то есть
$$\#\left\{n:\ n \neq m_1^2 + m_2^2 + m_3^2, \quad |m_i^2 - \mu_i n| \ll n^{1-\beta}\right\} \ll N^{1-c}.$$

- Мейтленд Райт исследовал также проблему Варинга с почти пропорциональными слагаемыми [6, 7]. Он доказал, *пусть $\mu_1, \ldots, \mu_s$ — фиксированные положительные числа*
$$\begin{aligned}
&s \geq s_0, \quad 0 < \beta < \min\left(\frac{s-4}{4(s-3)},\ \frac{s-2}{2(s-1)}\right), \quad m_i \geq 0, \quad i = \overline{1, s},\\
&\gamma = \frac{s}{k} - 1 - (s-1)\beta, \quad \mu_1 + \ldots + \mu_s = 1,\\
&r(n) = \#\left\{(m_1, \ldots, m_s):\ m_1^k + \ldots + m_s^k = n,\ |m_i - \mu_i n| \leq A_i n^{1-\beta}\right\},
\end{aligned}$$
тогда справедлива асимптотическая формула
$$r(n) = \frac{c\left(\prod \mu_i\right)^{a-1}}{k^s \Gamma(s)} \mathfrak{S}(n) n^\gamma + O\left(n^{\gamma - d}\right),$$
где $c = c(A_1, \ldots, A_s)$ — абсолютная постоянная, $d = d(s, \beta) > 0$.

Аддитивные задачи с почти равными слагаемыми являются частным случаем аддитивных задач с почти пропорциональными слагаемыми. Если в аддитивной задаче с почти пропорциональными слагаемыми $\mu_1, \ldots, \mu_s$ равны между собой, то есть $\mu_1 = \ldots = \mu_s = \frac{1}{s}$, то она превращается в задачу с почти равными слагаемыми.

Т. Эстерман [78] доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + m^2 = N, \tag{3.3}$$

где p_1, p_2 — простые числа, m — натуральное число.

В работах [8, 9, 29] эта задача исследована с более жёсткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны, и выведена асимптотическая формула для числа решений (3.3) с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H, \quad i = 1, 2; \quad \left|m^2 - \frac{N}{3}\right| \leq H; \quad , H \geq N^{\frac{3}{4}}\mathscr{L}^3.$$

Далее в работах [10, 35] асимптотическая формула выведена для более редкой последовательности с почти равными слагаемыми то есть, когда в уравнении (3.3) квадрат натурального m заменяется на его куб при $H \geq N^{\frac{5}{6}}\mathscr{L}^{10}$. А в работах [36, 37] асимптотическая формула выведена для ещё более редкой последовательности с почти равными слагаемыми то есть, когда в уравнении (3.3) квадрат натурального m заменяется на его четвёртую степень при $H \geq N^{\frac{11}{12}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}$, (см. также [113–115]).

В работе [40] доказана асимптотическая формула для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + p_3^2 = N, \quad \left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H, \quad i = 1, 2; \quad \left|p_3^2 - \frac{N}{3}\right| \leq H; \quad , H \geq N^{\frac{27}{32}+\varepsilon}$$

где p_1, p_2 и p_3 — простые числа.

Основным результатом третей главы является теорема 3.1 об асимптотической формуле для последовательности с почти пропорциональными слагаемыми, когда в уравнении (3.3) квадрат натурального m заменяется на куб простого числа. Теорема 3.1 доказывается круговым методом Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М. Виноградова, используя результаты предыдущих глав, а именно

- теорему 2.3 об асимптотической формуле для коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами $S_3(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг;
- теорему 2.4 о нетривиальной оценке коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами $S_3(\alpha; x, y)$ в больших дугах за исключением малой окрестности их центров.

Теорема 3.1. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, μ_1, μ_2, μ_3 — положительные фиксированные числа, удовлетворяющие условию*

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \qquad \eta = \frac{2}{7 + 4\sqrt{3}}, \qquad c = \frac{10476 - 4816\sqrt{3}}{39},$$

$I(N, H)$ — число решений относительно простых чисел p_1, p_2 и p_3 диофантова уравнения

$$p_1 + p_2 + p_3^3 = N, \quad |p_i - \mu_i N| \le H, \quad i = 1, 2, \quad |p_3^3 - \mu_3 N| \le H.$$

Тогда при $H = N^{1 - \frac{1}{15 + 3\eta}} \mathscr{L}_{\mu_3}^{c}$, справедлива асимптотическая формула

$$I(N, H) = \frac{\mathfrak{S}(N) H^2}{9(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}_{\mu_3}^{3}} + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}_{\mu_3}^{4}}\right), \quad \mathfrak{S}(N) = \prod_p \left(1 + \frac{\Phi(p, N)}{(p-1)^3}\right),$$

где $\Phi(p, N) = 1 - p$, если $(p, N) = p$, и $\Phi(p, N) = 1 - p + p\rho(N, p)$, если $(p, N) = 1$, $\rho(N, p)$ — число решений сравнения $k^3 \equiv N \pmod{p}$.

3.2. Вспомогательные утверждения

Лемма 3.1. *Пусть $x \ge x_0$, A и b — произвольные фиксированные положительные числа, $1 \le q \le \mathscr{L}_x^b$,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1.$$

Тогда при $|\lambda| \leq x\left(2\pi y^2\right)^{-1}$ *и* $y \geq x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}_x^{1{,}5A+0{,}25b+18}$ *справедливо равенство*

$$S_1(\alpha; x, y) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin\pi\lambda y}{\pi\lambda}e\left(\lambda\left(x-\frac{y}{2}\right)\right) + O\left(y\mathscr{L}_x^{-A}\right).$$

Доказательство см.[116].

Лемма 3.2. *Пусть* p *— простое число,* $(a, p) = 1$*, тогда имеет место оценка*

$$|S(a, p)| \ll \sqrt{p}.$$

Доказательство см.[117].

Лемма 3.3. *Пусть* $y \geq x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$*, тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\pi(x) - \pi(x-y) = \frac{y}{\ln x} + O\left(\frac{y}{\ln^2 x}\right).$$

Доказательство см. [118].

Лемма 3.4. *Пусть* $q = q_1q_2$*,* $(q_1, q_2) = 1$*,* $(a, q_1q_2) = 1$*, тогда существуют единственные числа* a_1 *и* a_2*, такие что*

$$a = a_1q_2 + a_2q_1, \quad (a_1, q_1) = 1, \quad 1 \leq a_1 \leq q_1, \quad (a_2, q_2) = 1, \quad 1 \leq a_2 \leq q_2,$$

для которых выполняется соотношение

$$S(a, q) = S(a_1, q_1)S(a_2, q_2).$$

Доказательство. Ввиду того что в сумме $S(a, q)$ любой вычет x по модулю $q = q_1q_2$ можно представить единственным способом в виде

$$x \equiv x_1q_2 + x_2q_1 \pmod{q_1q_2}, \qquad 1 \leq x_1 \leq q_1, \quad 1 \leq x_2 \leq q_2,$$

имеем

$$\begin{aligned}S(a,q) =&S(a_1q_2+a_2q_1,q_1q_2) =\\&=\sum_{x_1=1}^{q_1}\sum_{x_2=1}^{q_2} e\left(\frac{(a_1q_2+a_2q_1)(x_1q_2+x_2q_1)^4}{q_1q_2}\right) =\\&=\sum_{x_1=1}^{q_1} e\left(\frac{a_1(x_1q_2)^4}{q_1}\right)\sum_{x_2=1}^{q_2} e\left(\frac{a_2(x_2q_1)^4}{q_2}\right) =\\&=\sum_{x_1=1}^{q_1} e\left(\frac{a_1x_1^4}{q_1}\right)\sum_{x_2=1}^{q_2} e\left(\frac{a_2x_2^4}{q_2}\right) = S(a_1,q_1)S(a_2,q_2).\end{aligned}$$

Лемма 3.5. *Пусть q — число свободное от квадратов, $(a,q)=1$, тогда имеет место оценка*

$$|S(a,q)| \ll \sqrt{q}.$$

Доказательство. Пусть $q=p_1p_2\dots p_k$ — каноническое разложение числа q на простые сомножители. Согласно лемме 3.4 существуют единственные числа $a_1,a_2\dots,a_k$, такие что

$$a=a_1q_1+a_2q_2+\dots+a_kq_k,\ q_i=qp_i^{-1},\ (a_i,p_i)=1,\ 1\le a_i\le p_i,\ i=1,2,\dots,k,$$

для которых выполняется соотношение

$$S(a,q)=S(a_1,p_1)S(a_2,p_2)\dots S(a_k,p_k).$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой А.Вейла (лемма 3.2), получим утверждение леммы.

Лемма 3.6. *Пусть $n\ge 3$ – целое число и $f(t)=a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\dots+a_1t$ – многочлен с целыми коэффициентами, $(a_n,\dots,a_1,q)=1$, q – натуральное число. Тогда имеем*

$$|S(q,f(t))| = \left|\sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{f(k)}{q}\right)\right| \le c(n)q^{1-\frac{1}{n}},$$

где

$$c(n)=\begin{cases}\exp(4n), & \text{при } n\geq 10;\\ \exp(n(A(n)), & \text{при } 3\leq n\leq 9.\end{cases}$$

$$A(3)=6,1,\quad A(4)=5,5,\quad A(5)=5,\quad A(6)=4,7,$$

$$A(7)=4,4,\quad A(8)=4.2,\quad A(9)=4,05.$$

Доказательство см. [106].

Лемма 3.7. *Пусть* $B\geq 2$ *— абсолютная постоянная,* $\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}$, $(a,q)=1$, *тогда при* $\mathscr{L}_x^{32(B+20)}\leq q\leq y^5x^{-2}\mathscr{L}_x^{-32(B+20)}$ *и* $y\geq x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}_x^{8B+151}$, *справедлива оценка*

$$S_3(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\leq x}\Lambda(n)e(\alpha n^3)\ll\frac{y}{\mathscr{L}_x^B}.$$

Доказательство см. [100].

Лемма 3.8. *Пусть* $\mathscr{L}_{\mu_3}=\ln(\mu_3N)^{\frac{1}{3}}$, μ_3 *— фиксированное действительное число,* $0<\mu_3<1$, N *— достаточно большое натуральное число,* $N^{\frac{1}{2}}\leq N\leq N^{1-\frac{1}{30}}$,

$$\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)=\sum_{|p^3-\mu_3N|\leq H}e(\alpha p^3),\qquad S_3(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\leq x}\Lambda(n)e(\alpha n^3).$$

Тогда имеет место соотношение

$$\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)=\frac{S_3(\alpha;N_1+H_1,2H_1)}{\mathscr{L}_{\mu_3}}+O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}}\right),\tag{3.4}$$

$$N_1=(\mu_3N)^{\frac{1}{3}},\qquad H_1=\frac{H}{3(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}}..$$

Доказательство Воспользовавшись формулой $(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{u}{3}+O(u^2)$, где $|u| < 0,5$, имеем

$$(\mu_3 N \pm H)^{\frac{1}{3}} = (\mu_3 N)^{\frac{1}{3}} \left(1 \pm \frac{H}{\mu_3 N}\right)^{\frac{1}{3}} = (\mu_3 N)^{\frac{1}{3}} \left(1 \pm \frac{H}{3\mu_3 N} + O\left(\frac{H^2}{N^2}\right)\right) =$$
$$= (\mu_3 N)^{\frac{1}{3}} \pm \frac{H}{3(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}} + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}}\right). \tag{3.5}$$

Представляя неравенство $|p^3 - \mu_3 N| \leq H$ в виде $(\mu_3 N - H)^{\frac{1}{3}} \leq p \leq (\mu_3 N + H)^{\frac{1}{3}}$, и пользуясь формулой (3.5), отрезок суммирования $|p^3 - \mu_3 N| \leq H$ в сумме $\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)$ заменим на интервал вида $x - y < p \leq x$. Имеем

$$\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H) = \sum_{N_1 - H_1 < p \leq N_1 + H_1} e(\alpha p^3) + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}}\right), \tag{3.6}$$
$$N_1 = (\mu_3 N)^{\frac{1}{3}}, \qquad H_1 = \frac{H}{3(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}}.$$

Представляя интервал суммирования $N_1 - H_1 < p \leq N_1 + H_1$ в сумме $\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)$ в виде

$$(\mu_3 N)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{H}{3\mu_3 N}\right) < p \leq (\mu_3 N)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{H}{3\mu_3 N}\right),$$

затем логарифмируя, и воспользовавшись формулой

$$\ln(\mu_3 N \pm H)^{\frac{1}{3}} = \ln(\mu_3 N)^{\frac{1}{3}} + \ln\left(1 \pm \frac{H}{3\mu_3 N}\right) = \mathscr{L}_{\mu_3} + O\left(\frac{H}{N}\right),$$

получим, что при $N_1 - H_1 < p \leq N_1 + H_1$, выполняется соотношение

$$\ln p = \mathscr{L}_{\mu_3} + O\left(\frac{H}{N}\right).$$

При помощи этой формулы, воспользовавшись представлением (3.6) сумму $\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)$ выражаем через сумму вида $S_3(\alpha; x, y)$. Имеем

$$\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H) = \sum_{N_1 - H_1 < p \leq N_1 + H_1} \left(\frac{\ln p}{\mathscr{L}_{\mu_3}} + O\left(\frac{H}{N\mathscr{L}_{\mu_3}}\right)\right) e(\alpha p^3) + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}}\right) =$$
$$= \frac{S_3(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1)}{\mathscr{L}_{\mu_3}} - R_3 + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}}\right). \tag{3.7}$$

Оценивая сумму R_3 тривиально – числом слагаемых, и воспользовавшись формулой $(1 \pm u)^{\mu} = 1 \pm \mu u + O(u^2)$, $|u| < 0,5$, имеем

$$R_3 = \mathscr{L}_{\mu_3}^{-1} \sum_{\substack{N_1 - H_1 < p^k \le N_1 + H_1 \\ k \ge 2}} \ln p \; e(\alpha p^{k1}) \ll \mathscr{L}_{\mu_3} \left((N_1 + H_1)^{\frac{1}{2}} - (N_1 - H_1)^{\frac{1}{2}} + 1 \right) =$$

$$= N_1^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}_{\mu_3} \left(\left(1 + \frac{H_1}{N_1} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{H_1}{N_1} \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \mathscr{L}_{\mu_3} \ll$$

$$\ll \frac{H_1}{N_1^{\frac{1}{2}}} \mathscr{L}_{\mu_3} + \mathscr{L}_{\mu_3} \ll \frac{H}{N^{\frac{5}{6}}} \mathscr{L}_{\mu_3} + \mathscr{L}_{\mu_3} \ll \frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}}.$$

Подставляя эту оценку в правую часть (3.7), имеем

$$\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H) = \frac{S_3(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1)}{\mathscr{L}_{\mu_3}} + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}} \right).$$

Лемма 3.9. *Пусть μ_1 и μ_2 — фиксированные действительные числа, $0 < \mu_1$, $\mu_2 < 1$, N — достаточно большое натуральное число, $N^{\frac{1}{2}} \le N \le N^{1 - \frac{1}{30}}$,*

$$\mathbb{S}_1(\alpha; \mu_i N, H) = \sum_{|p - \mu_i N| \le H} e(\alpha p), \qquad S_1(\alpha; x, y) = \sum_{x - y < n \le x} \Lambda(n) e(\alpha n).$$

Тогда имеет место соотношение

$$\mathbb{S}_1(\alpha; \mu_i N, H) = \frac{S_1(\alpha; \mu_i N + H, 2H)}{\ln(\mu_i N)} + O\left(\frac{H^2}{N \ln(\mu_i N)} \right).$$

Доказательство Отрезок суммирования $|p - \mu_i N| \le H$ в сумме $\mathbb{S}_1(\alpha; \mu_i N, H)$ заменим на интервал вида $x - y < p \le x$. Имеем

$$\mathbb{S}_i(\alpha; \mu_i N, H) = \sum_{\mu_i N - H < p \le \mu_i N + H} e(\alpha p) + O(1).$$

Логарифмируя неравенство $\mu_i N - H < p \le \mu_i N + H$, и воспользовавшись формулой

$$\ln(\mu_i N \pm H) = \ln(\mu_i N) + \ln\left(1 \pm \frac{H}{\mu_i N} \right) = \ln(\mu_i N) + O\left(\frac{H}{N} \right).$$

, получим, что при $\mu_i N - H < p \le \mu_i N + H$, выполняется соотношение

$$\ln p = \ln(\mu_i N) + O\left(\frac{H}{N}\right).$$

При помощи этой формулы сумму $\mathbb{S}_1(\alpha; \mu_i N, H)$ выражаем через сумму вида $S_1(\alpha; x, y)$. Имеем

$$\mathbb{S}_1(\alpha; \mu_i N, H) = \sum_{\mu_i N - H < p \le \mu_i N + H} \left(\frac{\ln p}{\ln(\mu_i N)} + O\left(\frac{H}{N\ln(\mu_i N)}\right)\right) e(\alpha p) + O(1) =$$
$$= \frac{S_1(\alpha; \mu_i N + H, 2H)}{\ln(\mu_i N)} - R_1 + O\left(\frac{H^2}{N\ln(\mu_i N)}\right). \tag{3.8}$$

Оценивая тривиально число слагаемых, в сумме R_1 и воспользовавшись формулой $(1 \pm u)^\mu = 1 \pm \mu u + O(u^2)$, $|u| < 0,5$, имеем

$$R_1 = \sum_{\substack{\mu_i N - H < p^k \le \mu_i N + H \\ k \ge 2}} \frac{\ln p}{\ln(\mu_i N)}\, e(\alpha p^{k1}) \ll$$
$$\ll \ln(\mu_i N)\left((\mu_i N + H)^{\frac{1}{2}} - (\mu_i N - H)^{\frac{1}{2}} + 1\right) =$$
$$= (\mu_i N)^{\frac{1}{2}} \ln(\mu_i N)\left(\left(1 + \frac{H}{\mu_i N}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{H}{\mu_i N}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + \ln(\mu_i N) \ll$$
$$\ll \frac{H}{(\mu_i N)^{\frac{1}{2}}} \ln(\mu_i N) + \ln(\mu_i N) \ll \frac{H^2}{N\ln(\mu_i N)}.$$

Подставляя эту оценку в правую часть (3.8), получим утверждение леммы.

3.3. Доказательство теоремы 3.1

Не ограничивая общности, будем считать, что $H = N^{1-\frac{1}{15+3\eta}} \mathscr{L}_{\mu_3}^{c}$, а также пусть $\text{æ} = \tau^{-1}$, где

$$\tau = \left(\frac{2H}{(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}}\right)^5 \left((\mu_3 N)^{\frac{1}{3}} + \frac{2H}{(3\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}}\right)^{-2} \mathscr{L}_{\mu_3}^{-736}.$$

Напомним, что N — достаточно большое натуральное число, μ_1, μ_2, μ_3 — положительные фиксированные числа удовлетворяющих условию

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1,$$

$I(N,H)$ — число решений относительно простых чисел p_1, p_2 и p_3 диофантова уравнения

$$p_1+p_2+p_3^3=N, \quad |p_i-\mu_iN|\le H, \quad i=1,2, \quad |p_3^3-\mu_3N|\le H.$$

Имеем

$$\mathfrak{I}(N,H)=\sum_{|p_1-\mu_1N|\le H}\ \sum_{|p_2-\mu_2N|\le H}\ \sum_{\substack{|p_3^3-\mu_3N|\le H\\ p_1+p_2+p_3^3=N}}1=$$

$$=\sum_{|p_1-\mu_1N|\le H}\ \sum_{|p_2-\mu_2N|\le H}\ \sum_{|p_3^3-\mu_3N|\le H}\ \int\limits_{-\text{æ}}^{1-\text{æ}} e(\alpha(p_1+p_2+p_3^3-N)d\alpha=$$

$$=\int\limits_{-\text{æ}}^{1-\text{æ}}\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_1N,H)\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_2N,H)\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)e(-\alpha N)d\alpha,$$

$$\mathbb{S}_\nu(\alpha;\mu N,H)=\sum_{|p^\nu-\mu N|\le H}e(\alpha p^\nu).$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональным числами, каждое α из промежутка $[-\text{æ},1-\text{æ}]$ представим в виде

$$\alpha=\frac{a}{q}+\lambda, \qquad (a,q)=1, \qquad 1\le q\le\tau, \qquad |\lambda|\le\frac{1}{q\tau}. \tag{3.9}$$

В этом представлении $0\le a\le q-1$, причём $a=0$ лишь при $q=1$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим те α, для которых $q\le\mathscr{L}_{\mu_3}^{704}$ в представлении (3.9), через $\mathfrak{m}$ – обозначим оставшиеся α. Множество $\mathfrak{M}$ состоит из непересекающихся отрезков. Разобьём множество $\mathfrak{M}$ на множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$:

$$\mathfrak{M}_1=\left\{\alpha:\quad \alpha\in\mathfrak{M},\quad \left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\le\frac{\mathscr{L}_{\mu_3}^3}{H}\right\},$$

$$\mathfrak{M}_2=\left\{\alpha:\quad \alpha\in\mathfrak{M},\quad \frac{\mathscr{L}_{\mu_3}^3}{H}<\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\le\frac{1}{q\tau}\right\}.$$

Обозначим через $I(\mathfrak{M}_1)$, $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ соответственно интегралы по множествам $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{m}$. Будем иметь

$$I(N,H)=I(\mathfrak{M}_1)+I(\mathfrak{M}_2)+I(\mathfrak{m}).$$

В последней формуле первый член, то есть $I(\mathfrak{M}_1)$, доставляет главный член асимптотической формулы для $I(N,H)$, а $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ входят в его остаточный член.

Вычисление интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$. По определению интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$ имеем:

$$I(\mathfrak{M}_1)=\int\limits_{\mathfrak{M}_1}\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_1N,H)\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_2N,H)\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)e(-\alpha N)d\alpha=$$

$$=\sum_{q\le\mathscr{L}_{\mu_3}^{736}}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}I(a,q),\tag{3.10}$$

$$I(a,q)=e\left(-\frac{aN}{q}\right)\int\limits_{|\lambda|\le\mathscr{L}_{\mu_3}^{3}H^{-1}}\mathbb{F}\left(\frac{a}{q}+\lambda;N,H\right)e(-\lambda N)d\lambda,\tag{3.11}$$

$$\mathbb{F}(\alpha)=\mathbb{F}(\alpha;N,H)=\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_1N,H)\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_2N,H)\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H).$$

К суммам $\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_iN,H)$, $i=1;\ 2$ применяя лемму 3.9, и имея в виду, что

$$\ln(\mu_iN)=\ln(\mu_3N)+\ln\mu_i-\ln\mu_3=3\mathscr{L}_{\mu_3}+\ln\mu_i-\ln\mu_3.\tag{3.12}$$

получим

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_iN,H)&=\frac{S_1(\alpha;\mu_iN+H,2H)}{\ln(\mu_iN)}+O\left(\frac{H^2}{N\ln(\mu_iN)}\right)=\\&=\frac{S_1(\alpha;\mu_iN+H,2H)}{\ln(\mu_iN)}+O\left(\frac{H^2}{N\mathscr{L}_{\mu_3}}\right).\end{aligned}\tag{3.13}$$

А теперь к суммам $S_1(\alpha;\mu_iN+H,2H)$, $i=1;\ 2$ в (3.13) применим лемму 3.1, полагая,

$$x=\mu_iN+H,\qquad y=2H,\qquad A=1476,\qquad b=736,$$

и имея в виду, что $1,5A+0,25b+18=2416$, проверим выполнение следующих условий этой теоремы

$$2H\ge(\mu_iN+H)^{\frac{5}{8}}\left(\ln(\mu_iN+H)\right)^{2416},\qquad \mathscr{L}_{\mu_3}^{3}H^{-1}\le(\mu_iN+H)(2\pi(2H)^2)^{-1}.$$

Воспользовавшись условием $H = N^{1-\frac{1}{15+3\eta}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{c}$, имеем

$$\frac{2H}{(\mu_iN+H)^{\frac58}\left(\ln(\mu_iN+H)\right)^{2416}} = \frac{2N^{1-\frac{1}{15+3\eta}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{c}}{(\mu_iN+H)^{\frac58}\left(\ln\left(\mu_iN+H\right)\right)^{2416}} =$$

$$= \frac{2\mu_i^{-\frac58}3^{-2416}}{\left(1+\frac{H}{\mu_iN}\right)^{\frac58}\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{H}{\mu_iN}\right)}{3\mathscr{L}_{\mu_3}}\right)^{2416}}\cdot N^{\frac38-\frac{1}{15+3\eta}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{c-2416} > 1;$$

$$\frac{(\mu_iN+H)(2\pi(2H)^2)^{-1}}{\mathscr{L}_{\mu_3}^{3}H^{-1}} = \frac{\mu_iN+H}{8\pi H\mathscr{L}_{\mu_3}^{3}} = \frac{\mu_iN+N^{1-\frac{1}{15+3\eta}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{c}}{8\pi N^{1-\frac{1}{15+3\eta}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{c+3}} =$$

$$= \frac{\mu_i}{8\pi}\cdot\left(N^{\frac{1}{15+3\eta}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{-c-3}+\mu_i^{-1}\mathscr{L}_{\mu_3}^{-3}\right) > 1,$$

то есть оба условия выполняются, поэтому согласно теореме 3.1, находим

$$S_1(\alpha;\mu_iN+H,2H) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\lambda\mu_iN\right)+O\left(\frac{H_1}{\left(\ln(N_1+H_1)\right)^{1476}}\right) =$$

$$= \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\lambda\mu_iN\right)+O\left(\frac{H}{\mathscr{L}_{\mu_3}^{1476}}\right).$$

Из этой формулы с учётом формулы (3.13), найдём

$$\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_iN,H) = \frac{S_1(\alpha;\mu_iN+H,2H)}{\ln(\mu_iN)}+O\left(\frac{H^2}{N\mathscr{L}_{\mu_3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\ln(\mu_iN)}\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e(\lambda\mu_iN)+\mathbb{R}_1, \qquad \mathbb{R}_1 \ll \frac{H}{\mathscr{L}_{\mu_3}^{1477}}.$$

Воспользовавшись этой формулой, а также соотношением (3.12), и имея виду, что

$$\left|\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e(\lambda\mu_iN)\right| \le \frac{H}{\varphi(q)}, \qquad \left|\mathbb{S}_1\left(\alpha;\mu_iN,H\right)\right| \le \frac{H}{\mathscr{L}_{\mu_3}},$$

найдём

$$\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_1N,H)\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_2N,H) = \left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda\ln(\mu_1N)}e(\lambda\mu_1N)+\mathbb{R}_1\right)\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_2N,H)$$

$$= \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda\ln(\mu_1N)}e(\lambda\mu_1N)\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda\ln(\mu_2N)}e(\lambda\mu_2N)+\mathbb{R}_1\right)+\mathbb{R}_1\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_2N,H)$$

$$= \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}\cdot\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{\pi^2\lambda^2\ln(\mu_1N)\ln(\mu_2N)}e(\lambda(\mu_1+\mu_2)N)+O\left(\frac{H\mathbb{R}_1}{\mathscr{L}_{\mu_3}}\right),$$

то есть

$$S_1(\alpha;\mu_1 N,H)\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_2 N,H)-\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}\cdot\frac{\sin^2 2\pi\lambda H e(\lambda(\mu_1+\mu_2)N)}{\pi^2\lambda^2\ln(\mu_1 N)\ln(\mu_2 N)}\ll\frac{H\mathbb{R}_1}{\mathscr{L}_{\mu_3}}. \tag{3.14}$$

При помощи формулы (3.4), тривиально оценивая сумму $\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3 N,H)$ числом слагаемых, имеем

$$\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3 N,H)=\frac{1}{\mathscr{L}_{\mu_3}}S_3(\alpha;N_1+H_1,2H_1)+O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}}\right)\ll\frac{H_1}{\mathscr{L}_{\mu_3}}+\frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}}\ll\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}}.$$

Почленно умножая полученное неравенство на неравенство (3.14), и имея в виду, что $\mathbb{F}(\alpha)=\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_1 N,H)\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_2 N,H)\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3 N,H)$, находим

$$\mathbb{F}(\alpha)-\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}\cdot\frac{\sin^2 2\pi\lambda H\ e(\lambda(\mu_1+\mu_2)N)}{\pi^2\lambda^2\ln(\mu_1 N)\ln(\mu_2 N)}\mathbb{S}_3\left(\alpha;\mu_3 N,H\right)\ll\frac{H^2\mathbb{R}_1}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^2}. \tag{3.15}$$

Применяя к сумме $\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3 N,H)$ лемму 3.8 выражаем её через сумму вида $S_3(\alpha;x,y)$. Имеем

$$\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3 N,H)=\frac{S_3(\alpha;N_1+H_1,2H_1)}{\mathscr{L}}_{\mu_3}+O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}}\right), \tag{3.16}$$

$$N_1=(\mu_3 N)^{\frac{1}{3}},\qquad H_1=\frac{H}{3(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}}.$$

К сумме $S_3\left(\alpha;N_1+H_1,2H_1\right)$ применим теорему 2.3 о поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг, полагая

$$x=N_1+H_1,\qquad y=2H_1,\qquad A=1476,\qquad b=736.$$

С учётом соотношения $1,5A+0,25b+18=2416$ проверим выполнение следующих условий этой теоремы

$$2H_1\geq(N_1+H_1)^{\frac{5}{8}}\left(\ln(N_1+H_1)\right)^{2416},\qquad\frac{\mathscr{L}_{\mu_3}^3}{H}\leq\frac{1}{18\pi(N_1+H_1)(2H_1)^2}.$$

Воспользовавшись явным выражением параметров N_1 и H_1, а также условием $H = N^{1-\frac{1}{15+3\eta}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{c}$, имеем

$$\frac{2H_1}{(N_1+H_1)^{\frac{5}{8}}\left(\ln(N_1+H_1)\right)^{2416}} = \frac{\dfrac{2H}{3(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}}\left(\ln\left((\mu_3N)^{\frac{1}{3}}+\frac{H}{3(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}}\right)\right)^{-2416}}{\left((\mu_3N)^{\frac{1}{3}}+\frac{H}{3(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{5}{8}}} =$$

$$= \frac{2H\mathscr{L}_{\mu_3}^{-2416}\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{H}{3\mu_3N}\right)^3}{\mathscr{L}_{\mu_3}}\right)^{-2416}}{3(\mu_3N)^{\frac{7}{8}}\left(1+\frac{H}{3\mu_3N}\right)^{\frac{5}{8}}} =$$

$$= \frac{2\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{H}{3\mu_3N}\right)^3}{\mathscr{L}_{\mu_3}}\right)^{-2416}}{3\mu_3^{\frac{7}{8}}\left(1+\frac{H}{3\mu_3N}\right)^{\frac{5}{8}}}\cdot N^{\frac{1}{8}-\frac{1}{15+3\eta}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{c-2416} > 1;$$

$$\frac{\left(18\pi(N_1+H_1)(2H_1)^2\right)^{-1}}{\mathscr{L}_{\mu_3}^{3}H^{-1}} = \frac{H\mathscr{L}_{\mu_3}^{-3}}{18\pi\left((\mu_3N)^{\frac{1}{3}}+\frac{H}{3(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}}\right)\left(\dfrac{2H}{3(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}}\right)^2} =$$

$$= \frac{\mu_3N\mathscr{L}_{\mu_3}^{-3}}{8\pi H\left(1+\frac{H}{3\mu_3N}\right)} = \frac{\mu_3}{8\pi\left(1+\frac{H}{3\mu_3N}\right)}\cdot N^{\frac{1}{15+3\eta}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{-c-3} > 1.$$

Таким образом оба условия выполняются, поэтому согласно теореме 2.3, находим

$$S_3(\alpha;N_1+H_1,2H_1) = \frac{S_3'(a,q)}{\varphi(q)}\int\limits_{N_1-H_1}^{N_1+H_1} e(\lambda u^3)du + O\left(\frac{H_1}{(\ln(N_1+H_1))^{1476}}\right) =$$

$$= \frac{S_3'(a,q)}{\varphi(q)}\int\limits_{N_1-H_1}^{N_1+H_1} e(\lambda u^3)du + O\left(\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{1476}}\right),$$

где

$$S_3'(a,q) = \sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{q} e\left(\frac{an^3}{q}\right).$$

Подставляя значение тригонометрической суммы $S_3(\alpha; N_1+H_1, 2H_1)$ в формулу (3.16), получим

$$\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)=\frac{1}{\mathscr{L}_{\mu_3}}S_3(\alpha;N_1+H_1,2H_1)+O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}}\right)=$$
$$=\frac{S_3'(a,q)}{\varphi(q)\mathscr{L}_{\mu_3}}\int\limits_{N_1-H_1}^{N_1+H_1}e(\lambda u^3)du+\mathbb{R}_2,\quad \mathbb{R}_2\ll\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{1477}}.$$

В интеграле по u, сделав подстановку $u=N_1+2H_1t$, а затем подставляя значение параметров N_1 и H_1, тригонометрическую сумму $\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)$ представим в виде

$$\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)=\frac{2S_3'(a,q)H_1}{\varphi(q)\mathscr{L}_{\mu_3}}\int\limits_{-0{,}5}^{0.5}e(\lambda(N_1+2H_1t)^3)du+\mathbb{R}_2=$$
$$=\frac{2S_3'(a,q)H}{3\mu_3^{\frac{2}{3}}\varphi(q)N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}}\int\limits_{-0{,}5}^{0.5}e\left(\lambda\left((\mu_3N)^{\frac{1}{3}}+\frac{2Ht}{3(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}}\right)^3\right)dt+\mathbb{R}_2. \tag{3.17}$$

Для краткости последний интеграл по t, обозначим через $\gamma(\lambda)$. Далее подставляя правую часть формулы (3.17) в (3.15), получим

$$\mathbb{F}(\alpha)-\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H\, e(\lambda(\mu_1+\mu_2)N)}{\pi^2\lambda^2\ln(\mu_1N)\ln(\mu_2N)}\left(\frac{2S_3'(a,q)H\gamma(\lambda)}{3\varphi(q)(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}}+\mathbb{R}_2\right)\ll\frac{H^2\mathbb{R}_1}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^2}.$$

Воспользовавшись оценкой (3.12), найдём

$$\left|\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{\pi^2\lambda^2\ln(\mu_1N)\ln(\mu_2N)}e(\lambda(\mu_1+\mu_2)N)\right|\mathbb{R}_2\ll\frac{H^2\mathbb{R}_2}{\mathscr{L}_{\mu_3}^2}.$$

Из этой оценки, а также из оценок $\mathbb{R}_1$ и $\mathbb{R}_2$ и предыдущее соотношение, находим

$$\mathbb{F}(\alpha)=\frac{2H\mu^2(q)S_3'(a,q)\sin^2 2\pi\lambda H\, e(\lambda(\mu_1+\mu_2)N)\gamma(\lambda)}{3(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}\ln(\mu_1N)\ln(\mu_2N)\mathscr{L}_{\mu_3}\varphi^3(q)(\pi\lambda)^2}+\mathbb{R}_3,$$
$$\mathbb{R}_3\ll\frac{H^2\mathbb{R}_1}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^2}+\frac{H^2\mathbb{R}_2}{\mathscr{L}_{\mu_3}^2}\ll\frac{H^3}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{1479}}.$$

Подставляя значение функции $\mathbb{F}(\alpha)$, то есть правую часть последней формулы в (3.11), найдём

$$
\begin{aligned}
I(a,q) &= e\left(-\frac{aN}{q}\right)\int\limits_{|\lambda|\le\mathscr{L}_{\mu_3}^3H^{-1}}\mathbb{F}\left(\frac{a}{q}+\lambda\right)e(-\lambda N)d\lambda = \\
&= e\left(-\frac{aN}{q}\right)\int\limits_{|\lambda|\le\mathscr{L}_{\mu_3}^3H^{-1}}\frac{2H\mu^2(q)S_3'(a,q)\sin^2 2\pi\lambda H\, e(\lambda(\mu_1+\mu_2-1)N)\gamma(\lambda)}{3(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}\ln(\mu_1N)\ln(\mu_2N)\mathscr{L}_{\mu_3}\cdot\varphi^3(q)\cdot(\pi\lambda)^2}d\lambda+\mathbb{R}_4 \\
&= \frac{2H\cdot\mu^2(q)S_3'(a,q)}{3(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}\ln(\mu_1N)\ln(\mu_2N)\mathscr{L}_{\mu_3}\varphi^3(q)}e\left(-\frac{aN}{q}\right)J(H)+\mathbb{R}_4, \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

где

$$
\mathbb{R}_4 \ll \mathbb{R}_3\cdot\frac{\mathscr{L}_{\mu_3}^3}{H} \ll \frac{H^3}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{1479}}\cdot\frac{\mathscr{L}_{\mu_3}^3}{H} = \frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{1476}},
$$

$$
J(H) = \int\limits_{|\lambda|\le\mathscr{L}_{\mu_3}^3H^{-1}}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2}\gamma(\lambda)e(\lambda(\mu_1+\mu_2-1)N)d\lambda.
$$

Теперь вычисляем интеграл $J(H)$. Имея в виду что $\mu_1+\mu_2-1=-\mu_3$, а затем подставляя значение интеграла $\gamma(\lambda)$ из формулы (3.17) в правую часть последней формулы, получим

$$
\begin{aligned}
J(H) &= \int\limits_{|\lambda|\le\mathscr{L}_{\mu_3}^3H^{-1}}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2}e(-\lambda\mu_3N)\gamma(\lambda)d\lambda = \\
&= \int\limits_{|\lambda|\le\mathscr{L}_{\mu_3}^3/H}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2}e(-\lambda\mu_3N)\int\limits_{-0{,}5}^{0.5}e\left(\lambda\left((\mu_3N)^{\frac{1}{3}}+\frac{2Ht}{3(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}}\right)^3\right)dtd\lambda = \\
&= \int\limits_{|\lambda|\le\mathscr{L}_{\mu_3}^3/H}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2}\int\limits_{-0{,}5}^{0{,}5}e\left(2\lambda Ht\left(1+\frac{2Ht}{3\mu_3N}+\frac{4H^2t^2}{27\mu_3^2N^2}\right)\right)dt\;d\lambda = \\
&= \frac{2H}{\pi}\int\limits_{|u|\le2\pi\mathscr{L}_{\mu_3}^3}\frac{\sin^2 u}{u^2}\int\limits_{-0{,}5}^{0{,}5}e\left(\frac{ut}{\pi}\left(1+\frac{2Ht}{3\mu_3N}+\frac{4H^2t^2}{27\mu_3^2N^2}\right)\right)dt\;du.
\end{aligned}
$$

Ввиду $|u| \le 2\pi\mathscr{L}_{\mu_3}^3$ и $|t| \le 0,5$, имеем

$$\frac{2Hut^2}{3\pi\mu_3 N} \ll \frac{H\mathscr{L}_{\mu_3}^3}{N}.$$

Пользуясь этим соотношением, получим

$$e\left(\frac{ut}{\pi}\left(\frac{2Ht}{3\mu_3 N} + \frac{4H^2t^2}{27\mu_3^2 N^2}\right)\right) = e\left(\frac{2Hut^2}{3\pi\mu_3 N}\left(1 + \frac{2Ht}{9\mu_3 N}\right)\right) = 1 + O\left(\frac{H\mathscr{L}_{\mu_3}^3}{N}\right).$$

Следовательно

$$J(H) = \frac{2H}{\pi}\int\limits_{|u|\le 2\pi\mathscr{L}_{\mu_3}^3} \frac{\sin^2 u}{u^2}\int\limits_{-0,5}^{0,5} e\left(\frac{ut}{\pi}\right)\left(1 + O\left(\frac{H\mathscr{L}_{\mu_3}^3}{N}\right)\right) du\, dt =$$

$$= \frac{2H}{\pi}\int\limits_{|u|\le 2\pi\mathscr{L}_{\mu_3}^3} \frac{\sin^2 u}{u^2}\int\limits_{-0,5}^{0,5} e\left(\frac{ut}{\pi}\right) dt\, du + O\left(\frac{H^2\mathscr{L}_{\mu_3}^6}{N}\right) =$$

$$= \frac{2H}{\pi}\int\limits_{|u|\le 2\pi\mathscr{L}_{\mu_3}^3} \frac{\sin^3 u}{u^3} du + O\left(\frac{H^2\mathscr{L}_{\mu_3}^6}{N}\right) =$$

$$= \frac{4H}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi\mathscr{L}_{\mu_3}^3} \frac{\sin^3 u}{u^3} du + O\left(\frac{H^2\mathscr{L}_{\mu_3}^6}{N}\right).$$

Заменим последний интеграл по u близким к нему несобственным интегралом, не зависящим от $\mathscr{L}_{\mu_3}$, и пользуясь соотношением

$$\int\limits_{2\pi\mathscr{L}_{\mu_3}^3}^{\infty} \frac{\sin^3 u}{u^3} du \ll \mathscr{L}_{\mu_3}^{-9},$$

получим

$$J(H) = \frac{4H}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin^3 u}{u^3} du - \int\limits_{2\pi\mathscr{L}_{\mu_3}^3}^{\infty} \frac{\sin^3 u}{u^3} du\right) + O\left(\frac{H^2\mathscr{L}_{\mu_3}^6}{N}\right) =$$

$$= \frac{4H}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin^3 u}{u^3} du + O\left(\frac{H}{\mathscr{L}_{\mu_3}^9}\right).$$

Воспользовавшись формулой (см. [119] стр. 174)

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^n mu}{u^n}du = \frac{\pi m^{m-1}}{2^n(n-1)1}\left[n^{n-1} - \frac{n}{1!}(n-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}(n-4)^{n-1} + \ldots\right].$$

при $m = 1$ и $n = 3$, найдём

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 u}{u^3}du = \frac{3\pi}{8}.$$

Следовательно

$$J(H) = \frac{3H}{2} + O\left(\frac{H}{\mathscr{L}_{\mu_3}^9}\right).$$

Подставляя значение интеграла $J(H)$ в формулу (3.18), найдём

$$I(a,q) = \frac{2H\cdot\mu^2(q)S_3'(a,q)}{3(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}\ln(\mu_1 N)\ln(\mu_2 N)\mathscr{L}_{\mu_3}\varphi^3(q)}e\left(-\frac{aN}{q}\right)\left(\frac{3H}{2} + O\left(\frac{H}{\mathscr{L}_{\mu_3}^5}\right)\right) + \mathbb{R}_4 =$$

$$= \frac{H^2\cdot\mu^2(q)S_3'(a,q)}{(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}\ln(\mu_1 N)\ln(\mu_2 N)\mathscr{L}_{\mu_3}\varphi^3(q)}e\left(-\frac{aN}{q}\right) + \mathbb{R}_5,, \qquad (3.19)$$

$$\mathbb{R}_5 \ll \frac{\mu^2(q)|S_3'(a,q)|}{\varphi^3(q)}\cdot\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^8} + \mathbb{R}_4 \ll \frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^8}\left(\frac{\mu^2(q)|S_3'(a,q)|}{\varphi^3(q)} + \frac{1}{\mathscr{L}_{\mu_3}^{1468}}\right).$$

Подставляя полученное значение интеграла $I(a,q)$, то есть правую часть равенства (3.19) в (3.10), получим

$$I(\mathfrak{M}_1) = \sum_{q\le\mathscr{L}_{\mu_3}^{736}}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q}\left(\frac{H^2\cdot\mu^2(q)S_3'(a,q)}{(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}\ln(\mu_1 N)\ln(\mu_2 N)\mathscr{L}_{\mu_3}\varphi^3(q)}e\left(-\frac{aN}{q}\right) + \mathbb{R}_5\right) =$$

$$= \frac{H^2}{(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}\ln(\mu_1 N)\ln(\mu_2 N)\mathscr{L}_{\mu_3}}\sum_{q\le\mathscr{L}_{\mu_3}^{736}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}\Phi(q,N) + \mathbb{R}_6. \qquad (3.20)$$

$$\Phi(q,N) = \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q} S'(a,q)e\left(-\frac{aN}{q}\right),$$

$$\mathbb{R}_6 \ll \frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^8}\sum_{q\le\mathscr{L}_{\mu_3}^{736}}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\left(\frac{\mu^2(q)|S_3'(a,q)|}{\varphi^3(q)} + \mathscr{L}_{\mu_3}^{-1468}\right).$$

Оценим остаточный член $\mathbb{R}_6$. Воспользовавшись тривиальной оценкой $|S_3'(a,q)|\le\varphi(q)$, имеем

$$\mathbb{R}_6 \ll \frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^8}\sum_{q\le\mathscr{L}_{\mu_3}^{736}}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\left(\frac{\mu^2(q)|S_3'(a,q)|}{\varphi^3(q)}+\mathscr{L}_{\mu_3}^{-1468}\right)=$$

$$=\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^8}\left(\sum_{q\le\mathscr{L}_{\mu_3}^{736}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi(q)}+\mathscr{L}_{\mu_3}^{-1468}\sum_{q\le\mathscr{L}_{\mu_3}^{736}}\varphi(q)\right)\ll$$

$$\ll\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^8}\left(\mathscr{L}_{\mu_3}+\mathscr{L}_{\mu_3}^{-1468}\cdot\mathscr{L}_{\mu_3}^{1472}\right)\ll\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^4}.$$

Подставляя найденную оценку для $\mathbb{R}_6$ в формулу (3.20), получим

$$I(\mathfrak{M}_1)=\frac{H^2}{(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}\ln(\mu_1N)\ln(\mu_2N)\mathscr{L}_{\mu_3}}\sum_{q\le\mathscr{L}_{\mu_3}^{736}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}\Phi(q,N)+O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^4}\right). \tag{3.21}$$

Сумму по q в (3.21) заменим близким к ней бесконечным рядом, не зависящим от степени $\mathscr{L}_{\mu_3}$, то есть

$$\sum_{q\le\mathscr{L}_{\mu_3}^{736}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}\Phi(q,N)=\mathfrak{S}(N)-R(N), \tag{3.22}$$

$$\mathfrak{S}(N)=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}\Phi(q,N),$$

$$R(N)=\sum_{q>\mathscr{L}_{\mu_3}^{736}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}\Phi(q,N).$$

Теперь представим особый ряд $\mathfrak{S}(N)$ в виде бесконечного произведения по всем простым числам, для этого сначала покажем, что сумма $\Phi(q,N)$ является мультипликативной функцией. Пусть $q=q_1q_2$, $(q_1,q_2)=1$, тогда представляя в сумме

$$\Phi(q,N)=\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q}S'(a,q)e\left(-\frac{aN}{q}\right),$$

переменную суммирования a в виде

$$a = a_1q_2 + a_2q_1, \quad (a_1, q_1) = 1, \quad 1 \le a_1 \le q_1, \quad (a_2, q_2) = 1, \quad 1 \le a_2 \le q_2,$$

найдём

$$\Phi(q_1q_2, N) = \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1,q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{a_2=1 \\ (a_2,q)=1}}^{q_2} S'(a_1q_2 + a_2q_1, q_1q_2) e\left(-\frac{(a_1q_2 + a_2q_1)N}{q_1q_2}\right). \quad (3.23)$$

Представляя в сумме $S'(a_1q_2+a_2q_1, q_1q_2)$ переменную суммирования x в виде

$$x = x_1q_2 + x_2q_1, \qquad 1 \le x_1 \le q_1, \quad 1 \le x_2 \le q_2,$$

и имея в виду, что

$$\begin{aligned}(x_1q_2 + x_2q_1, q_1q_2) &= (x_1q_2 + x_2q_1, q_1)(x_1q_2 + x_2q_1, q_2) = \\ &= (x_1q_2, q_1)(x_2q_1, q_2) = (x_1, q_1)(x_2, q_2),\end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned}S'(a_1q_2 + a_2q_1, q_1q_2) &= \sum_{\substack{x=1 \\ (x,q_1q_2)=1}}^{q_1q_2} e\left(\frac{(a_1q_2 + a_2q_1)x^3}{q_1q_2}\right) = \\ &= \sum_{\substack{x_1=1 \\ (x_1,q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{x_2=1 \\ (x_2,q_2)=1}}^{q_2} e\left(\frac{(a_1q_2 + a_2q_1)(x_1q_2 + x_2q_1)^3}{q_1q_2}\right) = \\ &= \sum_{\substack{x_1=1 \\ (x_1,q_1)=1}}^{q_1} e\left(\frac{a_1(x_1q_2)^3}{q_1}\right) \sum_{\substack{x_2=1 \\ (x_2,q_2)=1}}^{q_2} e\left(\frac{a_2(x_2q_1)^3}{q_2}\right) = \\ &= \sum_{\substack{x_1=1 \\ (x_1,q_1)=1}}^{q_1} e\left(\frac{a_1x_1^3}{q_1}\right) \sum_{\substack{x_2=1 \\ (x_2,q_2)=1}}^{q_2} e\left(\frac{a_2x_2^3}{q_2}\right) = S'(a_1, q_1)S'(a_2, q_2).\end{aligned}$$

Подставляя это равенство в правую часть (3.23), получим

$$\begin{aligned}\Phi(q_1q_2, N) = \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1,q_1)=1}}^{q_1} S'(a_1, q_1)e\left(-\frac{a_1N}{q_1}\right) \sum_{\substack{a_2=1 \\ (a_2,q)=1}}^{q_2} S'(a_2, q_2)e\left(-\frac{a_2N}{q_2}\right) = \\ = \Phi(q_1, N)\Phi(q_2, N).\end{aligned}$$

Пользуясь абсолютной сходимостью $\mathfrak{S}(N)$ и мультипликативностью $\Phi(q,N)$, найдём

$$\mathfrak{S}(N)=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}\Phi(q,N)=\prod_{p}\left(1+\frac{\Phi(p,N)}{(p-1)^3}\right).$$

Теперь вычислим $\Phi_N(p)$ в двух возможных случаях $(N,p)=1$ и $(N,p)=p$. Рассмотрим сначала первый случай

$$\Phi(p,N)=\sum_{a=1}^{p-1}S'(a,p)e\left(-\frac{aN}{p}\right)=\sum_{x=1}^{p-1}\sum_{a=1}^{p-1}e\left(\frac{a(x^3-N)}{p}\right)=$$

$$=\sum_{x=1}^{p-1}\left(\sum_{a=1}^{p}e\left(\frac{a(x^3-N)}{p}\right)-1\right)=\sum_{\substack{x=1\\ x^3\equiv N\,(\mathrm{mod}\ p)}}^{p-1}p-(p-1)=$$

$$=p\rho(N,p)-(p-1)=1-p+p\rho(N,p).$$

где $\rho(N,p)$ — число решений сравнения $x^3\equiv N(\mathrm{mod}\ p)$. При $(N,p)=p$, имеем

$$\Phi(p,N)=\sum_{a=1}^{p-1}S'(a,p)e\left(-\frac{aN}{p}\right)=\sum_{a=1}^{p-1}S'(a,p)=\sum_{a=1}^{p}S'(a,p)-S'(p,p)=$$

$$=\sum_{x=1}^{p-1}\sum_{a=1}^{p}e\left(\frac{ax^3}{p}\right)-(p-1)=-(p-1)=1-p.$$

Следовательно,

$$\Phi(p,N)=\begin{cases}1-p+p\rho(N,p), & \text{если } (N,p)=1;\\ 1-p, & \text{если } (N,p)=p.\end{cases}$$

Теперь оценим $R(N)$. Имеем

$$R(N)=\sum_{q>\mathscr{L}_{\mu_3}^{736}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}\Phi(q,N).$$

Так как $\Phi(q,N)$ — мультипликативная функция и q – бесквадратное число, то

$$\Phi(q,N)=\prod_{p\backslash q}\Phi(p,N),\qquad \Phi(p,N)=\sum_{a=1}^{p-1}S'(a,p)e\left(-\frac{aN}{p}\right).$$

Из соотношения

$$S'(a,p)=\sum_{x=1}^{p-1} e\left(\frac{ax^3}{p}\right)=\sum_{x=1}^{p} e\left(\frac{ax^3}{p}\right)-1=S(a,p)-1,$$

и из оценки $|S(a,p)|\ll p^{1/2}$ (лемма 3.2), последовательно найдём

$$|\Phi(q,N)|=\prod_{p\backslash q}|\Phi(p,N)|\le\prod_{p\backslash q}\sqrt{p}(p-1)<\prod_{p\backslash q}p\sqrt{p}=q\sqrt{q}.$$

Следовательно

$$|R(N)|\le\sum_{q>\mathscr{L}_{\mu_3}^{736}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}|\Phi(q,N)|\le\sum_{q>\mathscr{L}_{\mu_3}^{736}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}q^{\frac{3}{2}}\ll$$

$$\ll\sum_{q>\mathscr{L}_{\mu_3}^{736}}\frac{(\ln\ln q)^3}{q^{\frac{3}{2}}}\ll\int\limits_{\mathscr{L}_{\mu_3}^{736}}^{\infty}\frac{(\ln\ln u)^3}{u^{\frac{3}{2}}}du\ll\mathscr{L}_{\mu_3}^{-10}.$$

Таким образом соотношение (3.22) принимает вид

$$\sum_{q\le\mathscr{L}_{\mu_3}^{736}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}\Phi(q,N)=\mathfrak{S}(N)+O\left(\mathscr{L}_{\mu_3}^{-10}\right),$$

$$\mathfrak{S}(N)=\prod_{p}\left(1+\frac{\Phi(p,N)}{(p-1)^3}\right),$$

$$\Phi_N(p)=\begin{cases}1-p+p\rho(N,p), & \text{если } (N,p)=1;\\ 1-p, & \text{если } (N,p)=p,\end{cases}$$

где $\rho(N,p)$ — число решений сравнения $x^3\equiv N(\mathrm{mod}\ p)$.

Подставляя правую часть этого равенства в (3.21), получим

$$I(\mathfrak{M}_1)=\frac{\mathfrak{S}(N)H^2}{(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}\ln(\mu_1N)\ln(\mu_2N)\mathscr{L}_{\mu_3}}+O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^4}\right). \tag{3.24}$$

Из формулы (3.12) следует, соотношение

$$\frac{1}{\ln(\mu_iN)}=\frac{1}{3\mathscr{L}_{\mu_3}}+\left(\frac{1}{3\mathscr{L}_{\mu_3}+\ln\mu_i-\ln\mu_3}-\frac{1}{3\mathscr{L}_{\mu_3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{3\mathscr{L}_{\mu_3}}+\frac{\ln\mu_3-\ln\mu_1}{3\mathscr{L}_{\mu_3}(3\mathscr{L}_{\mu_3}+\ln\mu_i-\ln\mu_3)}=\frac{1}{3\mathscr{L}_{\mu_3}}+O\left(\frac{1}{\mathscr{L}_{\mu_3}^2}\right).$$

Воспользовавшись этим соотношением, формулу (3.24) перепишем в виде

$$I(\mathfrak{M}_1)=\frac{\mathfrak{S}(N)H^2}{9(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^3}+O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^4}\right).$$

Оценка интеграла $I(\mathfrak{M}_2)$. Имеем

$$I(\mathfrak{M}_2)=\int\limits_{\mathfrak{M}_2}\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_1N,H)\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_2N,H)\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)e(-\alpha N)d\alpha.$$

Переходя к оценкам, а затем воспользовавшись неравенством Коши для интегралов находим

$$I(\mathfrak{M}_2)\ll\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)|\int\limits_0^1|\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_1N,H)||\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_2N,H)d\alpha=$$

$$=\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)|\left(\int\limits_0^1|\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_1N,H)|^2d\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^1|\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_2N,H)|^2d\alpha\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)|\left(\sum_{|p-\mu_1N|\le H}1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{|p-\mu_2N|\le H}1\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)|\left(\pi\left(\mu_1N+H\right)-\pi\left(\mu_1N-H\right)\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\pi\left(\mu_2N+H\right)-\pi\left(\mu_2N-H\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя к двум последним множителям правой части полученной формулы с учётом соотношения

$$2H=2N^{1-\frac{1}{15+3\eta}}\mathscr{L}_{\mu_3}^c\ge(\mu_iN+H)^{\frac{7}{8}+\varepsilon},\qquad i=1;\ 2,$$

лемму 3.3, найдём

$$\pi(\mu_2N+H)-\pi(\mu_2N-H)\ll\frac{H}{\mathscr{L}_{\mu_3}},\qquad i=1;\ 2.$$

Следовательно

$$I(\mathfrak{M}_2)\ll\frac{H}{\mathscr{L}_{\mu_3}}\cdot\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)|. \tag{3.25}$$

Применяя к сумме $\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)$ лемму 3.8 выражаем ее через сумм вида $S_3(\alpha;x,y)$. Имеем

$$\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)=\frac{S_3(\alpha;N_1+H_1,2H_1)}{\mathscr{L}_{\mu_3}}+O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}}\right), \tag{3.26}$$
$$N_1=(\mu_3N)^{\frac{1}{3}},\qquad H_1=\frac{H}{3(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}}.$$

Если $\alpha\in\mathfrak{M}_2$, то

$$\alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\quad (a,q)=1,\quad \frac{\mathscr{L}_{\mu_3}^2}{H}<|\lambda|\le\frac{1}{q\tau},\quad 1\le q\le\mathscr{L}_{\mu_3}^{736}.$$

$$\tau=\left(\frac{2H}{(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}}\right)^5\left((\mu_3N)^{\frac{1}{3}}+\frac{2H}{(3\mu_3N)^{\frac{2}{3}}}\right)^{-2}\mathscr{L}_{\mu_3}^{-736}.$$

Оценим теперь сумму $S_3(\alpha;N_1+H_1,2H_1)$, для этого рассмотрим два возможных случая:

1. $\dfrac{\mathscr{L}_{\mu_3}^3}{H}<|\lambda|\le\dfrac{1}{18\pi(N_1+H_1)(2H_1)^2}$;

2. $\dfrac{1}{18\pi(N_1+H_1)(2H_1)^2}<|\lambda|\le\dfrac{1}{q\tau}$.

Случай 1. К сумме $S_3\left(\alpha;N_1+H_1,2H_1\right)$ применяем теорему 2.3 о поведении коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг, полагая

$$x=N_1+H_1,\qquad y=2H_1,\qquad A=2,\qquad b=736.$$

С учётом соотношения $1,5A+0,25b+18=205$ проверим выполнение следующих условий этой теоремы

$$2H_1\ge(N_1+H_1)^{\frac{5}{8}}\left(\ln(N_1+H_1)\right)^{205},\qquad \frac{\mathscr{L}_{\mu_3}^3}{H}\le\frac{1}{18\pi(N_1+H_1)(2H_1)^2}.$$

Воспользовавшись явным выражением параметров N_1 и H_1, а также условием $H = N^{1-\frac{1}{15+3\eta}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{c}$, имеем

$$\frac{2H_1}{(N_1+H_1)^{\frac{5}{8}}\left(\ln(N_1+H_1)\right)^{205}} = \frac{\frac{2H}{3(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}}\left(\ln\left((\mu_3 N)^{\frac{1}{3}}+\frac{H}{3(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}}\right)\right)^{-205}}{\left((\mu_3 N)^{\frac{1}{3}}+\frac{H}{3(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{5}{8}}} =$$

$$= \frac{2H\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{H}{3\mu_3 N}\right)^3}{\mathscr{L}_{\mu_3}}\right)^{-205}}{3(\mu_3 N)^{\frac{7}{8}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{205}\left(1+\frac{H}{3\mu_3 N}\right)^{\frac{5}{8}}} = \frac{2\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{H}{3\mu_3 N}\right)^3}{\mathscr{L}_{\mu_3}}\right)^{-205}}{3\mu_3^{\frac{7}{8}}\left(1+\frac{H}{3\mu_3 N}\right)^{\frac{5}{8}}}\cdot\frac{N^{\frac{1}{8}-\frac{1}{15+3\eta}}}{\mathscr{L}_{\mu_3}^{205-c}} > 1;$$

$$\frac{\left(18\pi(N_1+H_1)(2H_1)^2\right)^{-1}}{\mathscr{L}_{\mu_3}^{3}H^{-1}} = \frac{H\mathscr{L}_{\mu_3}^{-3}}{18\pi\left((\mu_3 N)^{\frac{1}{3}}+\frac{H}{3(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}}\right)\left(\frac{2H}{3(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}}\right)^2} =$$

$$= \frac{\mu_3 N\mathscr{L}_{\mu_3}^{-3}}{8\pi H\left(1+\frac{H}{3\mu_3 N}\right)} = \frac{\mu_3}{8\pi\left(1+\frac{H}{3\mu_3 N}\right)}\cdot N^{\frac{1}{15+3\eta}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{-c-3} > 1.$$

Таким образом оба условия выполняются, поэтому согласно теореме 2.3, находим

$$S_3(\alpha; N_1+H_1, 2H_1) = \frac{S_3'(a,q)}{\varphi(q)}\int\limits_{N_1-H_1}^{N_1+H_1} e(\lambda u^3)du + O\left(\frac{H_1}{(\ln(N_1+H_1))^2}\right) =$$

$$= \frac{S_3'(a,q)}{\varphi(q)}\int\limits_{N_1-H_1}^{N_1+H_1} e(\lambda u^3)du + O\left(\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{2}}\right),$$

где

$$S_3'(a,q) = \sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{q} e\left(\frac{an^3}{q}\right).$$

Подставляя значение тригонометрической суммы $S_3(\alpha; N_1+H_1, 2H_1)$ в формуле (3.26), получим

$$\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)=\frac{1}{\mathscr{L}_{\mu_3}}S_3(\alpha;N_1+H_1,2H_1)+O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}}\right)=$$
$$=\frac{S_3'(a,q)}{\varphi(q)\mathscr{L}_{\mu_3}}\int\limits_{N_1-H_1}^{N_1+H_1}e(\lambda u^3)du+O\left(\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^3}\right).$$

В интеграле по u, сделав подстановку $u=N_1+2H_1t$, а затем подставляя значение параметров N_1 и H_1, тригонометрическую сумму $\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)$ представим в виде

$$\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)=\frac{2S_3'(a,q)H_1}{\varphi(q)\mathscr{L}_{\mu_3}}\int\limits_{-0{,}5}^{0.5}e(\lambda(N_1+2H_1t)^3)du+O\left(\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^3}\right)=$$
$$=\frac{2S_3'(a,q)H}{3\varphi(q)(\mu_3N^{\frac{2}{3}})\mathscr{L}_{\mu_3}}\gamma(\lambda)+O\left(\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^3}\right),$$
$$\gamma(\lambda)=\int\limits_{-0{,}5}^{0.5}e\left(\lambda\left((\mu_3N)^{\frac{1}{3}}+\frac{2Ht}{3(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}}\right)^3\right)dt.$$

Переходя к оценкам, имея в виду, что $|S_3'(a,q)|\le\varphi(q)$, получим

$$|\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)|\ll\frac{|S_3'(a,q)|H}{\varphi(q)N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}}|\gamma(\lambda)|+\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^3}\ll\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}}|\gamma(\lambda)|+\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^3}. \tag{3.27}$$

Применим к оценке интеграла $\gamma(\lambda)$ лемму 2.1, полагая

$$f(t)=\lambda\left((\mu_3N)^{\frac{1}{3}}+\frac{2Ht}{3(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}}\right)^3.$$

Из соотношений $H=N^{1-\frac{1}{15+3\eta}}\mathscr{L}_{\mu_3}^c$ и $|t|\le 0,5$ следует, что производная второго порядка

$$f''(t)=\frac{8\lambda H^2}{3(\mu_3N)^{\frac{4}{3}}}\left((\mu_3N)^{\frac{1}{3}}+\frac{2Ht}{3(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}}\right)=\frac{8\lambda H^2}{3\mu_3N}\left(1+\frac{2Ht}{3\mu_3N}\right)>0,$$

и не меняет знак, следовательно производная первого порядка является монотонной функцией и в силу условия рассматриваемого случая, удовлетворяет неравенству

$$f'(t) \geq f'(0,5) = \frac{2\lambda H}{(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}} \left((\mu_3 N)^{\frac{1}{3}} - \frac{H}{3(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}} \right)^2 =$$
$$= 2\lambda H \left(1 - \frac{H}{3\mu_3 N} \right)^2 \geq \lambda H \geq \mathscr{L}_{\mu_3}^3.$$

Следовательно согласно лемме 2.1, при $m = \mathscr{L}_{\mu_3}^3$ и $M = 1$ находим

$$|\gamma(\lambda)| \leq \mathscr{L}_{\mu_3}^{-3}.$$

Подставляя эту оценку в (3.27), найдём

$$|\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)| \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}_{\mu_3}^3}.$$

Случай 2. Для оценки суммы $S_3(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1)$ воспользуемся теоремой 2.4, полагая

$$x = N_1 + H_1, \quad y = 2H_1, \quad A = 3, \quad b = b_1 = 736, \quad c = \frac{9050 - 5032\sqrt{3}}{39} \approx 8.57.$$

Воспользовавшись значением N_1 и H_1, а также условием $H = N^{1-\frac{1}{15+3\eta}} \mathscr{L}_{\mu_3}^c$, имеем

$$\frac{2H_1}{(N_1 + H_1)^{1-\frac{1}{5+\eta}} (\ln(N_1 + H_1))^c} = \frac{\frac{2H}{3(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}} \left(\ln\left((\mu_3 N)^{\frac{1}{3}} + \frac{H}{3(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}} \right) \right)^{-c}}{\left((\mu_3 N)^{\frac{1}{3}} + \frac{H}{3(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}} \right)^{1-\frac{1}{5+\eta}}} =$$

$$= \frac{2H \left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{H}{3\mu_3 N}\right)^3}{\mathscr{L}_{\mu_3}} \right)^{-c}}{3(\mu_3 N)^{1-\frac{1}{15+3\eta}} \mathscr{L}_{\mu_3}^c \left(1 + \frac{H}{3\mu_3 N} \right)^{1-\frac{1}{5+\eta}}} = \frac{2 \left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{H}{3\mu_3 N}\right)^3}{\mathscr{L}_{\mu_3}} \right)^{-c}}{3\mu_3^{1-\frac{1}{15+3\eta}} \left(1 + \frac{H}{3\mu_3 N} \right)^{1-\frac{1}{5+\eta}}} \geq 1,$$

то есть условие $2H_1 \geq (N_1 + H_1)^{1-\frac{1}{5+\eta}} (\ln(N_1 + H_1))^c$ выполняется, поэтому согласно теореме 2.4, находим

$$|S_3(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1)| \ll \frac{H_1}{(\ln(N_1 + H_1))^3} \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}_{\mu_3}^3}.$$

Переходя в соотношении (3.16) к оценкам, и подставляя полученные оценки для $S_3(\alpha; N_1+H_1, 2H_1)$ в обоих случаях, получим

$$\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3 N, H) \ll \frac{|S_3(\alpha; N_1+H_1, 2H_1)|}{\mathscr{L}_{\mu_3}} + \frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}} \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^4}\left(1+\frac{H\mathscr{L}_{\mu_3}^3}{N}\right) \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^4}.$$

Подставляя полученную оценку для $|\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3 N, H)|$, $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, в (3.25), получим

$$I(\mathfrak{M}_2) \ll \frac{H}{\mathscr{L}_{\mu_3}} \cdot \max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2} |\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3 N, H)| \ll \frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^5}.$$

Оценка интеграла $I(\mathfrak{m})$. Имеем

$$I(\mathfrak{m}) = \int\limits_{\mathfrak{m}} \mathbb{S}_1(\alpha;\mu_1 N, H)\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_2 N, H)\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3 N, H)e(-\alpha N)d\alpha.$$

Переходя к оценкам, а затем воспользовавшись неравенством Коши для интегралов находим

$$\begin{aligned}
I(\mathfrak{m}) &\ll \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3 N, H)| \int\limits_0^1 |\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_1 N, H)||\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_2 N, H)d\alpha = \\
&= \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3 N, H)| \left(\int\limits_0^1 |\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_1 N, H)|^2 d\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^1 |\mathbb{S}_1(\alpha;\mu_2 N, H)|^2 d\alpha\right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3 N, H)| \left(\sum_{|p-\mu_1 N|\le H} 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|p-\mu_2 N|\le H} 1\right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3 N, H)| \left(\pi\left(\mu_1 N + H\right) - \pi\left(\mu_1 N - H\right)\right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\qquad \times \left(\pi\left(\mu_2 N + H\right) - \pi\left(\mu_2 N - H\right)\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Применяя к двум последним множителям правой части полученной формулы с учётом соотношения

$$2H = 2N^{1-\frac{1}{15+3\eta}}\mathscr{L}_{\mu_3}^c \ge (\mu_i N + H)^{\frac{7}{8}+\varepsilon}, \qquad i = 1;\ 2,$$

лемму 3.3, найдём

$$\pi(\mu_2 N + H) - \pi(\mu_2 N - H) \ll \frac{H}{\mathscr{L}_{\mu_3}}, \qquad i = 1;\ 2.$$

Следовательно

$$I(\mathfrak{m}) \ll \frac{H}{\mathscr{L}_{\mu_3}} \cdot \max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2} |\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)|. \tag{3.28}$$

Если $\alpha \in \mathfrak{m}$, то

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \quad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}, \quad \mathscr{L}_{\mu_3}^{736} \le q \le \tau.$$

$$\tau = \left(\frac{2H}{(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}}\right)^5 \left((\mu_3 N)^{\frac{1}{3}} + \frac{2H}{3(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}}\right)^{-2} \mathscr{L}_{\mu_3}^{-736}.$$

Оценим $\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)$ для α из множества $\mathfrak{m}$. Сначала для этой суммы $\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)$ при помощи формулы (3.4), выражая через суммы вида $S_3(\alpha; x, y)$, получим

$$\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H) = \frac{S_3(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1)}{\mathscr{L}}_{\mu_3} + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}}\right), \tag{3.29}$$

$$N_1 = (\mu_3 N)^{\frac{1}{3}}, \qquad H_1 = \frac{H}{3(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}}.$$

Сумму $S_3(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1)$ оценим, воспользовавшись леммой 3.7, полагая

$$x = N_1 + H_1, \quad y = 2H_1, \quad B = 3.$$

Сначала проверяем выполнение следующих условий этой леммы

$$2H_1 \ge (N_1 + H_1)^{\frac{4}{5}} \left(\ln(N_1 + H_1)\right)^{175}. \tag{3.30}$$

Пользуясь значением введенных нами параметров N_1 и H_1 в (3.29), а также условием $H = N^{1-\frac{1}{15+3\eta}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{c}$, имеем

$$\frac{2H_1}{(N_1+H_1)^{\frac{4}{5}}\left(\ln(N_1+H_1)\right)^{175}} =$$

$$= \frac{\dfrac{2H}{3(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}}}{\left((\mu_3N)^{\frac{1}{3}} + \frac{H}{3(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{4}{5}}\left(\ln\left((\mu_3N)^{\frac{1}{3}} + \frac{H}{3(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}}\right)\right)^{175}} =$$

$$= \frac{2\cdot 3^{-1}H(\mu_3N)^{-\frac{14}{15}}}{(1+\frac{H}{3\mu_3N})^{\frac{4}{5}}\left(\mathscr{L}_{\mu_3} + \ln\left(1+\frac{H}{3\mu_3N}\right)\right)^{175}} =$$

$$= \frac{2\cdot 3^{-1}\mu_3^{-\frac{14}{15}}}{(1+\frac{H}{3\mu_3N})^{\frac{4}{5}}\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{H}{3\mu_3N}\right)^3}{\mathscr{L}_{\mu_3}}\right)^{175}}\cdot\frac{HN^{-\frac{14}{15}}}{\mathscr{L}_{\mu_3}^{175}}$$

$$= \frac{2\cdot 3^{-1}\mu_3^{-\frac{14}{15}}}{(1+\frac{H}{3\mu_3N})^{\frac{4}{5}}\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{H}{3\mu_3N}\right)^3}{\mathscr{L}_{\mu_3}}\right)^{175}}\cdot N^{\frac{1}{15}-\frac{1}{15+3\eta}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{c+175} \geq 1.$$

Таким образом условие (3.30) выполняется, следовательно согласно формуле (3.29) и лемме 3.7, находим

$$|\mathbb{S}_3(\alpha;N,H)| \ll \mathscr{L}_{\mu_3}^{-1}|S_3(\alpha;N_1+H_1,2H_1)| + \frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}} \ll$$

$$\ll \mathscr{L}_{\mu_3}^{-1}\frac{H_1}{(\ln(N_1+H_1))^3} + \frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}} \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^4} + \frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}} =$$

$$= \frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^4}\left(1+\frac{H}{N}\right) \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^4}.$$

Подставляя полученную оценку для $|\mathbb{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)|$, $\alpha\in\mathfrak{m}$, в (3.28), получим

$$I(\mathfrak{m}) \ll \frac{H}{\mathscr{L}_{\mu_3}}\cdot\max_{\alpha\in\mathfrak{m}}|S_3(\alpha;N,H)| \ll \frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^5}.$$

Теорема доказана.

Обсуждения полученных результатов

Основными результатами диссертационной работы являются теоремы 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, и 3.1.

Приведём основные достижения по исследованиям, которые предшествовали утверждениям, доказанным в теоремах 2.1, 2.2, (пункт **A.**), в теоремах 2.3 и 2.4 (пункт **B.**), и в теореме 3.1 (пункт **C.**).

A. Теоремы 2.1 и 2.2 посвящены соответственно средним значениям коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрических сумм Г.Вейля с простыми числами.

Г.Вейль [88] построил метод, с помощью которого, в частности, впервые получил нетривиальную оценку тригонометрических сумм вида

$$T_n(\alpha, x) = \sum_{m \le x} e\left(\alpha m^n\right),$$

которые в его честь И.М.Виноградов [46] назвал суммами Вейля. Глубоким усилением метода Вейля является метод тригонометрических сумм И.М.Виноградова, применившим его к решению многих проблем теории чисел.

Хуа Ло–кен [89, 90] для средних значений сумм Вейля доказал следующую оценку

$$\int\limits_0^1 |T_n(\alpha, x)|^{2^k} \ll x^{2^k-k+\varepsilon}, \qquad 1 \le k \le n.$$

В работах [22, 91–94] оценка Хуа Ло-кена обобщена для коротких тригонометрических сумм Вейля вида

$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m<x} e(\alpha m^n),$$

при $n = 3;\ 4;\ 5$, то есть для среднего значения $T_n(\alpha; x, y)$ — сумм Г.Вейля, переменное суммирование которых принимает значения из коротких интервалов, получены правильные по порядку оценка вида

$$\int_0^1 |T_n(\alpha;x,y)|^{2^k}\,d\alpha \ll y^{2^k-k+\varepsilon}, \qquad 1\le k\le n. \tag{1}$$

Эти оценки были приложены при выводе асимптотических формул в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми [22, 31, 33, 34].

В теоремах 2.1 и 2.2 соответственно для коротких квадратичных и для коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами, то есть при $k=2,\ 3$ для сумм вида

$$\mathbb{S}_k(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<p\le x} e(\alpha p^k)$$

получены правильные по порядку оценки интегралов по периоду от степени модулей коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами, имеющих вид

$$\int_0^1 |\mathbb{S}_k(\alpha;x,y)|^{2^r}\,d\alpha \ll y^{2^r-r+\varepsilon}, \qquad 1\le r\le k. \tag{2}$$

Полученные оценки в теоремах 2.1 и 2.2 являются обобщениями оценки Хуа Ло-кена — (1), и оценки — (2) для коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрические сумм с простыми числами при $k=2,\ 3$,

B. Теоремы 2.3 и 2.4 посвящены соответственно исследованию коротких кубических тригонометрических сумм Г.Вейля с простыми числами $\mathbb{S}_3(\alpha;x,y)$ в малой окрестности центра больших дуг $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$ и в больших дугах $\mathfrak{M}(P)$ за исключением малой окрестности их центров.

Короткую тригонометрическую сумму с простыми числами впервые оценил И.М.Виноградов [46]. Применяя свой метод оценок сумм с простыми числами он доказал, что если $\delta\le\frac16$ — произвольное малое положительное постоянное и

$$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\le\frac{1}{q^2}, \qquad (a,q)=1, \qquad 1\le q\le x,$$

то для короткой линейной тригонометрической суммы с простыми числами, имеет место оценка

$$\mathbb{S}_1(\alpha;x,y) \ll y\exp\left(\frac{\ln^2\mathscr{L}_x}{\ln(1+\delta)}+\sigma\ln\mathscr{L}_x\right)\left(\frac{x^{\frac{2+\delta}{3}}}{y}+\frac{1}{q}\right)^{1/2}.$$

Это оценка становится нетривиальной, если

$$\exp(c\ln^2\mathscr{L}_x) \ll q \ll x^{1/3}, \qquad y > x^{2/3+\varepsilon}.$$

В этой работе И.М.Виноградов подчеркнул, что для малых q ($q \le \exp(\mathscr{L}_x^{\beta})$, β — правильная дробь, немногим превосходящая 0,5) весьма точные оценки суммы $\mathbb{S}_1(\alpha;x,y)$ являются непосредственным следствием известных теорем, относящихся к распределению простых чисел в арифметических прогрессиях, но только при условии, если y есть величина порядка близкого к x и α — рациональное число вида $\frac{a}{q}$, где $(a,q)=1$. Для величин y, порядок которых меньше порядка x (то есть $y=x^{\theta}$, $\theta<1$), и произвольных α вопрос оставался открытым.

Сумму $\mathbb{S}_1(\alpha;x,y)$ впервые для всех значений α исследовал английский математик К.В.Хазелгров [80]. Он получил для суммы $\mathbb{S}_1(\alpha;x,y)$ нетривиальную оценку в $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^b)$ и асимптотическую формулу $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ при

$$y \ge x^{\theta}, \qquad \theta = \frac{63}{64}+\varepsilon.$$

Наилучший результат принадлежит Т. Жан [87]. Он, пользуясь методом работы Пан Чен-дона и Пан Чен-бьяо и оценкой М. Ютилы [95] о четвёртом моменте L-функций Дирихле в критической прямой, доказал для суммы $\mathbb{S}_1(\alpha;x,y)$ асимптотическую формулу в $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ и нетривиальную оценку в $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^b)$ при

$$y \ge x^{\theta}, \qquad \theta = \frac{5}{8}+\varepsilon.$$

А.А.Собиров [116] для $S_1(\alpha;x,y)$ доказал асимптотическую формулу с остаточным членом в малой окрестности центра больших дуг $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ при

$$y \ge x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}_x^{1,5A+0,25b+18},$$

где A и b — произвольные фиксированные положительные числа.

В случае, когда α — рациональное число вида $\frac{a}{q}$, $(a,q)=1$, получены нетривиальные оценки для более коротких сумм $S_1(\alpha;x,y)$. В 1986 г.Балог и Перелли [96] доказали нетривиальную оценку для $S_1(\alpha;x,y)$ при

$$y \gg x^{\frac{3}{5}}\mathscr{L}_x^{200},$$

а Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо [97] доказали такую же оценку при

$$y \gg x^{\frac{7}{12}}+\varepsilon.$$

И.М.Виноградов [46], впервые исследуя короткие нелинейные тригонометрические суммы с простыми числами при $x^{\frac{2}{3}+\varepsilon_1}q \le y \le x$ и $q \ge \mathscr{L}_x^{\varepsilon_2}$ в случае, когда α — рациональное число вида $\frac{a}{q}$, $(a,q)=1$, получил оценку

$$\mathbb{S}_k\left(\frac{a}{q};x,y\right) = \sum_{x-y<p\le x} e\left(\frac{ap^k}{q}\right) \ll yq^{-\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

где ε, ε_1, ε_2 — произвольные малые положительные постоянные.

Короткую квадратичную тригонометрическую сумму с простыми числами $S_2(\alpha;x,y)$ для всех значений α исследовали Дж.Лю и Т.Жан [38]. В предположении справедливости расширенной гипотезы Римана, они при

$$y \ge x^{\frac{2}{3}+\varepsilon},$$

доказали, что для вского $A>0$ существуют постоянные $c_i>0$, $i=1,2,3$, что имеет место соотношение

$$S_2(\alpha;x,y) = \begin{cases} M(\alpha;x,y)+O\left(\dfrac{y}{\mathscr{L}_x^A}\right), & q \le \mathscr{L}_x^{c_1}, \quad |\lambda| \le \dfrac{1}{xy\mathscr{L}_x^{c_2}}; \\ O\left(\dfrac{y}{\mathscr{L}_x^A}\right), & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{3}$$

где

$$M(\alpha;x,y) = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{h=1\\(h,q)=1}}^{q} e\left(-\frac{ah^k}{q}\right)\int\limits_{x-y}^{x} e(\lambda u^k)du, \qquad \tau = \frac{y^3}{x\mathscr{L}_x^{c_3}}.$$

Воспользовавшись методом оценки тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградова, плотностной теоремой для нулей L-рядов Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы и теоремой М.Ютилы [95] о четвёртом моменте L-функций Дирихле в критической прямой, такую оценку они получили безусловно при

$$y \geq x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}.$$

А.В.Кумчев [98] получил нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$, $\tau = x^{k-\frac{2}{2k+3}}P^{-1}$ при $y \geq x^{1-\frac{1}{2k+3}+\varepsilon}$.

З.Х. Рахмонов и Ф.З. Рахмонов [100, 101], пользуясь методом работы [102] и результатами работ [103–105], показали, что если A — абсолютная постоянная, то при

$$y \geq x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}_x^{8A+151},$$

на малых дугах $\mathfrak{m}\left(\mathscr{L}_x^{32(A+20)}\right)$, $\tau = y^5x^{-2}\mathscr{L}_x^{-32(A+20)}$, справедлива оценка

$$S_3(\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}_x^A}. \tag{4}$$

В теоремах 2.3 и 2.4 для $S_3(\alpha; x, y)$ соответственно доказаны:

- асимптотическая формула с остаточным членом в малой окрестности $|\lambda| \leq \left(18\pi xy^2\right)^{-1}$ центров больших дуг $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ при

$$y \geq x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}_x^{1,5A+0,25b+18},$$

  где A и b — произвольные фиксированные положительные числа;

- нетривиальная оценка (4) в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ за исключением малой окрестности их центров при

$$y \geq x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}_x^{c_3}, \qquad \eta_3 = \frac{2}{7+4\sqrt{3}}, \qquad c_3 = \frac{2A+24+\left(\sqrt{3}-1\right)b_1}{4\sqrt{3}-3}.$$

Полученные результаты для коротких кубических тригонометрические сумм с простыми числами $S_3(\alpha; x, y)$ в больших дугах дополняют оценку (4).

C. Теорема 3.1 посвящена исследованию проблемы Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми, а именно выводу асимптотической формулы для количества представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы трёх почти пропорциональных слагаемых, два из которых — простые числа, а третье является кубом простого числа.

Аддитивные задач и с почти пропорциональными слагаемыми сформулировал и впервые изучил английский математик Мейтленд Райт в тридцатые годы прошлого века. К аддитивным задачам, которые он исследовал с почти пропорциональными слагаемыми, относятся теорема Лагранжа о представлении натуральных чисел суммой не более четырёх квадратов натуральных чисел и её обобщение, предложенное Варингом [1] в 1770 г., которое утверждает, что последовательность, образованная фиксированной степенью n чисел натурального ряда, образует в нём базис конечного порядка $G(n)$, то есть каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = N, \tag{5}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — натуральные числа и количество слагаемых r не превосходит фиксированную величину $G(n)$, называемую порядком базиса последовательности $\{x^n\}$, или функцией Харди. Их вкратце можно характеризовать следующим образом:

- в работах [2, 3] показано, что, если $r \geq 5$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — фиксированные положительные числа, $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r = 1$,

$$\alpha = \frac{r-4}{4(r-3)}, \quad r = 5,\ 6,\ 7, \qquad \alpha = \frac{r-2}{2(2r-1)}, \quad r \geq 8,$$

  и $0 < \beta < \alpha$, тогда любое натуральное число N представимо в виде

$$N = x_1^2 + \ldots + x_r^2, \qquad |x_i^2 - \mu_i N| = O(N^{1-\beta});$$

- в работе [4] доказано, что если γ, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 — произвольные положительные числа, $\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4=1$, $N=2^{\xi}N_1$, N_1 — нечётное целое число, $N_1>N_0=N_0(\gamma,\mu_1,\ldots,\mu_4)$, и выполняется условие

$$|x_i^2-\mu_iN|\le\gamma\mu_iN,\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

тогда число n представимо в виде

$$N=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2;\tag{6}$$

- в работе [5] доказано, что, если $0<\beta<0,2$, то количество чисел N, не превосходящих X и которые при выполнении условия

$$|x_i^2-\mu_iN|\ll N^{1-\beta},\qquad i=1,2,3,4,\tag{7}$$

не представимы в виде (6), равно $O(X^{1-c})$, где $0<c<\frac{5}{12}\left(\frac{1}{5}-\beta\right)$, то есть

$$\#\left\{N:\ N\le X,\ N\ne x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2,\quad |x_i^2-\mu_iN|\ll N^{1-\beta}\right\}\ll X^{1-c};$$

- в работе [5] также доказано, что если $0<\beta<0,2$, то количество чисел N, не превосходящих X, и которые не имеют форму $4^a(8l+7)$, при условии выполнения условия (7) не представимы в виде

$$N=x_1^2+x_2^2+x_3^2,$$

равно $O(X^{1-c})$, где $0<c<\frac{3}{7}\left(\frac{1}{6}-\beta\right)$;

- Мейтленд Райт [6, 7], исследуя проблему Варинга с почти пропорциональными слагаемыми, доказал, *пусть* $\mu_1,\ldots,\mu_r$ *— фиксированные положительные числа,* $\mu_1+\ldots+\mu_r=1$, $r\ge r_0$,

$$0<\beta<\alpha=\min\left(\frac{r-4}{4(r-3)},\ \frac{r-2}{2(r-1)}\right),\qquad \gamma=\frac{r}{k}-1-(r-1)\beta,$$

$\mathbb{I}(N)$ — число решений уравнения (5) относительно $x_1, \ldots, x_r$ с условием $|x_i^n - \mu_i N| \le A_i N^{1-\beta}$, тогда справедлива асимптотическая формула

$$\mathbb{I}(N) = \frac{c\left(\prod \mu_i\right)^{\alpha-1}}{n^r \Gamma(r)} \mathfrak{S}(N) N^{\gamma} + O\left(N^{\gamma-d}\right),$$

где $c = c(A_1, \ldots, A_s)$ — абсолютная постоянная, $d = d(r, \beta) > 0$.

Если в аддитивной задаче с почти пропорциональными слагаемыми $\mu_1, \ldots, \mu_r$ равны между собой, то есть $\mu_1 = \ldots = \mu_r = \frac{1}{r}$, то она превращается в задачу с почти равными слагаемыми.

З.Х.Рахмонов с учениками в работах [8, 10, 11, 13, 22] в больших дугах полностью изучили поведения коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида

$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\le x} e(\alpha m^n),$$

для произвольного фиксированного n, пользуясь которыми доказали

- асимптотическую формулу в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми в случаях $n = 3, 4, 5$, точнее были найдены [22, 31, 33, 34], асимптотические формулы для количества решений диофантова уравнения (5), с условиями

  $$\left| x_i - \left(\frac{N}{2^n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \right| \le H, \qquad i = 1, \ldots, 2^n+1, \qquad H \ge N^{\frac{1}{n} - \theta(n) + \varepsilon};$$

  где

  $$\theta(3) = \frac{1}{30}, \qquad \theta(4) = \frac{1}{108}, \qquad \theta(5) = \frac{1}{340}.$$

- асимптотическую формулу в обобщении тернарной проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми о представлении достаточно большого натурального числа в виде

  $$p_1 + p_2 + m^n = N,$$

при $n=2,3,4$, в простых числах p_1, p_2 и натурального m, с условиями

$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\le H,\quad i=1,2,\qquad \left|m^n-\frac{N}{3}\right|\le H,\qquad H\ge N^{1-\theta(n)}\mathscr{L}^{c_n},$$

соответственно при

$$\theta(2)=\frac{1}{4},\qquad c_2=2;$$
$$\theta(3)=\frac{1}{6},\qquad c_3=3;$$
$$\theta(4)=\frac{1}{12},\qquad c_4=\frac{40}{3}.$$

Т. Жан и Дж. Лю [40] решили обобщение проблемы Эстермана для квадратов простых чисел с почти равными слагаемыми, о представлении достаточно большого натурального числа N, в виде

$$N=p_1+p_2+p_3^n, \tag{8}$$

при $n=2$, с условиями

$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\le H,\quad i=1,2,\quad \left|p_3^n-\frac{N}{3}\right|\le H,\quad H\ge N^{\theta},$$

и воспользовавшись для суммы $S_2(\alpha,x,y)$ оценкой (3) доказали асимптотическую формулу

- условно (в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана), при
$$\theta=\frac{5}{6}+\varepsilon;$$
- безусловно при
$$\theta=\frac{27}{32}+\varepsilon.$$

В теореме 3.1 доказана асимптотическая формула в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми, точнее найдена асимптотическая формула для количества решений диофантова уравнения (8) при $n=3$ с условиями

$$|p_i-\mu_iN|\le H,\qquad i=1,2,\qquad |p_3^3-\mu_3N|\le H,\qquad H\ge N^{1-\frac{1}{15+3\eta}}\mathscr{L}_{\mu_3}^{c},$$

где

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \qquad \eta = \frac{2}{7 + 4\sqrt{3}}, \qquad c = \frac{10476 - 4816\sqrt{3}}{39}.$$

Таким образом теореме 3.1 асимптотическая формула выведена для более редкой последовательности и с более общими условиями, так как в уравнении (8) квадрат простого числа p_3 заменяется на его куб и при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{3}$ условие с почти пропорциональными слагаемыми превращается в условие с почти равными слагаемыми.

Выводы

Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют теоретический интерес и состоят в следующем:

- обобщена теорема Хуа Ло-кена для коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами, то есть найдены правильные по порядку оценки интегралов по периоду от степени модуля этих сумм [3-А, 8-А];

- найдена асимптотическая формула с остаточным членом для коротких кубических тригонометрических сумм Г.Вейля с простыми числами в малой окрестности центров больших дуг [1-А, 5-А, 6-А, 8-А];

- получена нетривиальная оценка для коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах за исключением малой окрестности их центров [2-А, 7-А, 8-А];

- получена асимптотическая формула в обобщении теоремы Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми для кубов простых чисел [4-А, 8-А].

Рекомендации по практическому использования результатов

Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применение в аналитической теории чисел при исследованиях проблем теории коротких тригонометрических сумм с простыми числами и аддитивных задач с простыми числами. Материалы диссертации также могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

Литература

1. Waring E.M. Meditationes algebraicae [Текст] / E.M. Waring // . — Cambridge.. — 1770.

2. Wright E.M. The representation of a number as a sum of five or more squares [Текст] / E.M. Wright // The Quarterly Journal of Mathematics. — 1933. — V. 4. — Is. 1. — P. 37—51.

3. Wright E.M. The representation of a number as a sum of five or more squares (II) [Текст] / E.M. Wright // The Quarterly Journal of Mathematics. — 1933.V. 4. — Is. 1. — P. 228—232.

4. Wright E.M. The representation of a number as a sum of four 'almost proportional' squares [Текст] / E.M. Wright // The Quarterly Journal of Mathematics. — 1936.V. os-7. — Is. 1. — P. 230–240.

5. Wright E.M. The Representation of a Number as a Sum of Three or Four Squares [Текст] / E.M. Wright // Proceedings of the London Mathematical Society. — 1937.V. os2-42. Is. 1. — P. 481–500.

6. Wright E.M. Proportionality conditions in Waring's 7problem [Текст] / E.M. Wright // Mathematische Zeitschrift. — 1934.V. 38. P. 730–746.

7. Wright E.M. An extension of Waring's problem [Текст] / E.M. Wright // Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A 232 1-26 (1933). Zbl 0006.39602

8. Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми [Текст] / З.Х. Рахмонов // Математические заметки. — 2003 г. — Т.74. — вып.4. — С. 564—572.

9. Рахмонов З.Х. Короткие квадратичные тригонометрические суммы Вейля [Текст] / З.Х. Рахмонов, Дж.А. Шокамолова // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. — 2009 г. — № 2(135). — С. 7—18.

10. Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми [Текст] / З.Х. Рахмонов // Мат.заметки. — 2014 г. — Т.95. — вып.3. — С. 445—456.

11. Rakhmonov Z.Kh. The Estermann cubic problem with almost equal summand [Текст] / Z.Kh. Rakhmonov // Mathematical Notes. — 2014. — V.95. — Is 3—4. — P. 407—417.

12. Рахмонов З.Х. Об оценках коротких кубических сумм Г.Вейля [Текст] / К.И. Мирзоабдугафуров, З.Х. Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 2008 г. — Т.51. — № 1. — С. 5—15.

13. Азамов А.З. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля четвертой степени [Текст] / А.З. Азамов, К.И. Мирзоабдугафуров, З.Х. Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 2010 г. — Т.53. — № 10. — С. 737—744.

14. Мирзоабдугафуров К.И. Проблема Варинга для девяти кубов с почти равными слагаемыми [Текст] / К.И. Мирзоабдугафуров // Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Душанбе — 2009 г. — С.63.

15. Шокамолова Дж.А. Проблема Эстермана с почти равными слагаемыми [Текст] / Дж.А. Шокамолова // Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Душанбе — 2010 г. — С.63.

16. Азамов А.З. Проблема Варинга с почти равными слагаемыми для четвертых степеней [Текст] / А.З. Азамов // Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Душанбе — 2011 г. — С.62.

17. Озодбекова Н.Б. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля [Текст] / Н.Б. Озодбекова, З.Х. Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 2011 г. — Т.54. — № 4. — С. 257—264.

18. Фозилова Д.М. Об оценке коротких тригонометрических сумм Г.Вейля [Текст] / З.Х. Рахмонов, Д.М. Фозилова // Доклады АН РТ. — 2011 г. — Т.54. — №8. — С. 605—609.

19. Фозилова Д.М. Короткая кубическая тригонометрическия сумма Г.Вейля [Текст] / З.Х. Рахмонов, Д.М. Фозилова // Доклады АН РТ. —2011 г. — Т.54. — № 11. — С. 880—886.

20. Рахмонов З.Х. Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля [Текст] / З.Х. Рахмонов // Ученые записки Орловского университета, серия естественные, технические и медицинские науки. — 2012 г. — № 6. Часть — 2. — С. 194—203.

21. Рахимов А.О. Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля в множестве точек первого класса [Текст] / А.О. Рахимов, Н.Н. Назрублоев // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 2014 г. — Т.57. — № 8. — С. 621—628.

22. Рахимов А.О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения [Текст] / А.О. Рахимов, З.Х. Рахмонов, Н.Н. Назрублоев // Чебышевский сборник. — 2015 г. — Т.16. — В.1(53). — С. 232—247.

23. Рахмонов З.Х. Короткие тригонометрические суммы [Текст] / З.Х. Рахмонов // В сборнике: Труды международной летней математической школы-конференции С. Б. Стечкина по теории функций. Таджикистан. Душанбе. 15—25 августа — 2016 г. — С. 206—212.

24. Фозилова Д.М. Асимптотическая формула в кубической задаче Эстермана с почти равными слагаемыми [Текст] / Д.М. Фозилова // Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Душанбе — 2011 г. — С.63.

25. Озодбекова Н.Б. Распределение дробных частей значений многочлена аргумент, которого принимает значения из коротких интервалов [Текст] / Н.Б. Озодбекова // Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Душанбе — 2012 г. — С.70.

26. Назрублоев Н.Н. Проблема Варинга с почти равными слагаемыми для пятых степеней [Текст] / Н.Н. Назрублоев // Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Душанбе — 2015 г. — С.72.

27. Рахимов А.О. Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми [Текст] / А.О. Рахимов // Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Душанбе — 2017 г. — С.65.

28. Рахмонов З.Х. Короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числамиn [Текст] / З.Х. Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 2000 г. — Т.43. — № 3. — С. 27—40.

29. Шокамолова Дж.А. Асимтотическая формула в задаче Эстермана с почти равными слагаемыми [Текст] / Дж.А. Шокамолова // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 2010 г. — Т.53. — № 5. — С. 325—332.

30. Назрублоев Н.Н. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в малых дугах [Текст] / А.З. Азамов, З.Х. Рахмонов, Н.Н. Назрублоев // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 2018 г. — Т.61. — № 7-8. — С. 609—614.

31. Рахмонов З.Х. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми [Текст] / К.И. Мирзоабдугафуров, З.Х. Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 2008 г. — Т.51. — № 2. — С. 83—86.

32. Рахмонов З.Х. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми [Текст] / З.Х. Рахмонов // Тезисы докладов международной конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященную 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего. Москва. Россия. — 30 марта — 2 апреля — 2009 г. — С. 432.

33. Азамов А.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми [Текст] / А.З. Азамов, З.Х. Рахмонов. // Доклады АН РТ. — 2011 г. — Т.54. — № 3. — С. 165—172.

34. Назрублоев Н.Н. Проблема Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми [Текст] / Н.Н. Назрублоев, З.Х. Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 2014 г. — Т.57. — № 11-12. — С. 823—830.

35. Фозилова Д.М. Об одной тернарной задаче с почти равными слагаемыми [Текст] / З.Х. Рахмонов, Д.М. Фозилова // Доклады Академии наук Республики Таджикистан.2012 г. — Т.55. — № 6. — С. 433—440.

36. Рахимов А.О. Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми [Текст] / А.О. Рахимов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 2015 г. — Т.58. — № 9. — С. 769—771.

37. Рахимов А.О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми [Текст] / А.О. Рахимов, Ф.З. Рахмонов // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Издательство: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского —- ISSN: 1810—4134. — 2016 г. — № 8. — С. 87—89.

38. Liu J.Y. On sums of five almost equal prime squares [Текст] / J.Y. Liu, T. Zhan // Acta Arithmetica. — 1996. — V.77. — P. 369—383.

39. Liu J.Y. On sums of five almost equal prime squares (II) [Текст] / J.Y. Liu, T. Zhan // Sci China. — 1998. — V.41. — P. 710—722.

40. Liu J. Estimation of exponential sums over primes in short intervals [Текст] / J. Liu, T. Zhan // I. Mh Math. — 1999. — V.127. — P. 27—41.

41. Liu J. Hua's Theorem on Prime Squares in Short Intervals [Текст] / J. Liu, T. Zhan // Acta Mathematica Sinica. English Series. Oct. — 2000. — V.16. — № 4. — P. 669—690.

42. Liu J. Exponential sums over primes in short intervals [Текст] / J. Liu, G. Lu. & T. Zhan // Science in China: Series A Mathematics. — 2006. — V.49. — № 5. — P. 611—619.

43. Гильберт Д. Избранные труды [Текст] / Д. Гильберт // Т.1. Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики. — М:Изд-во «Факториал» — 1998 г. — С. 575.

44. Hilbert D. Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl nter Potenzen (Waringsche Problem) [Текст] / D. Hilbert // Nachrichten von der Königlichen Gesellchaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch- physikalische Klasse aus den Jahren 1909. — s.17—36. Math. Annalen. — 67. — P. 281—300.

45. Hardy G.H. Nachr. Acad. Wiss. Gettingen [Текст] / G.H. Hardy, J.E. Littlwood // Math. Phys. Kl. — 1920. — P. 33—54. — IV: Math. Z. — 1922. — Bd. — V.12. — P. 161—168.

46. Виноградов И.М. Избранные труды [Текст] / И.М. Виноградов // — М:Изд-во АН СССР. — 1952 г.

47. Виноградов И.М. Об одной общей теореме Варинга [Текст] / И.М. Виноградов // Матем. сб. — 1924 г. — Т.31. — № 3–4 — С. 490—507.

48. Виноградов И.М. О теореме Варинга [Текст] / И.М. Виноградов // Известия Академии наук СССР. — VII серия. Отделение физико-математических наук. — 1928 г. — Вып.–4. — С. 393—400.

49. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел [Текст] / И.М. Виноградов, А.А. Карацуба // Труды МИАН СССР. — 1984 г. — Т. 77. — С. 4–30.

50. Виноградов И.М. Новое решение проблемы Варинга [Текст] / И.М. Виноградов // Доклады Академии наук СССР. — 1934 г. — № 2. — С. 337—341.

51. Виноградов И.М. О верхней границе $G(n)$ в проблеме Варинга [Текст] / И.М. Виноградов // Известия Академии наук СССР. Отделение физико-математических наук. — 1934 г. — № 10. — С. 1455—1469.

52. Виноградов И.М. Новый вариант вывода теоремы Варинга [Текст] / И.М. Виноградов // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. — 1935 г. — № 9. — С. 5—16.

53. Виноградов И.М. Новый метод в аналитической теории чисел [Текст] / И.М. Виноградов // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. — 1937 г. — Т.10. — С. 5—122.

54. Виноградов И.М. Общие теоремы о верхней границе модуля тригонометрической суммы [Текст] / И.М. Виноградов // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1951 г. — Т.15. — № 2. — С. 109—130.

55. Виноградов И.М. К вопросу о верхней границе для $G(n)$ [Текст] / И.М. Виноградов // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1959 г. — Т.23. — № 5. — С. 637—642.

56. Карацуба А.А. О функции $G(n)$ в проблеме Варинга [Текст] / А.А. Карацуба // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1985 г. — Т.49 — № 5. — С. 935—947.

57. Davenport H. [Текст] / H. Davenport // Ann of Math. — 1939. — V.40. — P. 731—747.

58. Линник Ю.В. О разложении больших чисел на семь кубов [Текст] / Ю.В. Линник // Доклады Академии наук СССР. — 1942 г. — № 35. — С. 179—180.

59. Линник Ю.В. О разложении больших чисел на семь кубов [Текст] / Ю.В. Линник // Матем. сб. — 1943 г. — Т.12(54). — № 2. — С. 218—224.

60. Линник Ю.В. Элементарное решение проблемы Варинга по методу Шнирельмана, Математический сборник [Текст] / Ю.В. Линник // Матем. сб. — 1943 г. — Т.12(54). — № 2. — С. 225—230.

61. Watson G.L. A proof of the seven cube theorem [Текст] / G.L. Watson // J. London math. Soc. — 1951. — V.26. — P. 153—156.

62. Vaughan R.C. Sur le probleme de Waring pour les cubes [Текст] / R.C. Vaughan // C.R. Acad. Sci. Paris. S'erie I — 301(1985). — P. 253—255.

63. Vaughan R.C. On Waring's problem for cubes [Текст] / R.C. Vaughan // J. Reine Angew. Math. — 1986. — V.365. — P. 122—170.

64. Виноградов И.М. Представление нечетного числа суммой трех простых чисел [Текст] / И.М. Виноградов // Доклады Академии наук СССР. — 1937 г. — Т.15. — С. 291—294.

65. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел [Текст] / И.М. Виноградов // — М.: — Наука. — 1980 г. — С. 144.

66. Виноградов И.М. Особые варианты методов тригонометрических сумм [Текст] / И.М. Виноградов // — М.: — Наука. — 1976 г.

67. Линник Ю.В. Избранные труды Ленинград. [Текст] / Ю.В. Линник // — Наука. — 1980.

68. Линник Ю.В. О некоторых аддитивных задачах [Текст] / Ю.В. Линник // Математический сборник. — 1960. — Т. 51(93). — № 2. — С. 129—154.

69. Линник Ю.В. Все большие числа – суммы простого и двух квадратов (О проблеме Гарди–Литтльвуда) [Текст] / Ю.В. Линник // Математический сборник. — 1960. — Т. 52(94). — № 2. — С. 661—700.

70. Линник Ю.В. Асимптотическая формула в аддитивной проблеме Гарди–Литтльвуда [Текст] / Ю.В. Линник // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1960. — Т. 24. — № 5. — С. 629–706.

71. Линник Ю.В. Шестой момент для L-рядов и асимптотическая формула в проблеме Гарди–Литтлвуда [Текст] / Ю.В. Линник// Доклады АН СССР. — 1960. — Т. 33. — № 5. — С. 1015—1016.

72. Виноградов И.М. Некоторые общие теоремы, относящиеся к теории простых чисел [Текст] / И.М. Виноградов // Труды Тбиллиского математического института. — 1938 г. — Т.3. — С. 1—67.

73. Erdösh P. On the easier Waring problem for powers of primes. I [Текст] / P. Erdösh // Proc. of the Cambridge Phil. Soc. January — 1937. — -V. XXXIII. — Part I. — P. 6—12.

74. Чубариков В.Н. К проблеме Варинга-Гольдбаха [Текст] / В.Н. Чубариков // Доклады Академии наук. — 2009 г. — Т.427. — № 1. — С. 24—27.

75. Чубариков В.Н. О проблеме Варинга-Гольдбаха [Текст] / В.Н. Чубариков, Г.И. Архипов, Ф.С. Авдеев // Современные проблемы математики. — 2009 г. — Т.3. — Выпуск 1. — С. 13—31. МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет.

76. Чубариков В.Н. Кратные тригонометрические суммы с простыми числами [Текст] / В.Н. Чубариков // ДАН СССР. — 1984 г. — Т.278. — № 2. — С. 302—304.

77. Чубариков В.Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами [Текст] / В.Н. Чубариков // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1985 г. — Т.49. — № 5. — С. 1031—1067.

78. Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square [Текст] / T. Estermann // Proc. London math. Soc. — 11(1937). — P. 501—516.

79. Виноградов И.М. Оценки некоторых простейших сумм с простыми числами [Текст] / И.М. Виноградов // Известия АН СССР. Сер. мат. — 1939 г. — Т.3. — С. 371—398.

80. Haselgrove C.B. Some theorems in the analitic theory of number [Текст] / C.B. Haselgrove // J. London Math. SoC. — 1951. — V.26. — P. 273—277.

81. Статулявичус В. О представлении нечетных чисел суммою трех почти равных простых чисел [Текст] / В. Статулявичус // ВильнюС. Ученые труды университета. Сер. мат. физ. и хим. н. — 1955 г. — № 2. — С. 5—23.

82. Jia Chaohua. Three primes theorem in a short interval (II) [Текст] / Chaohua Jia // International symposium in memory of Hua Loo Keng, Science Press and Springer-Verlag. Berlin. — 1991. — P. 103—115.

83. Jia Chaohua. Three primes theorem in a short interval (V) [Текст] / Chaohua Jia // Acta Math. Sin. New Series. — 2(1991). — P. 135—170.

84. Jia Chaohua. Three primes theorem in a short interval (VII) [Текст] / Chaohua Jia // Acta Math. Sin. New Series. — 10(1994). — P. 369—387.

85. Jia Chaohua. Three primes theorem in a short interval (VII) [Текст] / Chaohua Jia // Acta Math. Sinica — 4(1994). — P. 464—473. Chinese.

86. Pan Cheng-dong. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) [Текст] / Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao // Chinese Ann. of Math. — 1990. — V.2. — P. 138—147.

87. Zhan Tao. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes [Текст] / Tao. Zhan // Acta Math Sinica. New ser. — 1991. — V.7. — № 3. — P. 135—170.

88. Weyl H Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins [Текст] /H. Weyl // Math. Ann, 1916, 77, s.313–352.

89. Хуа Ло-Ген Метод тригонометрических сумм и ее применения в теории чисел [Текст] / Ло-Ген Хуа // — М.: Мир. — 1964. — С. 190.

90. Вон Р. Метод Харди-Литтлвуда [Текст] / Р. Вон // — М.: — Мир. — 1985. — С. 184.

91. Мирзоабдугафуров К.И. О среднем значении коротких сумм Вейля [Текст] / К.И. Мизоабдугафуров// Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 2008. — Т. 51. — № 4. — С. 245—247.

92. Азамов А.З. Среднее значение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля четвертой степени [Текст] / А.З. Азамов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 2011. — Т. 54. — № 1. — С. 13—17.

93. Назрублоев Н.Н. О средней значение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля пятой степени [Текст] /Н.Н. Назрублоев // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 2014. — Т. 57. — № 7. С. 531—537.

94. Назрублоев Н.Н. Среднее значение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля пятой степени [Текст] /Н.Н. Назрублоев // Вестник Таджикского национального универститета. — 2015. — № 2. — С. 21—30.

95. Jutila M. 1991, “Mean value etstimates for exponential sums with applications to L-functions [Текст] /M. Jutila // *Acta Arithmetica*, vol. 57, Is. 2. pp. 93—114.

96. Balog A. Perelli A. Exponential sums over primes in short intervals [Текст] / A. Balog, A. Perelli // Acta Math. Hung. — 1986. — V. 48. — № 1–2. — P. 223—228.

97. Pan Cheng-dong, Pan Chend-biao Estimations of trigonometric sums over primes in short interval (II) [Текст] / Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao // Science in China. ser A — 1989. — V. 32.№ 6.P. 641—653.

98. Kumchev A.V. On Weyl sums over primes in short intervals [Текст] / A.V. Kumchev // «Arithmetic in Shangrila» Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. — 2012. — V. 9. Singapore: World ScientifiC. — P. 116—131.

99. Рахмонов З.Х. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малых дугах [Текст] / З.Х. Рахмонов, Ф.З. Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 2016 г. — Т. 59.№ 7-8. — С. 273—277.

100. Рахмонов З.Х. Короткие кубические суммы с простыми числами [Текст] / З.Х. Рахмонов, Ф.З. Рахмонов // Труды МИАН. — 2016 г. — Т. 296. — С. 220—242.

101. Rakhmonov F.Z. Short Cubic Exponential Sums over Primes [Текст] / F.Z. Rakhmonov, Z.Kh. Rakhmonov // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2017. — V. 296. — P. 211—233.

102. Рахмонов Ф.З. Оценка квадратичных тригонометрических сумм с простыми числами [Текст] / Ф.З. Рахмонов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2011 г.№ 3. — С. 56—60.

103. Рахмонов З.Х. Сумма коротких двойных тригонометрических сумм [Текст] / З.Х. Рахмонов, Ф.З. Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 2013 г. — Т. 56.№ 11. — С. 853—860.

104. Рахмонов З.Х. Короткие кубические двойные тригонометрические суммы, с «длинным» сплошным суммированием [Текст] / Б.М. Замонов, З.Х. Рахмонов // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. — 2014 г. — № 4(157). — С. 7—23.

105. Рахмонов З.Х. Оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм с «длинным» сплошным суммированием [Текст] / Б.М. Замонов, З.Х. Рахмонов, Ф.З. Рахмонов // Чебышевский сборник. — 2016 г. — Т. 17. — вып.1. — С. 217—231.

106. Архипов Г.И. Теория кратных тригонометрических сумм. [Текст] / Г.И. Архипов, А.А. Карацуба, В.Н. Чубариков // — М.: — Наука. — 1987 г.

107. Дэвенпорт Х. Мультипликативная теория чисел [Текст] / Х. Дэвенпорт // — М.: — Наука. — 1971 г.

108. Прахар К. Распределение простых чисел [Текст] / К. Прахар // — М.: — Мир. — 1967 г.

109. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел [Текст] / А.А. Карацуба // 2-ое изд, М.: — Наука. 1983.

110. Rane V.V. On the mean square value of Dirichlet L-series [Текст] / V.V. Rane // J. London Math. SoC. — 1980. — № 2. — Vol.21 — P. 203—215.

111. Zhan Tao On the Mean Square of Dirichlet L-Functions [Текст] / Tao. Zhan // Acta Mathematica Sinica. New Series. — 1992.V. — 8.№ 2. — P. 204—224.

112. Виноградов И.М. Основы теории чисел [Текст] / И.М. Виноградов // — М: — Наука. — 1981 г. — 9-ое изд.

113. Фаткина С.Ю. Об одном обобщении тернарной проблемы Гольдбаха для почти равных слагаемых [Текст] / С.Ю. Фаткина // Вестник Московского Университета. серия 1, математика. механика. 2001. №2

114. Рахмонов П.З. Короткие суммы с нецелой степенью натурального числа [Текст] / П.З. Рахмонов // Математические заметки. 2014. – Т. 95. № 5. – С. 763 – 774.

115. Рахмонов П.З. Обобщенная тернарная проблема Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми [Текст] / П.З. Рахмонов // Математические заметки. 2016. – Т. 100. № 3. – С. 410 – 420.

116. Собиров А.А. Короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числами в окрестности центра больших дуг [Текст] / А.А. Собиров // Доклады НАН Таджикистана. — 2021 г. — Т.64. — № 11-12. — С.

117. Weil A. On some exponential sums [Текст] / A. Weil // ProC. Nat. Acad. Sci. USA. — 1948. — 34. — № 5. — P. 204—207.

118. Huxley M.N. On the differences between consecutive primes [Текст] / M.N. Huxley // Invent. math. — 15. — 1972. — P. 164—170.

119. Уиттекер Э.Т. Курс современного анализа. ч. 1. Основные операции анализа [Текст] / Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон // Изд. 2–е. Перев. с англ. Физматгиз. — М. — 1963 г.

Публикации автора по теме диссертации в рецензируемых изданиях из списка ВАК при Президенте Республики Таджикистан

1-А. Фозилова П.М. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Доклады НАН Таджикистна. — 2020 г. — Т. 63. — № 5-6. — С. 279—288.

2-А. Фозилова П.М. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в большие дуги [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Доклады НАН Таджикистна. — 2020 г. — Т. 63. — № 7-8. — С. 405—415.

3-А. Фозилова П.М. Среднее значение коротких кубических тригонометрических сумм Г. Вейля с простыми числоми [Текст] / П.М. Фозилова // Доклады НАН Таджикистна. — 2021 г. — Т. 64. — № 11-12. — С. 605—610.

4-А. Фозилова П.М. Тернарная проблема Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми [Текст] / П.М. Фозилова // Доклады НАН Таджикистна. — 2022 г. — Т. 65. — № 1-2. — С 14–23.

В других изданиях

5-А. Фозилова П.М. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Современные проблемы математики, проблемы и их пути решения, Материалы международной научной онлайн конференции г. Термез. Узбекистан. 21—23 октября — 2020 г. — С. 18—19.

6-А. Фозилова П.М. О поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [Текст]

/ З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений, материалы международной конфренции, посвященной 70 —летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича. Душанбе.25—26 декабря — 2020 г. — С.254—255.

7-А. Фозилова П.М. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в большие дуги за исключением малой окрестности их центров [Текст] / А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Актуальные проблемы современной математики, материалы международной конфренции, посвященной 80 — летию со дня рождения доктора физико-математических наук,профессора Темура Собирова. Душанбе.25—26 июня — 2021 г. — С. 224—226.

8-А. Фозилова П.М. О тернарной проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми [Текст] / П.М. Фозилова // Современные проблемы теории чисел и математического анализа, материалы международной конференции, посвящённой 80–летию с дня рождения доктора физика–математических наук, профессора Дододжона Исмоилова. Душанбе. 29—30 апреля —2022 г. —С. 235—242.