Институт математики им. А.Джураева
Национальная академия наук Таджикистана

УДК 511.32

На правах рукописи

Фозилова Париноз Миралибековна

Асимптотическая формула в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Душанбе – 2022

Работа выполнена в Институте математики им. А.Джураева
Национальной академии наук Таджикистана

Научный руководитель:	Рахмонов Зарулло Хусенович доктор физико-математических наук, академик НАН Таджикистана, директор Института математики им. А. Джураева НАН Таджикистана
Официальные оппоненты:	Аллаков Исмаил, доктор физико-математических наук, Термезский государственный университет, профессор кафедры алгебры и геометрии
	Давлатбеков Акимбек Авалбекович, кандидат физико–математических наук, Таджикский государственный педагогический университет имени Садриддина Айни, заведующий кафедрой алгебры и теории чисел
Ведущая организация:	Таджикский национальный университет

Защита состоится 23 декабря 2022 г. в 10:00 часов на заседании диссертационного совета 6D.КОА-009 при Институте математики имени А. Джураева Национальной Академии наук Таджикистана по адресу: 734063, г. Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Института математики имени А. Джураева Национальной Академии наук Таджикистана, а также на сайте http://www.mitas.tj

Автореферат разослан “___” ________ 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 6D.КОА-009 Каримов О.Х.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Настоящая диссертация является исследованием в аналитической теории чисел, относящимся к области теории коротких тригонометрических сумм, и её приложениям к классическим аддитивным проблемам с более жёсткими условиями, а именно, когда слагаемые почти пропорциональны. Аддитивными проблемами называются задачи о разложении целых чисел на слагаемые заданного вида, к которым относится теорема Лагранжа о представлении натуральных чисел суммой не более четырёх квадратов натуральных чисел и её обобщение, предложенное Варингом[1] в 1770 г., которое утверждает, что последовательность, образованная фиксированной степенью n чисел натурального ряда, образует в нём базис конечного порядка $G(n)$, то есть, каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = N, \tag{1}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — натуральные числа и количество слагаемых r не превосходит фиксированной величины $G(n)$, называемой порядком базиса последовательности $\{x^n\}$, или функцией Харди.

Эти классические аддитивные задачи с дополнительным условием *«с почти пропорциональными слагаемыми»* впервые изучил английский математик Мейтленд Райт в тридцатые годы прошлого века. Остановимся на некоторых его результатах:

- в работах[2,3] он показал, что, если $r \geq 5$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — фиксированные положительные числа, $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r = 1$,

$$\alpha = \frac{r-4}{4(r-3)}, \quad r = 5,\ 6,\ 7; \qquad \alpha = \frac{r-2}{2(2r-1)}, \quad r \geq 8,$$

  и $0 < \beta < \alpha$, тогда любое натуральное число N представимо в виде

$$N = x_1^2 + \ldots + x_r^2, \qquad |x_i^2 - \mu_i N| \ll N^{1-\beta};$$

[1] Waring E. Meditationes algebraicae // Cambridge. 1770.

[2] Wright E.M. The representation of a number as a sum of five or more squares // The Quarterly Journal of Mathematics. 1933. V. 4. Is. 1. P. 37—51.

[3] Wright E.M. The representation of a number as a sum of five or more squares (II) // The Quarterly Journal of Mathematics. 1933. V. 4. Is. 1. P. 228—232.

- в работе[4] доказал, что, если γ, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 — произвольные положительные числа, $\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4=1$, $N=2^\xi N_1$, N_1 — нечётное целое число, $N_1>N_0=N_0(\gamma,\mu_1,\ldots,\mu_4)$, и выполняется условие
$$|x_i^2-\mu_iN|\le\gamma\mu_iN,\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4,$$
тогда число N представимо в виде
$$N=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2,\tag{2}$$
если же N нечётное число, то оно представимо в виде (2) при условии
$$x_i=\frac{1}{2}N^{\frac{1}{2}}(1+o(1)),\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4;$$
- в работе[5] он доказал, что, если $0<\beta<0,2$, то существует число c, $0<c<\frac{5}{12}\left(\frac{1}{5}-\beta\right)$, что имеет место соотношение
$$\#\left\{N:\ N\le X,\, N\ne x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2,\quad |x_i^2-\mu_in|\ll N^{1-\beta}\right\}\ll X^{1-c}.$$
- в этой работе он также доказал, что, если $0<\beta<0,2$, то существует число c, $0<c<\frac{3}{7}\left(\frac{1}{6}-\beta\right)$, что для всех $N\ne4^a(8l+7)$, имеет место соотношение
$$\#\left\{N:\ N\le X,\, N\ne x_1^2+x_2^2+x_3^2,\ |x_i^2-\mu_iN|\ll N^{1-\beta}\right\}\ll X^{1-c}.$$

Аддитивные задачи с почти равными слагаемыми являются частным случаем аддитивных задач с почти пропорциональными слагаемыми, так как при $\mu_1=\ldots=\mu_r$ аддитивная задача с почти пропорциональными слагаемыми превращается в задачу с почти равными слагаемыми.

Пользуясь оценками коротких тригонометрических сумм Г.Вейля[6,7], в том числе и с простыми числами[8,9], были решены следующие аддитивные задачи с почти равными слагаемыми:

[4]Wright E.M. The representation of a number as a sum of four 'almost proportional' squares The Quarterly Journal of Mathematics. — 1936.V. os-7. — Is. 1. — P. 230–240.

[5]Wright E.M. The Representation of a Number as a Sum of Three or Four Squares Proceedings of the London Mathematical Society. — 1937.V. os2-42. Is. 1. — P. 481–500.

[6]Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. — 2014 г. — Т.95. — вып.3. — С. 445—456.

[7]Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н., Рахимов А.О., Короткие суммы Г.Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. — 2015 г. — Т.16. — В.1(53). — С. 232—247.

[8]Zhan T. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica. New ser. — 1991. — V.7. — № 3. — P. 135—170.

[9]Liu J., Lu G., Zhan T. Exponential sums over primes in short intervals // Science in China: Series A Mathematics. — 2006. — V.49. — № 5. — P. 611—619.

- проблема Варинга[7,10] с почти равными слагаемыми, точнее разрешимость уравнения (1) в случаях $n = 3, 4, 5$;
- обобщение [11,7,12] тернарной проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми, то есть, задача о представлении достаточно большого натурального числа в виде

$$p_1 + p_2 + m^n = N, \tag{3}$$

при $n = 2, 3, 4$, в простых числах p_1, p_2 и натурального m;
- тернарная проблема Гольдбаха[8] и обобщение проблемы Эстермана для квадратов простых чисел[9] с почти равными слагаемыми о разрешимости при $n = 1$ и $n = 2$ диофантово уравнение

$$p_1 + p_2 + p^n = N, \tag{4}$$

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней получены правильные по порядку оценки интегралов по периоду от модулей коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами, изучено поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами $S_3(\alpha; x, y)$, и оно приложено к решению проблемы Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми, точнее к выводу асимптотической формулы для более редкой последовательности и с более общими условиями, а именно для количества решений диофантова уравнения (4) при $n = 3$, с условиями

$$|p_i - \mu_i N| \le H, \qquad i = 1, 2, \qquad |p_3^3 - \mu_3 N| \le H, \qquad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$$

для $H \ge N^\theta \mathscr{L}_{\mu_3}^c$, с возможно наименьшим θ.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Решение классических аддитивных проблем привело к созданию новых методов в теории чисел. Наиболее мощным и универсальным является круговой метод Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических

[10]Азамов А.З., Рахмонов З.Х. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // ДАН РТ. — 2011 г. — Т.54. — № 3. — С. 165—172.

[11]Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми// Матаматические заметки. — 2003 г. — Т.74. — вып.4. — С. 564—572.

[12]Рахимов А.О. Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми // ДАН РТ. — 2015 г. — Т.58. — № 9. — С. 769—771.

сумм И.М. Виноградова. Воспользовавшись этим методом, был получен ряд выдающихся результатов по решению классических аддитивных проблем, к которым относятся:

- решение проблемы Варинга в 1909 г. Д.Гильбертом[13], что тем самым он установил существование функции $G(n)$;

- новое доказательство проблемы Варинга Харди и Литтлвуда[14], именно они ввели функцию $G(n)$ и доказали, что

  $$n < G(n) \leq n2^{n-1}h; \lim_{n\to\infty} h = 1,$$

  также при $r > (n-2)2^{n-1}+5$ для числа $J(N)$ представлений числа N ввиду (1) нашли асимптотическую формулу вида

  $$J(N) = \frac{(\Gamma(1+1/n))^r}{\Gamma(r/n)} N^{\frac{r}{n}-1}\mathfrak{S} + O(N^{\frac{r}{n}-1-c(n,r)}), \tag{5}$$

  где $\mathfrak{S}$ — некоторый *особый ряд*, сумма которого, как они показали, превосходит некоторое число $c_1(n,r)$ и $c_1(n,r) > 0$;

- теорема И.М.Виноградова[15] о справедливости асимптотической формулы Харди и Литтлвуда при

  $$r \geq 2[n^2(2\ln n + \ln\ln n + 3)];$$

- доказанная в 1934 г. И.М.Виноградовым[16] принципиальная новая оценка

  $$G(n) < n(6\ln n + 10),$$

  которую он несколько раз уточнял и, наконец[17] в 1959 г. доказал, что

  $$G(n) < n(2\ln n + 4\ln\ln n + 2\ln\ln\ln n + 13);$$

[13] Гильберт Д. Избранные труды // Т.1. Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики. — М:Изд-во «Факториал» — 1998 г. — С. 575.

[14] Hardy G.H., Littlwood J.E. Nachr. Acad. Wiss. Gettingen // Math. Phys. Kl. — 1920. — P. 33—54. — IV: Math. Z. — 1922. — Bd. — V.12. — P. 161—168.

[15] Виноградов И.М. Избранные труды // — М:Изд-во АН СССР. — 1952 г.

[16] Виноградов И.М. Новое решение проблемы Варинга // Доклады Академии наук СССР. — 1934 г. — № 2. — С. 337—341.

[17] Виноградов И.М. К вопросу о верхней границе для $G(n)$ // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1959 г. — Т.23. — № 5. — С. 637—642.

- доказанная своим p–адическим методом оценка А.А.Карацубы[18]
$$G(n) < n(2\ln n + 2\ln\ln n + 12);$$
величина $G(n)$ найдена только для $k=2$ и $k=4$, именно $G(2)=4$, $G(4)=16$, что доказали Лагранж и Давенпорт[19]. Ю.В.Линник[20] доказал, что $G(3)\le 7$, Вон[21] доказал, что асимптотическая формула Харди и Литтлвуда (5) имеет место при $r=8$ и $n=3$;

- решение И.М.Виноградовым[15] в 1937 г. тернарной проблемы Гольдбаха о представлении нечётного натурального числа как суммы трёх простых чисел;

- решение Ю.В.Линником[22] проблемы Харди-Литлвуда о представлении всякого целого числа в виде суммы простого и двух квадратов (сформулирована в 20-х гг. 20 в.);

- решение И.М.Виноградовым[15] проблемы Гольдбаха – Варинга о том, что фиксированная степень n простых чисел p при любом натуральном n образует базис конечного порядка $V(n)$ в натуральном ряде, что каждое достаточно большое натуральное N может быть представлено в виде
$$p_1^n + p_2^n + \cdots + p_k^n = N,$$
где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа и $k \le V(n)$; заметим, что в асимптотической формуле И.М.Виноградова вопрос положительности особого ряда $\sigma = \sigma(k; N)$, до 2009 г. оставался открытим;

- В.Н.Чубариков[23], используя свою теорию кратных тригонометрических сумм с простыми числами[24], являющейся дальнейшим развитием метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами

[18]Карацуба А.А. О функции $G(n)$ в проблеме Варинга // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1985 г. — Т.49 — № 5. — С. 935—947.

[19]Davenport H. // Ann of Math. — 1939. — V.40. — P. 731—747.

[20]Линник Ю.В. О разложении больших чисел на семь кубов // Доклады Академии наук СССР. — 1942 г. — № 35. — С. 179—180.

[21]Vaughan R.C. On Waring's problem for cubes // J. Reine Angew. Math. — 1986. — V.365. — P. 122—170.

[22]Линник Ю.В. Избранные труды Ленинград // — Наука. — 1980.

[23]Чубариков В.Н. К проблеме Варинга-Гольдбаха // Доклады Академии наук. — 2009 г. — Т.427. — № 1. — С. 24—27.

[24]Чубариков В.Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Известия АН СССР. Сер. мат. — 1985 г. — Т.49. — № 5. — С. 1031—1067.

И.М.Виноградова, полностью решил проблему Гольдбаха – Варинга.

- теорема Эстермана[25] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде
$$p_1 + p_2 + m^2 = N,$$
где p_1 и p_2 — простые числа, m — целое число.

Существенный вклад в исследованиях аддитивных задач с почти пропорциональными слагаемыми и являющихся их частным случаем — с почти равными слагаемыми, а также в изучениях поведения коротких тригонометрических сумм Г. Вейля, возникающих при решении этих проблем внесли М.Райт[2,3,4,5], И.М.Виноградов[15], С.Б.Хейзелгроув[26], В.Статулявичус[27], Цзя Чаохуа[28], Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо[29], Т.Жан[30], Дж.Лю и Т.Жан[9].

Цель исследования. Изучение поведения интегралов по периоду от модулей коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами, поведения коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами и их приложения к выводу асимптотической формулы в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми.

Задачи исследования. В соответствие с поставленной целью выделяются следующие задачи:

1. оценка средних значений коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами;
2. исследование поведения коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг;

[25] Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square // Proc. London math. Soc. — 11(1937). — P. 501—516.

[26] Haselgrove C.B. Some theorems in the analitic theory of number // J. London Math. SoC. — 1951. — V.26. — P. 273—277.

[27] Статулявичус В. О представлении нечетных чисел суммою трех почти равных простых чисел // ВильнюС. Ученые труды университета. Сер. мат. физ. и хим. н. — 1955 г. — № 2. — С. 5—23.

[28] Jia Chaohua. Three primes theorem in a short interval (VII) // Acta Math. Sin. New Series. — 10(1994). — P. 369—387.

[29] Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) // Chinese Ann. of Math. — 1990. — V.2. — P. 138—147.

[30] Zhan Tao. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica. New ser. — 1991. — V.7. — № 3. — P. 135—170.

3. оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах за исключением малой окрестности их центров;

4. исследование проблемы Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми, то есть, вывод асимптотической формулы для количества представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы трёх почти пропорциональных слагаемых, два из которых — простые числа, а третье является кубом простого числа;

Научная новизна исследования. Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют теоретический интерес и состоят в следующем:

- обобщена теорема Хуа Ло-кена для коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами, а именно найдены правильные по порядку оценки интегралов по периоду от степени модуля этих сумм;

- доказана асимптотическая формула с остаточным членом для коротких кубических тригонометрических сумм Г. Вейля с простыми числами в малой окрестности центров больших дуг;

- найдена нетривиальная оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах за исключением малой окрестности их центров;

- доказана асимптотическая формула в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применение в аналитической теории чисел при исследованиях проблем теории коротких тригонометрических сумм с простыми числами и аддитивных задач с простыми числами. Материалы диссертации также могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

Личный вклад соискателя учёной степени. Задачи исследования были сформулированы научным руководителем работы, который оказывал консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, отражённые в разделе «Научная новизна», кроме пунктов 2 и 3 получены лично автором. Результаты пунктов 2 (параграф 1.3) и 3 (параграф 1.4) получены совместно с А.А. Собировым и опубликованы в [1-А, 2-А].

Соответствие диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел и является разделом аналитической теории чисел, указанной в пункте III параграфа 3 паспорта научной специальности.

Положения, выносимые на защиту.

1. теорема об обобщении оценки Хуа Ло-кена для коротких квадратичных тригонометрические сумм с простыми числами;
2. теорема об обобщении оценки Хуа Ло-кена для коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами;
3. теорема об асимптотической формуле с остаточным членом для коротких кубических тригонометрических сумм Г. Вейля с простыми числами в малой окрестности центров больших дуг;
4. теорема об оценке коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах за исключением малой окрестности их центров;
5. теорема об асимптотической формуле для количества представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы трёх почти пропорциональных слагаемых, два из которых — простые числа, а третье является кубом простого числа.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- республиканская научно-теоретическая конференция «Современные проблемы алгебры и теории чисел», посвящённая 90-летию со дня рождения профессора Гафура Бабаевича Бабаева, Душанбе, 27 ноября 2018 года;

- международная конференция «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа», посвящённая 60-летию академика Рахмонова З.Х. и члена-корреспондента Академии наук Республики Таджикистана Исхокова С.А., Душанбе, 13-14 декабря 2019 года;
- международная научная конференция «Современные проблемы математики, проблемы и их пути решения», г. Термез. Узбекистан. 21—23 октября 2020 года;
- международная конференция «Актуальные проблемы современной математики», посвящённая 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова, Душанбе, 25-26 июня 2021 года;
- международная конференция «Современные проблемы теории чисел и математического анализа», посвящённая 80–летию со дня рождения доктора физика–математических наук, профессора Дододжона Исмоилова, Душанбе, 29–30 апреля 2022 года.

- семинар отдела алгебры, теории чисел и топологии (2017 – 2022 гг.) и общеинститутский семинар (2018 – 2022 гг.) в Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан;
- семинар кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в восьми научных работах. Работы [1–А, 2–А, 3–А, 4–А] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан. Три работы написаны автором лично. Четыре работы написаны в соавторстве с А.А.Собировым, а также с научным руководителем, которому принадлежат постановка задач. Одна работа написана совместно с А.А.Собировым.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из обозначений, введения, общей характеристики работ, двух глав, заключения, списка цитированной литературы из 127 наименований, занимает 124 страницы машинописного текста и набрана на редакторе LaTeX.

Основная част исследования

Материал и методы исследования. В основе исследований лежат современные методы аналитической теории чисел, а именно:

- методы L-рядов Дирихле, методы Ю.В.Линника и Н.Г.Чудакова, основанные на плотности нулей L-рядов Дирихле в критической полосе;
- метод оценки специальных тригонометрических сумм и интегралов Ван дер Корпута.
- круговой метод Г.Харди, Д.Литтлвуда и С.Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова.

Результаты исследования. Приводим краткое изложение результатов диссертационной работы.

Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы. Во введении даётся краткий исторический обзор результатов по затрагиваемым проблемам, обосновывается актуальность темы.

Первая глава состоит из двух параграфов и посвящена обзору изученной литературы по теме диссертационной работы. Приведены основные методы исследования.

Вторая глава состоит из четырёх параграфов и посвящена обобщению теоремы Хуа Ло-кена для коротких квадратичных и кубических тригонометрических сумм с простыми числами, выводу асимптотической формулы с остаточным членом для коротких кубических тригонометрических сумм Г.Вейля с простыми числами в малой окрестности центров больших дуг, а также нетривиальной оценки таких сумм в больших дугах за исключением малой окрестности их центров.

В первом параграфе приведены известные леммы, которые применяются в последующих параграфах.

Хуа Ло–кен[31] для средних значений сумм Вейля вида

$$T_n(\alpha, x) = \sum_{m\le x} e\left(\alpha m^n\right)$$

[31]Вон Р. Метод Харди-Литтлвуда // — М.: — Мир. — 1985. — С. 184.

получил правильную по порядку оценку

$$\int_0^1 |T_n(\alpha;x)|^{2^k}\, d\alpha \ll x^{2^k-k+\varepsilon}, \qquad 1 \le k \le n.$$

В работах[7,32,33] оценка Хуа Ло-кена обобщена для коротких тригонометрических сумм Вейля вида

$$T_n(\alpha;x,y) = \sum_{x-y<m<x} e(\alpha m^n),$$

при $n = 3;\ 4;\ 5$, то есть, для среднего значения $T_n(\alpha;x,y)$ — сумм Г.Вейля, переменное суммирование которых принимает значения из коротких интервалов, получена правильная по порядку оценка вида

$$\int_0^1 |T_n(\alpha;x,y)|^{2^k}\, d\alpha \ll y^{2^k-k+\varepsilon}, \qquad 1 \le k \le n,$$

соответственно были приложены при выводе асимптотических формул в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми[9,10].

В втором параграфе эта оценка Хуа Ло-кена обобщена для коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрические сумм с простыми числами, то есть, при $k = 2,\ 3$ для сумм вида

$$\mathbb{S}_k(\alpha;x,y) = \sum_{x-y<p\le x} e(\alpha p^k).$$

Теорема 2.1. *Пусть x и y — натуральные числа, $\sqrt{x} < y \le 0,01x$, тогда имеет место оценка*

$$\int_0^1 |\mathbb{S}_2(\alpha;x,y)|^4\, d\alpha \ll y^{2+\varepsilon}.$$

Теорема 2.2. *Пусть x и y — натуральные числа, $\sqrt{x} < y \le 0,01x$, тогда имеет место оценка*

$$\int_0^1 |\mathbb{S}_3(\alpha;x,y)|^{2^k}\, d\alpha \ll y^{2^k-k+\varepsilon}, \qquad 1 \le k \le 3.$$

---

[32]Азамов А.З. Среднее значение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля четвертой степени // ДАН РТ. — 2011. — Т. 54. — № 1. — С. 13—17.

[33]Назрублоев Н.Н. О средней значение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля пятой степени // ДАН РТ. — 2014. — Т. 57. — № 7. С. 531—537.

Основу доказательства этих теоремы составляют классический метод Г.Вейля и соображение о том, что интеграл от чётной степени модуля короткой суммы Вейля, выражается через количество решений диофантового уравнения.

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \qquad 1 \le q \le \tau, \qquad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \le P$, $P < Q$ через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

В третьем параграфе, воспользовавшись плотностной теоремой для нулей L-функций Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы, являющиеся следствием теоремы о втором моменте L-функций Дирихле в критической прямой доказана теорема о поведении коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$S_3(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n) e(\alpha n^3),$$

в малой окрестности центра больших дуг $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ при $\tau = y^5 x^{-2} \mathscr{L}_x^{-b_1}$.

Теорема 2.3. *Пусть $x \ge x_0$, A, b — произвольные фиксированные положительные числа, $1 \le q \le \mathscr{L}_x^b$. Тогда при $\lambda \le \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$ и $y \ge x^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}_x^{1.5A+0.25b+18}$ справедлива асимптотическая формула:*

$$S_3(\alpha; x, y) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e\left(\frac{an^3}{q}\right) \int\limits_{x-y}^{x} e(\lambda u^3) du + O\left(y \mathscr{L}_x^{-A}\right).$$

В четвёртом параграфе, воспользовавшись плотностной теоремой для нулей L-функций Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы, как мы уже отметили в предыдущем параграфе, являющиеся следствием теоремы о втором моменте L-функций Дирихле в критической прямой, получена нетривиальная оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами $S_3(\alpha;x,y)$ в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ за исключением малой окрестности их центров при $\tau=y^5x^{-2}\mathscr{L}_x^{-b_1}$.

Теорема 2.4. *Пусть $x\ge x_0$, A, b_1, b — произвольные фиксированные положительные числа, $1\le q\le\mathscr{L}_x^b$, $\tau=y^5x^{-2}\mathscr{L}_x^{-b_1}$,*

$$\eta_3=\frac{2}{7+4\sqrt{3}}\approx 0.1435935394,\qquad c_3=\frac{2A+24+\left(\sqrt{3}-1\right)b_1}{4\sqrt{3}-3}.$$

Тогда при $y\ge x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}_x^{c_3}$ и $\lambda>\left(18\pi xy^2\right)^{-1}$ имеет место оценка

$$S_3(\alpha;x,y)\ll y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

Доказательство теорем 2.3 и 2.4 основывается на дальнейшем развитии методов работы Ю.В.Линника[34] и Н.Г.Чудакова[35], в которых, соответственно, исследуются тригонометрические суммы с простыми числами и задача о попадании простых чисел в короткие интервалы.

Третья глава состоит из трёх параграфов и посвящена выводу асимптотической формулы в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми.

Как выше было отмечено, в тридцатые годы прошлого века английский математик Мейтленд Райт сформулировал и сам впервые исследовал ряд аддитивных задач с почти пропорциональными слагаемыми, в том числе он впервые нашёл асимптотическую формулу в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми[36,37]. Он доказал, *пусть $\mu_1,\ldots,\mu_s$ — фиксированные положительные числа*

$$s\ge s_0,\quad 0<\beta<\min\left(\frac{s-4}{4(s-3)},\ \frac{s-2}{2(s-1)}\right),\quad m_i\ge 0,\quad i=\overline{1,s},$$

$$\gamma=\frac{s}{k}-1-(s-1)\beta,\quad \mu_1+\ldots+\mu_s=1,$$

$$r(n)=\#\left\{(m_1,\ldots,m_s):\ m_1^k+\ldots+m_s^k=n,\ |m_i-\mu_in|\le A_in^{1-\beta}\right\},$$

[34]Линник Ю.В. Новое доказательство теоремы Гольдбаха-Виноградова // Математический сборник, 1946, т. 19, вып.1, с. 3-8.

[35]Chudakov N.G. On the difference between two neighboring prime numbers // Mat. Sb., 1, 1936, 799 – 814.

[36]Wright E.M. Proportionality conditions in Waring's 7problem // Mathematische Zeitschrift. — 1934.V. 38. P. 730–746.

[37]Wright E.M. An extension of Waring's problem // Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A 232 1-26 (1933). Zbl 0006.39602

тогда справедлива асимптотическая формула

$$r(n) = \frac{c\left(\prod \mu_i\right)^{a-1}}{k^s\Gamma(s)}\mathfrak{S}(n)n^\gamma + O\left(n^{\gamma-d}\right),$$

где $c = c(A_1, \ldots, A_s)$ *— абсолютная постоянная,* $d = d(s, \beta) > 0$.

Как уже выше также было отмечено, аддитивные задачи с почти равными слагаемыми являются частным случаем аддитивных задач с почти пропорциональными слагаемыми, к числу которых относятся проблема Варинга, тернарная проблема Гольдбаха и обобщение проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми.

Для произвольного фиксированного n поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида

$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\le x} e(\alpha m^n),$$

в больших дугах было исследовано З.Х.Рахмоновым и его учениками в работах[6,7]. Воспользовавшись этими работами, были решены следующие аддитивные задачи с почти равными слагаемыми:

- проблема Варинга с почти равными слагаемыми в случаях $n = 3, 4, 5$, точнее были найдены[7,10] асимптотические формулы для количества решений диофантова уравнения (1), с условиями

  $$\left|x_i - \left(\frac{N}{2^n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\right| \le H, \qquad i = 1, \ldots, 2^n + 1, \qquad H \ge N^{\frac{1}{n}-\theta(n)+\varepsilon};$$

  где

  $$\theta(3) = \frac{1}{30}, \qquad \theta(4) = \frac{1}{108}, \qquad \theta(5) = \frac{1}{340}.$$

- обобщение[11,7,12] тернарной проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми о представлении достаточно большого натурального числа в виде (3) при $n = 2, 3, 4$, в простых числах p_1, p_2 и натурального m, с условиями

  $$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2, \qquad \left|m^n - \frac{N}{3}\right| \le H, \qquad H \ge N^{1-\theta(n)}\mathscr{L}^{c_n},$$

  соответственно при

  $$\theta(2) = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 2; \qquad \theta(3) = \frac{1}{6}, \quad c_3 = 3; \qquad \theta(4) = \frac{1}{12}, \quad c_4 = \frac{40}{3}.$$

Т.Жан и Дж.Лю[8,9] исследовали поведение коротких тригонометрических сумм с простыми числами сумму вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n) e(\alpha n^k),$$

в больших, так и малых дугах, и приложили полученные результаты к тернарной проблеме Гольдбаха и обобщение проблемы Эстермана для квадратов простых чисел с почти равными слагаемыми. Они при $n = 1$ и $n = 2$ нашли асимптотические формулы для количества представлений достаточно большого натурального числа N, в виде (4) с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad \left|p_3^n - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad H \ge N^{1-\theta(n)+\varepsilon} \tag{6}$$

соответственно при

$$\theta(1) = \frac{3}{8}, \qquad \theta(2) = \frac{5}{32}.$$

Основным результатом третей главы является теорема 3.1 об асимптотической формуле для последовательности с почти пропорциональными слагаемыми, когда показатель простого числа p_3 в уравнении (4) с условиями (6) равно $n = 3$.

Теорема 3.1. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, μ_1, μ_2, μ_3 — положительные фиксированные числа, удовлетворяющие условию*

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \qquad \eta = \frac{2}{7+4\sqrt{3}}, \qquad c = \frac{10476 - 4816\sqrt{3}}{39},$$

$I(N, H)$ — число решений относительно простых чисел p_1, p_2 и p_3 диофантова уравнения

$$p_1 + p_2 + p_3^3 = N, \quad |p_i - \mu_i N| \le H, \quad i = 1, 2, \quad |p_3^3 - \mu_3 N| \le H.$$

Тогда при $H = N^{1-\frac{1}{15+3\eta}} \mathscr{L}_{\mu_3}^c$, справедлива асимптотическая формула

$$I(N, H) = \frac{\mathfrak{S}(N) H^2}{9(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}_{\mu_3}^3} + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}_{\mu_3}^4}\right), \quad \mathfrak{S}(N) = \prod_p \left(1 + \frac{\Phi(p, N)}{(p-1)^3}\right),$$

где $\Phi(p, N) = 1 - p$, если $(p, N) = p$, и $\Phi(p, N) = 1 - p + p\rho(N, p)$, если $(p, N) = 1$, $\rho(N, p)$ — число решений сравнения $k^3 \equiv N \pmod p$.

Теорема 3.1 доказывается круговым методом Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова, используя результаты предыдущих глав, а именно

- теорему 2.3 об асимптотической формуле для коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами $S_3(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг;
- теорему 2.4 о нетривиальной оценке коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами $S_3(\alpha; x, y)$ в больших дугах за исключением малой окрестности их центров.

Выводы

Выводы.

Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют теоретический интерес и состоят в следующем:

- обобщена теорема Хуа Ло-кена для коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами, то есть найдены правильные по порядку оценки интегралов по периоду от степени модуля этих сумм [3-А, 8-А];
- найдена асимптотическая формула с остаточным членом для коротких кубических тригонометрических сумм Г.Вейля с простыми числами в малой окрестности центров больших дуг [1-А, 5-А, 6-А, 8-А];
- получена нетривиальная оценка для коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах за исключением малой окрестности их центров [2-А, 7-А, 6-А, 8-А];
- получена асимптотическая формула в обобщении проблемы Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми для кубов простых чисел [4-А, 8-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применение в аналитической теории чисел при исследованиях проблем теории коротких тригонометрических сумм с простыми числами и аддитивных задач с простыми числами. Материалы диссертации также могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

Публикации автора по теме диссертации

В рецензируемых изданиях из списка ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1–А]. Фозилова П.М. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Доклады НАН Таджикистна. — 2020 г. — Т. 63. — № 5-6. — С. 279—288.

[2–А]. Фозилова П.М. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в большие дуги [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Доклады НАН Таджикистна. — 2020 г. — Т. 63. — № 7-8. — С. 405—415.

[3–А]. Фозилова П.М. Среднее значение коротких кубических тригонометрических сумм Г. Вейля с простыми числоми [Текст] / П.М. Фозилова // Доклады НАН Таджикистна. — 2021 г. — Т. 64. — № 11-12. — С. 605—610.

[4–А]. Фозилова П.М. Тернарная проблема Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми [Текст] / П.М. Фозилова // Доклады НАН Таджикистна. — 2022 г. — Т. 65. — № 1-2. — С 14–23.

В других изданиях

[5–А]. Фозилова П.М. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Современные проблемы математики, проблемы и их пути решения, Материалы международной научной онлайн конференции г. Термез. Узбекистан. 21—23 октября — 2020 г. — С. 18—19.

[6–А]. Фозилова П.М. О поведении коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений, материалы международной конфренции, посвящённой 70 —летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича. Душанбе.25—26 декабря — 2020 г. — С.254—255.

[7–А]. Фозилова П.М. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в большие дуги за исключением малой окрестности их центров [Текст] / А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Актуальные проблемы современной математики, материалы международной конфренции, посвящённой 80 — летию со дня рождения доктора физико-математических наук,профессора Темура Собирова. Душанбе.25—26 июня — 2021 г. — С. 224—226.

[8–А]. Фозилова П.М. О тернарной проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми [Текст] / П.М. Фозилова // Современные проблемы теории чисел и математического анализа, материалы международной конференции, посвящённой 80–летию со дня рождения доктора физика–математических наук, профессора Дододжона Исмоилова. Душанбе. 29—30 апреля —2022 г. — С. 235—242.

Институти математика ба номи А.Ҷӯраев
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

УДК 511.32

Бо ҳуқуқи дастхат

Фозилова Париноз Миралибековна

Формулаи асимптотики дар муаммои Эстерман барои кубҳои ададҳои содда бо ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб

Автореферат

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физика-математика аз руи истисоси

01.01.06 – Мантиқи математикӣ, алгебра ва назарияи ададҳо

Душанбе – 2022

Кор дар Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраев таълиф шудааст

Роҳбари илмӣ: Раҳмонов Зарулло Ҳусенович
доктори илмҳои физикаю математика,
академики Академия миллии илмҳоиТоҷикистон,
директори Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраев

Мукарризони расмӣ: Аллаков Исмаил,
доктори илмҳои физикаю математика,
Донишгоҳи давлатии Термез,
профессори кафедраи алгебра ва геометрия

Давлатбеков Акимбек Авалбекович,
номзади илмҳои физикаю математика,
Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи
Садриддин Айнӣ, мудири кафедраи алгебра
ва назарияи ададҳо

Муасисаи пешбар: Донишгоҳи Миллии Тоҷикистон

Ҳимояи диссертатсия санаи 23–декабри соли 2022 соати 10:00 дар Ҷаласаи Шӯрои диссертатсионии 6D.KOA-009 дар назди Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон аз рӯи нишонаи: 734063, ш. Душанбе, к. Айнӣ 299/4. баргузор мегардад

Бо матни пурраи диссертатсия дар китобхонаи Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, ва сомонаи http://www.mintas.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат санаи “___” ________ 2022 с аз рӯи феҳрист пешниҳод гардида, ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шӯрои диссертатсионии 6D.KOA-009
доктори илмҳои физикаю-математика Каримов О.Х.

Тавсифи умумии диссертатсия

Мубрамии мавзӯи таҳқиқот. Рисолаи илмии мазкур тадқиқот дар назарияи аналитикии ададҳо буда, ба соҳаи назарияи суммаҳои кӯтоҳи тригонометрӣ ва татбиқи он ба муаммоҳои аддитивӣ бо шартҳои катъитари мутаносиб будани ҷамшавандаҳо, тааллуқ дорад. Муаммоҳои аддитивӣ гуфта масъалаҳои ҷудокунии ададҳои бутунро ба ҷамъшавандаҳои намудашон пешакӣ додашударо меноманд, ки ба онҳо теоремаи Лагранж оиди тасвири адади натуралӣ ҳамчун суммаи на зиёда аз чор квадратҳои ададҳои натуралӣ ва умумияти он оиди базиси тартибаш охирноки $G(n)$ будани пайдарпаии дараҷаҳои n-и ададҳои натуралӣ, яъне оиди тасвири дилхоҳ адади натуралии кифоя калони N дар намуди

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = N, \tag{1}$$

дар ин ҷо $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — ададҳои натуралӣ ва r — миқдори ҷамъшавандаҳо аз бузургии қайдкардашудаи $G(n)$ калоннабуда, ки аз тарафи Варинг[1] дар соли 1770 пешниҳод шудааст, шомиланд.

Ин муаммои аддитивии классикиро бо шартҳои иловагии *«бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар»* бори аввал математики англис Мейтленд Райт дар солҳои сиюми асри гузашта омӯхтааст. Ба баъзе натиҷаҳои ӯ истода мегузарем:

- дар кори[2,3] нишон дод, ки агар $r \geq 5$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — адади қайдкардашудаи мусбат, $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r = 1$,

  $$\alpha = \frac{r-4}{4(r-3)}, \quad r = 5,\ 6,\ 7; \qquad \alpha = \frac{r-2}{2(2r-1)}, \quad r \geq 8,$$

  ва $0 < \beta < \alpha$ бошанд, пас дилхоҳ адади натуралии N ба намуди

  $$N = x_1^2 + \ldots + x_r^2, \qquad |x_i^2 - \mu_i N| \ll N^{1-\beta},$$

  тасвир карда мешавад;

[1] Waring E. Meditationes algebraicae // Cambridge. 1770.

[2] Wright E.M. The representation of a number as a sum of five or more squares // The Quarterly Journal of Mathematics. 1933. V. 4. Is. 1. P. 37—51.

[3] Wright E.M. The representation of a number as a sum of five or more squares (II) // The Quarterly Journal of Mathematics. 1933. V. 4. Is. 1. P. 228—232.

- дар кори[4] исбот кард, ки агар $\gamma,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4$ — ададҳои мусбати ихтиёрӣ, $\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4=1,\ N=2^{\xi}N_1,\ N_1$ — адади бутуни тоқ, $N_1>N_0=N_0(\gamma,\mu_1,\ldots,\mu_4)$ ва шарти

$$|x_i^2-\mu_iN|\leq\gamma\mu_iN,\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

иҷро шавад, пас адади N ба намуди

$$N=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2,\tag{2}$$

тасвир карда мешавад, ҳангоми тоқ будани адади N он ба намуди (2) бо шарти

$$x_i=\frac{1}{2}N^{\frac{1}{2}}(1+o(1)),\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

тасвир карда мешавад;

- дар кори[5] ӯ исбот кард, ки агар $0<\beta<0,2$, бошад, пас чунин адади $c,\ 0<c<\frac{5}{12}\left(\frac{1}{5}-\beta\right)$ мавҷуд аст, ки муносибати зерин ҷой дорад:

$$\#\left\{N:\ N\leq X,\ N\neq x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2,\quad |x_i^2-\mu_in|\ll N^{1-\beta}\right\}\ll X^{1-c}.$$

- дар ин кор инчунин исбот кард, ки агар $0<\beta<0,2$, бошад, пас адади $c,\ 0<c<\frac{3}{7}\left(\frac{1}{6}-\beta\right)$ мавҷуд аст, ки барои ҳамаи $N\neq 4^a(8l+7)$, муносибати зерин ҷой дорад

$$\#\left\{N:\ N\leq X,\ N\neq x_1^2+x_2^2+x_3^2,\ |x_i^2-\mu_iN|\ll N^{1-\beta}\right\}\ll X^{1-c}.$$

Масъалаҳои аддитивӣ бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар, ҳолатҳои хусусии масъалаҳои аддитивии ба ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб, чунки ҳангоми $\mu_1=\ldots=\mu_r$ будан масъалаи аддитивӣ бо ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб ба масъалаи бо ҷамъшавандаи қариб баробар мубаддал мегардад.

---

[4]Wright E.M. The representation of a number as a sum of four 'almost proportional' squares The Quarterly Journal of Mathematics. — 1936.V. os-7. — Is. 1. — P. 230–240.

[5]Wright E.M. The Representation of a Number as a Sum of Three or Four Squares Proceedings of the London Mathematical Society. — 1937.V. os2-42. Is. 1. — P. 481–500.

Бо истифодаи баҳоҳои суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии Г. Вейл[6,7], аз ҷумла бо ададҳои содда[8,9] масъалаҳои зерини аддитивӣ бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар ҳал карда шудаанд:

- муаммои Варинга[7,10] бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар, аниқтар ҳалшавандагии муодилаи (1) дар ҳолатҳои $n = 3, 4, 5$;
- муаммои умумикардашудаи[11,7,12] тернарии Эстерманбо бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар, яъне ҳангоми $n = 2, 3, 4$ масъалаҳо оиди тасвири адади кифоя натуралӣ ба намуди
$$p_1 + p_2 + m^n = N, \tag{3}$$
нисбат ба ададҳои соддаи p_1, p_2 ва натуралии m;
- муаммои тернарии Гольдбах[8] ва муаммои умумикардашудаи Эстермана барои квадрати ададҳои содда[9] бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар, яъне оиди ҳалшавандагии муодилаи диофантови
$$p_1 + p_2 + p^n = N, \tag{4}$$
дар ҳолатҳои $n = 1$ ва $n = 2$.

Мубрамият ва мувофиқи мақсад будани кори диссертатсионро бо омилҳои дар он гирифтани баҳоҳои тартибашон дурусти интегралхо аз модулҳои суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи квадратӣ ва кубӣ бо ададҳои содда аз даврашон, омӯхтани рафтори суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи кубӣ бо ададҳои соддаи $S_3(\alpha; x, y)$ ва татбиқи онҳо дар ҳалли дар муаммои Эстерман барои кубҳои ададҳои содда бо ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб, аниқтараш баровардани формулаи асимптотӣ барои пайдарпаи

[6] Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. — 2014 г. — Т.95. — вып.3. — С. 445—456.

[7] Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н., Рахимов А.О., Короткие суммы Г.Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. — 2015 г. — Т.16. — В.1(53). — С. 232—247.

[8] Zhan T. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica. New ser. — 1991. — V.7. — № 3. — P. 135—170.

[9] Liu J., Lu G., Zhan T. Exponential sums over primes in short intervals // Science in China: Series A Mathematics. — 2006. — V.49. — № 5. — P. 611—619.

[10] Азамов А.З., Рахмонов З.Х. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // ДАН РТ. — 2011 г. — Т.54. — № 3. — С. 165—172.

[11] Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми// Матаматические заметки. — 2003 г. — Т.74. — вып.4. — С. 564—572.

[12] Рахимов А.О. Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми // ДАН РТ. — 2015 г. — Т.58. — № 9. — С. 769—771.

сирактару бо шартҳои умумитар, яъне барои миқдори ҳалҳои муодилаи (4) бо шартҳои

$$|p_i - \mu_i N| \leq H, \qquad i = 1, 2, \qquad |p_3^3 - \mu_3 N| \leq H, \qquad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$$

ҳангоми $H \geq N^{\theta}\mathscr{L}_{\mu_3}^{c}$, барои θ-и имконпазир хурдтарин, муайян карда мешаванд.

Дараҷаи коркарди илмии проблемаи мавриди омӯзиш. Ҳалли муаммоҳои аддитивии классикӣ ба сохтани методҳом нав дар назарияи ададҳо мусоидат намуд. Методи доиравии Харди, Литтлвуд, Рамануджана дар шакли суммаҳои тригонометрии И.М. Виноградов аз ҳама қавӣ ва универсиалӣ мебошад. Бо истифодаи ин метод дар ҳалли муаммоҳои аддитивии классикӣ як катор натиҷаҳои барҷаста гирифта шуд, аз ҷумла:

- муаммои Варингро дар соли 1909 ҳал намудани Д. Гильберт[13], яъне муқаррар намудани мавҷудияти функсияи $G(n)$;
- муаммои Варингро аз нав исбот намудани Харди ва Литтлвуд[14], хусусан дохил намудани функсияи $G(n)$, исботи нобаробарии

  $$n < G(n) \leq n2^{n-1}h; \qquad \lim_{n\to\infty} h = 1,$$

  ва ҳангоми $r > (n-2)2^{n-1} + 5$ барои $J(N)$ — миқдори тасвирҳои адади N дар намуди (1) ёфтани формулаи асимптотии

  $$J(N) = \frac{(\Gamma(1+1/n))^r}{\Gamma(r/n)} N^{\frac{r}{n}-1}\mathfrak{S} + O(N^{\frac{r}{n}-1-c(n,r)}), \tag{5}$$

  дар ин ҷо $\mathfrak{S}$ — *қатори хос*, ки суммаи он аз ягон адади $c_1(n,r)$ $(c_1(n,r) > 0)$ калон мебошад;
- теоремаи И.М.Виноградов[15] оиди ҷой доштани формулаи асимптотикии Харди ва Литтлвуд ҳангоми

  $$r \geq 2[n^2(2\ln n + \ln\ln n + 3)];$$

---

[13] Гильберт Д. Избранные труды // Т.1. Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики. — М:Изд-во «Факториал» — 1998 г. — С. 575.

[14] Hardy G.H., Littlwood J.E. Nachr. Acad. Wiss. Gettingen // Math. Phys. Kl. — 1920. — P. 33—54. — IV: Math. Z. — 1922. — Bd. — V.12. — P. 161—168.

[15] Виноградов И.М. Избранные труды // — М:Изд-во АН СССР. — 1952 г.

- дар соли 1934 аз тарафи И.М.Виноградов[16] исбот шудани баҳои мутлақо нави
$$G(n) < n(6\ln n + 10),$$
якчанд маротиба аниқ кардани он ва ниҳоят[17] соли 1959 исбот намудани нобаробарии
$$G(n) < n(2\ln n + 4\ln\ln n + 2\ln\ln\ln n + 13);$$

- аз тарафи А.А.Каратсуба[18] бо усули p–адикӣ исботнамудани баҳои
$$G(n) < n(2\ln n + 2\ln\ln n + 12);$$
бузургии $G(n)$ танҳо барои $k = 2$ ва $k = 4$ ёфта шудааст, яъне $G(2) = 4$, $G(4) = 16$, ки онро мувофиқан Лагранж ва Давенпорт[19] исбот намуда буданд. Ю.В.Линник[20] исбот намуд, ки $G(3) \leq 7$, Вон[21] исбот намуд, ки формулаи асимптотикии Харди ва Литтлвуд (4) ҳангоми $r = 8$ ва $n = 3$ ҷой дорад;

- дар соли 1937 аз тарафи И.М.Виноградов[15] ҳал шудани муаммоҳои тернарии Гольдбах оиди тасвири ададҳои натуралии тоқ ҳамчун суммаи се адади содда;

- муаммои Харди-Литлвуд оиди тасвири дилхоҳ адади бутун дар намуди суммаи адади содда ва квадратҳои ду ададро ҳал кардани Ю.В.Линник[22] (дар солҳои 20-уми асри 20 тасвия шудааст);

- ҳал шудани муаммои Гольдбах – Варинг аз тарафи И.М.Виноградов[15] оиди барои қатори ададҳои натуралӣ базиси тартибаш охирноки $V(n)$

[16]Виноградов И.М. Новое решение проблемы Варинга // Доклады Академии наук СССР. — 1934 г. — № 2. — С. 337—341.

[17]Виноградов И.М. К вопросу о верхней границе для $G(n)$ // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1959 г. — Т.23. — № 5. — С. 637—642.

[18]Карацуба А.А. О функции $G(n)$ в проблеме Варинга // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1985 г. — Т.49 — № 5. — С. 935—947.

[19]Davenport H. // Ann of Math. — 1939. — V.40. — P. 731—747.

[20]Линник Ю.В. О разложении больших чисел на семь кубов // Доклады Академии наук СССР. — 1942 г. — № 35. — С. 179—180.

[21]Vaughan R.C. On Waring's problem for cubes // J. Reine Angew. Math. — 1986. — V.365. — P. 122—170.

[22]Линник Ю.В. Избранные труды Ленинград // — Наука. — 1980.

будани дарачаҳои n-и адаҳои соддаи p, n ададі натуралии қайдкардашуда, яъне тасвири ададі натуралии кифоя калони N дар намуди

$$p_1^n + p_2^n + \cdots + p_k^n = N,$$

$p_1, p_2, \ldots, p_k$ — ададҳои содда ва $k \leq V(n)$; дар формулаи асимптотикии И.М.Виноградов масъалаи мусбат будани қатори махсуси $\sigma = \sigma(k; N)$, то соли 2009 кушода боқӣ монда буд;

- аз тарафи В.Н.Чубариков[23], пурра ҳал щудани муаммои Гольдбах – Варинг бо истифодаи назарияи суммаҳои тригонометрии каратӣ бо ададҳои содда[24], ки рушди минбаъдаи методи баҳодиҳии суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои соддаи И.М.Виноградов мебошад;

- исбот шудани теореми Эстерман[25] оиди тасвири ададі натуралии $N > N_0$ дар намуди

$$p_1 + p_2 + m^2 = N,$$

ки p_1 ва p_2 — ададҳои содда, m — ададі бутун.

Нақши назаррасро дар тадқиқи масъалаҳои аддитивӣ бо чамъшавандаҳои қариб мутаносиб, ҳолати хусусии он — бо чамъшавандаҳои қариб баробар ва омӯзиши рафтори суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии Г. Вейл, ки ҳангоми ҳалли ин муаммоҳо пайдо мешавад, М.Райт[2,3,4,5], И.М.Виноградов[15], С.Б.Хейзелгроув[26], В.Статулявич[27], Сзя Чаохуа[28], Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо[29], Т.Жан[30], Ч.Лю ва Т.Жан[9] гузоштанд.

[23] Чубариков В.Н. К проблеме Варинга-Гольдбаха // Доклады Академии наук. — 2009 г. — Т.427. — № 1. — С. 24—27.

[24] Чубариков В.Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Известия АН СССР. Сер. мат. — 1985 г. — Т.49. — № 5. — С. 1031—1067.

[25] Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square // Proc. London math. Soc. — 11(1937). — P. 501—516.

[26] Haselgrove C.B. Some theorems in the analitic theory of number // J. London Math. SoC. — 1951. — V.26. — P. 273—277.

[27] Статулявичус В. О представлении нечетных чисел суммою трех почти равных простых чисел // ВильнюС. Ученые труды университета. Сер. мат. физ. и хим. н. — 1955 г. — № 2. — С. 5—23.

[28] Jia Chaohua. Three primes theorem in a short interval (VII) // Acta Math. Sin. New Series. — 10(1994). — P. 369—387.

[29] Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) // Chinese Ann. of Math. — 1990. — V.2. — P. 138—147.

[30] Zhan Tao. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica. New ser. — 1991. — V.7. — № 3. — P. 135—170.

Мақсади таҳқиқот. Омӯзиши рафтори интегралҳо аз модулҳои суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии квадратӣ ва кубӣ бо ададҳои содда аз рӯи даврашон, рафтори суммаҳои кӯтоҳи тригономнтрии кубӣ бо ададҳои содда ва тадбиқи онҳо барои ҳосил намудани формулаи асимптотикӣ дар муаммои Эстерман барои кубҳои ададҳои содда бо ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб.

Вазифаҳои таҳқиқот. Дар асоси мақсади гузошташуда, масъалаҳои зерин ҷудо карда шудаанд:

1. баҳои қиматҳои миёнаи сумаҳои кӯтоҳи тригонометрии квадратӣ ва кубӣ бо ададҳои содда;
2. тадқиқи рафтори суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи кубӣ бо ададҳои содда дар атрофи хурди маркази камонҳои калон;
3. баҳои суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи кубӣ бо ададҳои содда дар камонҳои калон ба ғайр аз атрофи хурди марказҳои онҳо;
4. тадқиқи муаммои Эстерман барои кубҳои ададҳои содда бо ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб, яъне ҳосил намудани формулаи асимптотикӣ барои миқдори тасвирҳои адади натуралии кифоя калон дар намуди суммаи се чамъшавандаи қариб мутаносиб, ки дутои онҳо — ададҳои содда ва сеюмашон куби адади содда мебошад;

Навгонии илмии таҳқиқот. Ҳамаи натиҷаҳои диссертатсия нав буда, хусусияти назариявӣ дошта, аз инҳо иборатанд:

- умумӣ кардани теоремаи Хуа Ло-кен барои суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи квадратӣ ва кубӣ, яъне ёфтани баҳоҳои тартибашон дурусти интегралҳо аз модулҳои дараҷаи ин суммаҳо аз рӯи даврашон;
- исботи формулаи асимптотӣ бо аъзои боқимонда барои суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи кубии Г. Вейл бо ададҳои содда дар атрофи хурди камонҳои калон;
- ёфтани баҳои ғайритривиалии суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи кубӣ бо ададҳои содда дар камонҳои калон ба ғайр аз атрофи хурди марказҳои онҳо;
- исботи формулаи асимптотикӣ дар муаммои Эстерман барои кубҳои ададҳои содда бо ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб.

Аҳамияти назариявӣ ва илмию амалии таҳқиқот. Натиҷаҳои дар диссертатсия ба даст овардашуда хусусияти назариявӣ доранд. Онҳоро дар назарияи аналитикии ададҳо ҳангоми таҳқиқоти муаммоҳои назарияи суммаҳои тригонометрии кӯтоҳ бо ададҳои содда ва масъалаҳои аддитивӣ бо ададҳои содда татбиқ намудан мумкин аст. Маводҳои диссертатсияро ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ ва магистрони донишгоҳҳои олӣ аз рӯи ихтисоси «Математика» истифода бурдан мумкин аст.

Саҳми шахсии довталаби дарёфти дараҷаи илмӣ дар таҳқиқот. Масъалаҳои таҳқиқот аз ҷониби роҳбари илмӣ гузошта шудааст, ки кумаки машваратӣ расонидааст. Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ, ки дар қисмати «Навгонии илмӣ» нишон дода шудааст, ба ғайр аз қисмҳои 2 ва 3 худи муаллиф ба даст овардааст. Натиҷаҳои қисмҳои 2 (параграфи 1.3) ва 3 (параграфи 1.4) якҷоя бо А.А. Собиров ба даст оварда ва дар [1-А, 2-А] нашр шуааст.

Мутобиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисоси илмӣ (ба шарҳ ва соҳаи таҳқиқот). Кори диссертатсионӣ аз рӯи ихтисоси 01.01.06 - Мантиқи математикӣ, алгебра ва назарияи ададҳо ва қисми назарияи аналитикии ададҳо мебошад, ки дар қисми III-и параграфаи 3-и шиносномаи илмии ихтисос нишон дода шудааст.

Нуктаҳои ба ҳимоя пешниҳодшаванда.

1. теорема оиди умумикунии баҳои Хуа Ло-кен барои суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи квадратӣ бо ададҳои содда;

2. теорема оиди умумикунии баҳои Хуа Ло-кен барои суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи кубӣ бо ададҳои содда;

3. теорема оиди формулаи асимптотикӣ бо аъзои боқимонда барои суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи кубии Г. Вейл бо ададҳои содда дар атрофи хурди маркази камонҳои калон;

4. теорема оиди баҳои суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи кубӣ бо ададҳои содда дар камонҳои калон ба ғайр аз атрофи хурди марказҳои онҳо;

5. теорема оиди формулаи асимптотикӣ барои миқдори тасвирҳои адади натуралии кифоя калон дар намуди суммаи се ҷамъшавандаҳои

қариб мутаносиб, ки дутои онҳо — адаҳои содда ва сеюмашон куби адади содда мебошанд.

Тавсиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар конференсияҳо ва семинарҳои зерин маъруза шудаанд:

- конференсияи илмӣ-назариявии ҷумҳуриявӣ «Муаммоҳои муосири алгебра ва назарияи ададҳо», бахшида ба 90-солагии профессор Ғафур Бабаевич Бабаев, Душанбе, 27 ноябри соли 2018;
- конференсияи байналмиллалии «Муаммоҳои муосир ва татбиқҳои алгебра, назарияи ададҳо ва таҳлили математикӣ», бахшида ба 60-солагии академик Рахмонова З.Х. ва узви вобастаи Акдемияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон Исхоков С.А., Душанбе, 13-14-уми декабри соли 2019;
- конференсияи илмии байналмиллалии «Муаммоҳои муосири математика: муаммоҳо ва роҳи ҳалли онҳо», ш. Термез. Узбекистан. 21—23 октябри соли 2020;
- конференсияи байналмиллалии «Муаммоҳои мубрами математикаи муосир», бахшида ба 80-солагии доктори илмҳои физикаю математическа, профессор Темур Собиров, Душанбе, 25-26-уми июни соли 2021;
- конференсияи байналмиллалии «Муаммоҳои муосири назарияи ададҳо ва таҳлили математикӣ», бахшида ба 80–солагии доктори илмҳои физикаю математика, профессор Додоҷон Исмоилов, Душанбе, 29–30-юми апрели соли 2022.

- семинари шуъбаи алгебра, назарияи ададҳо ва топология (2017 – 2022 гг.) ва семинари умумиинститутӣ (2018 – 2022 гг.) дар Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон;
- семинари кафедраи алгебра ва назарияи ададҳои Донишгоҳои миллии Тоҷикистон.

Интишорот аз рӯи мавзӯи диссертатсия. Натиҷахои асосии диссертатсия дар ҳашт корҳои илмӣ нашр шудааст. Корҳои [1–М, 2–М, 3–М, 4–М] дар маҷаллаҳои тақризшавандаи илмӣ аз руйхати КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон нашр шудааст. Се кори илмиро худи муаллиф шахсан навиштааст. Чор кори илмӣ бо ҳаммуалифии А.А.Собиров ва инчунин бо роҳбари илмӣ, ки гузориши масъала тааллуқ дорад, навишта шудааст. Як кор якҷоя бо ҳаммуалифии А.А.Собиров навишта шудааст.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз ишораҳо, муқаддима, тавсифи умумии кор, ду боб, хулоса, феҳрести адабиётҳои истифодашуда, ки 127 номгӯйро дарбар мегирад, иборат буда, ҳаҷми умумии он 124 саҳифаи чопиро ташкил карда, дар барномаи LaTeXҳуруфчинӣ шудааст.

Қисми асосии таҳқиқот

Мавод ва методҳои таҳқиқот. Дар асоси таҳқиқот усулҳои муосири назарияи аналитикии ададҳо ҷой дорад, яъне:

- методҳои L-қаторҳои Дирихле, усулҳои Ю.В.Линник ва Н.Г.Чудаков, ки ба зичии нулҳои L-қаторҳои Дирихле дар хати критикӣ асос ёфтааст;
- методи махсуси баҳодиҳии суммаҳои тригонометрӣ ва интегралҳои Ван дер Корпут.
- методи доиравии Г.Харди, Д.Литтлвуд ва С.Рамануҷан дар шакли суммаҳои тригонометрии И.М. Виноградов.

Натиҷаҳои таҳқиқот. Мазмуни кӯтоҳи натиҷаҳои кори диссертатсиониро баён менамоем.

Диссертатсия аз муқаддима, се боб ва номгӯи адабиётҳо иборат мебошад. Дар муқаддима таърихи кӯтоҳи натиҷаҳо оид ба муаммоҳои муҳокимашуда оварда шуда, мубрамияти мавзӯъ асоснок карда шудааст.

Боби якум аз ду параграф иборат буда, ба баррасии адабиётҳои омӯхташуда доир ба мавзӯи кори диссертитсионӣ бахшида шудааст. Методҳои асосии таҳқиқот оварда шудааст.

Боби дуюм аз чор параграф иборат буда, ба умумикунии теоремаи Хуа Ло-кен барои суммаҳои тригономтрии кӯтоҳи квадратӣ ва кубӣ бо ададҳои содда, ҳосил намудани формулаи асимптотикӣ бо аъзоҳои боқимонда барои суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи кубии Г.Вейля бо ададҳои содда дар атрофи хурди марказҳои камонҳои калон, инчунин ба баҳои ғайритривиалии чунин суммаҳо дар камонҳои калон ба ғайр аз атрофи хурди марказҳои онҳо бахшида шудааст.

Дар параграфи якум леммаҳои маълум, ки дар параграфҳои оянда истифода мешаванд, оварда шудаанд.

Хуа Ло–кен[31] барои қиматҳои миёнаи суммаҳои Вейли намуди

$$T_n(\alpha, x) = \sum_{m\le x} e\left(\alpha m^n\right)$$

баҳои тартибаш дурусти зеринро гирифт:

$$\int\limits_0^1 |T_n(\alpha; x)|^{2^k} d\alpha \ll x^{2^k-k+\varepsilon}, \qquad 1 \le k \le n.$$

Дар корҳои[7,32,33] ҳангоми $n = 3;\ 4;\ 5$ баҳои Хуа Ло-кен барои суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи Вейли намуди

$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m<x} e(\alpha m^n),$$

умумӣ карда шудааст, яъне, барои қимати миёнаи $T_n(\alpha; x, y)$ — суммаҳои Г.Вейл, ки тағйирёбандаи суммирониаш аз интервали кӯтоҳ қимат қабул мекунад, баҳои тартиби дурусти намуди

$$\int\limits_0^1 |T_n(\alpha; x, y)|^{2^k} d\alpha \ll y^{2^k-k+\varepsilon}, \qquad 1 \le k \le n,$$

гирифта шуда мувофиқан ҳангоми ҳосил намудани формулаи асимптотӣ дар муаммои Варинг бо ҷамъшаванаҳои қариб баробар[9,10] татбиқ шудаанд.

Дар параграфи дуюм ин баҳои Хуа Ло-кен барои суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи квадратӣ ва кубӣ бо ададҳои содда, яъне барои сумаҳои намуди

$$\mathbb{S}_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<p\le x} e(\alpha p^k),$$

[31] Вон Р. Метод Харди-Литтлвуда // — М.: — Мир. — 1985. — С. 184.

[32] Азамов А.З. Среднее значение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля четвертой степени // ДАН РТ. — 2011. — Т. 54. — № 1. — С. 13—17.

[33] Назрублоев Н.Н. О средней значение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля пятой степени // ДАН РТ. — 2014. — Т. 57. — № 7. С. 531—537.

ҳангоми $k=2,\ 3$, умумӣ карда шудаст

Теоремаи 2.1. *Бигзор x ва y — ададҳои натуралӣ, $\sqrt{x}<y\le 0,01x$, он гоҳ баҳои зерин ҷой дорад*

$$\int\limits_0^1 |\mathbb{S}_2(\alpha;x,y)|^4\,d\alpha \ll y^{2+\varepsilon}.$$

Теоремаи 2.2. *Бигзор x ва y — ададҳои натуралӣ, $\sqrt{x}<y\le 0,01x$, он гоҳ баҳои зерин ҷой дорад*

$$\int\limits_0^1 |\mathbb{S}_3(\alpha;x,y)|^{2^k}\,d\alpha \ll y^{2^k-k+\varepsilon}, \qquad 1\le k\le 3.$$

Асоси исботи ин теоремаҳоро усули классикии Г.Вейля ва мулоҳиза оиди бо миқдори ҳалҳои муодилаи диофантӣ ифодашавии интеграл аз модули дараҷаи ҷуфти суммаи кӯтоҳи Вейл, ташкил медиханд.

Мувофиқи теоремаи Дирихле оиди наздиккунии ададҳои ҳақиқӣ бо ададҳои ратсионалӣ, ҳар як α аз порчаи $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau=1$ дар намуди

$$\alpha=\frac{a}{q}+\lambda, \quad (a,q)=1, \qquad 1\le q\le\tau, \qquad |\lambda|\le\frac{1}{q\tau},$$

тасвир карда мешавад. Бо воситаи $\mathfrak{M}(P)$ ададҳои α-ро ишора менамоем, ки барои онҳо $q\le P$, $P<Q$ аст ва бо $\mathfrak{m}(P)$ бошад α - ҳои боқимондаро ишора мекунем. $\mathfrak{M}(P)$ ва $\mathfrak{m}(P)$ мувофиқан камонҳои калон ва хурд меноманд.

Дар параграфи сеюм аз теоремаи зичӣ барои нулҳои L-функсияҳои Дирихле дар росткунҷаи борики тасмаи критикӣ, ки худ натиҷаи теорема оиди моменти дуюми L-функсияи Дирихле дар хати критикӣ мебошад, истифода бурда, теорема оиди рафтори суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи кубӣ бо ададҳои соддаи намуди

$$S_3(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)e(\alpha n^3),$$

дар атрофи хурди маркази камони калони $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ ҳангоми $\tau= y^5x^{-2}\mathscr{L}_x^{-b_1}$, исбот карда шудааст.

Теоремаи 2.3. *Бигзор $x \geq x_0$, A, b — ададҳои мусбати қайдкардашудаи ихтиёрӣ, $1 \leq q \leq \mathscr{L}_x^b$, онгоҳ ҳангоми $\lambda \leq \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$ ва $y \geq x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}_x^{1.5A+0.25b+18}$, формулаи асимптотии зерин ҷой дорад:*

$$S_3(\alpha; x, y) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e\left(\frac{an^3}{q}\right) \int\limits_{x-y}^{x} e(\lambda u^3) du + O\left(y\mathscr{L}_x^{-A}\right).$$

Дар параграфи чорум аз теоремаи зичӣ барои нулҳои L-функсияҳои Дирихле дар росткунҷаи борики тасмаи критикӣ, тавре дар параграфи гузашта қайд кардем, ки худ натиҷаи теорема оиди моменти дуюми L-функсияи Дирихле дар хати критикӣ мебошад, истифода бурда баҳои ғайритирвиалии суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи кубӣ бо ададҳои соддаи $S_3(\alpha; x, y)$ дар камонҳои калони $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ ба ғайр аз атрофи хурди марказҳои онҳо ҳангоми $\tau = y^5 x^{-2}\mathscr{L}_x^{-b_1}$ гирифта шудааст.

Теоремаи 2.4. *Бигзор $x \geq x_0$, A, b_1, b — ададҳои мусбати қайдкардашудаи ихтиёрӣ, $1 \leq q \leq \mathscr{L}_x^b$, $\tau = y^5 x^{-2}\mathscr{L}_x^{-b_1}$,*

$$\eta_3 = \frac{2}{7+4\sqrt{3}} \approx 0.1435935394, \qquad c_3 = \frac{2A + 24 + \left(\sqrt{3}-1\right) b_1}{4\sqrt{3}-3}.$$

Он гоҳ ҳангоми $y \geq x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}_x^{c_3}$ ва $\lambda > \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$ баҳои зерин ҷой дорад:

$$S_3(\alpha; x, y) \ll y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

Асоси исботи теоремаҳои 2.3 ва 2.4-ро рушди минбаъдаи усулҳои корҳои Ю.В.Линник[34] ва Н.Г.Чудаков[35], ки дар онҳо мувофиқан суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои содда ва масъалаи тақсимшавии ададҳои содда дар интервалҳои кӯтоҳ таҳқиқ шудаанд, ташкил медиҳанд.

Боби сеюм аз се параграф иборат аст ва ба ҳосил намудавни формулаи асимптотӣ дар муаммои Эстермана барои кубҳои ададҳои содда бо ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб бахшида шудааст.

Тавре дар боло қайд гардид, дар солҳои сиюми асри гузашта математики англис Мейтленд Райт аввалин бор як қатори масъалҳои аддитивӣ

[34] Линник Ю.В. Новое доказательство теоремы Гольдбаха-Виноградова // Математический сборник, 1946, т. 19, вып.1, с. 3-8.

[35] Chudakov N.G. On the difference between two neighboring prime numbers // Mat. Sb., 1, 1936, 799 – 814.

бо ҷамъшавандаҳои кариб мутаносибро гузошт ва таҳқиқ кард, аз ҷумла дар муаммои Варинг бо ҷамъшавандаҳои кариб мутаносиб[36,37] бори аввал формулаи асимптотиро ёфт. Ӯ исбот намуд, ки *бигзор* $\mu_1, \ldots, \mu_s$ *— ададҳои мусбати қайдкардашуда*

$$s \geq s_0, \quad 0 < \beta < \min\left(\frac{s-4}{4(s-3)}, \frac{s-2}{2(s-1)}\right), \quad m_i \geq 0, \quad i = \overline{1, s},$$
$$\gamma = \frac{s}{k} - 1 - (s-1)\beta, \quad \mu_1 + \ldots + \mu_s = 1,$$
$$r(n) = \#\left\{(m_1, \ldots, m_s): \ m_1^k + \ldots + m_s^k = n, \ |m_i - \mu_i n| \leq A_i n^{1-\beta}\right\},$$

он гоҳ формулаи асимптотии

$$r(n) = \frac{c\left(\prod \mu_i\right)^{a-1}}{k^s \Gamma(s)} \mathfrak{S}(n) n^{\gamma} + O\left(n^{\gamma - d}\right),$$

ҷой дорад, дар ин ҷо $c = c(A_1, \ldots, A_s)$ *— доимии мутлақ,* $d = d(s, \beta) > 0$*.*

Тавре дар боло қайд карда шуд, масъалаҳои аддитивӣ бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар ҳолати хусусии масъалаҳои аддитивӣ бо ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб буда, ба онҳо ба муаммои Варинг, муаммои тернарии Гольдбах ва муаммои умумикардашудаи Эстерман бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар дохил мешаванд.

Барои n-ҳои ихтиёрии қайдкардашуда рафтори суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи Г.Вейли намуди

$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e(\alpha m^n),$$

дар камонҳои калонро З.Х.Рахмонов бо шогирдон дар корҳои[6,7] таҳқиқ кардаанд. Бо истифода ин корҳо масъалаҳои аддитивии зерин бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар ҳал карда шуданд:

- муаммои Варинг бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар дар ҳолати $n = 3, 4, 5$, аниқтараш формулаи асимптотикӣ[7,10] барои миқдори ҳалҳои муодилаи диофантии (1) бо шартҳои

$$\left|x_i - \left(\frac{N}{2^n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\right| \leq H, \qquad i = 1, \ldots, 2^n + 1, \qquad H \geq N^{\frac{1}{n} - \theta(n) + \varepsilon};$$

[36]Wright E.M. Proportionality conditions in Waring's 7problem // Mathematische Zeitschrift. — 1934.V. 38. P. 730–746.

[37]Wright E.M. An extension of Waring's problem // Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A 232 1-26 (1933). Zbl 0006.39602

$$\theta(3) = \frac{1}{30}, \qquad \theta(4) = \frac{1}{108}, \qquad \theta(5) = \frac{1}{340}.$$

ёфт шудаанд.

- муаммои умумикардашудаи тернарии Эстерман бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар[11,7,12] ҳангоми $n = 2, 3, 4$ оиди тасвири адади натуралии кифоя калон дар намуди (3) нисбат ба ададҳои соддаи p_1, p_2 ва m-ҳои натуралӣ бо шартҳои

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2, \qquad \left|m^n - \frac{N}{3}\right| \le H, \qquad H \ge N^{1-\theta(n)}\mathscr{L}^{c_n},$$

$$\theta(2) = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 2; \qquad \theta(3) = \frac{1}{6}, \quad c_3 = 3; \qquad \theta(4) = \frac{1}{12}, \quad c_4 = \frac{40}{3}.$$

ТЖан ва Дж.Лю[8,9] рафтори суммаҳои тригонометрии кӯтоҳ бо ададҳои соддаи суммаи намуди

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n) e(\alpha n^k),$$

дар камонҳои калон ва ҳам дар камонҳои хурд таҳқиқ намуда, натиҷаи гирифташударо ба муаммои тернарии Гольдбах ва муаммои умумикардашудаи Эстерман барои квадратҳои адади содда бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар тадбиқ намуданд. Онҳо ҳангоми $n = 1$ ва $n = 2$ барои миқдори тасвирҳои адади натуралии кифоя калони N дар намуди (4) бо шартҳои

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad \left|p_3^n - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad H \ge N^{1-\theta(n)+\varepsilon} \tag{6}$$

мувофиқан ҳангоми

$$\theta(1) = \frac{3}{8}, \qquad \theta(2) = \frac{5}{32}.$$

формулаи асимптотӣ ёфтанд.

Натиҷаи асосии боби сеюм теоремаи 3.1 оиди формулаи асимптотӣ барои пайдарпайии бо ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб, ки дар муодилаи (4) бо шартҳои (6) нишондиҳандаи адади соддаи p_3 ба $n = 3$ иваз шудааст, мебошад.

Теоремаи 3.1. *Бигзор N — адади натуралии кифоя калон, μ_1, μ_2, μ_3 — адади мусбати қайдкардашуда, бо шартҳои*

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \qquad \eta = \frac{2}{7 + 4\sqrt{3}}, \qquad c = \frac{10476 - 4816\sqrt{3}}{39},$$

$I(N,H)$ *— миқдори ҳалҳои муодилаи диофантии*

$$p_1+p_2+p_3^3=N, \quad |p_i-\mu_iN|\le H, \quad i=1,2, \quad |p_3^3-\mu_3N|\le H.$$

нисбат ба ададҳои соддаи p_1, p_2 *ва* p_3 *бощад. Пас ҳангоми* $H \ge N^{1-\frac{1}{15+3\eta}}\mathscr{L}_{\mu_3}^c$, *формулаи асимптотии*

$$I(N,H)=\frac{\mathfrak{S}(N)H^2}{9(\mu_3N)^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^3}+O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_{\mu_3}^4}\right), \quad \mathfrak{S}(N)=\prod_p\left(1+\frac{\Phi(p,N)}{(p-1)^3}\right),$$

ҷой дорад, дар инҷо $\Phi(p,N)=1-p$, *агар* $(p,N)=p$, *ва* $\Phi(p,N)=1-p+p\rho(N,p)$, *агар* $(p,N)=1$, $\rho(N,p)$ *— миқдори ҳалҳои муқоисаи* $k^3\equiv N \pmod p$.

Теоремаи 3.1 бо усули доиравии Харди, Литтлвуд, Рамануджан дар шакли суммаҳои тригонометрии И.М.Виноградов исбот шуда, натиҷаҳои зерини бобҳои пешина истифода шудааст:

- теоремаи 2.3 оиди формулаи асимптотӣ барои суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи кубӣ бо ададҳои соддаи $S_3(\alpha;x,y)$ дар атрофи хурди маркази камонҳои калон;
- теоремаи 2.4 оиди баҳои ғайритривиалии суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи кубӣ бо ададҳои соддаи $S_3(\alpha;x,y)$ дар камонҳои калон ба ғайр аз атрофи хурди марказҳои онҳо.

Хулоса

Натиҷаҳои асосии илмии таҳқиқот. Ҳамаи натиҷаҳои асосии диссертатсия нав буда, характери назариявӣ дошта, аз инҳо иборатанд:

- теоремаи Хуа Ло-кен барои суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи квадратӣ ва кубӣ бо ададҳои содда умумӣ карда шудааст, яъне баҳоҳои тартибашон дурусти интеграҳо аз дараҷаи модулҳои ин суммаҳо аз рӯйи даврашон ёфта шудаанд [3-А, 8-А];
- формулаи асимптотикӣ бо аъзои боқимонда барои суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи кубии Г.Вейля бо ададҳои содда дар атрофи хурди марказҳои камони калон ёфта шудааст [1-А, 5-А, 6-А, 8-А];
- баҳои ғайритривиалӣ барои суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи кубӣ бо ададҳои содда дар камонҳои калон ба ғайр аз атрофи хурди марказҳои онҳо гирифта шудааст [2-А, 7-А, 6-А, 8-А];

- формулаи асимптотикӣ дар муаммои умумикардашудаи Эстерман бо ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб барои кубҳои ададҳои содда гирифта шудааст [4-А, 8-А].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Натиҷаҳои дар диссертатсия ба даст овардашуда хусусияти назариявӣ доранд. Онҳоро дар назарияи аналитикии ададҳо ҳангоми таҳқиқоти муаммоҳои назарияи суммаҳои тригонометрии кӯтоҳ бо ададҳои содда ва масъалаҳои аддитивӣ бо ададҳои содда татбиқ намудан мумкин аст. Маводҳои диссертатсияро ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ ва магистрони донишгоҳҳои олӣ аз рӯи ихтисоси «Математика» истифода бурдан мумкин аст.

Феҳристи интишороти довталаби дарёфти дараҷаи илмӣ

Мақолаҳо дар маҷаллаҳои тақризшаванда:

[1–А]. Фозилова П.М. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Доклады НАН Таджикистна. — 2020 г. — Т. 63. — № 5-6. — С. 279—288.

[2–А]. Фозилова П.М. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в большие дуги [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Доклады НАН Таджикистна. — 2020 г. — Т. 63. — № 7-8. — С. 405—415.

[3–А]. Фозилова П.М. Среднее значение коротких кубических тригонометрических сумм Г. Вейля с простыми числоми [Текст] / П.М. Фозилова // Доклады НАН Таджикистна. — 2021 г. — Т. 64. — № 11-12. — С. 605—610.

[4–А]. Фозилова П.М. Тернарная проблема Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми [Текст] / П.М. Фозилова // Доклады НАН Таджикистна. — 2022 г. — Т. 65. — № 1-2. — С 14–23.

Мақолаҳо ва фишураи интишорот дар маҷмӯаи конфронсҳо

[5–А]. Фозилова П.М. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Современные проблемы математики, проблемы и их пути решения, Материалы международной научной онлайн конференции г. Термез. Узбекистан. 21—23 октября — 2020 г. — С. 18—19.

[6–А]. Фозилова П.М. О поведении коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений, материалы международной конфренции, посвящённой 70 —летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича. Душанбе.25—26 декабря — 2020 г. — С.254—255.

[7–А]. Фозилова П.М. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в большие дуги за исключением малой окрестности их центров [Текст] / А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Актуальные проблемы современной математики, материалы международной конфренции, посвящённой 80 — летию со дня рождения доктора физико-математических наук,профессора Темура Собирова. Душанбе.25—26 июня — 2021 г. — С. 224—226.

[8–А]. Фозилова П.М. О тернарной проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми [Текст] / П.М. Фозилова // Современные проблемы теории чисел и математического анализа, материалы международной конференции, посвящённой 80–летию со дня рождения доктора физика–математических наук, профессора Дододжона Исмоилова. Душанбе. 29—30 апреля —2022 г. — С. 235—242.

АННОТАЦИЯ

диссертации Фозиловой Париноз Миралибековны на тему «Асимптотическая формула в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел

Ключевые слова: почти пропорциональные слагаемые, короткая тригонометрическая сумма с простыми числами, диофантово уравнение, малая окрестность центра больших дуг.

Объекты исследования: Короткие тригонометрических суммы с простыми числами, интегралы по периоду от модулей коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами, и диофантово уравнение в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми.

Цель исследования: Изучение поведения интегралов по периоду от модулей коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами, поведения коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами и их приложения к выводу асимптотической формулы в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют теоретический интерес и состоят в следующем: обобщена теорема Хуа Локена для коротких квадратичных и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами, а именно найдены правильные по порядку оценки интегралов по периоду от степени модуля этих сумм; доказана асимптотическая формула с остаточным членом для коротких кубических тригонометрических сумм Г. Вейля с простыми числами в малой окрестности центров больших дуг; найдена нетривиальная оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах за исключением малой окрестности их центров; доказана асимптотическая формула в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применение в аналитической теории чисел при исследованиях проблем теории коротких тригонометрических сумм с простыми числами и аддитивных задач с простыми числами. Материалы диссертации также могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

ШАРҲИ МУХТАСАР

диссертатсияи Фозилова Париноз Миралибековна дар мавзӯи «Формулаи асимптотики дар муаммои Эстерман барои кубҳои ададҳои содда бо ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб», ки барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.06–Мантиқи математикӣ, алгебра ва назарияи ададҳо пешниҳод шудааст

Вожаҳои калидӣ: ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб, суммаи тригонометрии кӯтоҳ бо ададхои содда, муодилаи диофантӣ, атрофи хурди камонҳои калон.

Объекти таҳқиқот. Суммаҳои тригонометрии кӯтоҳ бо ададҳои содда, интегралҳо аз модулҳои суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи квадратӣ ва кубӣ бо ададҳои содда аз даврашон, муодилаи диофантӣ дар муаммои Эстерман барои кубҳои ададҳои содда бо ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб.

Мақсади таҳқиқот. Омӯзиши рафтори интегралҳо аз модулҳои суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии квадратӣ ва кубӣ бо ададҳои содда аз рӯи даврашон, рафтори суммаҳои кӯтоҳи тригономнтрии кубӣ бо ададҳои содда ва тадбиқи он дар ҳосил намудани формулаи асимптотикӣ дар муаммои Эстерман барои кубҳои ададҳои содда бо ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб

Навгонии илмии таҳқиқот. Ҳамаи натиҷаҳои диссертатсия нав буда, хусусияти назариявӣ дошта, аз инҳо иборатанд: умумӣ кардани теоремаи Хуа Ло-кен барои суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи квадратӣ ва кубӣ, яъне ёфтани баҳоҳои тартибашон дурусти интегралҳо аз модулҳои дараҷаи ин суммаҳо аз рӯи даврашон; исботи формулаи асимптотӣ бо аъзои боқимонда барои суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи кубии Г. Вейл бо ададҳои содда дар атрофи хурди камонҳои калон; ёфтани баҳои ғайритривиалии суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи кубӣ бо ададҳои содда дар камонҳои калон ба ғайр аз атрофи хурди марказҳои онҳо; исботи формулаи асимптотӣ дар муаммои Эстерман барои кубҳои ададҳои содда бо ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Натиҷаҳои дар диссертатсия ба даст овардашуда хусусияти назариявӣ доранд. Онҳоро дар назарияи аналитикии ададҳо ҳангоми таҳқиқоти муаммоҳои назарияи суммаҳои тригонометрии кӯтоҳ бо ададҳои содда ва масъалаҳои аддитивӣ бо ададҳои содда татбиқ намудан мумкин аст. Маводҳои диссертатсияро ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ ва магистрони донишгоҳҳои олӣ аз рӯи ихтисоси «Математика» истифода бурдан мумкин аст.

SUMMARY

of the dissertation of Fozilova Parinoz Miralibekovna on the topic «Esterman's Ternary Problem for Cubes of Primes with Almost Proportional Summands», submitted for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in the specialty 01.01.06 - Mathematical Logic, Algebra and Theory numbers

Key words: Almost proportional summands, Short exponential sum with primes, diophantine equation, small neighborhood of the center of majors arcs.

Research objects: Short exponentials sums with primes, integrals over the period of moduli of short quadratic and short cubic exponentials sums with primes, and the Diophantine equation in Estermann's problem for cubes of primes with almost proportional terms.

Purpose of research: Study of the behavior of integrals over the period of module of short quadratic and short cubic exponentials sums with primes, the behavior of short cubic exponentials sums with primes, and their application to the derivation of an asymptotic formula in the Esterman problem for cubes of primes with almost proportional terms

Scientific novelty. All the main results of the dissertation are new, of theoretical interest and are as follows: Hua Lo-Keng's theorem is generalized for short quadratic and short cubic exponentials sums with prime numbers, namely, estimates of the integrals over the period of the degree of modulus of these sums are found, correct in order; an asymptotic formula with a remainder term for short cubic exponentials H. Weyl sums with prime numbers in a small neighborhood of the centers of large arcs is proved; a non-trivial bound for short cubic exponentials sums with prime numbers in large arcs is found, except for a small neighborhood of their centers; an asymptotic formula is proved in the Esterman problem for cubes of primes with almost proportional terms..

Theoretical and practical value. The results obtained in the dissertation are theoretical in nature. They can find application in analytic number theory in the study of problems in the theory of short trigonometric sums with primes and additive problems with primes. The dissertation materials can also be used when reading special courses for students and masters in higher educational institutions studying in the specialty «Mathematics».