НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ТАДЖИКИСТАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. А.ДЖУРАЕВА

УДК 517.957 На правах рукописи

Хакназаров Кобил Эражзода

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ НЕДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени доктора философии (PhD) – доктора по специальности 6D060100 – Математика: 6D060101 - Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Душанбе – 2022

Работа выполнена в Институте математики им. А.Джураева Национальной академии наук Таджикистана

Научный руководитель: **Исхоков Сулаймон Абунасрович**
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент НАНТ, профессор

Официальные оппоненты: **Сафаров Джумабой,**
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Бохтарского государственного университета имени Н.Хусрава;

Юсупов Гулзорхон Амиршоевич,
доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой математического анализа Таджикского государственного педагогического университета им. С. Айни.

Оппонирующая организация: Таджикский национальный университет

Защита состоится *15 марта 2023 г. в 09 ч. 00 мин.* на заседании диссертационного совета 6D.KOA–009 при Институте математики имени А.Джураева Национальной академии наук Таджикистана по адресу: 734063, г.Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики имени А.Джураева НАН Таджикистана, а также на сайте http://www.mitas.tj.

Автореферат разослан "_____" ______________ 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 6D.KOA–009,
доктор физико–математических наук Каримов О.Х.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена изучению разрешимости обобщенных краевых задач, связанных с эллиптическими операторами недивергентного вида в ограниченной области со степенным вырождением. Отметим, что краевые задачи для дифференциальных уравнений с вырождением возникают в процессе математического моделирования многих практических задач в теории малых изгибов поверхностей, газовой динамике и других разделов механики. Поэтому теория дифференциальных уравнений с вырождением является одним из самостоятельных и динамично разрывающих направлений современной математики. В этой теории различают две группы методов: классические методы и вариационные методы. Классические методы обычно применяются в случае, когда начальные данные изучаемой задачи (правая часть уравнения, граничные функции, коэффициенты дифференциального оператора и т.д.) достаточное число раз дифференцируемы, и в этом случае решение рассматриваемой задачи получается в явном виде. В тех случаях, когда не работают классические методы, для качественного исследования исследуемых задач применяются вариационные методы, которые опираются на элементах теории функций и функционального анализа. В нашей работе применяется вариационный метод и для исследуемых задач мы указываем достаточные условия существования и единственности решения в конкретном функциональном пространстве, а также в более общем случае изучаем свойства области определения и области значений соответствующих дифференциальных операторов. Наши исследования являются логическим продолжением исследований известных в этой области авторов, таких как Никольский С.М., Трибель Х., Кудрявцев Л.Д., Бойматов К.Х., Куфнер А., Мирошин Н.В., Исхоков С.А. и др., и полученные нами результаты являются усилением и обобщением некоторых результатов этих авторов.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Из анализа опубликованных научных работ по теории вариационных краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений следует,что их основная часть относятся к случаю когда исследуемый оператор изначально задаётся в дивергентной форме и это позволяет применить элементы теории полуторалинейных форм. Наши результаты относятся к малоизученному случаю эллиптических дифференциальных операторов недивергентного вида.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Работа выполнена в рамках следующих двух тем научно-исследовательских работ, разрабатываемых в Институте математики им. А.Джураева Национальной академии наук Таджикистана:

"Обобщенные краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами и нелинейные эволюционные уравнения дробного порядка" ГР 0116TJ00534;

"Оценки спектра и разрешимость вариационных задач для вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными полуторалинейными формами" ГР 0121TJ1179.

Цель исследования. Основной целью диссертационной работы заключается в исследовании разрешимости задачи Дирихле, связанной с некоторыми классами эллиптических дифференциальных операторов недивергентного вида в ограниченной области со степенным вырождением на границе области, и изучению свойств таких операторов.

Задачи исследования. В соответствие с поставленной цели выделены следующие основные задачи:

- исследовать разрешимость обобщенной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для эллиптического оператора недивергентного вида с вырождением в ограниченной области с гладкими коэффициентами;
- исследовать разрешимость обобщенной задачи Дирихле для эллиптического оператора недивергентного вида с вырождением в ограниченной области с гладкими коэффициентами в случае неоднородности граничных условий;
- изучить качественные свойства области определения, области значений и ядра вырождающегося эллиптического оператора недивергентного вида в ограниченной области в случае недифференцируемости его коэффициентов.

Научная новизна исследования. Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

- доказаны теоремы об однозначной разрешимости обобщенной задачи Дирихле с однородными и неоднородными граничными условиями для вырождающегося эллиптического оператора высшего порядка недивергентного вида с гладкими коэффициентами. Отдельно рассмотрены случаи согласованного и несогласованного вырождения коэффициентов оператора;

- для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих только негладкие старшие коэффициенты, доказана априорная оценка решения вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями, в которой норма решения в пространство основных решений оценивается сверху через норму правой части уравнения;
- доказана теорема об конечномерности ядра и замкнутости области значений одного класса вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами;
- для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами, имеющих младшие коэффициенты, доказана априорная оценка решения вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями, в которой норма решения задачи в пространстве основных решений оценивается сверху через норму правой части уравнения и норму решения в пространстве L_2;
- для слабо позитивных эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами доказана оценка, в которой норма оператора оценивается снизу через положительную константу умноженную на норму функции в основном пространстве.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут послужить основой для дальнейших теоретических исследований в теории краевых задач для уравнений с частными производными, в теории дифференциальных операторов в нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных.

Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью уравнений с частными производными в решении прикладных задач механики и других разделов физики

Объект исследования – эллиптический дифференциальный оператор высшего порядка в ограниченной области недивергентного вида со степенным вырождением на границе области.

Предмет исследования. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида. Область определения и область значений вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы вариационные методы исследования краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, основанные на элементах функционального анализа и теории нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных.

Личный вклад соискателя ученой степени. Задачи исследования были сформулированы научным руководителем работы, который оказывал консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, отраженные в разделе "Научная новизна исследования", получены лично автором.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационное исследование относятся к специальности 6D060101 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Оно основано на утверждениях из теории пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных, теории операторов в гильбертовых пространствах и других разделах функционального анализа.

Положения выносимые на защиту:

- аналог неравенства Гординга для эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих только гладкие старшие коэффициенты, заданных в ограниченной области и имеющих степенное вырождение вдоль всей границы области;
- теорема об однозначной разрешимости обобщенной задачи Дирихле, решение которой ищется в замыкание класса бесконечнодифференцируемых финитных функций, для эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих только гладкие старшие коэффициенты, заданных в ограниченной области и имеющих степенное вырождение вдоль всей границы области;
- теоремы о фредгольмовой разрешимости обобщенной задачи Дирихле с однородными и неоднородными граничными условиями для эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих только гладкие старшие коэффициенты, заданных в ограниченной области и имеющих степенное вырождение вдоль всей границы области;
- теоремы об однозначной разрешимости обобщенной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для гладких эллиптических операторов с ненулевыми младшими коэффициентами в ограниченной области в случаях согласованного и несогласованного вырождения коэффициентов;
- априорная оценка, в которой норма решения задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида,

имеющих только непрерывные старшие коэффициенты, оценивается сверху через норму значения оператора этого решения;

- априорная оценка, в которой норма решения задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих негладкие младщие коэффициенты, оценивается сверху через норму значения оператора этого решения и его норму в пространстве L_2;
- теорема о конечномерности ядра и замкнутости области значений вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами, имеющих ненулевые младшие коэффициенты и заданных в ограниченной области;
- априорная оценка, в которой норма решения задачи Дирихле для слабо позитивных вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида с параметром, имеющих негладкие младщие коэффициенты, оценивается сверху через норму значения оператора этого решения;

Степень достоверности результатов. Достоверность результатов исследования подтверждается подробными математическими доказательствами всех утверждений, приведенных в диссертации, основанными на элементах функционального анализа, теории функций и теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты работы докладывались автором и обсуждались на семинаре отдела функционального анализа и теории функций и общеинститутском семинаре Института математики им. А.Джураева НАНТ.

Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях:

- Международная конференция «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвященная 70-летию со дня рождения академика НАН Таджикистана К.Х.Бойматова (Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.).
- Международная конференция «Актуальные проблемы современной математики», посвященная 80-летию со дня рождения профессора Темура Собирова (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.).
- Международная научная конференция «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвященная 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.).

- Международная научно-практическая конференция ”О современных проблемах развития потенциальных способностей и возможностей учащихся и выпускников специализированных учебных завидений”, посвященная памяти А.Хотамова (Душанбе, 15-16 мая 2022 г.)

Публикации по теме диссертации. Материалы диссертации опубликованы в 9 работах [1-А – 9-А]. Работы [1-А – 5-А] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан. В работах опубликованных в соавторстве с научным руководителем, соавтору принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура диссертации и объём. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка цитированной литературы из 131 наименований и заключения, занимает 159 страниц машинописного текста и набрана на LATEX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм или формулы в данном параграфе.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Материалы и методы исследования. Материал исследования состоит из решения обобщенной задачи Дирихле для различных классов эллиптических уравнений высшего порядка недивергентного вида в ограниченной области, которые имеют степенное вырождение вдоль всей границы области. В работе используются современные методы теории дифференциальных операторов и теории функций нескольких вещественных переменных.

Результаты исследования. Приводим краткое изложение результатов глав диссертационной работы.

Первая глава работы посвящена анализу литературных источников по теории вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов в ограниченной области со степенным вырождением вдоль всей границы области.

Вторая глава посвящена изучению разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида с гладкими коэффициентами. Она состоит из **четырех**

параграфов. В **первом параграфе** приведены некоторые вспомогательные результаты из общей теории вариационных задач в гильбертовом пространстве. Во **втором параграфе** приведены основные свойства нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных в ограниченной области со степенным весом. Утверждения, приведенные в этом параграфе, часто используются в последующих разделах диссертации. Эти пространства обозначаются через $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ и соответственно определяются с помощью следующих норм

$$\|u; V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{p\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx + \int\limits_{\Omega} \rho^{p(\alpha-r)}(x)|u(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

$$\left\|u; W^r_{p,\,\alpha}(\Omega)\right\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{p\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}. \qquad (1)$$

Здесь и далее r – некоторое натуральное число, $1 \le p < +\infty$, $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с замкнутой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$, $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ – длина мультииндекса k и $u^{(k)}(x)$ – обобщенная в смысле С.Л. Соболева производная функции $u(x)$ мультииндекса k.

Третий параграф второй главы посвящена исследованию разрешимости задачи Дирихле для эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих только старшие коэффициенты. Сначала в этом параграфе доказывается аналог неравенства Гординга в пространстве $V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$. Рассматривается дифференциальный оператор недивергентного вида

$$L[u](x) = \sum_{|k|=2r} a_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \qquad (2)$$

Доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

I) Существует такое положительное число $\varkappa$, *что*

$$Re \sum_{|\mu|=|q|=r} (-1)^r a_{\mu+q}(x)\zeta_\mu \overline{\zeta_q} \ge \rho^{2\alpha}(x)\varkappa \sum_{|\mu|=r} |\zeta_\mu|^2$$

для всех $x \in \Omega$ *и любого набора комплексных чисел* $\zeta = \{\zeta_\mu\}_{|\mu|=r} \subset \mathbb{C}$

II) При всех $k: |k| = 2r$ и всех $x \in \Omega$ выполняется неравенство

$$|a_k(x)| \leq M\rho^{2\alpha}(x),$$

где M – положительное и α – вещественное числа.

III) Коэффициенты $a_k(x)$, $|k| = 2r$, оператора (2) имеют все производные до r-го порядка включительно и удовлетворяют неравенству

$$\left|a_k^{(p)}(x)\right| \leq C_p \rho^{2\alpha-|p|}(x), \quad x \in \Omega,\, |p| \leq r.$$

Тогда существуют такие положительные числа c_1, M_1, что

$$Re\,(L[u],\, u)_0 \geq c_1 \left\|u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 - M_1 \left\|u;\, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega)\right\|^2 \tag{3}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Далее в третьем параграфе второй главы используя аналог неравенства Гординга (3) из теоремы 1 изучим разрешимость вариационной задачи Дирихле связанной с оператором (2). С этой целью сначала вводим пространство $\left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ – пополнение пространства $L_{2,\,\alpha-r}(\Omega)$ по норме

$$\left\|f;\, \left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| = \sup \frac{|(f,\, v)_{\alpha-r}|}{\left\|u;\, V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым $v \in V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$. Элементы из пространства $\left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ отождествляются с соответствующими антилинейными функционалами над $V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$. Далее обозначим через $< f,\, v >$ значение функционала $f \in \left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ на функцию $v \in V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$.

Теперь вводим полуторалинейную форму

$$P_\lambda[u,\, v] = (L[u],\, v)_0 + \lambda(u,\, v)_{\alpha-r}, \quad u,\, v \in C_0^\infty(\Omega),$$

где $L[u]$ – дифференциальный оператор, определенный равенством (2).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 Тогда найдется число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$:*

1) существует линейный оператор Λ, осуществляющий гомеоморфизм пространства $V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ и $\left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и такой, что

$$\langle \Lambda u,\, v\rangle = P_\lambda[u,\, v] \forall u,\, v \in V^r_{2,\,\alpha}(\Omega);$$

2) всякий антилинейный непрерывный функционал $l(v)$ из $\left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ допускает представление $l(v) = P_\lambda[u_0,\, v] = \langle \Lambda u_0,\, v\rangle$, причем такое представление единственно.

Далее изучается разрешимость следующей задачи:

Вариационная задача Дирихле. Для заданного элемента F из $\left(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ найти функцию $u_0 \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$, для которой выполняется равенство

$$P_\lambda[u_0,\, v] =< F,\, v > \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4}$$

Доказана следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2 и число λ_0 – такое же как в этой теореме. Тогда при $\lambda \geq \lambda_0$ для любого заданного элемента $F \in \left(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ вариационная задача Дирихле (4) имеет единственное решение $u_0 \in V^r_{2,\alpha}(\Omega)$ и при этом имеет место неравенство*

$$\left\|u_0;\, V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \leq M \left\|F; \left(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'\right\|,$$

где число $M > 0$ не зависит от F и λ.

Далее в третьем параграфе второй главы изучается разрешимость вариационной задачи Дирихле в пространстве $W^r_{2;\alpha}(\Omega)$ для оператора недивергентного вида

$$\mathcal{L}[u](x) = \sum_{|k|=2r} b_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5}$$

Здесь, так же как и в случае пространства $V^r_{2;\alpha}(\Omega)$, сначала докажем соответствующий аналог неравенства Гординга, и затем на его основе изучим вариационную задачу Дирихле.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты $b_k(x)$ оператора (5) удовлетворяют следующим условиям:*

$$Re \sum_{|\mu|=|q|=r} (-1)^r b_{\mu+q}(x) \zeta_\mu \overline{\zeta_q} \geq \rho^{2\alpha}(x) \varkappa \sum_{|\mu|=r} |\zeta_\mu|^2 \quad (x \in \Omega,\, \zeta = \{\zeta_\mu\}_{|\mu|=r} \subset \mathbb{C}),$$

$$|b_{\mu+q}(x)| \leq M \rho^{2\alpha}(x) \quad (x \in \Omega,\, |\mu| = |q| = r)\,.$$

$$\left|b_k^{(p)}(x)\right| \leq C_p\, \rho^{2\alpha-\delta(|p|)}(x), \quad x \in \Omega,\, |k| = 2r,\, |p| \leq r,$$

где число $\delta(|p|)$ удовлетворяет хотя бы одному из неравенств: a) $|p| > \delta(|p|)$; b) $r\delta(|p|) < |p|\alpha,\, |p| < r$.

Тогда существуют положительные числа c_1, M_1 такие, что

$$Re\,(\mathcal{L}[u],\, u)_0 \geq c_1 \left\|u;\, L^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2 - M_1 \left\|u;\, L_2(\Omega)\right\|^2 \tag{6}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Замечание 1. *Неравенство (6) является аналогом неравенства Гординга для эллиптических операторов в ограниченной области со степенным вырождением вдоль всей границы.*

Далее обозначим через $\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$ пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (1) и вводим пространство $\left(\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ – пополнение пространства $L_2(\Omega)$ по норме

$$\left\| f;\, \left(\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| = \sup \frac{|(f,\, v)_0|}{\left\|v;\, W^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым $v \in \mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$. Элементы из пространства $\left(\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ отождествляются с соответствующими антилинейными функционалами над $\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$.

Вводим полуторалинейную форму

$$\mathcal{P}_\lambda[u,\, v] = (\mathcal{L}[u],\, v)_0 + \lambda(u,\, v)_0 \quad u,\, v \in C_0^\infty(\Omega),$$

где $\mathcal{L}[u]$ – дифференциальный оператор, определенный равенством (5).

Далее предположим, что все условия теоремы 4 выполняются. Тогда из неравенства (6) этой теоремы при $\operatorname{Re}\lambda \geq M_1 + c_1$ следует, что

$$\operatorname{Re}\mathcal{P}_\lambda[u,\, u] \geq c_1 \left\|u;\, W^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2 \quad u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Далее в условиях теоремы 4 доказывается неравенство

$$|(\mathcal{L}[u],\, v)_0| \leq M_0 \left\|u;\, W^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v;\, W^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \tag{7}$$

Отсюда находим

$$|\mathcal{P}_\lambda[u,\, v]| \leq (M_0 + |\lambda|) \left\|u;\, W^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v;\, W^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\|$$

для всех $u,\, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Это неравенство позволяет нам распространить форму $\mathcal{P}_\lambda[u,\, v]$ по непрерывности на все $u,\, v \in \mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$.

Отметим, что неравенство (7) позволяет нам определить сопряженный оператор $\mathcal{L}^*[u]$, который связан с оператором (5) равенством

$$(\mathcal{L}[u],\, v)_0 = (u,\, \mathcal{L}^*[v])_0 \quad \forall u,\, v \in \mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega).$$

Далее вводим полуторалинейную форму $\mathcal{P}^+_\lambda[u,\, v]$ равенством

$$\mathcal{P}^+_\lambda[u,\, v] \equiv (\mathcal{L}^*[u],\, v)_0 + \overline{\lambda}(u,\, v)_0. \tag{8}$$

Определим вариационную задачу Дирихле для оператора (5).

Вариационная задача Дирихле. Для заданного элемента F из $\left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ найти функцию $u \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega)$, для которой выполняется равенство

$$\mathcal{P}_\lambda[u,\, v] \equiv (\mathcal{L}[u], v)_0 + \lambda(u,\, v)_0 =< F,\, v > \quad \forall v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega). \tag{9}$$

Наряду с задачей (9) для заданного элементе $G \in \left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ рассмотрим отвечающие ей однородную и формально сопряженные задачи (см. (8)):

$$\mathcal{P}^+_\lambda[u,\, v] =< G,\, v > \quad \forall v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega), \;\; u \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega). \tag{10}$$

$$(\mathcal{L}[u], v)_0 + \lambda(u,\, v)_0 = 0 \quad \forall v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega), \;\; u \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega), \tag{11}$$

$$(\mathcal{L}^*[u],\, v)_0 + \overline{\lambda}(u,\, v)_0 = 0 \quad \forall v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega), \;\; u \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega). \tag{12}$$

Доказана следующая:

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и* $-1/2 \le \alpha < r$.

Тогда задача (9) – (12) фредгольмова, а именно:

1) *задача (11) имеет отличные от нуля решения (обобщенные собственные функции) только для счетного числа значений параметра* $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots$ *(собственные значения) и только* ∞ *будет предельной точкой этих значений;*
2) *отвечающее каждому собственному значению* λ_j *подпространство обобщенных собственных функций (собственное подпространство) - конечномерно;*
3) *у сопряженной задачи (12) собственные значения равны* $\overline{\lambda_j}$, $j = 1, 2, \ldots$*;*
4) *собственные подпространства задач (11) и (12), отвечающие собственным значениям* λ_j *и* $\overline{\lambda_j}$*, имеют одинаковую размерность;*
5) *для того чтобы задача (9) имела хоть одно решение необходимо и достаточно, чтобы для любого решения* $v(x)$ *задачи (12) выполнялось условие* $\langle F,\, v\rangle \equiv 0$*;*
6) *для того чтобы задача (10) имела хоть одно решение необходимо и достаточно, чтобы для любого решения* $u(x)$ *задачи (11) выполнялось условие* $\langle G,\, u\rangle \equiv 0$.

Множество $C^\infty_0(\Omega)$ плотно в пространстве $W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ в том и только в том случае, если $\alpha \le -1/2$ или $\alpha \ge r - 1/2$, то есть в этом случае имеет место равенство $\mathring{W}^r_{2;\,\alpha}(\Omega) = W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$. Поэтому в случае $-1/2 \le \alpha \le r - 1/2$, то есть, когда $\mathring{W}^r_{2;\,\alpha}(\Omega) \neq W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$, можно рассмотреть вариационную задачу Дирихле с неоднородными граничными условиями, которая в этом случае имеем следующую подстановку:

Задача $\mathbb{D}_\lambda$. Для заданного элемента F из $\left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданной функции $\Phi \in W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ найти решение $U \in W^r_{2;\alpha}(\Omega)$ уравнения

$$\mathcal{P}_\lambda[U,\,v] \equiv (\mathcal{L}[U], v)_0 + \lambda(U,\,v)_0 =< F,\,v > \quad \forall v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega), \tag{13}$$

удовлетворяющее условию

$$U(x) - \Phi(x) \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega). \tag{14}$$

Условие (14) означает, что заданная функция $\Phi(x)$ и решение $U(x)$ уравнения (13) имеют одни те же следы на границе $\partial\Omega$ области Ω. Как уже мы отметили условие (14) содержит неоднородные граничные условия только в случае $-1/2 < \alpha < r - 1/2$. Ниже мы будем предполагать, что эти условия выполнены.

Далее в **третьем параграфе второй главы** диссертации изучается фредголмовая разрешимость вариационной задачи Дирихле $\mathbb{D}_\lambda$ с неоднородными граничными условиями. Наряду с этой задачи рассмотрим, также сопряженную и однородные задачи.

Задача $\mathbb{D}^0_\lambda$. Требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$(\mathcal{L}[u], v)_0 + \lambda(u,\,v)_0 = 0 \qquad (\forall v \in C^\infty_0(\Omega))\,,$$

принадлежащее пространству $\mathring{W}^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Задача $\mathbb{D}^*_\lambda$. Для заданного функционала $G \in \left(\mathring{W}^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданной функции $\Psi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ требуется найти решение $V(x)$ уравнения

$$\mathcal{P}^+_\lambda[V,\,v] \equiv (\mathcal{L}^*[V],\,v)_0 + \overline{\lambda}(V,\,v)_0 = \langle G,\,v\rangle \qquad (\forall v \in C^\infty_0(\Omega))\,,$$

удовлетворяющее условию $V(x) - \Psi(x) \in \mathring{W}^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Задача $\mathbb{D}^{0*}_\lambda$. Требуется найти решение $V(x)$ уравнения

$$(\mathcal{L}^*[V],\,v)_0 + \overline{\lambda}(V,\,v)_0 = 0 \qquad (\forall v \in C^\infty_0(\Omega))\,,$$

принадлежащее пространству $\mathring{W}^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и $-1/2 \le \alpha < r - 1/2$.*

Тогда задача $\mathbb{D}_\lambda$ фредгольмова, а именно:

1) задача $\mathbb{D}^0_\lambda$ имеет отличные от нуля решения (обобщенные собственные функции) только для счетного числа значений параметра $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots$ (собственные значения) и только ∞ будет предельной точкой этих значений;

2) отвечающее каждому собственному значению λ_j подпространство обобщенных собственных функций - собственное подпространство - конечномерно;

3) у сопряженной задачи $\mathbb{D}^{0*}_\lambda$ собственные значения равны $\overline{\lambda_j}$, $j = 1, 2, \ldots$;

4) собственные подпространства задач $\mathbb{D}^0_\lambda$ и $\mathbb{D}^{0*}_\lambda$, отвечающие собственным значениям λ_j и $\overline{\lambda_j}$, имеют одинаковую размерность;

5) для того чтобы задача $\mathbb{D}_\lambda$ имела хоть одно решение необходимо и достаточно, чтобы для любого решения $v(x)$ задачи $\mathbb{D}^{0*}_\lambda$ выполнялось условие $\langle \widetilde{F}, v\rangle \equiv 0$, где $\langle \widetilde{F}, v\rangle = \langle F, v\rangle - (\mathcal{L}[\Phi], v)_0 - \lambda(\Phi, v)_0$;

6) для того чтобы задача $\mathbb{D}^*_\lambda$ имела хоть одно решение необходимо и достаточно, чтобы для любого решения $u(x)$ задачи $\mathbb{D}^0_\lambda$ выполнялось условие $\langle \widetilde{G}, u\rangle \equiv 0$, где $\langle \widetilde{G}, u\rangle = \langle G, v\rangle - (\mathcal{L}^*[\Psi], v)_0 - \overline{\lambda}(\Psi, v)_0$.

В **четвертом параграфе второй главы** изучается задача Дирихле для эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих ненулевые младшие коэффициенты.

Пусть r – некоторое натуральное число и J – некоторое подмножество множества $\{0, 1, 2, \ldots, r\}$, причем $r \in J$. Рассмотрим оператор

$$L[u](x) = \sum_{j\in J} \rho^{2\alpha_j}(x) \sum_{|k|=2j} a_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{15}$$

Определение 1. *Вырождение оператора (15) называется согласованным, если числа α_j, $j \in J$, удовлетворяют условиям*

$$\alpha_j = \alpha_r - r + j \quad \text{для всех} \quad j \in J. \tag{16}$$

В работе сначала рассматривается случай согласованного вырождения коэффициентов дифференциального оператора (15). В этом случае при определении основного функционального пространства решений рассматриваемых задач учитывается только вырождение старших коэффициентов. В связи с этим, далее в тексте число α_r обозначается через α.

Далее предположим, что коэффициенты $a_k(x)$ оператора (15) удовлетворяют следующим условиям:

I) существует положительное число $\varkappa$ такое, что

$$\mathrm{Re} \sum_{|\mu|=|q|=r} (-1)^r a_{\mu+q}(x) \zeta_\mu \overline{\zeta_q} \geq \varkappa \sum_{|\mu|=r} |\zeta_\mu|^2 \tag{17}$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_\mu\}_{|\mu|=r}$;

II) при всех $j \in J$ коэффициенты $a_k(x)$, $|k| = 2j$ имеют производные до порядка j включительно и найдется число $M > 0$ такое, что

$$\left| a_k^{(p)}(x) \right| \leq M\, \rho^{-|p|}(x) \tag{18}$$

для всех $x \in \Omega$, всех мультииндексов k длиною $2j$ и всех мультииндексов p, по длине не превосходящих j.

Справедлива следующая:

Теорема 7. *Пусть выполнены условия (16)–(18). Тогда существуют положительные числа c^*, M^* такие, что*

$$Re\,(L[u],\, u)_0 \geq c^* \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|^2 - M^* \left\| u;\, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega) \right\|^2$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Вводим полуторалинейную форму

$$P_\lambda[u,\, v] = (L[u],\, v)_0 + \lambda(u,\, v)_{\alpha-r}, \quad u,\, v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Далее в условиях теоремы 7 для оператора (15) доказывается аналог теоремы 2 и с его помощью изучается разрешимость следующей задачи:

Вариационная задача Дирихле. Для заданного элемента f из $\left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ найти функцию $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$, для которой выполняется равенство

$$P_\lambda[u,\, v] = < f,\, v > \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{19}$$

Доказана следующая теорема:

Теорема 8. *Пусть выполнены все условия теоремы 7. Тогда найдется число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$ для любого заданного элемента $f \in \left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ вариационная задача Дирихле (19) имеет единственное решение $u_0 \in V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ и при этом имеет место неравенство*

$$\left\| u_0;\, V^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \leq M \left\| f;\, \left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right)' \right\|,$$

где число $M > 0$ не зависит от f и λ.

Далее в работе изучается вариационная задачи Дирихле в пространстве $\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$ для операторов вида (15) в случае согласованного вырождения.

Вводим полуторалинейную форму

$$B_\lambda[u, v] = (L[u], v)_0 + \lambda \int\limits_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx, \quad u, v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Доказана следующая теорема:

Теорема 9. *Пусть выполнены условия (17), (18) и пусть* $\alpha_j = \alpha - r + j, \quad j \in J$.

Тогда существуют положительные числа c^*, M^* *такие, что*

$$Re\,(L[u], u)_0 \geq c^* \left\| u;\, L^r_{2,\alpha}(\Omega) \right\|^2 - M^* \left\| u;\, L_2(\Omega) \right\|^2$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Далее в условиях этой теоремы для оператора (15) в пространстве $\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$ доказывается аналог теоремы 2 и с его помощью изучается разрешимость следующей задачи:

Вариационная задача Дирихле. Для заданного элемента f из $\left(\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ найти функцию $u \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega)$, для которой выполняется равенство

$$B_\lambda[u, v] = < f, v > \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{20}$$

Теорема 10. *Пусть выполнены все условия теоремы 9. Тогда найдется число* $\lambda_0 \geq 0$ *такое, что при* $\lambda \geq \lambda_0$ *для любого заданного элемента* $f \in \left(\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ *вариационная задача Дирихле (20) имеет единственное решение* $u_0 \in \mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$ *и при этом имеет место неравенство*

$$\left\| u_0;\, W^r_{2,\alpha}(\Omega) \right\| \leq M \left\| f; \left(\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)' \right\|,$$

где число $M > 0$ *не зависит от* f *и* λ.

Во **второй части четвертого параграфа второй главы** диссертации рассматриваются операторы вида (15) в случае несогласованного вырождения коэффициентов. Вводится понятие старших форм, и доказывается, что только степени вырождения коэффициентов старших форм участвуют в определении пространства решений.

Для $j \in J$ вводим функциональное пространство $W^j_{2,\,\alpha_j}(\Omega)$ с нормой

$$\left\| u;\, W^j_{2,\,\alpha_j}(\Omega) \right\| = \left\{ \sum_{|k|=j} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha_j}(x) \left| u^{(k)}(x) \right|^2 dx + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \right\}^{1/2}. \quad (21)$$

Замыкание класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (21) обозначим через $\mathring{W}^j_{2,\,\alpha_j}(\Omega)$.

Предположим, что коэффициенты исследуемого оператора (15) для любого $j \in J$ удовлетворяют следующим условиям:

I) найдётся число $\varkappa > 0$ такое, что

$$\operatorname{Re} \sum_{|\mu|=|q|=j} (-1)^j a_{\mu+q}(x) \zeta_\mu \overline{\zeta_q} \geq \varkappa \sum_{|\mu|=j} |\zeta_\mu|^2$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_\mu\}_{|\mu|=j}$;

II) коэффициенты $a_k(x)$, $|k| = 2j$ ограничены, имеют производные до порядка j включительно и для всех $x \in \Omega$ и всех мультииндексов p, по длине не превосходящих j, удовлетворяют условию

$$\left| a_k^{(p)}(x) \right| \leq M \, \rho^{-\delta_j(|p|)}(x),$$

где M – некоторое положительное число и число $\delta_j(|p|)$ удовлетворяет хотя бы одному из неравенств: a) $|p| > \delta_j(|p|)$; b) $j\delta(|p|) < |p|\alpha_j$, $|p| < j$.

Полуторалинейную форму $B[u,\, v]$, связанную с оператором (15), представим в виде

$$B[u,\, v] = \int\limits_{\Omega} L[u](x)\overline{v(x)}dx = \sum_{j \in J} B_j[u,\, v],$$

где

$$B_j[u,\, v] = \sum_{|k|=2j} \int\limits_{\Omega} a_k(x) \rho^{2\alpha_j}(x) u^{(k)}(x) \overline{v(x)} dx.$$

Далее определим подмножество I множества J, которое содержит индексы старших форм. Положим $i_0 = r$ и предположим, что $i_0 \in I$. Обозначим через J_0 множество всех элементов $j \in J$ таких, что $\alpha_j \geq \alpha_{i_0} + j - i_0$. Далее обозначим через i_1 наибольший элемент множества $I_0 = J \setminus \{\{i_0\} \cup J_0\}$, удовлетворяющий условию $\alpha_{i_1} < \alpha_{i_0} + i_1 - i_0$ и множество всех $j \in I_0$, для которых $\alpha_j \geq \alpha_{i_1} + j - i_1$ обозначим через J_1. Далее определим i_2 как наибольший элемент множества $I_1 = J \setminus \{\{i_0\} \cup J_0 \cup J_1\}$, при котором выполняется неравенство $\alpha_{i_2} < \alpha_{i_1} + i_2 - i_1$. Поступая с i_2 так же, как с i_1, определим элемент i_3. Продолжая этот процесс, определим множество $I = \{i_0, i_1, \dots, i_N\}$ и все формы $B_j[u, v]$, индексы j которых принадлежат множеству I, назовем *старшими формами.*

Теперь определим пространство $\mathbb{H}_+$ как пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u;\, \mathbb{H}_+\| = \left\{ \sum_{j=0}^{N} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha_{i_j}}(x)|u(x)|^2 dx + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Вводим также пространство $\mathbb{H}_-$ – пополнение пространства $L_2(\Omega)$ по норме

$$\|f;\, \mathbb{H}_-\| = \sup \frac{|(f,\, v)_0|}{\|u;\, \mathbb{H}_+\|}, \text{ где } (f\,,\, v)_0 = \int\limits_{\Omega} f(x)\overline{v(x)} dx$$

и верхняя грань берется по всем ненулевым $v \in \mathbb{H}_+$. Элементы из пространства $\mathbb{H}_-$ отождествляются с соответствующими антилинейными функционалами над $\mathbb{H}_+$. Значение функционала $f \in \mathbb{H}_-$ на функцию $v \in \mathbb{H}_+$ обозначим через $< f,\, v >$.

Доказана следующая теорема:

Теорема 11. *Пусть* $\alpha_j + 1/2 \notin \{1, \dots, j\}$, $j \in J$, *выполнены условия I), II). Тогда существует число* $\lambda_0 \geq 0$ *такое, что при* $\lambda \geq \lambda_0$ *для любого заданного элемента* $F \in \mathbb{H}_-$ *существует единственное решение* $u(x)$ *задачи* D_λ *и это решение удовлетворяет неравенству*

$$\|u;\, \mathbb{H}_+\| \leq M^* \,\|F;\, \mathbb{H}_-\|\,,$$

где число $M^* > 0$ *не зависит от выбора функционала* F *и от* λ.

Третья глава диссертационной работы посвящена доказательству некоторых априорных оценок решения задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида с суммируемыми коэффициентам в ограниченной области. Она состоит из **четырех параграфов.** Для удобства чтения в **первом параграфе** приведены некоторые известные утверждения из общей теории эллиптических дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве. Во **втором параграфе** доказано одно вспомогательное интегральное неравенство для вырождающихся эллиптических операторов, имеющих только старшие коэффициенты. Основным результатом этого параграфа является следующая теорема:

Теорема 12. *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с замкнутой $(n-1)$ -мерной границей $\partial\Omega$ и пусть коэффициенты $b_k(x)$ оператора*

$$L_0[u](x) = \sum_{|k|=2r} \rho^{\alpha}(x) b_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^{\infty}(\Omega), \tag{22}$$

удовлетворяют условиям:

I) Существует положительное число M_0 такое, что

$$M_0^{-1}|\xi|^{2r} \leq \left| \sum_{|k|=2r} b_k(x)\xi^k \right| \leq M_0|\xi|^{2r} \quad (x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n)\,.$$

II) Для любого достаточно малого положительного числа ν существует число $\varepsilon_\nu > 0$ такое, что

$$|b_k(y) - b_k(z)| < \nu, \quad |k| = 2r, \tag{23}$$

для любого $y \in \Omega$ и любого

$$z \in J_\varepsilon(y) = \left\{ z \in R^n :\ |z-y| < \frac{\varepsilon}{\varkappa}\rho(y) \right\}, \quad \varepsilon \in (0,\, \varepsilon_\nu).$$

Тогда существует положительное число c^* такое, что

$$c^* \left\| v;\, V_{2,\,\alpha}^{2r}(\Omega) \right\|^2 \leq \int\limits_{\Omega} \left| L_0[v(z)] \right|^2 dz$$

для всех $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

Замечание 2. *Условие (23) выполняется если коэффициенты $b_k(x)$ оператора (22) непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$.*

Из теоремы 12 следует априорна оценка решения следующей задачи Дирихле для оператора (22):

Задача Дирихле. Для заданной функции $f \in L_2(\Omega)$ найти решение $U(x)$, $x \in \Omega$, уравнения

$$L_0[U](x) = \sum_{|k|=2r} \rho^{\alpha}(x) b_k(x) U^{(k)}(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

принадлежащее пространству $V_{2,\,\alpha}^{2r}(\Omega)$.

Следствие 1. *Пусть выполнены все условия теоремы 12. Тогда решение $U(x)$ задачи Дирихле для оператора (22) удовлетворяет априорную оценку*

$$c_0 \left\| U;\, V_{2,\,\alpha}^{2r}(\Omega) \right\| \leq \| f;\, L_2(\Omega) \|\,,$$

где положительная постоянная c_0 не зависит от выбора $f \in L_2(\Omega)$.

В **третьем параграфе третьей главы** изучаются эллиптические операторы, которые имеют ненулевые младшие коэффициенты. Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 13. *Пусть все коэффициенты* $b_k(x)$ *оператора*

$$L[u](x) = \sum_{|k|\le 2r} \rho^{\alpha_{|k|}}(x) b_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{24}$$

ограничены, удовлетворяют условию II) из теоремы 12 и выполнены следующие условия:

III) Существует положительное число $\varkappa_0$ *такое, что (условие эллиптичности)*

$$\varkappa_0 |\xi|^{2r} \le \left| \sum_{|k|=2r} b_k(x) \xi^k \right|$$

для всех $x \in \Omega,\ \xi \in R^n$.

IV) Число $\alpha = \alpha_{2r} > -1/2$ *не принадлежит множеству* $\{1, 2, \ldots, 2r\}$ *и числа* $\alpha_j > -1/2$, $j = \overline{1,\, 2r-1}$ *удовлетворяют одному из следующих условий: 1)* $2r - \alpha > j - \alpha_j$; *2)* $\alpha_j > \alpha j/2r$, $j > 0$.

Тогда существуют положительные числа c^*, K^* *такие, что*

$$c^* \left\| v;\, W^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\| \le \| L[v];\, L_2(\Omega) \| + K^* \| v;\, L_2(\Omega) \|$$

для всех $v \in \mathring{W}^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)$.

С помощью этой теоремы доказывается априорная оценка решений следующей задачи Дирихле для оператора (24):

Задача Дирихле. Для заданной функции $f \in L_2(\Omega)$ найти решение $U(x)$ уравнения

$$L[U](x) = \sum_{|k|\le 2r} \rho^{\alpha_{|k|}}(x) b_k(x) U^{(k)}(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

принадлежащее пространству $\mathring{W}^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)$.

Следствие 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 13. Тогда решение* $U(x)$ *задачи Дирихле для оператора (24) удовлетворяет априорную оценку*

$$c^* \left\| U;\, U^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\| \le \| f;\, L_2(\Omega) \| + K^* \| U;\, L_2(\Omega) \|,$$

где положительные постоянные c^*, K^* *не зависят от выбора* $f \in L_2(\Omega)$.

Далее в **третьем параграфе третьей главы** диссертационной работы с помощью теоремы 13 доказывается следующий результат о конечномерности ядра дифференциального оператора

$$\mathbb{L}u = L[u], \quad D(\mathbb{L}) = \mathring{W}^{2r}_{2,\alpha}(\Omega),$$

где дифференциальное выражение $L[u]$ определяется равенством (24).

Теорема 14. *Пусть $2r-\alpha>0$ и выполнены условия теоремы 13. Тогда оператор $\mathbb{L}$ замкнут, имеет конечномерное ядро $N(\mathbb{L})$ и замкнутое в пространстве $L_2(\Omega)$ множество значений $R(\mathbb{L})$.*

В **четвертом параграфе третьей главы** диссертации рассматриваются слабо позитивные эллиптические операторы со степенным вырождением. При этом вырождающийся дифференциальный оператор (24) называется слабо позитивным, если выполняется условие

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|=2r} b_k(x)\xi^k \geq 0, \quad \forall \xi \in R^n, \forall x \in \Omega. \tag{25}$$

Доказана следующая теорема:

Теорема 15. *Пусть коэффициенты $b_k(x)$, $|k| \leq 2r$, оператора (24) ограничены, удовлетворяют (25) и условиям теоремы 13.*

Тогда существуют положительные числа $\varkappa_0$, λ_0 такие, что при $\lambda \geq \lambda_0$ имеет место неравенство

$$\|\mathbb{L}v + \lambda v;\, L_2(\Omega)\| \geq \varkappa_0 \left\|v;\, W^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

где $\mathbb{L}$ – замыкание оператора (24) с областью определения $D(\mathbb{L}) = \mathring{W}^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)$.

Выводы

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- теоремы об однозначной разрешимости вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для вырождающегося эллиптического оператора недивергентного вида высшего порядка с гладкими коэффициентами в случаях согласованного и несогласованного вырождения коэффициентов [1-А, 3-А, 5-А, 7-А, 8-А];
- теоремы о фредгольмовости вариационной задачи Дирихле с однородными и неоднородными граничными условиями для вырождающегося эллиптических операторов недивергентного вида с гладкими коэффициентами в ограниченной области [2-А, 6-А, 9-А];
- априорная оценка решения вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих только негладкие старшие коэффициенты, в которой норма решения в пространство основных решений оценивается сверху через норму правой части уравнения [4-А] ;
- теорема об конечномерности ядра и замкнутости области значений одного класса вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами [4-А];
- априорная оценка решения вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами, имеющих младшие коэффициенты, в которой норма решения задачи в пространстве основных решений оценивается сверху через норму правой части уравнения и норма решения в пространстве L_2 [4-А];
- оценка нормы слабо позитивных эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами, в которой норма оператора оценивается снизу через положительную константу умноженную на нормой функции в основном пространстве [4-А, 9-М].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты, полученные в диссертационной работе, имеют теоретический характер. Они могут быть использованы при развитии теории вырождающихся эллиптических операторов высокого порядка недивергентного вида, в частности, при изучении разрешимости краевых задач для таких операторов и исследовании их спектральных свойств.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. В журналах, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан

[1–A]. Хакназаров К.Э. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов не дивергентного вида в ограниченной области [Текст] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2020, т.63, № 5-6, с. 309-315.

[2–A]. Хакназаров К.Э. О фредгольмовой разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида [Текст] / К.Э.Хакназаров // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2020, т.63, № 9-10, с. 586-590.

[3–A]. Хакназаров К.Э. Вариационная задача Дирихле с однородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида [Текст] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Доклады Национальной академии наук Таджикистана, 2021, т. 64, № 7-8, с. 393-400.

[4–A]. Хакназаров К.Э. О конечномерности ядра некоторых вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида [Текст] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Доклады НАН Таджикистана, 2022, т. 65, № 3-4, с. 157-161.

[5–A]. Хакназаров К.Э. Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов недивергентного вида с несогласованным вырождением [Текст] / К.Э.Хакназаров // Известия НАН Таджикистана. Отделения физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2022, №1, с. 33-39.

2. В других изданиях:

[6–А]. Хакназаров К.Э. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида [Текст] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Материалы Международной конференция «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвящённой 70-летию со дня рождения академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора К.Х.Бойматова (Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.) с. 150-154.

[7–А]. Хакназаров К.Э. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида [Текст] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Материалы Международной конференции «Актуальные проблемы современной математики», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.) – С. 90-94.

[8–А]. Хакназаров К.Э. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида [Текст] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Материалы международной научно-практической конференции, посвященной памяти Абдуфаттоха Хотамова (Душанбе, 15-16 мая 2022 г.) – С. 41-45.

[9–А]. Хакназаров К.Э. О фредгольмовой разрешимости неоднородной вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов недивергентного вида в ограниченной области [Текст] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию со дня рождения академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Шабозова М.Ш. (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.) – С. 75-78.

АКАДЕМИЯИ МИЛЛИИ ИЛМҲОИ ТОҶИКИСТОН
ИНСТИТУТИ МАТЕМАТИКАИ ба номи А.ҶӮРАЕВ

УДК 517.957

Бо ҳуқуқи дастхат

Ҳақназаров Қобил Эражзода

МАСЪАЛАИ ДИРИХЛЕ БАРОИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ ОПЕРАТОРҲОИ ЭЛЛИПТИКИИ ТАНАЗЗУЛЁБАНДАИ НАМУДИ ҒАЙРИДИВЕРГЕНТӢ

Автореферати

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD) - доктор аз рӯи ихтисоси 6D060100 – Математика: 6D060101 – таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Душанбе – 2022

Диссертатсия дар Институти математика баноми А.Ҷӯраеви
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон иҷро карда шудааст

Роҳбари илмӣ:	**Исҳоқов Сулаймон Абунасрович** доктори илмҳои физикаю математика, узви вобастаи АМИТ, профессор
Муқарризони расмӣ:	**Сафаров Ҷумъабой,** доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи таҳлили математикӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Н.Хусрав;
	Юсуфзода Гулзорхон, доктори илмҳои физикаю математика, мудири кафедраи таҳлили математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ.
Муассисаи муқарриз:	Донишгоҳи миллии Тоҷикистон,

Ҳимоя санаи *15 марти соли 2023 соати 09:00* дар ҷаласаи Шӯрои диссертатсионии 6Д.КОА–009 дар Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон баргузор мегардад: нишонӣ: 734063, ш. Душанбе, к. Айнӣ 299/4.

Бо диссертатсия дар китобхонаи Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, инчунин дар вебсайти http://www.mitas.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат "_____"_______________ соли 2022 фиристода шуд.

Котиби илмии
Шӯрои диссертатсионии 6D.КОА–009,
доктори илмҳои физикаю математика   Каримов О.Х.

Тавсифи умумии кор

Мабрумияти мавзӯъ. Кори диссертатсионӣ ба омӯзиши ҳалшавандагии масъалаҳои умумикардашудаи сарҳадӣ, ки бо операторҳои эллиптикии намуди ғайридивергентӣ дар соҳаи маҳдуд бо таназзулёбии дараҷагӣ алоқаманданд, бахшида шудааст. Қайд менамоем, ки масъалаҳои сарҳадӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣи таназзулёбанда дар раванди моделсозии математикии бисёр масъалаҳо амалии назарияи хамкунии хурди сатҳҳо, динамикаи газҳо ва дигар соҳаҳои механика ба вуҷуд меоянд. Аз ин рӯ, назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ бо таназзулӣ яке аз соҳаҳои мустақил ва ба тарзи динамикӣ тараққиёбанда дар математикаи муосир мебошад. Дар ин назария ду гуруҳи усулҳо ҷудо карда мешаванд: усулҳои классикӣ ва усулҳои вариатсионӣ. Усулҳои классикӣ одатан дар ҳолатҳое истифода мешаванд, ки маълумоти ибтидоии масъалаи тадқиқшаванда (тарафи рости муодила, функсияҳои сарҳадӣ, коэффициентҳои оператори дифференсиалӣ ва ғ.) ба миқдори кифоя дифференсиронидашавандаанд ва дар ин ҳолат ҳалли масъалаи баррасишаванда ба таври ошкор ба даст меояд. Дар мавридхое, ки усулҳои классикӣ кор намекунанд, барои омӯзиши сифатии масъалаҳои омӯхташаванда усулҳои вариатсионӣ истифода мешаванд, ки ба унсурҳои назарияи функсияҳо ва таҳлили функсионалӣ асос ёфтаанд. Дар кори мо усули вариансиони истифода мешавад ва барои масъалаҳои таҳқиқшаванда мо шартҳои кифоягии мавҷудият ва ягонагии ҳалро дар фазои функсионалии муайян нишон медиҳем, инчунин дар сурати умумӣ, хосиятҳои соҳаи муайянӣ ва соҳаи қимматҳои операторҳои дифференсиалии мувофиқро меомӯзем. Тадқиқотҳои мо идомаи мантиқии пажӯҳишҳои муаллифони маъруф дар ин соҳа, аз қабили Никольский С.М., Трибел Х., Кудрявцев Л.Д., Бойматов К.Х., Куфнер А., Мирошин Н.В., Исхоков С.А. ва дигарон мебошанд, ва натиҷахои ба даст овардаи мо умумигардонданӣ ва тақвияти баъзе натичаҳои ин муаллифон мебошанд.

Дарачаи коркарди илмии масъалаҳои омӯхташаванда. Аз таҳлили маколахои илмии нашршуда оид ба назарияи масъалахо вариатсионӣ барои муодилахои эллиптикии таназзулёбанда бармеояд, ки қисми асосӣ онҳо ба ҳолате дахл дорад, ки оператори мавриди омӯзиш аз аввал дар намуди дивергентӣ дода мешавад ва ин имкон медихад, ки элементхои назарияи шаклҳои якунимхаттӣ истифода шаванд. Натиҷаҳои мо ба ҳолати камомӯхташудаи операторҳои дифференсиалии эллиптикии намуди ғайридивергентӣ таалluқ доранд.

Алоқаи кор бо мавзӯъҳо ва барномаҳои (лоиҳаҳои) илмӣ. Кор дар доираи ду мавзӯи зерини корҳои илмӣ-тадқиқотӣ, ки дар Институти математика ба номи А.Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон таҳия карда мешавад, анҷом дода шуд:

"Масъалаҳои умумиикардашудаи сарҳадӣ барои муодилаҳои эллиптикӣ таназзулёбанда бо коэффисиентҳои ченшаванда ва муодилаҳои эволютсионии тартиби касрӣ" ГР 0116TJ00534;

"Баҳои спектр ва ҳалшавандагии масъалаҳои вариантсионӣ барои операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи бо ёрии шаклҳои якунимхаттии ғайрикоэрситивӣ тавлид шуда" ГР 0121TJ1179.

Мақсади таҳқиқот. Мақсади асосии кори диссертатсионӣ иборат аст аз омӯзиши ҳалшавандагии масъалаи Дирихле, ки бо баъзе синфҳои операторҳои дифференсиалии эллиптикии намуди ғайридивергентӣ дар соҳаи маҳдуд бо таназзулёбии дараҷагӣ дар сарҳади соҳа алоқаманданд, ва омӯзиши хосиятҳои чунин операторҳо.

Масъалаҳои таҳқиқот. Мутобиқи ҳадафҳои гузоштaшуда масъалаҳои асосии зерин муайян карда шуданд:

- омӯхтани ҳалшавандагии масъалаи умумикардашудаи Дирихле бо шартҳои сарҳадии якҷмнса барои оператори эллиптикии намуди ғайридивергентӣ бо таназзулёбӣ дар соҳаи маҳдуд бо коэффисиентҳои суфта;
- омӯхтани ҳалшавандагии масъалаи умумикардашудаи Дирихле барои оператори эллиптикии намуди ғайридивергентӣ бо таназзулёбӣ дар соҳаи маҳдуд бо коэффисиентҳои суфта дар ҳолати ғайриякҷинса будани шартҳои сарҳадӣ;
- омӯхтани хосиятҳои сифатии соҳаи муайянӣ, соҳаи қимматҳо ва ядрои оператори эллиптикии таназзулшёбандаи намуди ғайридивергентӣ дар соҳаи маҳдуд дар ҳолати ғайридифференсиронидашуда будани коэффисиентҳои он.

Нововарии илмии таҳқиқот. Натичаҳои асосии диссертатсия нав буда, чунинанд:

- теоремаҳои ҳалшавандагии якқимматаи масъалаи умумикардашудаи Дирихле бо шартҳои сарҳадии якҷинса ва ғайриякҷинса барои оператори эллиптикии дараҷаи олии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентӣ бо коэффисиентҳои суфта исбот карда шуданд. Ҳолатҳои таназзулёбии ҳаммувофиқа ва ғайриҳаммувофиқаи коэффициентхои оператор ба таври алоҳидагӣ дида баромада шуданд;

- барои операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентӣ, ки танҳо коэффисиентҳои пешбарии ғайрисуфта доранд, баҳои априорӣ барои ҳалли масъалаи вариационии Дирихле бо шартҳои сарҳадиии якҷинса исбот карда шуд, ки дар он нормаи ҳалл дар фазои ҳалҳои асосӣ аз боло ба воситаи нормаи тарафи рости муодила баҳо дода мешавад;
- теорема дар бораи охирченакагии ядро ва сарбастагии соҳаи қимматҳои як синфи операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентӣ бо коэффисиентҳои ғайрисуфта исбот карда шуд;
- барои операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентӣ бо коэффисиентҳои ғайрисуфта, ки коэффисиентҳои хурд доранд, баҳои априории ҳалли масъалаи вариатсионии Дирихле бо шароитҳои сарҳадии якҷинса исбот карда шуд, ки дар он нормаи ҳалли масъала дар фазои ҳалли асосӣ аз боло тавассути нормаи тарафи рости муодила ва нормаи ҳалл дар фазо L_2 баҳо дода мешавад;
- барои операторҳои эллиптикии суст позитивии намуди ғайридивергентӣ бо коэффисиентҳои ғайрисуфта баҳое исбот карда шуд, ки дар он нормаи оператор аз поён тавссути зарби доимии мусбати бо нормаи функсия дар фазои асосӣ баҳо дода шудааст.

Аҳамияти назариявӣ ва илмию амалии кор. Натичаҳои дар диссертатсия ба даст овардашуда характери назариявӣ доранд. Онҳо метавонанд ҳамчун асос барои тадқиқотҳои минбаъдаи назариявӣ дар назарияи масъалаҳои сарҳадӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, дар назарияи операторҳои дифференсиалӣ дар фазои нормиронидашудаи функсияҳои дифференсиронидашавандаи якчанд тағирёбандаи ҳақиқӣдошата хизмат кунанд.

Арзиши амалии кор бо аҳамияти амалии муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ дар ҳалли масъалаҳои амалии механика ва дигар соҳаҳои физика муайян карда мешавад.

Объекти таҳқиқот – оператори дифференсиалии эллиптикии тартиби олии намуди ғайридивергентӣ дар соҳаи маҳдуд бо таназзулёбии дараҷагӣ дар сарҳади соҳа.

Предмети таҳқиқот. Масъалаи вариатсияи Дирихле барои операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентӣ. Соҳаи муайянӣ ва соҳаи қимматҳои операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентӣ.

Усулҳои таҳқиқ. Дар кори диссертатсия усулҳои вариатсионӣ барои омӯзиши масъалаҳои сарҳадӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ дар асоси унсурҳои таҳлили функсионалӣ ва назарияи фазои нормиронидашудаи функсияҳои дифференсиронидашавандаи дорои якчанд тағйирёбандаҳои ҳақиқи истифода мешаванд.

Саҳми шахсии довталаби дараҷаи илмӣ. Ҳадафҳои таҳқиқот аз ҷониби роҳбари илмӣ таҳия карда шуда, кӯмаки машваратӣ расонида шудааст. Натичаҳои асосии кори диссертатсионӣ, ки дар банди "Навовarии илмии таҳқиқот" инъикос ёфтаанд, шахсан аз тарафи муаллиф бадаст оварда шудаанд.

Мувофиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисоси илмӣ (ба формула ва соҳаи таҳқиқот). Таҳқиқоти диссертатсионӣ ба ихтисос 6D060101 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ мутобиқат дорад. Он ба тасдиқотҳои назарияи фазоиҳои функсияҳои дифференсиронидашавандаи якчанд тағйирёбандаҳои ҳақиқӣдошта, назарияи операторҳо дар фазои Гилбертӣ ва дигар шохаҳои таҳлили функсионалӣ асос ёфтааст.

Натиҷаҳое, ки ба ҳимоя бароварда мешаванд:

- аналоги нобаробарии Гординг барои операторҳои эллиптикии намуди ғайридивергентӣ, ки танҳо коэффисиентҳои калони суфта доранд ва дар соҳаи маҳдуд додашуда, дар тамоми сарҳади соҳа таназзулёбии дараҷагӣ доранд;
- теорема оиди ҳалшавандагии яккимматаи масъалаи умумишудаи Дирихле, ки ҳалли он дар бастаи синфи функсияҳои финитии беохир дифференсиалшаванда ҷустуҷӯ карда мешавад, барои операторҳои эллиптикии намуди ғайридивергентӣ, ки танҳо коэффисиентҳои калони суфта доранд ва дар соҳаи маҳдуд додашуда дар тамоми сарҳади соҳа таназзулёбии дараҷагӣ доранд;
- теоремаҳои ба маънои Фредҳолм ҳалшавандагии масъалаи умумишудаи Дирихле бо шартҳои якҷинсаи ва ғайриякҷинсаи сарҳадӣ барои операторҳои эллиптикии намуди ғайридивергентӣ, ки танҳо коэффисиентҳои калони суфта доранд ва дар соҳаи маҳдуд додашуда дар тамоми сарҳади соҳа таназзулёбии дараҷагӣ доранд;
- теоремаҳо оиди ҳалшавандагии яккимматаи масъалаи умумӣшудаи Дирихле бо шароити якҷинсаи сарҳадӣ барои операторҳои эллиптикии суфта бо коэффисиентҳои хурди ғайринулӣ дар соҳаи маҳдуд дар ҳолатҳои таназзулёбии ҳаммувофиқа ва ғайриҳаммувофиқаи коэффитсиентҳо;

- баҳои априорӣ, ки дар он нормаи ҳалли масъалаи Дирихле барои операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентӣ, ки танҳо коэффисиентҳои калони ғайрисуфта доранд, аз боло бо ёрии нормаи қиммати оператор дар ин ҳал баҳо дода мешавад;
- баҳои априорӣ, ки дар он нормаи ҳалли масъалаи Дирихле барои операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентӣ бо коэффисиентҳои хурди ғайрисуфта аз боло бо ёрии нормаи қиммати оператор дар ин ҳал ва нормаи он дар фазои L_2 баҳо дода мешавад;
- теорема оиди охирченака будани ядро ва сарбаста будани соҳаи қимматҳои операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентӣ бо коэффисиентҳои ғайрисуфта, ки коэффисиентҳои ғайринулии хурд доранд ва дар соҳаи маҳдуд муайян шудаанд;
- баҳои априорӣ, ки дар он нормаи ҳалли масъалаи Дирихле барои операторҳои эллиптикии суст позитивии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентӣ бо параметр, ки коэффисиентҳои ғайрисуфтаи хурд доранд, аз боло бо ёрии нормаи қиммати оператор дар ин ҳалл баҳо дода мешавад.

Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳо. Эътимоднокии натиҷаҳои таҳқиқот бо ёрии исботҳои муфассали математикии ҳамаи тасдиқотҳои дар диссертатсия овардашуда, ки дар унсурҳои таҳлили функсионалӣ, назарияи функсияҳо ва назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ асоснок шудаанд, тасдиқ карда мешавад.

Тавсиби натиҷаҳои диссертатся. Натичаҳои асосии диссертатсия дар семинари шӯъбаи таҳлили функсионалӣ ва назарияи функцияхо ва семинари умумии Институти математикаи ба номи А.Ҷураеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон мухокима карда шуданд. Натичаҳои диссертатсия ҳангоми маърузахо дар конференцияхои зерин муҳокима ва баррасӣ гардиданд:

- конференсияи байналхалқии «Масъалаҳои муосири таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ», бахшида ба 70-солагии зодрузи академики АМИ Точикистон К.Х.Бойматов.(Душанбе, 25-26 декабри 2020 с.).
- конференсияи байналхалқии «Масъалаҳои актуалии математикаи муосир», бахшида ба 80-солагии зодрузи профессор Темур Собиров. (Душанбе, 25-26 июни 2021 с.).

- конференсияи байналхалқии илмӣ «Масъалаҳои муосири таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳо», бахшида ба 70-солагии академики АМИ Тоҷикистон М.Ш.Шабозов (Душанбе, 24-25 июни 2022 с.).
- конференсияи байналхалқии илмию амалӣ "Доир ба масъалаҳои муосири ташаккули қобилият ва имкониятҳои потенсиалии хонандагон ва хатмкунандагони таълимгоҳҳои махсус", бахшида ба хотираи А.Ҳотамов (Душанбе, 15-16 майи 2022 с.)

Интишорот аз рӯм мавзӯи диссертатсия. Маводҳои диссертатсия дар 9 мақола чоп шудаанд [1-М – 9-М]. Корҳо [1-М – 5-М] дар маҷаллаҳо аз рӯихати маҷаллаҳои илмии тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Чумхурии Точикистон тавсия намуда ба чоп расидаанд. Дар корҳое, ки дар ҳаммуаллифӣ бо роҳбари илмӣ интишор ёфтаанд, ба хаммуаллиф тартиб додани масъалахо ва интихоби усули исботи натичаҳо тааллуқ доранд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, се боб, рӯйхати адабиёти истиснодшуда иборат аз 131 номгӯ ва хулоса иборат аст ва 159 саҳифаи чопи мошинӣро дар бар мегирад ва дар LATEX ҳуруфчинӣ шудааст.

Барои осонӣ дар диссертатсия рақамгузории якхелаи теоремаҳо, леммаҳо ва формулаҳо истифода мешавад. Онҳо рақамгузории сегона доранд, ки дар он рақами аввал рақами боб, дуюм рақами параграф ва сеюм ба шумораи тартибии теоремаҳо, леммаҳо ё формулаҳои дар ин параграф мебошад.

ҚИСМИ АСОСИИ ТАҲҚИҚОТ

Маводҳо ва усулҳои таҳқиқот. Маводи таҳқиқотӣ аз ҳалли масъалаи умумишудаи Дирихле барои синфҳои гуногуни муодилаҳои эллиптикии тартиби олии намуди ғайридивергентӣ дар соҳаи маҳдуд, ки дар тамоми сарҳади соҳа таназзулёбии дараҷаҷағи доранд, иборат аст. Дар кор усулҳои муосири назарияи операторҳои дифференсиалӣ ва назарияи функсияҳои якчанд таъғирёбандаҳои ҳақиқӣдошта истифода шудаанд.

Натиҷаҳои таҳқиқот. Мазмуни мухтасари натичаҳои бобхои кори диссертатсиониро меорем.

Боби якӯми кор ба таҳлили сарчашмаҳои адабӣ оид ба назарияи масъалаи варианти Дирихле барои операторҳои эллиптикӣ дар соҳаи маҳдуд бо таназзулёбии дараҷагӣ дар тамоми сарҳади соҳа бахшида шудааст.

Боби дуюм ба омӯзиши халшавандагии масъалаи вариатсионии Дирихле барои операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентӣ бо коэффисиентҳои суфта бахшида шудааст. Он аз **чор параграф** иборат аст. Дар **параграфи якӯм** баъзе натиҷаҳои ёрирасон аз назарияи умумии масъалаҳои вариантсионӣ дар фазои гилбертӣ оварда шудаанд. Дар **параграфи дуюм** хосиятҳои асосии фазоҳои нормиронидашудаи функсияҳои дифференсиронидашавандаи якчанд тағирёбандаи ҳақиқидошта дар соҳаи маҳдуд бо вазни дараҷагӣ оварда шудаанд. Тасдиқотҳои дар ин параграф овардашуда зуд-зуд дар бобҳои минбаъдаи диссертатсия истифода мешаванд. Ин фазоҳо бо $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ ишора мешаванд ва мутаносибан бо ёрии нормаҳои зерин муайян карда мешаванд

$$\|u; V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{p\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx + \int\limits_{\Omega} \rho^{p(\alpha-r)}(x)|u(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

$$\left\|u; W^r_{p,\,\alpha}(\Omega)\right\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{p\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}. \qquad (1)$$

Дар ин ҷо ва минбаъд r – адади натуралӣ, $1 \le p < +\infty$, $\mathbb{R}^n$ – фазои евклидии n-ченакаи нуқтаҳои $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ва Ω – соҳаи маҳдуд дар $\mathbb{R}^n$ бо сарҳади $(n-1)$-ченакаи сарбастаи $\partial\Omega$, $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ – мултииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ – дарозии мультииндекси k ва $u^{(k)}(x)$ – ҳосилаи ба маънои С.Л.Соболев умумишудаи мультииндекси k функсияи $u(x)$.

Параграфи сеюми боби дуюм ба омӯзиши халшавандагии масъалаи Дирихле барои операторҳои эллиптикии ғайридивергентӣ, ки танхо коэффисиентхои калон доранд, бахшида шудааст. Аввалан, дар ин параграф аналоги нобаробарии Гординг дар фазои $V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ исбот карда мешавад.

Оператори дифференсиалии намуди ғайридивергентии

$$L[u](x) = \sum_{|k|=2r} a_k(x)u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \qquad (2)$$

омӯхта мешавад.

Теоремаи зерин исбот шудааст:

Теорема 1. *Бигзор шартҳои зерин иҷро шаванд:*

I) Чунин адади мусбат $\varkappa$ мавҷуд аст, ки

$$Re \sum_{|\mu|=|q|=r} (-1)^r a_{\mu+q}(x) \zeta_\mu \overline{\zeta_q} \geq \rho^{2\alpha}(x) \varkappa \sum_{|\mu|=r} |\zeta_\mu|^2$$

барои ҳама $x \in \Omega$ ва ҳама гуна маҷмӯи ададҳои комплексии $\zeta = \{\zeta_\mu\}_{|\mu|=r} \subset \mathbb{C}$.

II) Барои ҳама $k : |k| = 2r$ ва ҳама $x \in \Omega$ нобаробарии зерин иҷро мешавад

$$|a_k(x)| \leq M \rho^{2\alpha}(x),$$

ки дар он M – адади мусбат ва α – адади ҳақиқӣ аст.

III) Коэффитсиентҳои $a_k(x)$, $|k| = 2r$,-и оператор (2) дорои ҳама ҳосилаҳои то тартиби r-ум мебошанд ва нобаробари зерин иҷро мегардад

$$\left| a_k^{(p)}(x) \right| \leq C_p \rho^{2\alpha - |p|}(x), \quad x \in \Omega, \, |p| \leq r.$$

Он гоҳ чунин ададҳои мусбати c_1, M_1 мавҷуданд, ки

$$Re \, (L[u], \, u)_0 \geq c_1 \left\| u; \, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|^2 - M_1 \left\| u; \, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega) \right\|^2 \tag{3}$$

барои ҳама $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Минбаъд, дар параграфи сеюми боби дуюм, бо истифода аз аналоги нобаробарии Гординг (3) аз теоремаи 1, ҳалшавандагии масъалаи варианти Дирихлеро, ки бо оператори (2) алоқаманд аст, омӯхта мешавад. Бо ин мақсад аввал фазои $\left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$-ро ворид мекунем, ки он пуркунии фазо $L_{2,\,\alpha-r}(\Omega)$ бо ёрии нормаи

$$\left\| f; \, \left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)' \right\| = \sup \frac{|(f, \, v)_{\alpha-r}|}{\left\| u; \, V^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|},$$

мебошад, ки дар инҷо хадди боло нсбати ҳамаи функсияҳои ғайринулии $v \in V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ гирифта мешавад. Элементҳо аз фазои $\left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ бо функсионалҳои зиддихатти мувофиқ дар $V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ айниятан баробар шуморида мешаванд. Баъдан, бо $< f, \, v >$ қиммати функсионалии $f \in \left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ барои функсияи $v \in V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ ишора карда мешавад.

Шакли якунимхатии зеринро ворид менамоем

$$P_\lambda[u, \, v] = (L[u], \, v)_0 + \lambda(u, \, v)_{\alpha-r}, \quad u, \, v \in C_0^\infty(\Omega),$$

ки дар он $L[u]$ оператори дифференсиалиест, ки бо баробарии (2) муайян карда шудааст.

Теорема 2. *Бигзор шартҳои теоремаи 1 қонеъ карда шаванд. Он гоҳ чунин адади $\lambda_0 \geq 0$ вуҷуд дорад, ки барои $\lambda \geq \lambda_0$:*

1) оператори хаттии Λ мавҷуд аст, ки дар байни фазоҳои $V^r_{2,\alpha}(\Omega)$ ва $\big(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\big)'$ гомеоморфизмро амалӣ мекунад, ва инчунин

$$\langle \Lambda u,\, v\rangle = P_\lambda[u,\, v] \quad \forall u,\, v \in V^r_{2,\alpha}(\Omega);$$

2) ҳар як функсионалии бефосилаи зиддихатии $l(v)$ аз $\big(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\big)'$ ба намуди зерин навишта мешавад

$$l(v) = P_\lambda[u_0,\, v] = \langle \Lambda u_0,\, v\rangle,$$

ва чунин навишт ягона аст.

Минбаъд мо ҳалшавандагии масъалаи зеринро меомӯзем:

Масъалаи вариатсионии Дирихле. Барои як элементи додашудаи F аз фазои $\big(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\big)'$ чунин функсияи $u_0 \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$ ёфта шавад, ки барои он баробарии зерин иҷро шавад

$$P_\lambda[u_0,\, v] =< F,\, v > \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4}$$

Теоремаи зерин исбот шудааст:

Теорема 3. *Бигзор ҳамаи шартҳои теоремаи 2 иҷро шаванд ва λ_0 адади дар ин теорема мавҷудбуда бошад. Онгоҳ дар ҳолати $\lambda \geq \lambda_0$ будан, барои ҳаргуна элементи додашудаи $F \in \big(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\big)'$ масъалаи вариатсионии Дирихле (4) ҳалли ягонаи $u_0 \in V^r_{2,\alpha}(\Omega)$ –ро дорад ва нобаробарӣ зерин иҷро мешавад*

$$\left\|u_0;\, V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \leq M \left\|F;\big(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\big)'\right\|,$$

ки дар он адади $M > 0$ аз F ва λ новобаста аст.

Минбаъд, дар параграфи сеюми боби дуюм мо ҳалшавандагии масъалаи вариатсиявии Дирихлеро дар фазои $W^r_{2;\alpha}(\Omega)$ барои оператори намуди ғайридивергентии зерин меомӯзем

$$\mathcal{L}[u](x) = \sum_{|k|=2r} b_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5}$$

Дар ин ҷо, ҳамчун ҳолати фазои $V^r_{2;\alpha}(\Omega)$, мо аввал аналоги мувофиқи нобаробарии Гордингро исбот мекунем ва баъд дар асоси он масъалаи вариатсияи Дирихлеро меомӯзем.

Теорема 4. *Бигзор коэффисиентҳои $b_k(x)$-и оператор (5) шартҳои зеринро қонеъ кунанд:*

$$Re \sum_{|\mu|=|q|=r} (-1)^r b_{\mu+q}(x)\zeta_\mu \overline{\zeta_q} \geq \rho^{2\alpha}(x)\varkappa \sum_{|\mu|=r} |\zeta_\mu|^2 \quad (x \in \Omega,\, \zeta = \{\zeta_\mu\}_{|\mu|=r} \subset \mathbb{C}),$$

$$|b_{\mu+q}(x)| \leq M\rho^{2\alpha}(x) \quad (x \in \Omega,\, |\mu| = |q| = r)\,.$$

$$\left|b_k^{(p)}(x)\right| \leq C_p\, \rho^{2\alpha-\delta(|p|)}(x), \quad x \in \Omega,\, |k| = 2r,\, |p| \leq r,$$

ки дар инҷо адади $\delta(|p|)$ ақаллан яке аз нобаробариҳои зеринро қонеъ мекунад: a) $|p| > \delta(|p|)$; b) $r\delta(|p|) < |p|\alpha,\, |p| < r$.

Онгоҳ чунин ададҳои мусбати c_1, M_1 мавҷуданад, ки нобаробарии

$$Re\,(\mathcal{L}[u],\, u)_0 \geq c_1 \left\|u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 - M_1 \left\|u;\, L_2(\Omega)\right\|^2 \tag{6}$$

барои ҳамаи $u \in C_0^\infty(\Omega)$ иҷро мешавад.

Эзоҳи 1. *Нобаробарӣ (6) аналоги нобаробарии Гординг барои операторҳои эллиптикӣ дар соҳаи маҳдудшуда бо таназзулёбии дараҷагӣ дар тамоми сарҳад мебошад.*

Баъдан, бо ёрии $\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ пурракардашудаи синфи $C_0^\infty(\Omega)$ бо ёрии нормаи (1)-ро ифода мекунем ва фазои зеринро ворид месозам $\left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ – пурракардашудаи фазои $L_2(\Omega)$ бо ёрии нормаи

$$\left\|f;\, \left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| = \sup \frac{|(f,\, v)_0|}{\left\|v;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|},$$

ки дар он сарҳади болоӣ нисбат ба ҳамаи функсияҳои ғайринулии $v \in \mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ гирифта мешавад. Элементҳо аз фазои $\left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ бо функсионалҳои зиддихатии мувофиқашон бар фазои $\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ айниятӣ ҳисобида мешаванд.

Шакли якунимхатии зеринро ворид мекунем

$$\mathcal{P}_\lambda[u,\, v] = (\mathcal{L}[u],\, v)_0 + \lambda(u,\, v)_0 \quad u,\, v \in C_0^\infty(\Omega),$$

ки дар он $\mathcal{L}[u]$ оператори дифференсиалӣ бо ёрии баробарии (5) муайяншуда мебошад.

Дар оянда чунин мешуморем, ки ҳамаи шартҳои теоремаи 4 иҷро мешаванд. Пас аз нобаробарии (6)-и ин теорема барои $\mathrm{Re}\,\lambda \geq M_1 + c_1$ бармеояд, ки

$$\mathrm{Re}\,\mathcal{P}_\lambda[u,\, u] \geq c_1 \left\|u;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 \quad u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Баъдан дар шароити теоремаи 4 нобаробарии зеринро исбот карда мешавад

$$|(\mathcal{L}[u],\, v)_0| \le M_0 \left\|u;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| \tag{7}$$

Аз ин нобаробарӣ бармеояд, ки

$$|\mathcal{P}_\lambda[u,\, v]| \le (M_0 + |\lambda|) \left\|u;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|$$

барои ҳама $u,\, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Ин нобаробарӣ ба мо имкон медиҳад, ки шакли $\mathcal{P}_\lambda[u,\, v]$-ро бо бефосилагӣ ба ҳама $u,\, v \in \mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ васеъ кунем.

Қайд мекунем, ки нобаробарии (7) ба мо имкон медиҳад то оператори ҳамроҳшудаи $\mathcal{L}^*[u]$-ро муайян кунем, ки он бо оператори (5) бо баробарии зерин алоқа дорад

$$(\mathcal{L}[u],\, v)_0 = (u,\, \mathcal{L}^*[v])_0 \quad \forall u,\, v \in \mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega).$$

Баъдан шакли якунимхатти $\mathcal{P}^+_\lambda[u,\, v]$-ро бо ёрии баробарии зерин ворид мекунем

$$\mathcal{P}^+_\lambda[u,\, v] \equiv (\mathcal{L}^*[u],\, v)_0 + \overline{\lambda}(u,\, v)_0. \tag{8}$$

Масъалаи умумишудаи Дирихлеро барои оператори (5) муайян кунем.

Масъалаи вариатсионии Дирихле. Барои элементи додашудаи F аз $\left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ функсияи $u \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega)$-ро пайдо кунед, ки барои он баробарӣ зерин иҷро шавад

$$\mathcal{P}_\lambda[u,\, v] \equiv (\mathcal{L}[u], v)_0 + \lambda(u,\, v)_0 =< F,\, v > \quad \forall v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega). \tag{9}$$

Дар баробари масъалаи (9) барои элементи додашудаи $G \in \left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ масъалаҳои якҷинса ва шартан ҳамроҳшударо дида мебароем (ниг. (8)):

$$\mathcal{P}^+_\lambda[u,\, v] =< G,\, v > \forall v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega), \quad u \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega). \tag{10}$$

$$(\mathcal{L}[u], v)_0 + \lambda(u,\, v)_0 = 0 \quad \forall v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega), \quad u \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega), \tag{11}$$

$$(\mathcal{L}^*[u],\, v)_0 + \overline{\lambda}(u,\, v)_0 = 0 \quad \forall v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega), \quad u \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega). \tag{12}$$

Теоремаи зерин исбот шудааст

Теорема 5. *Бигзор шартҳои теоремаи 4 ва $-1/2 \le \alpha < r$ иҷро шаванд. Онгоҳ масъалаи (9) – (12) фредҳолмӣ аст, яъне:*

1) *масъала (11) танҳо барои миқдори ҳисобшавандаи қимматҳои параметри $\lambda = \lambda_j,\ j = 1, 2, \ldots$ (қимматҳои хос) ҳалли аз нул фарқкунанда дорад ва танҳо ∞ нуқтаи ҳдудии ин қимматҳо мебошад;*

2) *зерфазоии функсияҳои хусусии умумишуда (зерфазои хос), ки ба ҳар як қиммати хоси λ_j мувофиқ аст, охирченака мебошад;*
3) *қимматҳои хоси масъалаи ҳамроҳшудаи (12) баробаранд ба $\overline{\lambda_j}$, $j = 1, 2, \ldots$;*
4) *фазоҳои хоси масъалаҳои (11) ва (12), ки ба қимматҳои хоси λ_j ва $\overline{\lambda_j}$ мувофиқанд, ченакҳои яккхела доранд;*
5) *барои онки масъалаи (9) ҳадди ақал як ҳал дошта бошад, зарур ва кифоя аст, ки барои ҳар як ҳалли $v(x)$-и масъалаи (12) шарти $\langle F,\, v\rangle \equiv 0$ иҷро шавад;*
6) *барои онки масъалаи (10) ҳадди ақал як ҳал дошта бошад, зарур ва кифоя аст, ки барои ҳар як ҳалли $u(x)$-и масъалаи (11) шарти $\langle G,\, u\rangle \equiv 0$ иҷро шавад.*

Маҷмӯи $C_0^\infty(\Omega)$ дар фазои $W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ зич аст, агар шарти $\alpha \le -1/2$ ва ё $\alpha \ge r - 1/2$ ичро шавад, яъне дар ин ҳолат $\mathring{W}^r_{2;\,\alpha}(\Omega) = W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ мебошад. Аз ин рӯ, дар ҳолати $-1/2 \le \alpha \le r - 1/2$, яъне вақте ки $\mathring{W}^r_{2;\,\alpha}(\Omega) \ne W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ аст, мо метавонем масъалаи вариатсияи Дирихлеро бо шароитҳои сарҳадии ғайриякҷинса баррасӣ кунем, ки дар ин ҳолат гузориши зеринро дорад:

Масъалаи $\mathbb{D}_\lambda$. Барои элементи додашудаи F аз $\left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ ва функсияи додашудаи $\Phi \in W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ ҳалли $U \in W^r_{2;\alpha}(\Omega)$-и муодилаи зерин ёфта шавад

$$\mathcal{P}_\lambda[U,\, v] \equiv (\mathcal{L}[U], v)_0 + \lambda(U,\, v)_0 =< F,\, v > \quad \forall v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega), \tag{13}$$

ки шарти зеринро конеъ кунад

$$U(x) - \Phi(x) \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega). \tag{14}$$

Шарти (14) маънои онро дорад, ки функсияи додашудаи $\Phi(x)$ ва ҳалли $U(x)$-и муодилаи (13) дар сарҳади $\partial\Omega$-и соҳаи Ω изҳои якхела доранд. Тавре ки мо қаблан қайд кардем, шарт (14) танҳо дар ҳолати $-1/2 < \alpha < r - 1/2$ будан шартҳои сарҳадии ғайриякҷинсаро дар бар мегирад. Дар зер мо чунин мешуморем, ки ин шартҳо иҷро мешаванд.

Баъдан, дар **параграфи сеюми боби дуюм** диссертатсия ба маънои Фредҳолм ҳалшавандагии масъалаи варианти Дирихле $\mathbb{D}_\lambda$ бо шартҳои сарҳадии ғайриякҷинса омӯхта мешавад. Дар баробари ин масъала, мо масъалаҳои якҷинса ва ҳамроҳшударо низ баррасӣ мекунем.

Масъалаи $\mathbb{D}^0_\lambda$. Ёфтани ҳалли $U(x)$ муодилаи

$$(\mathcal{L}[u], v)_0 + \lambda(u,\, v)_0 = 0 \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,,$$

ки ба фазои $\mathring{W}^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ таалуқ дорад, талаб карда мешавад.

Масъалаи $\mathbb{D}^*_\lambda$. Барои функсионали додашудаи $G \in \left(\mathring{W}^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ ва финксияи додашудаи $\Psi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ ҳалли $V(x)$-и муодилаи

$$\mathcal{P}^+_\lambda[V,\, v] \equiv (\mathcal{L}^*[V],\, v)_0 + \overline{\lambda}(V,\, v)_0 = \langle G,\, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,,$$

ёфта шавад, ки шарти зеринро конеъ кунад

$$V(x) - \Psi(x) \in \mathring{W}^r_{2;\,\alpha}(\Omega).$$

Масъалаи $\mathbb{D}^{0*}_\lambda$. Ҳалли $V(x)$-и муодилаи

$$(\mathcal{L}^*[V],\, v)_0 + \overline{\lambda}(V,\, v)_0 = 0 \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,,$$

ёфта шавад, ки мутааллиқи фазои $\mathring{W}^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ бошад.

Теорема 6. *Бигзор шартҳои теоремаи 4 ва иҷро шаванд ва $-1/2 \le \alpha < r - 1/2$ бошад.*

Онгоҳ масъалаи $\mathbb{D}_\lambda$ фредҳолмӣ аст, яъне:

1) *масъалаи $\mathbb{D}^0_\lambda$ танҳо барои миқдори ҳисобшавандаи қимматҳои параметри $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots$ (қимматҳои хос) дорои ҳалҳои ғайринулӣ (функсияҳои хоси умумишуда) мебошад ва танҳо ∞ нуқтаи ҳдудии ин қимматҳо мебошад;*
2) *зерфазоии функсияҳои хоси умумшуда, ки ба ҳар як қиммати хоси λ_j мувофиқ аст - зерфазои хос - охирченака аст;*
3) *қимматҳои хоси масъалаи ҳамроҳшудаи $\mathbb{D}^{0*}_\lambda$ ба $\overline{\lambda_j}$, $j = 1, 2, \ldots$ баробаранд;*
4) *зерфазоҳои хоси масъалаҳои $\mathbb{D}^0_\lambda$ и $\mathbb{D}^{0*}_\lambda$, ки ба қимматҳои хоси λ_j ва $\overline{\lambda_j}$ мувофиқанд, ченаки яккхела доранд;*
5) *барои онки масъалаи $\mathbb{D}_\lambda$ ҳадди ақал як ҳал дошта бошад, зарур ва кифоя аст, ки барои ҳар як ҳалли $v(x)$-и масъалаи $\mathbb{D}^{0*}_\lambda$ шарти $\langle \widetilde{F},\, v\rangle \equiv 0$ иҷро шавад, ки дар инҷо $\langle \widetilde{F},\, v\rangle = \langle F,\, v\rangle - (\mathcal{L}[\Phi],\, v)_0 - \lambda(\Phi,\, v)_0$ мебошад;*
6) *барои онки масъалаи $\mathbb{D}^*_\lambda$ ҳадди ақал як ҳалли худро дошта бошад, зарур ва кифоя аст, ки барои ҳар як ҳалли $u(x)$-и масъалаи $\mathbb{D}^0_\lambda$ шарти $\langle \widetilde{G},\, u\rangle \equiv 0$ иҷро шавад, ки дар инҷо $\langle \widetilde{G},\, u\rangle = \langle G,\, v\rangle - (\mathcal{L}^*[\Psi],\, v)_0 - \overline{\lambda}(\Psi,\, v)_0$ мебошад.*

Дар **параграфи чоруми боби дуюм** масъалаи Дирихле барои операторҳои эллиптикии намуди ғайридивергентӣ бо коэффисиентҳои хурди ғайринулӣ омӯхта мешавад.

Бигзор r ягон адади натуралӣ ва J ягон зермаҷмӯи маҷмӯи $\{0,\, 1,\, 2, \ldots,\, r\}$ бошанд ва шарти $r \in J$ иҷро шавад. Оператори зеринро дида мебароем

$$L[u](x) = \sum_{j\in J} \rho^{2\alpha_j}(x) \sum_{|k|=2j} a_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{15}$$

Таърифи 1. *Таназзулёбии оператори (15) ҳаммувофиқа номида мешавад, агар ададҳои α_j, $j \in J$, шартҳоро зеринро қонеъ кунанд*

$$\alpha_j = \alpha_r - r + j \quad \textit{барои ҳамаи} \quad j \in J. \tag{16}$$

Дар диссертатсия аввал ҳолати таназзулёбии ҳаммувофиқаи коэффисиентҳои оператори дифференсиалии (15) омӯхта мешавад. Дар ин ҳолат ҳангоми муайян кардани фазои асосии функсионалии халлҳои масъалахои баррасишаванда танхо таназзулёбии коэффисиентхои калон ба назар гирифта мешавад. Вобаста ба ин, минбаъд дар матн адади α_r бо α ишора шудааст.

Баъдан, фарз кунем, ки коэффисиентҳои $a_k(x)$-и оператор (15) шартҳои зеринро қонеъ мекунанд:

I) чунин адади мусбат $\varkappa$ вуҷуд дорад, ки

$$\mathrm{Re} \sum_{|\mu|=|q|=r} (-1)^r a_{\mu+q}(x) \zeta_\mu \overline{\zeta_q} \geq \varkappa \sum_{|\mu|=r} |\zeta_\mu|^2 \tag{17}$$

барои ҳама $x \in \Omega$ ва ҳама гуна маҷмӯи ададҳои комплексии $\zeta = \{\zeta_\mu\}_{|\mu|=r}$;

II) барои ҳама $j \in J$ коэффитсиентҳои $a_k(x)$, $|k| = 2j$ ҳосилаҳои то тартиби j-ро доранд ва чунин адади $M > 0$ мавҷуд аст, ки

$$\left| a_k^{(p)}(x) \right| \leq M\, \rho^{-|p|}(x) \tag{18}$$

барои ҳама $x \in \Omega$, ҳама мултииндексҳои k-и дарозиашон $2j$ ва ҳамаи мултииндексҳои p-и дарозиашон на бештар аз j.

Теоремаи зерин дуруст мебошад:

Теорема 7. *Бигзор шартҳо (16)–(18) иҷро шаванд. Он гоҳ чунин ададҳои мусбати c^*, M^* мавҷуданд, ки барои ҳама $u \in C_0^\infty(\Omega)$ нобаробарии*

$$Re\,(L[u],\, u)_0 \geq c^* \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|^2 - M^* \left\| u;\, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega) \right\|^2$$

иҷро мешавад.

Шакли якунимхатии зеринро ворид мекунем

$$P_\lambda[u,\, v] = (L[u],\, v)_0 + \lambda(u,\, v)_{\alpha-r}, \quad u,\, v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Баъдан дар шароити теоремаи 7 барои оператори (15) аналоги теоремаи 2 исбот карда шуда бо ёрии он ҳалшавандагии масъалаи зерин омӯхта мешавад:

Масъалаи вариатсионии Дирихле. Барои элементи додашуда f аз фазои $\left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ функсияи $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$ ёфта шавад, ки баробарии зерин иҷро шавад

$$P_\lambda[u,\, v] =< f,\, v > \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{19}$$

Теоремаи зерин исбот шудааст:

Теорема 8. *Бигзор ҳамаи шартҳои теоремаи* **??** *иҷро шаванд. Онгоҳ чунин адади $\lambda_0 \geq 0$ ёфт мешавад, ки ҳангоми $\lambda \geq \lambda_0$ будан барои дилхоҳ элементи додашудаи $f \in \left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ масъалаи варианти Дирихле (19) ҳалли ягонаи $u_0 \in V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$-ро дорад ва нобаробарии*

$$\left\|u_0;\, V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq M \left\|f;\left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\|,$$

ҷой дорад, ки дар он $M > 0$ аз f ва λ новобаста аст.

Минбаъд, мо масъалаи варианти Дирихлеро дар фазои $\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ барои операторҳои намуди (15) дар ҳолати таназзулёбии ҳаммувофиқа меомӯзем.

Шакли нимхатии зеринро ворид мекунем

$$B_\lambda[u,\, v] = (L[u],\, v)_0 + \lambda \int\limits_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx, \quad u,\, v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Теоремаи зерин исбот шудааст:

Теорема 9. *Бигзор шартҳо (17), (18) ва шарти $\alpha_j = \alpha - r + j, \quad j \in J$ иҷро шаванд.*

Онгоҳ ададҳои мусбати c^*, M^* мавҷуданд, ки нобаробарии

$$Re\,(L[u],\, u)_0 \geq c^* \left\|u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 - M^* \left\|u;\, L_2(\Omega)\right\|^2$$

барои ҳама $u \in C_0^\infty(\Omega)$ иҷро мешавад.

Баъдан дар шароити ин теорема барои оператори (15) дар фазои $\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$ аналоги теоремаи 2 исбот карда шуда бо ёрии он ҳалшавандагии масъалаи зерин омӯхта мешавад:

Масъалаи вариатсионии Дирихле. Барои элементи додашуда f аз $\left(\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ чунин функсияи $u \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega)$ ёфта шавад, ки барои он баробарии

$$B_\lambda[u, v] = < f, v > \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \tag{20}$$

иҷро шавад.

Теорема 10. *Бигзор ҳамаи шартҳои теоремаи 9 иҷро шаванд. Онгоҳ чунини адади $\lambda_0 \geq$ ёфт мешавад, ки дар ҳолати $\lambda \geq \lambda_0$ барои дилхоҳ элементи додашудаи $f \in \left(\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ масъалаи вариатсионии Дирихле (20) ҳалли ягонаи $u_0 \in \mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$-ро дорад ва нобаробарӣ зерин иҷро мешавад*

$$\left\|u_0;\, W^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \leq M \left\|f; \left(\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'\right\|,$$

ки дар он адади $M > 0$ аз f ва λ новобаста аст.

Дар **қисми дуюми параграфи чоруми боби дуюм** диссертатсия операторҳои намуди (15) дар ҳолати таназзулёбии ғайриҳаммувофиқа омӯхта мешаванд. Мафхуми шаклхои калон ворид карда шуда, исбот карда мешавад, ки дар муайян кардани фазои ҳалҳо танхо дарачахои таназзулёбии коэффициентхои шаклхои калон иштирок мекунанд.

Барои $j \in J$ мо фазои функсионалии $W^j_{2,\alpha_j}(\Omega)$-ро бо нормаи зерин ворид мекунем

$$\left\|u;\, W^j_{2,\alpha_j}(\Omega)\right\| = \left\{ \sum_{|k|=j} \int_\Omega \rho^{2\alpha_j}(x) \left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx + \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \right\}^{1/2}. \tag{21}$$

Сарбасти синфи $C_0^\infty(\Omega)$ дар нормаи (21) бо $\mathring{W}^j_{2,\alpha_j}(\Omega)$ ишора карда мешавад.

Фарз мекунем, ки коэффисиентҳои оператори мавриди таҳқиқ қарордоштаи (15) барои ҳама гуна $j \in J$ шартҳои зеринро қонеъ мекунанд:

I) чунин адади $\varkappa > 0$ ёфт мешавад, ки

$$\mathrm{Re} \sum_{|\mu|=|q|=j} (-1)^j a_{\mu+q}(x) \zeta_\mu \overline{\zeta_q} \geq \varkappa \sum_{|\mu|=j} |\zeta_\mu|^2$$

барои ҳама $x \in \Omega$ ва ҳама гуна маҷмӯи ададҳои комплексии $\zeta = \{\zeta_\mu\}_{|\mu|=j}$;

II) коэффитсиентҳои $a_k(x)$, $|k| = 2j$ маҳдуд буда, ҳосилаҳои то тартиби j доранд ва барои ҳама $x \in \Omega$ ва ҳама мултииндексҳои p-и дарозиашон хурд ё баробари j шарти зеринро қонеъ мекунанд

$$\left|a_k^{(p)}(x)\right| \leq M\, \rho^{-\delta_j(|p|)}(x),$$

ки дар он M адади мусбист ва адади $\delta_j(|p|)$ акаллан яке аз нобаробариҳои зеринро қонеъ мекунад: а) $|p| > \delta_j(|p|)$; б) $j\delta(|p|) < |p|\alpha_j$, $|p| < j$.

Шакли якунимхатти $B[u,\, v]$-ро, ки бо оператор (15) алоқаманд аст, ба намуди зерин менависем

$$B[u,\, v] = \int\limits_{\Omega} L[u](x)\overline{v(x)}dx = \sum_{j \in J} B_j[u,\, v],$$

ки дар он

$$B_j[u,\, v] = \sum_{|k|=2j} \int\limits_{\Omega} a_k(x)\rho^{2\alpha_j}(x)u^{(k)}(x)\overline{v(x)}dx.$$

Баъдан, мо зермаҷмӯаи I-и маҷмӯи J-ро муайян мекунем, ки индексҳои шаклҳои калонро дар бар мегирад. Бигзор $i_0 = r$ бошад ва фарз мекунем, ки $i_0 \in I$ аст. Маҷмӯи ҳамаи элементҳои $j \in J$-ро, ки нобаробарии $\alpha_j \geq \alpha_{i_0} + j - i_0$-ро қаноат мекунанд бо J_0 ишора мекунем. Баъдан, элементи калонтарини маҷмӯи $I_0 = J \setminus \{\{i_0\} \cup J_0\}$-ро бо i_1 ишора мекунем, ки шарти $\alpha_{i_1} < \alpha_{i_0} + i_1 - i_0$–ро қонеъ мекунад ва маҷмӯи ҳама $j \in I_0$, ки барои он $\alpha_j \geq \alpha_{i_1} + j - i_1$ аст бо J_1 ишора мекунем. Баъдан, мо i_2-ро ҳамчун бузургтарин элементи маҷмӯи $I_1 = J \setminus \{\{i_0\} \cup J_0 \cup J_1\}$ муайян мекунем, ки барои он нобаробарии $\alpha_{i_2} < \alpha_{i_1} + i_2 - i_1$ иҷро мешавад. Бо i_2 ҳамчун бо i_1 муносибат намуда элементи i_3-ро муайян мекунем. Ин протсессро идома дода, мо маҷмӯи $I = \{i_0,\, i_1,\, \ldots,\, i_N\}$-ро муайян мекунем ва ҳамма шаклҳои $B_j[u,\, v]$-ро, ки индексҳояи j-шон ба маҷмӯи I тааллуқ доранд, *шаклҳои калон* номгузорӣ мекунем.

Акнун фазои функсионалии $\mathbb{H}_+$-ро ҳамчун пуркунандаи синфи $C_0^\infty(\Omega)$ аз рӯи нормаи

$$\|u;\, \mathbb{H}_+\| = \left\{ \sum_{j=0}^{N} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha_{i_j}}(x)|u(x)|^2 dx + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

муайян мекунем. Инчунин фазои $\mathbb{H}_-$-ро ҳамчун пуркунандаи фазои $L_2(\Omega)$ бо ёрии нормаи зерин муайян мекунем

$$\|f;\, \mathbb{H}_-\| = \sup \frac{|(f,\, v)_0|}{\|u;\, \mathbb{H}_+\|} \quad \text{ки дар инҷо} \quad (f\,,\, v)_0 = \int\limits_{\Omega} f(x)\overline{v(x)}dx$$

мебошад ва сарҳади болоӣ нисбат ба ҳамаи элементҳои ғайринулии $v \in \mathbb{H}_+$ гирифта мешавад. Элементҳо аз фазои $\mathbb{H}_-$ бо функсионалҳои зиддихатии мувофиқ бар фазои $\mathbb{H}_+$ айниятӣ баробар ҳисобида мешаванд. Қимати функсионали $f \in \mathbb{H}_-$ дар функсияи $v \in \mathbb{H}_+$ бо $< f, v >$ ишора карда мешавад.

Теоремаи зерин исбот шудааст:

Теорема 11. *Бигзор шарти $\alpha_j + 1/2 \notin \{1, \ldots, j\}$, $j \in J$ ва шартҳои I), II) иҷро шаванд. Онгоҳ чунин адади $\lambda_0 \geq 0$ вуҷуд дорад, ки ҳангоми $\lambda \geq \lambda_0$ будан барои ҳар як элементи додашудаи $F \in \mathbb{H}_-$ ҳалли ягонаи $u(x)$-и масъалаи D_λ мавҷуд аст ва ин ҳал нобаробарӣ зеринро қонеъ мекунад*

$$\|u; \mathbb{H}_+\| \leq M^* \|F; \mathbb{H}_-\|,$$

ки дар он адади $M^* > 0$ аз интихоби функсионали F ва λ вобаста нест.

Боби сеюм кори диссертатсионӣ ба исботи баъзе бахохои априорӣ барои халли масъалаи Дирихле барои операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи намуди гайридивергентӣ бо коэффисиентхои чамъшаванда дар соҳаи махдуд бахшида шудааст. Он аз **чор параграф иборат аст.** Барои осонии хондан, дар **параграфи якӯм** баъзе тасдиқотҳои маълум аз назарияи умумии операторҳои дифференсиалии эллиптикӣ дар фазои гилбертӣ оварда шудаанд. Дар **параграфи дуюм** як нобаробарии интегралии ёрирасон барои операторҳои эллиптикии таназзулёбанда, ки танҳо коэффисиентҳои калон доранд, исбот шудааст. Натиҷаи асосии ин параграф теоремаи зерин аст:

Теорема 12. *Бигзор Ω соҳаи маҳдуд дар $\mathbb{R}^n$ бо сарҳади сарбастаи $(n-1)$-ченакаи $\partial\Omega$ бошад ва бигзор коэффисиентҳои $b_k(x)$-и оператори*

$$L_0[u](x) = \sum_{|k|=2r} \rho^{\alpha}(x) b_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^{\infty}(\Omega), \tag{22}$$

шартҳои зеринро қонеъ кунанд:

I) Чунин адади мусбати M_0 мавҷуд аст, ки

$$M_0^{-1}|\xi|^{2r} \leq \left| \sum_{|k|=2r} b_k(x)\xi^k \right| \leq M_0|\xi|^{2r} \quad (x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n).$$

II) Барои ҳар як адади мусбати кифоя хурди ν чунин адади $\varepsilon_\nu > 0$ мавҷуд аст, ки

$$|b_k(y) - b_k(z)| < \nu, \quad |k| = 2r, \tag{23}$$

барои ҳар як $y \in \Omega$ *ва ҳама гуна*

$$z \in J_\varepsilon(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \, |z - y| < \frac{\varepsilon}{\varkappa}\rho(y) \right\}, \quad \varepsilon \in (0,\, \varepsilon_\nu).$$

Он гоҳ чунин адади мусбати c^* *вуҷуд дорад, ки нобаробарии*

$$c^* \left\| v;\, V^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|^2 \le \int\limits_\Omega |L_0[v(z)]|^2 \, dz$$

барои ҳама $v \in C_0^\infty(\Omega)$ *иҷро мешавад.*

Эзоҳи 2. *Шарти (23) қонеъ карда мешавад, агар коэффисиентҳои* $b_k(x)$*-и оператори (22) дар соҳаи пӯшидаи* $\overline{\Omega}$ *бефосила бошанд.*

Аз теоремаи 12 баҳои априорӣ барои ҳалли масъалаи зерини Дирихле барои оператори (22) ҳосил мегардад:

Масъалаи вариатсионии Дирихле. Барои функсияи додашудаи $f \in L_2(\Omega)$ ҳалли $U(x)$, $x \in \Omega$, барои муодилаи

$$L_0[U](x) = \sum_{|k|=2r} \rho^\alpha(x) b_k(x) U^{(k)}(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

ки ба фазои $V^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)$ тааллуқ дорад, ёфта шавад.

Хулосаи зерин дуруст мебошад:

Хулосаи 1. *Бигзор ҳамаи шартҳои теоремаи 12 иҷро шаванд. Он-гоҳ ҳалли* $U(x)$*-и масъалаи Дирихле барои оператор (22) баҳои априории зеринро қонеъ мекунад*

$$c_0 \left\| U;\, V^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \le \| f;\, L_2(\Omega) \| \,,$$

ки дар он доимии мусбати c_0 *аз интихоби функсияи* $f \in L_2(\Omega)$ *вобаста нест.*

Дар **параграфи сеюми боби сеюм** мо операторҳои эллиптикиеро меомӯзем, ки коэффисиентҳои ғайринулии хурдро доранд. Натичаи асосии ин параграф чунин аст:

Теорема 13. *Бигзор ҳамаи коэффисиентҳои* $b_k(x)$*-и оператори*

$$L[u](x) = \sum_{|k| \le 2r} \rho^{\alpha_{|k|}}(x) b_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{24}$$

маҳдуд бошанд, шарти II)-и теоремаи 12-ро қонеъ кунанд ва шартҳои зерин иҷро шаванд:

III) Чунин адади мусбати $\varkappa_0$ вуҷуд дорад, ки (шарти эллиптикӣ)

$$\varkappa_0|\xi|^{2r} \leq \left|\sum_{|k|=2r} b_k(x)\xi^k\right|$$

барои ҳамаи $x \in \Omega,\ \xi \in R^n$.

IV) Адади $\alpha = \alpha_{2r} > -1/2$ ба маҷмӯи $\{1, 2, \ldots, 2r\}$ тааллуқ надорад ва ададҳои $\alpha_j > -1/2,\ j = \overline{1, 2r-1}$ яке аз шартҳои зеринро қонеъ мекунанд: 1) $2r - \alpha > j - \alpha_j$; 2) $\alpha_j > \alpha j/2r,\ j > 0$.

Онгоҳ чунин адаҳои мусбати c^*, K^* мавҷуданд, ки

$$c^* \left\|v;\, W^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq \|L[v];\, L_2(\Omega)\| + K^* \|v;\, L_2(\Omega)\|$$

барои ҳамаи $v \in \mathring{W}^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)$.

Бо истифода аз ин теорема, баҳои априорӣ барои ҳалли масъалаи зерини Дирихле барои оператори (24) исбот карда мешавад:

Масъалаи вариатсионии Дирихле. Барои функсияи додашуда $f \in L_2(\Omega)$ ҳалли $U(x)$-и зеринро ёбед, ки мансуб ба фазои $\mathring{W}^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)$ бошад:

$$L[U](x) = \sum_{|k|\leq 2r} \rho^{\alpha_{|k|}}(x) b_k(x) U^{(k)}(x) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Тасдиқоти зерин исбот карда шудаст:

Хулосаи 2. *Бигзор ҳамаи шартҳои теоремаи 13 иҷро шаванд. Онгоҳ ҳалли $U(x)$-и масъалаи Дирихле барои оператор (24) баҳои априории зеринро қонеъ мекунад.*

$$c^* \left\|U;\, U^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq \|f;\, L_2(\Omega)\| + K^* \|U;\, L_2(\Omega)\|,$$

ки доимиҳои мусбати c^*, K^* аз интихоби функсияи $f \in L_2(\Omega)$ вобаста нестанд.

Минбаъд, дар **параграфи сеюми боби сеюми** кори диссертатсионӣ бо истифода аз теоремаи 13 натиҷаи зерин оид ба охирченака будани ядрои оператори дифференсиалии зерин исбот шудааст

$$\mathbb{L}u = L[u], \quad D(\mathbb{L}) = \mathring{W}^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega),$$

ки дар он ифодаи дифференсиалии $L[u]$ бо баробарии (24) муайян карда мешавад.

Теорема 14. *Бигзор $2r-\alpha>0$ ва шартҳои теоремаи 13 иҷро шаванд. Онгоҳ оператори $\mathbb{L}$ сарбаста мебошад, дорои ядрои охирченакаи $N(\mathbb{L})$ ва маҷмӯи қимматҳои $R(\mathbb{L})$ дар фазои $L_2(\Omega)$ сарбаста мебошад.*

Дар **параграфи чоруми боби сеюми** диссертатсия операторҳои эллиптикии мусбати суст бо таназзулёбии дараҷагӣ баррасӣ мешаванд. Дар ин ҳолат, оператори (24) мусбати суст номида мешавад, агар шарти зерин иҷро шавад

$$\mathrm{Re}\sum_{|k|=2r} b_k(x)\xi^k \geq 0, \quad \forall\xi\in R^n, \forall x\in\Omega. \tag{25}$$

Теоремаи зерин исбот карда шудаст:

Теорема 15. *Бигзор коэффисиентҳои $b_k(x)$, $|k|\leq 2r$,-и оператори (24) маҳдуд буда, шарти (25) ва шартҳои теоремаи 13-ро қаноат кунанд.*

Онгоҳ чунин ададҳои мусбати $\varkappa_0$, λ_0 мавҷуданд, ки барои $\lambda\geq\lambda_0$ нобаробарии зерин ҷой дорад

$$\|\mathbb{L}v+\lambda v;\, L_2(\Omega)\| \geq \varkappa_0 \left\|v;\, W^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \quad \forall v\in C_0^\infty(\Omega),$$

ки дар он $\mathbb{L}$ сарбастаи оператори (24) бо соҳаи муайянии $D(\mathbb{L}) = \mathring{W}^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)$ мебошад.

Хулосаҳо

Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ аз инҳо иборатанд:

- теоремаҳо дар бораи ҳалшавандагии якқимматаи масъалаи вариационии Дирихле бо шартҳои сарҳадии якҷинса барои операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентии дараҷаи олӣ бо коэффисиентҳои суфта дар ҳолатҳои таназзулёбии ҳаммувофиқа ва ғайриҳаммувофиқаи коэффитсиентҳо [1-M, 3-M, 5-M, 7-M, 8-M];
- теоремаҳо дар бораи фредҳолмӣ будани масъалаи вариационии Дирихле бо шартҳои сарҳадии якҷинса ва ғайриякҷинса барои операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентӣ бо коэффисиентҳои суфта дар соҳаи маҳдуд [2-M, 6-M, 9-M];
- баҳои априории ҳалли масъалаи вариатсионии Дирихле бо шартҳои якҷинсаи сарҳадӣ барои операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентӣ, ки танҳо коэффисиентҳои калони ғайрисуфта доранд, ки дар он нормаи ҳалл дар фазои ҳалҳои асосӣ аз боло бо ёрии нормаи тарафи рости муодила баҳо дода мешавад [4-M];
- теорема дар бораи охирченака будани ядро ва сарбаста будани соҳаи қимматҳои як синфи операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентӣ бо коэффисиентҳои ғайрисуфта [4-M];
- баҳои априории ҳалли масъалаи вариатсионии Дирихле бо шартҳои якҷинсаи сарҳадӣ барои операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентӣ бо коэффисиентҳои ғайрисуфтаи дорандаи коэффтсиентҳои хурд, ки дар он нормаи ҳалли масъала дар фазои ҳаллҳоии асосӣ аз боло ба воситаи нормаи тарафи рости муодила ва нормаи халл дар фазои L_2 баҳо дода мешавад [4-M];
- баҳои нормаи операторҳои эллиптикии мусбати сусти намуди ғайридивергентӣ бо коэффисиентҳои ғайрисуфта, ки дар он нормаи оператор аз поён бо ёрии зарби ададӣ мусбат бо нормаи функсия дар фазои базавӣ баҳо дода мешавад [4-M, 9-M].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Натичаҳои дар кори диссертатсионӣ ба даст овардашуда характери назариявӣ доранд. Онхо метавонанд дар инкишофи назарияи операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентӣ, аз чумла, ҳангоми омӯзиши ҳалшавандагии масъалахои сархадӣ барои ин гуна операторҳо ва омӯхтани хосиятҳои спектралии онҳо истифода шаванд.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗУИ ДИССЕРТАТСЯ

1. Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон нашр шудаанд:

[1–M]. Хакназаров К.Э. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов не дивергентного вида в ограниченной области [Матн] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2020, т.63, № 5-6, с. 309-315.

[2–M]. Хакназаров К.Э. О фредгольмовой разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида [Матн] / К.Э.Хакназаров // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2020, т.63, № 9-10, с. 586-590.

[3–M]. Хакназаров К.Э. Вариационная задача Дирихле с однородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида [Матн] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Доклады Национальной академии наук Таджикистана, 2021, т. 64, № 7-8, с. 393-400.

[4–M]. Хакназаров К.Э. О конечномерности ядра некоторых вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида [Матн] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Доклады НАН Таджикистана, 2022, т. 65, № 3-4, с. 157-161.

[5–M]. Хакназаров К.Э. Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов недивергентного вида с несогласованным вырождением [Матн] / К.Э.Хакназаров // Известия НАН Таджикистана. Отделения физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2022, №1, с. 33-39.

2. Дар дигар нашрияҳо:

[6–М]. Хакназаров К.Э. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида [Матн] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Материалы Международной конференция «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвящённой 70-летию со дня рождения академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора К.Х.Бойматова (Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.) с. 150-154.

[7–М]. Хакназаров К.Э. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида [Матн] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Материалы Международной конференции «Актуальные проблемы современной математики», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.) – С. 90-94.

[8–М]. Хакназаров К.Э. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида [Матн] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Материалы международной научно-практической конференции, посвященной памяти Абдуфаттоха Хотамова (Душанбе, 15-16 мая 2022 г.) – С. 41-45.

[9–М]. Хакназаров К.Э. О фредгольмовой разрешимости неоднородной вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов недивергентного вида в ограниченной области [Матн] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию со дня рождения академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Шабозова М.Ш. (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.) – С. 75-78.

АННОТАТСИЯ

диссертатсияи Хакназаров Кобил Эражзод дар мавзӯи «Масъалаи Дирихле барои баъзе синфхои операторҳои эллиптикии таназзуёбандаи намуди ғайридивергентӣ», ки барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD) - доктор аз рӯи ихтисоси 6D060100 - Математика: 6D060101 - Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Вожаҳои калидӣ: оператори эллиптикӣ, таназзулёбии дараҷагӣ, намуди ғайридивергентӣ, масъалаи Дирихле, соҳаи маҳдуд, ҳалшавандагии фредхолмӣ, баҳодиҳии априории ҳалл, резолвенти оператор.

Мақсади таҳқиқот. Мақсади асосии кори диссертатсионӣ омӯзиши ҳалшавандагии масъалаи Дирихле, ки бо баъзе синфҳои операторҳои дифференсиалии эллиптикии намуди ғайридивергентӣ дар соҳаи маҳдудшуда бо таназзулёбии дараҷагӣ дар сарҳади соҳа алоқаманд аст ва омӯзиши хосиятҳои чунин операторҳо алоқаманд аст.

Усулҳои тадқиқот. Дар кори усулҳои вариатсионии омӯзиши масъалаҳои сарҳадӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ истифода шудаанд, ки ба элементҳои таҳлили функсионалӣ ва назарияи фазоҳои нормиронидашудаи функсияҳои дифференсиронидашавандаи якчанд таъғирёбандаҳои ҳақиқидошта асос ёфтаанд.

Нововарии илмии таҳқиқот. Натичаҳои асосии диссертация нав буда, чунинанд: теоремаҳо оиди ҳалшавандагии якқиммата ва фредҳолмӣ будани масъалаи умумишудаи Дирихле бо шартҳои сарҳадии якҷинса ва ғайриякҷинса барои оператори эллиптикии таназзулёбандаи дараҷаи олии намуди ғайридивергентӣ бо коэффисиентҳои суфта исбот карда шудаанд; барои операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентии танҳо коэффисиентҳои калони ғайрисуфта дошта баҳои априории ҳалли масъалаи вариатсионии Дирихле бо шартҳои якҷинсаи сарҳадӣ исбот карда шудааст, ки дар он нормаи ҳалл дар фазои ҳаллҳои асосӣ аз боло тавассути нормаи тарафи рости муодила баҳо дода шудааст; теорема дар бораи охирченака будани ядро ва сарбаста будани маҷмӯи қимматҳои як синфи операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентӣ бо коэффисиентҳои ғайрисуфта исбот карда шудааст; барои операторҳои эллиптикии таназзулёбандаи намуди ғайридивергентии дорои коэффитсиентҳои хурди бо коэффисиентҳои ғайрисуфта баҳои априории ҳалли масъалаи вариатсионии Дирихле бо шартҳои сарҳадии якҷинса исбот карда шудааст, ки дар он нормаи ҳалли масъала дар фазои ҳаллҳои асосӣ аз боло бо ёрии нормаи тарафи рости муодила ва нормаи халл дар фазои L_2 бахо дода мешавад; барои операторҳои эллиптикии мусбати сусти намуди ғайридивергентӣ бо коэффисиентҳои ғайрисуфта баҳое исбот карда шудааст, ки дар он нормаи оператор аз поён бо ёрии ҳосили зарби адади доимии мусбат бо нормаи функсия дар фазои базавӣ баҳо дода мешавад.

Аҳамияти назариявӣ ва илмию амалии асар. Натичаҳои дар диссертация ба даст овардашуда характери назариявӣ доранд. Онҳо метавонанд ҳамчун замина барои таҳқиқотҳои минбаъдаи назариявӣ дар назарияи масъалаҳои сарҳадӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, назарияи операторҳои дифференсиалӣ дар фазоҳои нормиронидашудаи функсияҳои дифференсиронидашавандаи якчанд таъғирёбандаҳои ҳақиқидошта хизмат кунанд.

Арзиши амалии кор бо аҳамияти амалии муодилаҳои дифференсиалии бо ҳосилаҳои хусусӣ дар ҳалли масъалаҳои амалии механика ва дигар соҳаҳои физика муайян карда мешавад.

АННОТАЦИЯ

диссертации Хакназарова Кобила Эражзода на тему «Задача Дирихле для некоторых классов вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида», представленной на соискание ученой степени доктора философии (PhD) – доктора по специальности 6D060100 – Математика: 6D060101 - Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: эллиптический оператор, степенное вырождение, недивергентный вид, задача Дирихле, ограниченная область, фредгольмовая разрешимость, априорная оценка решения.

Цель исследования. Основной целью работы заключается в исследовании разрешимости задачи Дирихле, связанной с некоторыми классами вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида в ограниченной области, и изучению их свойств.

Методы исследования. В работе использованы вариационные методы исследования краевых задач для уравнений в частных производных, основанные на элементах функционального анализа и теории пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем: доказаны теоремы об однозначной разрешимости и фредгольмовости обобщенной задачи Дирихле с однородными и неоднородными граничными условиями для вырождающегося эллиптического оператора высшего порядка недивергентного вида с гладкими коэффициентами; доказана теорема об конечномерности ядра и замкнутости области значений одного класса вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами; для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами, имеющих младшие коэффициенты, доказана априорная оценка решения вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями, в которой норма решения задачи в пространстве основных решений оценивается сверху через норму правой части уравнения и норма решения в пространстве L_2; для слабо позитивных эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами доказана оценка, в которой норма оператора оценивается снизу через положительную константу умноженную на нормой функции в основном пространстве.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут послужить основой для дальнейших исследований в теории краевых задач для эллиптических уравнений, в теории дифференциальных операторов в нормированных пространствах.

Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью уравнений с частными производными в решении прикладных задач механики и других разделов физики

SUMMARY

of the thesis Khaknazarov Kobil Erazhzoda on the topic "The Dirichlet problem for some classes of degenerate elliptic operators of non-divergence form" submitted for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) – Doctor of specialty 6D060100 - Mathematics: 6D060101 - Real, complex and functional analysis

Keywords: elliptic operator, power degeneration, non-divergence form, Dirichlet problem, bounded domain, Fredholm solvability, a priori estimate of the solution, resolvent of operator.

Purpose of the study. The main purpose of the thesis is the investigation of the solvability of the Dirichlet problem related to some classes of elliptic differential operators of a non-divergent form in a bounded domain with power degeneracy on the boundary of the domain, and in the study of properties of such operators. Research methods. In the thesis we use variational methods for studying boundary value problems for partial differential equations based on elements of functional analysis and the theory of normed spaces of many real variables differentiable functions.

Scientific novelty. The main results of the thesis are new and have been modified and are as follows: theorems of unique solvability and fredholmness of the generalized Dirichlet problem with homogeneous and inhomogeneous boundary conditions for a degenerate higher order non-divergence form elliptic operators with smooth coefficients; for degenerate elliptic operators of non-divergence form, having only non-smooth leading coefficients, it is proved an a priori estimate for the solution of the Dirichlet variational problem with homogeneous boundary conditions, in which the norm of the solution to the space of basic solutions is estimated from above by the norm of the right-hand side of the equation; a theorem on the finite-dimensionality of the kernel and the closedness of the region was proved for one class of non-divergence form degenerate elliptic operators with non-smooth coefficients; for non-divergence form degenerate elliptic operators with non-smooth coefficients and having minor coefficients we prove an a priori estimate for the solution of the Dirichlet variational problem with homogeneous boundary conditions, in which the norm of the solution the space of basic solutions is estimated from above by the norm of the right-hand side of the equation and the norm of the solution in the space L_2; for weakly positive non-divergent form elliptic operators with non-smooth coefficients, we prove an estimate in which the norm of the operator is estimated from below by product of positive constant with the norm of the function in the basic space.

Theoretical and practical value. The results obtained in the thesis are theoretical in nature. They can serve as a basis for further theoretical research in the theory of boundary value problems for partial differential equations, in the theory differential operators in normed spaces of differentiable functions of several real variables. The practical value of the work is determined by the applied significance of partial differential equations in solving applied problems of mechanics and other branches of physics.