Институт математики им. А.Джураева,
Национальная академия наук Таджикистана

На правах рукописи
УДК 517.957

ХАКНАЗАРОВ КОБИЛ ЭРАЖЗОДА

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ НЕДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени доктора философии (PhD)
– доктора по специальности 6D060100 – Математика: 6D060101
- Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научный руководитель:
член-корреспондент Национальной академии
наук Таджикистана,
доктор физико-математических наук,
профессор
Исхоков Сулаймон Абунасрович

Душанбе — 2022

Содержание

Обозначения

$\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство. $x = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$.

$x = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$, $y = (y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n)$ – точки пространства $\mathbb{R}^n$.

$k = (k_1,\, k_2,\, \ldots,\, k_n)$, $l = (l_1,\, l_2,\, \ldots,\, l_n)$ – мультииндекс, то есть вектор с целыми неотрицательными компонентами.

$|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ – длина мультииндекса k.

$$u^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|} u(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}} -$$

– обобщенная в смысле С.Л.Соболева производная функции $u(x)$.

Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$.

$\partial\Omega$ – граница области Ω (замкнутое $(n-1)$-мерное многообразие).

$\rho(x)$, $x \in \Omega$, – регуляризованное расстояние точки $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$.

$\mathbb{C}$ – комплексная плоскость.

r – фиксированное натуральное число.

$\zeta = \{\zeta_k\}_{|k| \le 2r}$ – множество комплексных чисел.

Введение

Актуальность темы исследования. Диссертационная работа посвящена изучению разрешимости обобщенных краевых задач, связанных с эллиптическими операторами недивергентного вида в ограниченной области со степенным вырождением. Отметим, что краевые задачи для дифференциальных уравнений с вырождением возникают в процессе математического моделирования многих практических задач в теории малых изгибов поверхностей, газовой динамике и других разделов механики. Поэтому теория дифференциальных уравнений с вырождением является одним из самостоятельных и динамично разрывающих направлений современной математики. В этой теории различают две группы методов: классические методы и вариационные методы. Классические методы обычно применяются в случае, когда начальные данные изучаемой задачи (правая часть уравнения, граничные функции, коэффициенты дифференциального оператора и т.д.) достаточное число раз дифференцируемы, и в этом случае решение рассматриваемой задачи получается в явном виде. В тех случаях, когда не работают классические методы, для качественного исследования исследуемых задач применяются вариационные методы, которые опираются на элементах функционального анализа и теории функций. В нашей работе применяется вариационный метод и для исследуемых задач мы указываем достаточные условия существования и единственности решения в конкретном функциональном пространстве, а также в более общем случае изучаем свойства области определения и области значений соответствующих дифференциальных операторов. Наши исследования являются логическим продолжением исследований известных в этой области авторов, таких как Никольский С.М., Трибель Х., Кудрявцев Л.Д., Бойматов К.Х., Куфнер А., Мирошин Н.В., Исхоков С.А. и др., и полученные нами результаты являются усилением и обобщением некоторых результатов этих авторов.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Из анализа опубликованных научных работ по теории вариационных краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений следует,что их основная часть относятся к случаю когда исследуемый оператор изначально задаётся в дивергентной форме и это позволяет применить результаты теории полуторалинейных форм. Наши результаты относятся к малоизученному случаю эллиптических дифференциальных операторов недивергентного вида.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Работа выполнена в рамках следующих двух тем научно-исследовательских работ, разрабатываемых в Институте математики им. А.Джураева Национальной академии наук Таджикистана:

"Обобщенные краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами и нелинейные эволюционные уравнения дробного порядка" ГР 0116TJ00534;

"Оценки спектра и разрешимость вариационных задач для вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными полуторалинейными формами" ГР 0121TJ1179.

Общая характеристика работы

Цель исследования. Основной целью диссертационной работы заключается в исследовании разрешимости задачи Дирихле, связанной с некоторыми классами эллиптических дифференциальных операторов недивергентного вида в ограниченной области со степенным вырождением на границе области, и изучению свойств таких операторов.

Задачи исследования. В соответствие с поставленной цели выделены следующие основные задачи:

- исследовать разрешимость обобщенной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для эллиптического оператора недивергентного вида с вырождением в ограниченной области с гладкими коэффициентами;

- исследовать разрешимость обобщенной задачи Дирихле для эллиптического оператора недивергентного вида с вырождением в ограниченной области с гладкими коэффициентами в случае неоднородности граничных условий;

- изучить качественные свойства области определения, области значений и ядра вырождающегося эллиптического оператора недивергентного вида в ограниченной области в случае недифференцируемости его коэффициентов.

Научная новизна исследования. Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

- доказаны теоремы об однозначной разрешимости обобщенной задачи Дирихле с однородными и неоднородными граничными условиями для вырождающегося эллиптического оператора высшего порядка недивергентного вида с гладкими коэффициентами. Отдельно рассмотрены случаи согласованного и несогласованного вырождения коэффициентов оператора.

- для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих только негладкие старшие коэффициенты, доказана априорная оценка решения вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями, в которой норма решения в пространство основных решений оценивается сверху через норму правой части уравнения.

- доказана теорема об конечномерности ядра и замкнутости области значений одного класса вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами.

- для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами, имеющих младшие коэффициенты, доказана априорная оценка решения вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями, в которой норма решения задачи в пространстве основных решений оценивается сверху через норму правой части уравнения и норма решения в пространстве L_2.

- для слабо позитивных эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами доказана оценка, в которой норма оператора оценивается снизу через положительную константу умноженную на нормой функции в основном пространстве.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут послужить основой для дальнейших теоретических исследований в теории краевых задач для уравнений с частными производными, в теории дифференциальных операторов в нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных.

Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью уравнений с частными производными в решении прикладных задач механики и других разделов физики

Объект исследования – эллиптический дифференциальный оператор высшего порядка в ограниченной области недивергентного вида со степенным вырождением на границе области.

Предмет исследования. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида. Область определения и область значений вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы вариационные методы исследования краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, основанные на элементах функционального анализа и теории нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных.

Личный вклад соискателя ученой степени. Задачи исследования были сформулированы научным руководителем работы, который оказывал консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, отраженные в разделе "Научная новизна исследования" получены лично автором.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационное исследование относятся к специальности 6D060101 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Оно основано на утверждениях из теории пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных, теории операторов в гильбертовых пространствах и других разделах функционального анализа.

Положения выносимые на защиту:

- аналог неравенства Гординга для эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих только гладкие старшие коэффициенты, заданных в ограниченной области и имеющих степенное вырождение вдоль всей границы области;

- теорема об однозначной разрешимости обобщенной задачи Дирихле, решение которой ищется в замыкание класса бесконечнодифференцируемых финитных функций, для эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих только гладкие старшие коэффициенты, заданных в ограниченной области и имеющих степенное вырождение вдоль всей границы области;

- теорема о фредгольмовой разрешимости обобщенной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих только гладкие старшие коэффициенты, заданных в ограниченной области и имеющих степенное вырождение вдоль всей границы области;

- теорема об фредгольмовой разрешимости обобщенной задачи Дирихле в случае неоднородности граничных условий для эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих только гладкие старшие коэффициенты, заданных в ограниченной области и имеющих степенное вырождение вдоль всей границы области;

- теорема об однозначной разрешимости обобщенной задачи Дирихле в случае однородности граничных условий для гладких эллиптических операторов с ненулевыми младшими коэффициентами, заданных в ограниченной области и имеющих согласованное вырождения коэффициентов;

- теорема об однозначной разрешимости обобщенной задачи Дирихле в случае однородности граничных условий для гладких эллиптических операторов с ненулевыми младшими коэффициентами, заданных в ограниченной области и имеющих несогласованное вырождение коэффициентов. В этом случае вводится понятие старших форм и только степени вырождения старших форм участвуют в определении пространства решений;

- априорная оценка, в которой норма решения задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих только непрерывные старшие коэффициенты, оценивается сверху через норму значения оператора этого решения;

- априорная оценка, в которой норма решения задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих негладкие младщие коэффициенты, оценивается сверху через норму значения оператора этого решения и его норму в пространстве L_2;

- теорема о конечномерности ядра и замкнутости области значений вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами, имеющих ненулевые младшие коэффициенты и заданных в ограниченной области;

- априорная оценка, в которой норма решения задачи Дирихле для слабо позитивных вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида с параметром, имеющих негладкие младщие коэффициенты, оценивается сверху через норму значения оператора этого решения;

Степень достоверности результатов. Достоверность результатов исследования подтверждается подробными математическими доказательствами всех утверждений, приведенных в диссертации, основанными на элементах функционального анализа, теории функций и теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты работы докладывались автором и обсуждались на семинаре отдела функционального анализа и теории функций и общеинститутском семинаре Института математики им. А.Джураева НАН Таджикистана.

Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях:

- Международная конференция «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвященная 70-летию со дня рождения академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора К.Х.Бойматова (Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.)

- Международная конференция «Актуальные проблемы современной математики», посвященная 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.)

- Международная научная конференция «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвященная 70-летию со дня рождения академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.).

- Международная научно-практическая конференция ”О современных проблемах развития потенциальных способностей и возможностей учащихся и выпускников специализированных учебных завидений”, посвященная памяти Абдуфаттоха Хотамова (Душанбе, 15-16 мая 2022 г.)

Публикации по теме диссертации. Материалы диссертации опубликованы в работах [1-А] – [9-А]. Работы [1-А] – [5-А] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан. В работах опубликованных в соавторстве с научным руководителем, соавтору принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура диссертации и объём. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка цитированной литературы из 131 наименований и заключения, занимает 156 страниц машинописного текста и набрана на LATEX . Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм или формулы в данном параграфе.

Глава 1

Анализ литературы по вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов, заданных в ограниченной области и имеющих степенное вырождение вдоль всей границы области

1.1. О функциональных пространствах со степенным весом

В приложениях функционального анализа к теории дифференциальных уравнений важную роль играет понятие "обобщенной производной". Это понятие было введено многими математиками в начале двадцатого столетия разными способами. Среди первых работ по этому направлению можно указать работу Беппо Леви [109]. Более удобное для приложений понятие обобщенной производной введено С.Л.Соболевым в его работах [98], [99]. С помощью этого понятия он ввел нормированные пространства дифференцируемых функций многих вещественных переменных, которые сейчас известны как пространства Соболева, и изучил их основные свойства (см. работы [100], [101]). В монографии С.М.Никольского [90] подробно изучены различные обобщения введенного С.Л.Соболевым пространства. В десятой главе этой монографии введено и изучено весовое функциональное пространство $W^r_{p,\alpha}(\Omega)$, норма которого можно задавать равенством

$$\left\|u; W^r_{p,\,\alpha}(\Omega)\right\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \left(\rho^{\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|\right)^p dx + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p} . \quad (1.1.1)$$

Здесь Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с замкнутой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$, $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, r, p, α – вещественные числа, причем r натуральное, $1 \le p \le \infty$, $k =$

$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ – мультииндекс, $u^{(k)}(x)$ – обобщенная в смысле С.Л. Соболева производная функции $u(x)$ мультииндекса k, $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ – длина мультииндекса k, бесконечно-дифференцируемая положительная функция $\rho(x)$, $x \in \Omega$, такая, что

$$\rho(x) \leq \frac{1}{2}\operatorname{dist}(x,\, \partial\Omega) \leq C\rho(x),$$

$$\left|\rho^{(k)}(x)\right| \leq C_k \rho^{1-|k|}(x)$$

для всех $x \in \Omega$ и любого мультииндекса k. В этих неравенствах положительные числа C, C_k не зависят от x. Функция $\rho(x)$ называется регуляризованным расстоянием точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$.

1.2. Анализ литературы по вырождающихся эллиптических операторов с вещественнозначными коэффициентами

Приложения функционального пространства $W^r_{p,\alpha}(\Omega)$ к исследования краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений рассмотрены в цикле работ С.М.Никольского и его учеников, который начинается с совместной работе С.М.Никольского и П.И.Лизоркина [93]. Результаты работ первой части этого цикла хорошо отражены в обзорной работе [96].

В основополагающей работе С.М.Никольского и П.И.Лизоркина [93] рассматривался разрешимость следующей краевой задачи A в вариационной постановке: Требуется найти в классе $\mathfrak{M}$ минимум функционала

$$E(f,\, f) - 2(F,\, f)$$

где $f \in L_2(\Omega)$ и $(F,\, f)$ означает скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Здесь:

$$E(f,\, f) = \int\limits_{\Omega} \sum_{|k|,|l| \leq r} a_{kl}(x) f^{(k)}(x) f^{(l)}(x) dx, \tag{1.2.1}$$

$a_{kl}(x) = a_{lk}(x)$ – измеримые на Ω функции, зависящие от мультииндексов k, l, удовлетворяющие условиям:

$$|a_{kl}(x)| \leq M\rho^{-2\alpha_{kl}}, \alpha_{kl} = r + \alpha - \max\{|k|,\, |l|\};$$

$$\sum_{|k|,|l|\leq r} a_{kl}(x)\xi_k\xi_l \geq \varkappa\rho^{-2\alpha}(x) \sum_{|k|=r} \xi_k^2,$$

где ξ_k – числа, зависящие от мультииндекса k; положительное число $\varkappa$ не зависит от x.

Класс функций $\mathfrak{M}$ определяется следующим образом: задается функция $\Phi \in W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$, которая имеет следующие следы на границе $\partial\Omega$ области Ω

$$\left.\frac{\partial^j \Phi}{\partial n^j}\right|_{\partial\Omega} = \varphi_j \in B_2^{(r+\alpha-j-1/2)}(\partial\Omega) \tag{1.2.2}$$

и через $\mathfrak{M}$ обозначается класс функций $f \in W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$, имеющих граничные значения (1.2.2).

При некоторых дополнительных ограничениях в работе [93] доказана следующая

Теорема 1.2.1. *Задача A имеет единственное решение $\mathfrak{M}$. Функция и удовлетворяет (в среднем) краевым условиями (1.2.2) и является обобщенным решением уравнения*

$$L(u) \equiv \sum_{|k|,|l|\leq r} (-1)^{|l|} D^l \left(a_{kl}(x) f^{(k)}(x)\right) = F(x)$$

в том смысл, что

$$E(u,\, v) - 2(F,\, v) = 0$$

для любой функции $v \in W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$, обладающей нулевыми граничными значениями (1.2.2).

Позже этот результат обобщался многими авторами, среди которых можно отметить работы С.М.Никольского [92, 120], Л.Д.Кудрявцева [57], С.М.Никольского и П.И.Лизоркина [68], [69–71], [94, 118, 120] и П.И.Лизоркина [67].

1.3. Анализ литературы по вырождающимся эллиптическим операторам с комплекснозначными коэффициентами

Применение метода полуторалинейных форм с привлечением различных обобщений теоремы Лакса-Мильграма позволяли многим авторам обобщить результаты работ, перечисленных в предыдущем разделе, на случай операторов с комплекснозначными коэффициентами. Среди них отметим работы П.И.Лизоркина и Н.В.Мирошина [73, 74], Н.В.Мирошина [78–85], В.В.Шаньковым [106] и Б.Л.Байдельдиновым [5, 6]. Из этих работ наиболее общий результат получен в работе Н.В.Мирошина [83], в которой рассматривается форма

$$a(u,\,\varphi) = \int\limits_{\Omega} \sum_{|k|,|l|\le r} a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{\varphi^{(l)}(x)} dx, \tag{1.3.1}$$

с комплекснозначными коэффициентами $a_{kl}(x)$, которые удовлетворяют условиям

$$|a_{kl}(x)| \le M\rho(x)^{2\alpha} \tag{1.3.2}$$

$$\sum_{|k|,|l|\le r} a_{kl}(x)\xi_k\overline{\xi_l} \ge \varkappa\rho^{2\alpha}(x) \sum_{|k|=r} \xi_k^2 \tag{1.3.3}$$

для любой точки $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\{\xi_k\}_{|k|\le r}$, и при некоторых ограничениях на параметров α, γ_1 доказывается, что задача: для заданного $F \in \left(\mathring{W}^r_{2;\alpha+\gamma_1}(\Omega)\right)'$ найти функцию u, удовлетворяющую условиям

$$a(u,\,\varphi) =< F,\,\varphi > \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

$$u \in \mathring{W}^r_{2;\alpha-\gamma_1}(\Omega)$$

имеет и притом единственное решение.

Здесь $\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$ – пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства $W^r_{2,\alpha}(\Omega)$ и $\left(\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ – пополнение пространства $L_2(\Omega)$ по норме

$$\left\| f;\, \left(\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)' \right\| = \sup \frac{|(f,\, v)_0|}{\left\| v;\, W^r_{2,\alpha}(\Omega) \right\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $v \in \mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$. В этих рассмотрениях элементы из пространства $\left(\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ отождествляются с соответствующими антилинейными функционалами над пространством $\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$.

Согласно неравенствам (1.3.2), (1.3.3) коэффициенты рассмотренных эллиптических операторов имеют степенное вырождение на границе области. Подобные результаты для одного класса эллиптических операторов с нестепенным вырождением были получены в работе С.А.Исхокова [30].

Отметим, что в приведенных выше работах коэффициенты исследуемых дифференциальных операторов допускали представления в виде произведения ограниченной функции и степени регуляризованного расстояния до границы области. Подобные результаты для эллиптических дифференциальных операторов, коэффициенты которых принадлежали некоторым весовым L_p-пространствам, были получены в работах С.А.Исхокова и А.Я.Кужмуратова [37, 38]. Здесь коэффициенты оператора могут иметь интегрируемые особенности во внутренних точках области. Позже результаты этой работы обобщался в работах С.А.Исхокова и А.Я.Куджмуратова [39], [40] и А.Я.Куджмуратова [55].

Во всех отмеченных выше работах исследуемые дифференциальные операторы связаны с полуторалинейными формами, которые удовлетворяют условию коэрцитивности. В этих работах понятие коэрцитивности полуторалинейной формы понимается в смысле определения 2.0.1 работы [96], которое вводится следующим образом: в гильбертовом пространстве H_0 со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_0$ и нормой $\|\cdot\|_0$ рассматривается другое гильбертово пространство H_+ с нормой $\|\cdot\|_+$ плотно вложенное в

H_0, тогда определенная в H_+ полуторалинейная форма $P[u, v]$ называется H_+-коэрцитивной относительно H_0, если существуют положительное число δ_0 и вещественное число μ_0 при которых

$$\operatorname{Re} P[u, u] + \mu_0 \|u\|_0^2 \geq \delta_0 \|u\|_+^2$$

для всех $u \in H_+$.

Исследование разрешимости обобщенной задачи Дирихле, связанной некоэрцитивной полуторалинейной формой, сопряжен многими техническими трудностями.

Этот случай впервые был рассмотрен в работе К.Х.Бойматова [10]. Позже этот случай исследовался в работах К.Х.Бойматова [11] – [15], К.Х.Бойматова и С.А.Исхокова [16, 16], С.А.Исхокова [31–33], С.А.Исхокова и А.Г.Каримова [35, 36], С.А.Исхокова и И.А.Якушева [44–48], С.А.Исхокова, И.А.Якушева и А.Ё.Куджмуродова [49]. Коэффициенты эллиптических дифференциальных операторов, рассмотренных в этих работах, допускали представление в виде произведения ограниченной функции и степени регуляризованного расстояния до границы области. Случай некоэрцитивных полуторалинейных форм, когда их коэффициенты принадлежат некоторым весовым L_p-пространствам, рассмотрен в работах С.А.Исхокова, М.Г.Гадоева, Т.П.Константиновой [41], С.А.Исхокова, Т.П.Константиновой [42] М.Г.Гадоева, Т.П.Константиновой [21–23], И.А.Якушева, Т.П.Константиновой [108] и Т.П.Константиновой [53, 54].

Форма (1.3), рассмотренная в работах [78, 83], связана с дифференциальным оператором

$$L[u](x) = \sum_{|k|,|l| \leq r} (-1)^{|l|} \left(a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \right)^{(l)},$$

который имеет дивергентную форму. **Подобно этому, операторы, рассмотренные во всех перечисленных выше работах, имеют дивергентную форму. Основная цель нашей диссертационной работы**

заключается в распространении некоторых перечисленных выше результатов на случай вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида в ограниченной области.

В приведенном выше обзоре, в основном, включены работы авторов, исследования которых непосредственно связаны с нашими исследованиями. Однако, существует большое количество работ по вырождающимся эллиптическим операторам, в которых применяются другие подходы и изучаются другие типы граничных задач. Среди этих работ можно отметит работы А.Д.Баева [2], А.Д.Баева и С.С.Бунеева [3, 4], А.А.Вашарина [19], А.А.Вашарина и П.И.Лизоркина [20], В.П.Глушко и Ю.Б.Савченко [25], В.П.Глушко и О.П.Малютиной [26–28], Л.Д. Кудрявцев [58, 59], С.З.Левендорского [61, 63–66] С.З.Левендорского и Б.П.Панеяха [62], О.П.Малютиной и В.П.Глушко [76, 77], М.М.Смирнова [97], С.А.Терсенова [103], Х.Трибеля [104], J.H.Chabrowski [110–112], A.C.Cavalheiro [113], H.Chen and P.Luo [114], H.Chen and X.Liu [115], D.Kim [116], S.Levendorskii [117], S.V.Lototsky [119], P.R.Popivanov, D.K.Palagachev [121], E.W.Stredulinsky [122] и др.

Относительно других аспектах теории дифференциальных операторов с суммируемыми коэффициентами отметим работы С.И.Митрохина [86–89].

Глава 2

Задача Дирихле для гладких эллиптических операторов недивергентного вида, заданных в ограниченной области, со степенным вырождением

2.1. Вспомогательные результаты из общей теории вариационных задач

Одним из основных направлений исследования разрешимости обобщенных граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных является направление, которое опирается на утверждениях из теории гильбертовых пространств. В начальном этапе этого направления в основном использовалась теорема Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве (см., например, [50, 51, 105]). Затем появились различные обобщения этой теоремы, одним из которых является теорема Лакса-Мильграмма (см., например, [24, 96]). В настоящее время в научной литературе имеется ряд обобщений этой теоремы. Ниже мы приведем нужную нам обобщенную теорему Лакса-Мильграмма, которой неоднократно будем пользоваться в настоящей диссертации. Здесь мы, в основном, опираемся на материалы работы [96].

Рассмотрим тройку гильбертовых пространств $\mathcal{H}_-$, $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_+$, скалярные произведения которых обозначим через $\|\cdot\|_-$, $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_+$, соответственно. Нормы, порожденные этими скалярными произведениями обозначим через $(\cdot,\, \cdot)_-$, $(\cdot,\, \cdot)_0$, $(\cdot,\, \cdot)_+$, соответственно. Предположим, что выполняется неравенство $\|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|_+$ и норма $\|\cdot\|_-$ определена равенством

$$\|F\|_- = \sup_{0\neq v\in\mathcal{H}_+} \frac{|(F,\, v)_0|}{\|v\|_+}, \quad F \in \mathcal{H}_0,$$

и $\mathcal{H}_-$ является пополнением пространства $\mathcal{H}_0$ по норме $\|\cdot\|_-$. При этом элементы пространства $\mathcal{H}_-$ отождествляются с соответствующими антилинейными функционалами над $\mathcal{H}_+$. В таком построении пространство $\mathcal{H}_-$ называется негативным пространством, а пространство $\mathcal{H}_+$ – позитивным пространством.

Предположим, что $\mathcal{D}$ – некоторое линейное множество в пространстве $\mathcal{H}_+$, плотное в $\mathcal{H}_0$, но не обязательно плотное в $\mathcal{H}_+$. Замыкание множества $\mathcal{D}$ в пространстве $\mathcal{H}_+$ обозначим через $\mathcal{H}_+^0$, а символом $\mathcal{H}_-^0$ обозначим негативное пространство, построенное по $\mathcal{H}_+^0$ и $\mathcal{H}_0$.

Пусть $B[u, v]$ – полуторалинейная форма, заданная в $\mathcal{D}$, удовлетворяющая условиям:

I) для всех $u, v \in \mathcal{D}$ выполняется неравенство

$$|B[u, v]| \leq M\|u\|_+\|v\|_+,$$

где M – некоторая постоянная;

II) существуют вещественное число μ_0 и положительное число $\varkappa_0$ такие, что

$$\operatorname{Re} B[u, u] + \mu_0\|u\|_0^2 \geq \varkappa_0\|u\|_+^2$$

для всех $u \in \mathcal{H}_+^0$.

Сформулируем теорему, которая является обобщением теоремы Лакса-Мильграмма.

Теорема 2.1.1. *Пусть для полуторалинейной формы $B[u, v]$ выполняются условия I) и II). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *существует линейный оператор Λ, который осуществляет гомеоморфизм пространства $\mathcal{H}_+^0$ и $\mathcal{H}_-^0$ и такой, что*

$$\langle \Lambda u, v\rangle = B[u, v] + \mu_0 (u, v)_0 \quad \forall u, v \in \mathcal{H}_+^0;$$

2) *всякий антилинейный непрерывный функционал $l(v)$ из пространства $\mathcal{H}_-^0$ представляется в виде*

$$l(v) = B[u_0, v] + \mu_0 (u_0, v)_0 = \langle \Lambda u_0, v\rangle,$$

и такое представление единственно.

Наряду с рассмотренной выше полуторалинейной формой $B[u,\, v]$ рассмотрим также полуторалинейную форму $B^+[u,\, v] = \overline{B[v,\, u]}$ с областью определения $D(B^+) = D(B) = \mathcal{H}^0_+$.

Рассмотрим следующие абстрактные задачи, связанные с формами $B[u,\, v]$ и $B^+[u,\, v]$.

Задача $\mathbb{D}_\lambda$. Для заданного элемента F из пространства $\mathcal{H}^0_-$ требуется найти элемент u из пространства $\mathcal{H}^0_-$, удовлетворяющий уравнению

$$B[u,\, v] + \lambda(u,\, v)_0 =< F,\, v > \quad v \in \mathcal{H}^0_+.$$

Задача $\mathbb{D}^*_\lambda$. Для заданного элемента G из пространства $\mathcal{H}^0_-$ требуется найти элемент w из пространства $\mathcal{H}^0_-$, удовлетворяющий уравнению

$$B^+[w,\, v] + \overline{\lambda}(w,\, v)_0 =< F,\, v > \quad v \in \mathcal{H}^0_+.$$

Задача $\mathbb{D}_{0;\,\lambda}$. Найти элемент u из пространства $\mathcal{H}^0_-$, удовлетворяющий уравнению

$$B[u,\, v] + \lambda(u,\, v)_0 = 0 \quad v \in \mathcal{H}^0_+.$$

Задача $\mathbb{D}^*_{0;\,\lambda}$. Найти элемент u из пространства $\mathcal{H}^0_-$, удовлетворяющий уравнению

$$B^+[w,\, v] + \overline{\lambda}(w,\, v)_0 = 0 \quad v \in \mathcal{H}^0_+.$$

Сформулируем теорему о разрешимости этих задач.

Теорема 2.1.2. *Пусть для формы $B[u,\, v]$ выполняются условия I), II) и пусть вложение $\mathcal{H}^0_+$ в $\mathcal{H}_0$ компактно. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *задача $\mathbb{D}_{0;\,\lambda}$ имеет ненулевые решения только для счетного числа значений параметра $\lambda = \lambda_j$, $j = 1,\, 2,\, \ldots,$ и при этом $|\lambda_j| \to \infty$ когда $j \to \infty$;*

2) сопряженная задача $\mathbb{D}^*_{0;\,\lambda}$ *разрешима для тех и только тех значений параметра* λ*, что и задача* $\mathbb{D}_{0;\,\lambda}$*;*

3) при $\lambda = \lambda_j$ *размерности пространств решений задач* $\mathbb{D}_{0;\,\lambda}$ *и* $\mathbb{D}^*_{0;\,\lambda}$ *конечны и равны;*

4) задача $\mathbb{D}_\lambda$ *разрешима для тех и только тех* $F \in \mathcal{H}^0_-$*, для которых на всех* w*, являющихся решениями задачи* $\mathbb{D}^*_{0;\,\lambda}$ *выполняется тождество* $< F, w > \equiv 0$*;*

5) задача $\mathbb{D}^*_\lambda$ *разрешима для тех и только тех* $G \in \mathcal{H}^0_-$*, для которых на всех* u*, являющихся решениями задачи* $\mathbb{D}_{0;\,\lambda}$ *выполняется тождество* $< G, u > \equiv 0$*.*

2.2. Функциональные пространства

Также как в предыдущем параграфе обозначим через $\mathbb{R}^n$ n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и через Ω обозначим ограниченную область в пространстве $\mathbb{R}^n$ с замкнутой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$. Пусть $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ – мультииндекс и $u^{(k)}(x)$ – обобщенная в смысле С.Л. Соболева производная функции $u(x)$ мультииндекса k. Напоминаем, что мультииндексом называется n-мерный вектор с целыми неотрицательными координатами. Если $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ – мультииндекс, то $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ – длина мультииндекса k и

$$u^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|} u(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}}.$$

Если граница $\partial\Omega$ области Ω удовлетворяет условию конуса, то (см., например, [102, стр. 203]) существует бесконечно-дифференцируемая положительная функция $\rho(x)$, $x \in \Omega$, такая, что

$$\rho(x) \le \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(x,\,\partial\Omega) \le C\rho(x),$$

$$\left|\rho^{(k)}(x)\right| \leq C_k \rho^{1-|k|}(x)$$

для всех $x \in \Omega$ и любого мультииндекса k. Здесь положительные числа C, C_k не зависят от x. Функция $\rho(x)$ называется регуляризованным расстоянием точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$.

Пусть r – целое неотрицательное число, α – вещественное число и число p такое, что $1 \leq p < +\infty$. Обозначим через $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ пространство всех измеримых в области Ω функций $u(x)$, которые имеют все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные $u^{(k)}(x)$ $(|k| \leq r)$, и для которых конечна следующая норма

$$\|u; V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\| = \left\{\|u; L^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\|^p + \|u; L_{p;\,\alpha-r}(\Omega)\|^p\right\}^{1/p}. \tag{2.2.1}$$

Здесь и далее

$$\|u; L^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\| = \left\{\sum_{|k|=r} \int_\Omega \rho^{p\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx\right\}^{1/p},$$

$$\|u; L_{p;\,\alpha-r}(\Omega)\| = \left\{\int_\Omega \rho^{p(\alpha-r)}(x)|u(x)|^p dx\right\}^{1/p}.$$

Пространства $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ подробно изучены в работах С.М.Никольского, П.И.Лизоркина и Н.В.Мирошина [68, 72, 96]. В этих работах, в частности, доказана следующая теорема.

Теорема 2.2.1. *1) Для любого вещественного числа α, натурального числа r и чисела $p : 1 \leq p < \infty$ множество бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в Ω плотно в пространстве $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$.*

2) Вложение

$$V^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \to V^{r-s}_{p;\,\alpha-s}(\Omega)$$

справедливо для любого целого числа s такого, что $0 \leq s \leq r$.

Применением результатов работы [96] можно ввести в пространстве $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ еще одну другую ному, которую эквивалентна норме (2.2.1). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2.2. *Норма (2.2.1) пространства* $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ *эквивалентна следующей норме*

$$\|u; V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\|_* = \left\{ \sum_{|k|\le r} \int\limits_{\Omega} \left(\rho^{\alpha-r+|k|}(x) |u^{(k)}(x)| \right)^p dx \right\}^{1/p}. \tag{2.2.2}$$

Из эквивалентности норм (2.2.1) и (2.2.2), в частности, следует, что

$$\left\{ \int\limits_{\Omega} \left(\rho^{\alpha-r+|k|}(x) |u^{(k)}(x)| \right)^p dx \right\}^{1/p} \le M \|u; V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\| \tag{2.2.3}$$

для всех $u \in V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ и любого мультииндекса k такое, что $|k| \le r$.

Наряду с пространством $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ в приложениях к теории граничных задач для вырождающихся уравнений с частными производными играют важную роль и весовые пространства $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, которые определяются с помощью нормы

$$\left\| u; W^r_{p,\,\alpha}(\Omega) \right\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \left(\rho^{\alpha}(x) |u^{(k)}(x)| \right)^p dx + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}. \tag{2.2.4}$$

Замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (2.2.4) обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^r_{p,\,\alpha}(\Omega)$. Пространства $W^r_{p,\,\alpha}(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}^r_{p,\,\alpha}(\Omega)$ подробно изучены в монографии С.М.Никольского [90] (см. также обзорную работу [96]).

Запись $\partial\Omega \in C^s$, где s – некоторое натуральное число, означает, что локально многообразие $\partial\Omega$ описывается функциями, которые имеют непрерывные производные до порядка s включительно, а запись $\partial\Omega \in C^{s+\varepsilon}$, где s – натуральное число и $\varepsilon \in (0,1)$, означает, что локально $\partial\Omega$ описывается функциями, производные порядка s которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем ε.

Пространства $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ с нормой (2.2.4) являются банаховыми пространствами. При $\alpha = 0$ пространства $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ совпадают с классическими пространствами С. Л. Соболева $W^r_p(\Omega)$. Если $p = 2$, то $W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ является гильбертовым пространством.

Обозначим через $C_0^\infty(\Omega)$ класс бесконечно дифференцируемых в Ω функций с компактным носителем. Если B – некоторое нормированное пространство, которое содержит $C_0^\infty(\Omega)$, то символом $\overset{\circ}{B}$ обозначим замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в норме пространства B.

Обозначим через $B^\nu_p(\Omega) = B^\nu_{pp}(\Omega)$ и $B^\nu_p(\partial\Omega)$ классы функций О.В. Бесова, заданные на Ω и $\partial\Omega$ соответственно (определение классов $B^\nu_{p;\theta}(\Omega)$ и $B^\nu_p(\partial\Omega)$ см., например, в [8] или [104]).

Пусть B_1, B_2 – два нормированные пространства с нормами $\|\cdot; B_1\|$, $\|\cdot; B_2\|$ соответственно. Тогда запись $B_1 \to B_2$ означает, что можно рассматривать все элементы пространства B_1 как элементы пространства B_2 и, кроме того существует такая положительная постоянная C, что неравенство $\|u; B_2\| \leq C\|u; B_1\|$ выполняется для любого элемента $u \in B_1$.

В работе В.И.Кондрашовым [52] была доказана первая теорем вложения для пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$. Затем, это пространство систематически исследовалось в работе Л.Д.Кудрявцева [56]. Идеи и результаты этой работы развивались и дополнялось работами многих математиков. Здесь можно отметить работы О.В. Бесова [7], О.В. Бесова, Я. Кадлеца, А. Куфнера [9], С.М. Никольского [91], Х. Трибеля [104] и др. Более подробную библиографию по этому направлению можно найти в обзорную работу С.М. Никольского, П.И. Лизоркина, Н.В. Мирошина [96].

Ниже сформулируем несколько теорем о свойствах пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$. В первой теореме рассматривается плотность класса $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, вторая теорема содержит вложение пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, а третья теорема изучает следы функций из пространств

$W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ на границе $\partial\Omega$.

Теорема 2.2.3. *Множество финитных и бесконечно-дифференцируемых функций $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в пространстве $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ если и только если $\alpha \le -1/p$ или $\alpha \ge r - 1/p$.*

Теорема 2.2.4. *Вложение*

$$W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \to W^{r-m}_{p;\,\alpha-m}(\Omega) \to W^{r-m}_{p;\,\alpha_m}(\Omega) \tag{2.2.5}$$

справедливо для любого целого числа m такое, что $0 \le m \le r$, $\alpha_m \ge \alpha - m > -1/p$.

Теорема 2.2.5. *Пусть*

$$-\frac{1}{p} < \alpha < r - \frac{1}{p} \tag{2.2.6}$$

и граница $\partial\Omega$ принадлежит классу $C^{s_0+1+\varepsilon}$, где $\varepsilon \in (0,1)$ и целое число s_0 такое, что

$$r - \alpha - \frac{1}{p} \le s_0 < r - \alpha + 1 - \frac{1}{p}. \tag{2.2.7}$$

Тогда имеет место следующее вложение

$$W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \to B_p^{r-\alpha-1/p}(\partial\Omega).$$

Приведенное выше вложение означает, что для любой функции $u(x)$ из пространства $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ существуют следы

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = \varphi_s \in B_p^{r-\alpha-1/p-s}(\partial\Omega), \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1, \tag{2.2.8}$$

на границе $\partial\Omega$ и при этом выполняются следующие неравенства

$$\|\varphi_s; B_p^{r-\alpha-1/p-s}(\partial\Omega)\| \le C\|u; W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\|, \tag{2.2.9}$$

$s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1$. Здесь постоянная $C > 0$ не зависит от функции u и $\partial/\partial n$ означает производную по внутренней нормали к поверхности $\partial\Omega$.

Отметим. что класс $C^{s_0+1+\varepsilon}$ по определению состоит из поверхностей, которые локально описываются с помощью функций, производные порядка s_0+1 которых непрерывны по Гельдеру с показателем ε, $\varepsilon \in (0,1)$.

Следующая теорема позволяет восстановить функцию из пространства $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ по заданным ее следам на границе области.

Теорема 2.2.6. *Пусть имеет место неравенство (2.2.6) и пусть s_0 – целое число, определеное условиями (2.2.7). Тогда при условии $\partial\Omega \in C^{s_0+1+\varepsilon}$, где $\varepsilon \in (0,1)$, для всякого набора граничных функций*

$$\varphi_s \in B_p^{r-\alpha-1/p-s}(\partial\Omega), \quad s = 0,1,\cdots,s_0-1, \tag{2.2.10}$$

найдется функция $u(x), x \in \Omega$, из пространства $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, которая удовлетворяет условиям

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = \varphi_s, \quad s = 0,1,\cdots,s_0-1$$

и при этом выполняется неравенство

$$\|u; W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\| \le C\sum_{s=0}^{s_0-1}\|\varphi_s; B_p^{r-\alpha-1/p-s}(\partial\Omega)\|,$$

где положительная постоянная $C > 0$ не зависит от набора функций (2.2.10).

Замыкание класса финитных и бесконечно-дифференцируемых функций $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$.

В силу теоремы 2.2.3 равенство

$$\overset{\circ}{W}{}^r_{p;\,\alpha}(\Omega) = W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$$

имеет место если и только если $\alpha \le -1/p$ или $\alpha \ge r - 1/p$. В случае $-1/p < \alpha < r - 1/p$ замыкания класса $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ описывается с помощью следующей теоремы

Теорема 2.2.7. *В условиях теоремы 2.2.5 справедливо следующее равенство*

$$\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{p;\,\alpha}(\Omega) =$$
$$= \left\{ u \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) : \left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = 0, s = 0, 1, 2, \cdots, s_0 - 1 \right\}, \quad (2.2.11)$$

где целое число s_0 *определяется условиями (2.2.7) и символ* $\partial/\partial n$ *обозначает производную по внутренней нормали к границе области.*

Следующая теорема является следствием некоторых результатов работы [96]:

Теорема 2.2.8. *Пусть* Ω *– ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$ *и ее граница* $\partial\Omega$ *является замкнутой дифференцируемой многообразией размерности* $n-1$*. Тогда с точностью до эквивалентности норм выполняется равенство*

$$V^r_{2;\,\alpha}(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2,\,\alpha}(\Omega)$$

если

$$\alpha + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, \cdots, r\}.$$

Объединяя двух последних теорем получаем равенство

$$V^r_{2;\,\alpha}(\Omega) = \left\{ u \in W^r_{2,\,\alpha}(\Omega) : \left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = 0,\ \ s = 0, 1, 2, \cdots, s_0 - 1 \right\},$$

которое имеет место в условиях этих теорем.

2.3. Задача Дирихле для эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих только старшие коэффициенты

Аналог неравенства Гординга в пространстве $V^r_{2;\alpha}(\Omega)$

Пусть r – некоторое натуральное число и Ω – ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с замкнутой границей $\partial\Omega$ размерности $(n-1)$. Рассмотрим следующий дифференциальный оператор

$$L[u](x) = \sum_{|k|=2r} a_k(x)u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{2.3.1}$$

который имеет недивергентный вид, и предположим, что его коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

I) Найдется такое положительное число $\varkappa$, что

$$\mathrm{Re} \sum_{|\mu|=|q|=r} (-1)^r a_{\mu+q}(x)\zeta_\mu \overline{\zeta_q} \geq \rho^{2\alpha}(x)\varkappa \sum_{|\mu|=r} |\zeta_\mu|^2 \tag{2.3.2}$$

для любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_\mu\}_{|\mu|=r} \subset \mathbb{C}$ и для всех точек $x \in \Omega$.

II) При всех $k : |k| = 2r$ и всех $x \in \Omega$ выполняется неравенство

$$|a_k(x)| \leq M\rho^{2\alpha}(x), \tag{2.3.3}$$

где M – положительное и α – вещественное числа.

III) Коэффициенты $a_k(x)$, $|k| = 2r$, оператора (2.3.1) имеют все производные до r-го порядка включительно и удовлетворяют неравенству

$$\left|a_k^{(p)}(x)\right| \leq C_p\rho^{2\alpha-|p|}(x), \quad x \in \Omega,\ |p| \leq r. \tag{2.3.4}$$

Теорема 2.3.1. *Пусть выполнены, сформулированные выше условия I) – III). Тогда найдутся такие положительные числа c_1, M_1, что*

$$Re\,(L[u],\, u)_0 \geq c_1 \left\|u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 - M_1 \left\|u;\, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega)\right\|^2 \tag{2.3.5}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Замечание 2.3.1. *Неравенство (2.3.5) является аналогом неравенства Гординга, известное для равномерных эллиптических операторов, в случае эллиптических операторов в ограниченной области, которые имеют степенное вырождение вдоль всей границы. Это неравенство играет важную роль в процессе изучения разрешимости граничных задач для эллиптических уравнений с вырождением.*

Доказательство теоремы 2.3.1. Ниже мы будем пользоваться формулой Лейбница в мультииндексной форме

$$(u(x)v(x))^{(k)} = \sum_{l:\, l\le k} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} u^{(k-l)}(x)v^{(l)}(x), \tag{2.3.6}$$

где

$$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \frac{k!}{l!\,(k-l)!} = \frac{k_1!}{l_1!\,(k_1-l_1)!}\cdots\frac{k_n!}{l_n!\,(k_n-l_n)!}.$$

Далее предположим, что $u,\, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Интегрируя по частям, с помощью формулы (2.3.6) имеем

$$(L[u],\, v)_0 = \int\limits_\Omega L_0[u](x)\overline{v(x)}dx = \int\limits_\Omega \sum_{|k|=2r} a_k(x)u^{(k)}(x)\overline{v(x)}dx =$$

$$= \sum_{|k|=2r}\int\limits_\Omega u^{(k)}(x)a_k(x)\overline{v(x)}dx = \sum_{|\lambda|=|\mu|=r}(-1)^r\int\limits_\Omega u^{(\mu)}(x)\left(a_{\lambda+\mu}(x)\overline{v(x)}\right)^{(\lambda)}dx =$$

$$= \sum_{|\lambda|=|\mu|=r}(-1)^r\sum_{p+q=\lambda}C_{p,q}\int\limits_\Omega u^{(\mu)}(x)\left(a_{\lambda+\mu}(x)\right)^{(p)}\overline{v^{(q)}(x)}dx, \tag{2.3.7}$$

где

$$C_{p,q} = \begin{pmatrix} p+q \\ q \end{pmatrix} = \frac{(p+q)!}{p!\,q!} = \frac{(p_1+q_1)!}{p_1!\,q_1!}\cdots\frac{(p_n+q_n)!}{p_n!\,q_n!}. \tag{2.3.8}$$

Заметим, что если $|q| = r$ и $|\lambda| = r$, то из равенства $p+q = \lambda$ следует, что $|p| = 0$. Поэтому $k = \lambda+\mu = \mu+q$. Вводим следующую полуторалинейную форму

$$B_0[u,\, v] = \sum_{|\mu|=|q|=r}(-1)^r\int\limits_\Omega a_{\mu+q}(x)u^{(\mu)}(x)\overline{v^{(q)}(x)}dx. \tag{2.3.9}$$

Так как (см. (2.3.8)),

$$C_{0,q} = 1.$$

то из равенства (2.3.7) следует, что

$$(L[u],\, v)_0 = B_0[u,\, v] + B_1[u,\, v], \tag{2.3.10}$$

где

$$B_1[u,\, v] = (L[u],\, v)_0 - B_0[u,\, v]. \tag{2.3.11}$$

Используя условию (2.3.2) при $\zeta_\mu = u^{(\mu)}(x)$, имеем

$$\operatorname{Re} B_0[u,\, u] = \operatorname{Re} \sum_{|\mu|=|q|=r} (-1)^r \int\limits_\Omega a_{\mu+q}(x) u^{(\mu)}(x) \overline{u^{(q)}(x)} dx \geq$$

$$\geq \varkappa \sum_{|\mu|=r} \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha}(x) |u^{(\mu)}(x)|^2.$$

Следовательно

$$\operatorname{Re} B_0[u,\, u] \geq \varkappa \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.3.12}$$

Теперь уточним вид полуторалинейной формы $B_1[u,\, v]$ (см. (2.3.11)). Из равенств $p + q = \lambda$, $|\lambda| = r$ следует, что $|p| + |q| = r$. Поэтому

$$B_1[u,\, v] = (L[u],\, v)_0 - B_0[u,\, v] =$$

$$= \sum_{|\lambda|=|\mu|=r} (-1)^r \sum_{|p|+|q|=r,\, |q| \leq r-1} C_{p,q} \int\limits_\Omega u^{(\mu)}(x) \left(a_{\lambda+\mu}(x)\right)^{(p)} \overline{v^{(q)}(x)} dx. \tag{2.3.13}$$

Так как $|p| = r - |q|$, то из условии (2.3.4) следует, что

$$\left| \left(a_{\lambda+\mu}(x)\right)^{(p)} \right| \leq M C_p \rho^{2\alpha - r + |q|}(x)$$

Учитывая это и применяя неравенство Коши-Буняковского, из (2.3.13) получим

$$|B_1[u,\, v]| \le M_1 \sum_{|\mu|=r} \sum_{|q|\le r-1} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-r+|q|}(x) \left|u^{(\mu)}(x)\right| \left|v^{(q)}(x)\right| \le$$

$$\le M_2 \left(\sum_{|\mu|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) \left|u^{(\mu)}(x)\right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\sum_{|q|\le r-1} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r+2|q|}(x) \left|v^{(q)}(x)\right|^2 dx \right)^{1/2} =$$

$$= M_2 \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \left(\sum_{|q|\le r-1} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r+2|q|}(x) \left|v^{(q)}(x)\right|^2 dx \right)^{1/2} . \quad (2.3.14)$$

Ниже нам понадобится следующее утверждение, которое является частным случаем леммы 2.2 работы С.А.Исхокова [34].

Лемма 2.3.1. *Пусть целое число m такое, что $0 \le m < r$ и пусть выполнены неравенства $p \ge 1$, $1 \le q_1 \le q_0$. Пусть число q_0 удовлетворяет условиям:*

$$\frac{1}{p} - \frac{r-m}{n} < \frac{1}{q_0} \quad \textit{при} \quad n - (r-m)p > 0;$$

q_0 - любое конечное вещественное число, при $n - (r-m)p \le 0$.

Тогда для любого положительного числа τ выполняется неравенство

$$\left\| v;\, L^m_{q_0;\,\gamma+\frac{n}{p}-\frac{n}{q_0}-r+m}(\Omega) \right\| \le \tau \left\| v;\, V^r_{p;\gamma}(\Omega) \right\| +$$
$$+ c_0 \tau^{-\mu} \left\| v;\, L_{q_1;\,\gamma+\frac{n}{p}-\frac{n}{q_1}-r}(\Omega) \right\| \quad \left(\forall v \in V^r_{p;\gamma}(\Omega)\right),$$

где

$$\mu = \frac{q_1^{-1} - q_0^{-1} + mn^{-1}}{q_0^{-1} - p^{-1} + (r-m)n^{-1}}.$$

Из этой леммы при $p = q_0 = q_1 = 2$ и $0 \le m \le r-1$, $m = |q|$, $\gamma = \alpha$ следует

$$\left\| v;\, L^{|q|}_{2;\,\alpha-r+|q|}(\Omega) \right\| \le \tau \left\| v;\, L^r_{2;\alpha}(\Omega) \right\| +$$
$$+ c_0 \tau^{-\mu} \left\| v;\, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega) \right\| \quad \left(\forall v \in C_0^\infty(\Omega)\right),$$

где

$$\mu = \frac{2^{-1} - 2^{-1} + |q|n^{-1}}{2^{-1} - 2^{-1} + (r - |q|)n^{-1}} = \frac{|q|}{r - |q|}.$$

Следовательно,

$$\left(\int_\Omega \rho^{2\alpha+2|q|-2r}(x) \left| v^{(q)}(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \tau \left\| v;\, L^r_{2;\alpha}(\Omega) \right\| +$$

$$+ c_0 \tau^{-|q|/(r-|q|)} \left\| v;\, L_{2;\,\alpha-r}\,(\Omega) \right\| \quad (2.3.15)$$

для любого мультииндекса q, по длине не превосходящего $r-1$, и любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Теперь применяя неравенство (2.3.15), из (2.3.14) получим

$$|B_1[u,\, v]| \leq$$
$$\leq M_2 \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \left(\tau \left\| v;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| + K(\tau) \left\| v;\, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega) \right\| \right), \quad (2.3.16)$$

где τ – достаточно малое положительное число и положительная величина $K(\tau)$ растет при $\tau \to +0$.

Отсюда при $v(x) = u(x)$ находим

$$|B_1[u,\, u]| \leq M_2 \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \left(\tau \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| + K(\tau) \left\| u;\, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega) \right\| \right).$$

Так как $\tau > 0$ – достаточно малое и $K(\tau)$ – достаточно большое, то можно обозначать τM_2 снова через τ и $M_2 K(\tau)$ снова через $K(\tau)$. Поэтому из полученного выше неравенства следует

$$|B_1[u,\, u]| \leq \tau \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|^2 + K(\tau) \left\| u;\, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega) \right\| \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|. \quad (2.3.17)$$

Далее используя неравенство

$$AB \leq \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2, \quad A \geq 0, \quad B \geq 0,$$

при

$$A = \sqrt{2\varepsilon} \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|, \quad B = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left\| u;\, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega) \right\|,$$

где ε – достаточно малое положительное число, имеем

$$\|u;\, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega)\| \left\|u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq \varepsilon \left\|u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|u;\, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega)\|^2 .$$

Теперь применяя это неравенство из (2.3.17) (после некоторых переобозначений) находим

$$|B_1[u,\, u]| \leq \tau \left\|u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 + K(\tau) \|u;\, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega)\|^2 . \qquad (2.3.18)$$

На основе полученных неравенств (2.3.12), (2.3.18) из равенство (2.3.10) следует, что

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(L[u],\, u)_0 = \operatorname{Re} B_0[u,\, u] + \operatorname{Re} B_1[u,\, u] \geq \\ \geq \operatorname{Re} B_0[u,\, u] - |B_1[u,\, u]| \geq \\ \geq (\varkappa - \tau) \left\|u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 - K(\tau) \|u;\, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega)\|^2 .\end{aligned}$$

Отсюда, подбирая (см. (2.3.12)) $\tau = \varkappa/2$, получим неравенство

$$\operatorname{Re}(L[u],\, u)_0 \geq c_1 \left\|u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 - M_1 \|u;\, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega)\|^2$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Здесь $c_1,\, M_1$ – некоторые положительные постоянные.

Теорема 2.3.1 доказана.

О разрешимости вариационной задачи Дирихле в пространстве $V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$

В этом разделе используя аналог неравенства Гординга (2.3.5) из теоремы 2.3.1 изучим разрешимость вариационной задачи Дирихле, которая связана с рассмотренном выше оператором (2.3.1). С этой целью сначала вводим новое пространство $\left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$, которое является пополнением пространства $L_{2,\,\alpha-r}(\Omega)$ по следующей норме

$$\left\|f;\, \left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| = \sup \frac{|(f,\, v)_{\alpha-r}|}{\left\|u;\, V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|},$$

в котором верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $v(x)$ из пространства $V^r_{2,\alpha}(\Omega)$. При этом элементы из пространства $\left(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ отождествляются с соответствующими антилинейными функционалами над пространством $V^r_{2,\alpha}(\Omega)$. Далее символом $< f, v >$ обозначим значение функционала $f \in \left(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ на функцию v из пространства $V^r_{2,\alpha}(\Omega)$.

Теперь вводим полуторалинейную форму

$$P_\lambda[u, v] = (L[u], v)_0 + \lambda(u, v)_{\alpha-r}, \quad u, v \in C_0^\infty(\Omega), \tag{2.3.19}$$

где $L[u]$ – дифференциальный оператор, определенный с помощью равенства (2.3.1).

Теорема 2.3.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.3.1. Тогда найдется такое неотрицательное число λ_0, что при $\lambda \geq \lambda_0$ верны следующие утверждения:*

1) существует такой линейный оператор Λ, который осуществляет гомеоморфизм пространства $V^r_{2,\alpha}(\Omega)$ и $\left(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ и

$$\langle \Lambda u, v\rangle = P_\lambda[u, v] \quad \textit{для всех} \quad u, v \in V^r_{2,\alpha}(\Omega); \tag{2.3.20}$$

2) всякий антилинейный непрерывный функционал $l(v)$ из пространства $\left(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ представляется в виде

$$l(v) = P_\lambda[u_0, v] = \langle \Lambda u_0, v\rangle, \tag{2.3.21}$$

и такое представление единственно.

Доказательство. Согласно основного результата теоремы 1.2.1 (см. (2.3.5)) для любого $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\operatorname{Re}(L[u], u)_0 + M_1 \left\|u; L_{2,\alpha-r}(\Omega)\right\|^2 \geq c_1 \left\|u; L^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2,$$

где c_1, M_1 – некоторые положительные числа. Отсюда при $\operatorname{Re}\lambda \geq M_1 + c_1$ следует, что

$$\operatorname{Re} P_\lambda[u, u] \geq c_1 \left\|u; V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2 \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.3.22}$$

Из (2.3.10), (2.3.23) следует, что

$$P_\lambda[u,\, v] = B_0[u,\, v] + B_1[u,\, v] + \lambda(u,\, v)_{\alpha-r}, \quad u,\, v \in C_0^\infty(\Omega), \tag{2.3.23}$$

где полуторалинейные формы $B_0[u,\, v]$, $B_1[u,\, v]$ определяются равенствами (2.3.24), (2.3.13), соответственно.

Так как (см. (2.3.3)) $|a_k(x)| \le M\rho^{2\alpha}(x)$, то из равенства (2.3.24) следует, что

$$|B_0[u,\, v]| \le M_3 \sum_{|\mu|=|q|=r} \int_\Omega \rho^{2\alpha}(x) \left| u^{(\mu)}(x) \right| \left| v^{(q)}(x) \right| dx. \tag{2.3.24}$$

Далее, применяя неравенство Коши-Буняковского получаем

$$|B_0[u,\, v]| \le M_3 \left\{ \sum_{|\mu|=r} \int_\Omega \rho^{2\alpha}(x) \left| u^{(\mu)}(x) \right|^2 dx \right\}^{1/2} \times$$
$$\times \left\{ \sum_{|q|=r} \int_\Omega \rho^{2\alpha}(x) \left| v^{(q)}(x) \right|^2 dx \right\}^{1/2} \le$$
$$\le M_3 \left\| u;\, V^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \cdot \left\| v;\, V^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \tag{2.3.25}$$

для всех $u,\, v \in C_0^\infty(\Omega)$.

В процессе доказательства теоремы 1.2.1 (см. (2.3.16)) мы доказывали, что

$$|B_1[u,\, v]| \le$$
$$\le M_2 \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \left(\tau \left\| v;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| + K(\tau) \left\| v;\, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega) \right\| \right),$$

Фиксируя некоторое значение параметра τ в этом неравенстве, получим

$$|B_1[u,\, v]| \le M_4 \left\| u;\, V^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \cdot \left\| v;\, V^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \tag{2.3.26}$$

Далее в силу равенства (2.3.23) из установленных выше неравенств (2.3.25) и (2.3.26) следует, что

$$|P_\lambda[u,\, v]| \le (M_5 + |\lambda|) \left\| u;\, V^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \cdot \left\| v;\, V^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \tag{2.3.27}$$

для всех $u,\, v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Теперь заметим, что полученные выше неравенства (2.3.22), (2.3.27) позволяют нам применить обобщенную теорему Лакса-Мильграмма (см. теорему 2.1.1) и завершить доказательство теоремы 2.3.2.

Вариационная задача Дирихле. Для заданного элемента F из $\left(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ найти функцию $u_0 \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$, для которой выполняется равенство

$$P_\lambda[u_0,\, v] =< F,\, v > \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.3.28}$$

Теорема 2.3.3. *Пусть выполняются все условия теоремы 2.3.2 и* λ_0 *– такое же число как в этой теореме. Тогда при выполнении неравенства* $\lambda \geq \lambda_0$ *для любого заданного элемента* F *из пространства* $\left(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ *вариационная задача Дирихле (2.3.28) имеет единственное решение* $u_0 \in V^r_{2,\alpha}(\Omega)$ *и для этого решения имеет место неравенство*

$$\left\|u_0;\, V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \leq M \left\|F; \left(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'\right\|, \tag{2.3.29}$$

где положительное число $M > 0$ *не зависит от элемента* F *и число* λ.

Доказательство. Пусть выполняется неравенство $\lambda \geq \lambda_0$. Тогда согласно утверждения теоремы 2.3.2 существует оператор Λ, который осуществляет гомеоморфизм пространства $V^r_{2,\alpha}(\Omega)$ и $\left(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$, со свойствами (2.3.20), (2.3.21). Пусть задан элемент $F \in \left(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$. Рассмотрим антилинейный функционал $l(v) =< F,\, v >$. Так как

$$|l(v)| = |< F,\, v >| \leq \left\|F;\, \left(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| \left\|v;\, V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\|$$

для всех $v \in V^r_{2,\alpha}(\Omega)$. Это означает, что функционал $l(v)$ непрерывный. Поэтому существует функция $u_0 \in V^r_{2,\alpha}(\Omega)$ и функционал $l(v)$ допускает представление (2.3.21). Согласно этому представлению

$$l(v) = P_\lambda[u_0,\, v] =< \Lambda u_0,\, v >=< F,\, v > \quad \forall v \in V^r_{2,\alpha}(\Omega).$$

Следовательно, функция u_0 является решением вариационной задачи Дирихле (2.3.28). Из равенства

$$< \Lambda u_0, \, v > = < F, \, v > \quad \forall v \in V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$$

следует, что $u_0 = \Lambda^{-1} F$ и поэтому

$$\left\| u_0; \, V^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| = \left\| \Lambda^{-1} F; \, V^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \leq \left\| \Lambda^{-1} \right\| \left\| F; \, \left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right)' \right\| .$$

Отсюда следует оценка (2.3.29).

Теорема 2.3.3 доказана.

Аналог неравенства Гординга в пространстве $W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$

Теперь изучим разрешимость вариационной задачи Дирихле в пространстве $W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ для оператора недивергентного вида (2.3.1), то есть

$$\mathcal{L}[u](x) = \sum_{|k|=2r} b_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C^\infty_0(\Omega). \tag{2.3.30}$$

Здесь, так же как и в случае пространства $V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$, сначала докажем соответствующий аналог неравенства Гординга, и затем на его основе изучим вариационную задачу Дирихле.

Теорема 2.3.4. *Пусть коэффициенты $b_k(x)$ оператора (2.3.30) удовлетворяют следующим условиям:*

$$Re \sum_{|\mu|=|q|=r} (-1)^r b_{\mu+q}(x) \zeta_\mu \overline{\zeta_q} \geq \rho^{2\alpha}(x) \varkappa \sum_{|\mu|=r} |\zeta_\mu|^2 \quad (x \in \Omega, \, \zeta = \{\zeta_\mu\}_{|\mu|=r} \subset \mathbb{C}), \tag{2.3.31}$$

$$|b_{\mu+q}(x)| \leq M \rho^{2\alpha}(x) \quad (x \in \Omega, \, |\mu| = |q| = r) \, . \tag{2.3.32}$$

$$\left| b^{(p)}_k(x) \right| \leq C_p \, \rho^{2\alpha - \delta(|p|)}(x), \quad x \in \Omega, \, |k| = 2r, \, |p| \leq r, \tag{2.3.33}$$

где число $\delta(|p|)$ удовлетворяет хотя бы одно из неравенство

а) $|p| > \delta(|p|)$,

b) $r\delta(|p|) < |p|\alpha,\ |p| < r$.

Тогда найдутся положительные числа c_1, M_1 *такие, что*

$$Re\,(\mathcal{L}[u],\,u)_0 \geq c_1 \left\|u;\,L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 - M_1\left\|u;\,L_2(\Omega)\right\|^2 \qquad (2.3.34)$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Замечание 2.3.2. *Полученное выше неравенство (2.3.34) является аналогом неравенства Гординга в случае эллиптических операторов, заданных в ограниченной области и имеющих степенное вырождение вдоль всей границы области.*

Доказательство теоремы 2.3.4. Рассмотрим дифференциальный оператор (2.3.30). Интегрируя по частям на функциях $u,\,v \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$(\mathcal{L}[u],\,v)_0 = \int\limits_\Omega \mathcal{L}[u](x)\overline{v(x)}dx = \int\limits_\Omega \sum_{|k|=2r} b_k(x)u^{(k)}(x)\overline{v(x)}dx =$$
$$= \sum_{|k|=2r}\int\limits_\Omega u^{(k)}(x)b_k(x)\overline{v(x)}dx = \sum_{|\lambda|=|\mu|=r}(-1)^r\int\limits_\Omega u^{(\mu)}(x)\left(b_{\lambda+\mu}(x)\overline{v(x)}\right)^{(\lambda)}dx =$$
$$= \sum_{|\lambda|=|\mu|=r}(-1)^r\sum_{p+q=\lambda}C_{p,q}\int\limits_\Omega u^{(\mu)}(x)\left(b_{\lambda+\mu}(x)\right)^{(p)}\overline{v^{(q)}(x)}dx, \quad (2.3.35)$$

где

$$C_{p,q} = \begin{pmatrix} p+q \\ q \end{pmatrix} = \frac{(p+q)!}{p!\,q!} = \frac{(p_1+q_1)!}{p_1!\,q_1!}\cdots\frac{(p_n+q_n)!}{p_n!\,q_n!}. \qquad (2.3.36)$$

Заметим, что если $|q| = r$ и $|\lambda| = r$, то из равенства $p+q = \lambda$ следует, что $|p| = 0$. Поэтому $k = \lambda+\mu = \mu+q$. Вводим следующую полуторалинейную форму

$$\mathcal{B}_0[u,\,v] = \sum_{|\mu|=|q|=r}(-1)^r C_{0,\,q}\int\limits_\Omega b_{\mu+q}(x)u^{(\mu)}(x)\overline{v^{(q)}(x)}dx. \qquad (2.3.37)$$

Тогда из равенства (2.3.35) следует

$$(\mathcal{L}[u],\, v)_0 = \mathcal{B}_0[u,\, v] + \mathcal{B}_1[u,\, v], \tag{2.3.38}$$

где

$$\mathcal{B}_1[u,\, v] = (\mathcal{L}[u],\, v)_0 - \mathcal{B}_0[u,\, v]. \tag{2.3.39}$$

Предположим, что полуторалинейная форма $\mathcal{B}_0[u,\, v]$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re}\mathcal{B}_0[u,\, u] \geq \varkappa \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|^2, \quad u \in C_0^\infty(\Omega) \tag{2.3.40}$$

$$|\mathcal{B}_0[u,\, v]| \leq M \left\| u;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \cdot \left\| u;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|, \quad u,\, v \in C_0^\infty(\Omega), \tag{2.3.41}$$

где $\varkappa$ и M – некоторые положительные постоянные. Отметим, что

$$\left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| = \left(\sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) \left| u^{(k)}(x) \right|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\left\| u;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| = \left\{ \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|^2 + \| u;\, L_2(\Omega) \|^2 \right\}^{1/2},$$

$$\| u;\, L_2(\Omega) \| = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

В работах, посвященных обобщенной задаче Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов в дивергентной форме (см. [96]), для выполнении условий (2.3.40), (2.3.41) на коэффициенты полуторалинейной формы $\mathcal{B}_0[u,\, u]$ налагаются следующие условия

$$\operatorname{Re} \sum_{|\mu|=|q|=r} (-1)^r C_{0,q} b_{\mu+q}(x) \zeta_\mu \overline{\zeta_q} \geq \rho^{2\alpha}(x) \varkappa \sum_{|\mu|=r} |\zeta_\mu|^2$$
$$(x \in \Omega,\, \zeta = \{\zeta_\mu\}_{|\mu|=r} \subset \mathbb{C}), \tag{2.3.42}$$

$$|b_{\mu+q}(x)| \leq M\rho^{2\alpha}(x) \quad (x \in \Omega,\, |\mu| = |q| = r)\,. \tag{2.3.43}$$

Так как (см. (2.3.36))

$$C_{0,q} = 1,$$

то условия (2.3.42), (2.3.43) выполняются в силу условий (2.3.31), (2.3.32) нашей теоремы.

Теперь уточним вид полуторалинейной формы $\mathcal{B}_1[u,\, v]$ (см. (2.3.39)). Из равенств $p+q=\lambda$, $|\lambda|=r$ следует, что $|p|+|q|=r$. Поэтому

$$\mathcal{B}_1[u,\, v]=(\mathcal{L}[u],\, v)_0-\mathcal{B}_0[u,\, v]=$$
$$=\sum_{|\lambda|=|\mu|=r}(-1)^r\sum_{|p|+|q|=r,\,|q|\le r-1}C_{p,q}\int\limits_{\Omega}u^{(\mu)}(x)\,(b_{\lambda+\mu}(x))^{(p)}\,\overline{v^{(q)}(x)}dx. \quad (2.3.44)$$

Далее предполагаем, что коэффициенты $b_k(x)$, $|k|=2r$, оператора $\mathcal{L}[u]$ имеют все производные порядка $\le r$ и удовлетворяют условию

$$\left|b_k^{(p)}(x)\right|\le C_p\rho^{2\alpha-\delta(|p|)}(x),\quad x\in\Omega,\,|k|=2r,\,|p|\le r, \quad (2.3.45)$$

где ниже, по мере необходимости, на числа $\delta(|p|)$, $|p|\le r$ налагаются дополнительные ограничения.

Применяя неравенство Коши-Буняковского из (2.3.44), (2.3.45) имеем

$$|\mathcal{B}_1[u,\, v]|\le$$
$$\le M_2\left(\sum_{|\mu|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(x)\left|u^{(\mu)}(x)\right|^2dx\right)^{1/2}\left(\sum_{|q|\le r-1}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-2\delta(r-|q|)}(x)\left|v^{(q)}(x)\right|^2dx\right)^{1/2}=$$
$$=M_2\left\|u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|\left(\sum_{|q|\le r-1}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-2\delta(r-|q|)}(x)\left|v^{(q)}(x)\right|^2dx\right)^{1/2}. \quad (2.3.46)$$

Предположим, что для любого достаточно малого $\tau>0$ найдется число $K(\tau)>0$ такое, что

$$\left(\sum_{|q|\le r-1}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-2\delta(r-|q|)}(x)\left|v^{(q)}(x)\right|^2dx\right)^{1/2}\le$$
$$\le\tau\left\|v;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|+K(\tau)\left\|v;\, L_2(\Omega)\right\|. \quad (2.3.47)$$

В силу этого неравенства из (2.3.46) следует

$$|\mathcal{B}_1[u,\, v]| \leq M_2 \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \left(\tau \left\| v;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| + K(\tau) \left\| v;\, L_2(\Omega) \right\| \right). \tag{2.3.48}$$

Отсюда при $v(x) = u(x)$ находим

$$|\mathcal{B}_1[u,\, u]| \leq M_2 \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \left(\tau \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| + K(\tau) \left\| u;\, L_2(\Omega) \right\| \right).$$

Так как $\tau > 0$ – достаточно малое и $K(\tau)$ – достаточно большое, то можно обозначать τM_2 снова через τ и $M_2 K(\tau)$ снова через $K(\tau)$. Поэтому из полученного выше неравенства следует

$$|\mathcal{B}_1[u,\, u]| \leq \tau \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|^2 + K(\tau) \left\| u;\, L_2(\Omega) \right\| \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|. \tag{2.3.49}$$

Далее используя неравенство

$$AB \leq \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} B^2, A \geq 0, \quad B \geq 0,$$

при

$$A = \sqrt{2\varepsilon} \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|, \quad B = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left\| u;\, L_2(\Omega) \right\|,$$

где ε – достаточно малое положительное число, имеем

$$\left\| u;\, L_2(\Omega) \right\| \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \leq \varepsilon \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \left\| u;\, L_2(\Omega) \right\|^2.$$

Теперь применяя это неравенство из (2.3.49) (после некоторых переобозначений) находим

$$|\mathcal{B}_1[u,\, u]| \leq \tau \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|^2 + K(\tau) \left\| u;\, L_2(\Omega) \right\|^2. \tag{2.3.50}$$

На основе полученных неравенств (2.3.40), (2.3.50) из равенство (2.3.38) следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} (\mathcal{L}[u],\, u)_0 = \operatorname{Re} \mathcal{B}_0[u,\, u] + \operatorname{Re} \mathcal{B}_1[u,\, u] \geq \mathcal{B}_0[u,\, u] - |\mathcal{B}_1[u,\, u]| \geq \\ \geq (\varkappa - \tau) \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|^2 - K(\tau) \left\| u;\, L_2(\Omega) \right\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда, подбирая (см. (2.3.40)) $\tau = \varkappa/2$, получим неравенство

$$\operatorname{Re}\left(\mathcal{L}[u],\, u\right)_0 \geq c_1 \left\|u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 - M_1 \left\|u;\, L_2(\Omega)\right\|^2, \quad u \in C_0^\infty(\Omega),$$

где c_1, M_1 – положительные постоянные. Это и есть неравенство (2.3.34).

Таким образом, теорема 2.3.4 при выполнении условий (2.3.45), (2.3.47) доказана. Ниже докажем, что в условиях нашей теоремы условия (2.3.45), (2.3.47) выполняются. Параметр $\delta(|p|)$, $|p| \leq r$, в неравенстве (2.3.45) подбираем так, чтобы выполнялось неравенство (2.3.47), то есть

$$\left(\sum_{|q|\leq r-1} \int_\Omega \rho^{2\alpha-2\delta(r-|q|)}(x) \left|v^{(q)}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \leq$$
$$\leq \tau \left\|v;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| + K(\tau) \left\|v;\, L_2(\Omega)\right\| \quad (2.3.51)$$

при достаточно малых значений $\tau > 0$.

Далее сформулируем одну лемму о весовых интегральных неравенствах с малым параметром (см. [96, Теорема 1.1.7]).

Лемма 2.3.2. *Пусть* $r_1 > r_2 \geq 0$, γ_1, γ_2 *— действительные числа больше (-1/2). Пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий*

a_1*)* $r_1 - \gamma_1 > r_2 - \gamma_2$,

b_1*)* $\gamma_2 > \gamma_1 r_2 / r_1$, $r_2 > 0$.

Тогда для любого положительного числа ε *найдется положительная постоянная* $C = C(\varepsilon)$ *такая, что для всех* $v \in W^{r_1}_{2;\,\gamma_1}(\Omega)$ *справедлива оценка*

$$\|v; L^{r_2}_{2;\,\gamma_2}(\Omega)\| \leq \varepsilon \|v; L^{r_1}_{2;\,\gamma_1}(\Omega)\| + C(\varepsilon)\|v; L_2(\Omega)\|.$$

Из этой леммы при $r_1 = r$, $r_2 = |q|$, $\gamma_1 = \alpha$, $\gamma_2 = \alpha - \delta(r - |q|)$ следует

$$\left\|v;\, L^{|q|}_{2;\,\alpha-\delta(r-|q|)}(\Omega)\right\| \leq \tau \left\|v;\, L^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| +$$
$$+ c_0 K(\tau) \left\|v;\, L_2\left(\Omega\right)\right\| \quad \left(\forall v \in C_0^\infty(\Omega)\right),$$

Следовательно,

$$\left(\int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2\delta(r-|q|)}(x) \left|v^{(q)}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \leq \tau \left\|v;\, L^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| + c_0 K(\tau) \left\|v;\, L_2\left(\Omega\right)\right\|$$

$$\left(0 \leq |q| \leq r-1, \quad v \in C_0^\infty(\Omega)\right).$$

Это равносильно неравенству (2.3.51).

Теперь проверим условий a_1) и b_1) леммы 2.3.2 при $r_1 = r, r_2 = |q|$, $\gamma_1 = \alpha$, $\gamma_2 = \alpha - \delta(r-|q|)$. В этом случае эти условия принимают следующий вид:

a_2) $r - \alpha > |q| - \alpha + \delta(r-|q|)$,

b_2) $[\alpha - \delta(r-|q|)] > \alpha|q|/r,\ |q| > 0$,

то есть

a_2) $r - |q| > \delta(r-|q|)$,

b_2) $[r\alpha - r\delta(r-|q|)] > \alpha|q|,\ |q| > 0$.

Вводя обозначение $r - |q| = |p|$ отсюда получим

a_3) $|p| > \delta(|p|)$,

b_3) $r\delta(|p|) < |p|\alpha,\ |p| < r$.

Теперь легко можно заметить, что неравенство (2.3.51), в котором число $\delta(|p|)$ удовлетворяет хотя-бы одному из неравенств a_3) и b_3), имеет место в силу условии (2.3.33) теоремы 2.3.4.

Теорема 2.3.4 доказана полностью.

О разрешимости вариационной задачи Дирихле в пространстве $W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$

Так как

$$\left\|u;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| = \left\{\left\|u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 + \|u;\, L_2(\Omega)\|^2\right\}^{1/2}, \qquad (2.3.52)$$

и

$$\|u;\, L_2(\Omega)\| = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 dx\right)^{1/2},$$

то

$$\|u;\, L_2(\Omega)\| \leq \left\|u;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|.$$

Это означает, что пространство $W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ нормально вложено в пространство $L_2(\Omega)$.

Далее обозначим через $\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (2.3.52) и следуя [96, Часть II] вводим пространство $\left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ – пополнение пространства $L_2(\Omega)$ относительно нормы

$$\left\|f;\, \left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| = \sup \frac{|(f,\, v)_0|}{\left\|u;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $v(x)$ из пространства $\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$. При этом все элементы из пространства $\left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ отождествляются с соответствующими антилинейными функционалами над пространством $\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$. Таким образом, мы построили следующую тройку вложенных друг в друга пространств

$$\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \to L_2(\Omega) \to \left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'.$$

Далее вводим полуторалинейную форму

$$\mathcal{P}_\lambda[u,\, v] = (\mathcal{L}[u],\, v)_0 + \lambda(u,\, v)_0 \quad u,\, v \in C_0^\infty(\Omega), \tag{2.3.53}$$

где $\mathcal{L}[u]$ – дифференциальный оператор, определенный равенством (2.3.30), то есть

$$\mathcal{L}[u](x) = \sum_{|k|=2r} b_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.3.54}$$

Далее предположим, что все условия теоремы 2.3.4 выполняются. Тогда из неравенства (2.3.34) этой теоремы при $\operatorname{Re}\lambda \geq M_1 + c_1$ следует, что

$$\operatorname{Re}\mathcal{P}_\lambda[u,\, u] \geq c_1 \left\|u;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.3.55}$$

С другой стороны, в силу равенства (см. (2.3.38))

$$(\mathcal{L}[u],\, v)_0 = \mathcal{B}_0[u,\, v] + \mathcal{B}_1[u,\, v], \tag{2.3.56}$$

из ранее доказанных неравенств (см. (2.3.41), (2.3.48))

$$|\mathcal{B}_0[u,\, v]| \le M \left\|u;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|, \quad u,\, v \in C_0^\infty(\Omega), \tag{2.3.57}$$

$$|\mathcal{B}_1[u,\, v]| \le M_2 \left\|u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| \left(\tau \left\|v;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| + K(\tau) \left\|v;\, L_2(\Omega)\right\|\right). \tag{2.3.58}$$

следует, что

$$|(\mathcal{L}[u],\, v)_0| \le M_0 \left\|u;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| \tag{2.3.59}$$

Отсюда и из неравенство

$$|(u,\, v)_0| \le \|u;\, L_2(\Omega)\| \cdot \|v;\, L_2(\Omega)\| \le \left\|u;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|,$$

которое доказывается с помощью неравенства Коши-Буняковского, находим

$$|\mathcal{P}_\lambda[u,\, v]| \le (M_0 + |\lambda|) \left\|u;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| \tag{2.3.60}$$

для всех $u,\, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Это неравенство позволяет нам распространить форму $\mathcal{P}_\lambda[u,\, v]$ по непрерывности на все $u,\, v \in \mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$.

Согласно нашим обозначениям

$$\mathcal{P}_\lambda[u,\, v] = (\mathcal{L}[u],\, v)_0 + \lambda(u,\, v)_0 = \mathcal{B}_0[u,\, v] + \mathcal{B}_1[u,\, v] + \lambda(u,\, v)_0.$$

Отметим, что неравенство (2.3.59) позволяет нам определить сопряженный оператор $\mathcal{L}^*[u]$, который связан с оператором (2.3.54) равенством

$$(\mathcal{L}[u],\, v)_0 = (u,\, \mathcal{L}^*[v])_0 \quad \forall u,\, v \in \mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega).$$

Далее вводим полуторалинейную форму $\mathcal{P}^+_\lambda[u,\, v]$ равенством

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^+_\lambda[u,\, v] = \overline{\mathcal{P}_\lambda[v,\, u]} = \overline{(L[v],\, u)_0 + \lambda(v,\, u)_0} = \overline{(L[v],\, u)_0} + \overline{\lambda}\overline{(u,\, v)_0} = \\ = \overline{(v,\, \mathcal{L}^*[u])_0} + \overline{\lambda}(u,\, v)_0 = (\mathcal{L}^*[u],\, v)_0 + \overline{\lambda}(u,\, v)_0,\end{aligned}$$

то есть

$$\mathcal{P}_\lambda^+[u,\, v] \equiv (\mathcal{L}^*[u],\, v)_0 + \overline{\lambda}(u,\, v)_0. \tag{2.3.61}$$

Далее сформулируем теорему о компактном вложении пространств $W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ (см. [96, Теорема 1.1.3]).

Теорема 2.3.5. *Пусть целые числа r, j такие, что $0 \le j < r$ и пусть $-1/2 < \alpha \le r$. Тогда вложение $W^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \to W^j_{2,\,\beta}(\Omega)$ компактно тогда и только тогда, когда $r - \alpha > j - \beta$.*

При $j = \beta = 0$ из этой теоремы следует, что вложение $W^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \to L_2(\Omega)$ компактно, если $r - \alpha > 0$.

Определим обобщенную задачу Дирихле для оператора (2.3.54).

Вариационная задача Дирихле. Для заданного элемента F из $\left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ найти функцию $u \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega)$, для которой выполняется равенство

$$\mathcal{P}_\lambda[u,\, v] \equiv (\mathcal{L}[u], v)_0 + \lambda(u,\, v)_0 =< F,\, v > \quad \forall v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega). \tag{2.3.62}$$

Наряду с задачей (2.3.62) для заданного элементе $G \in \left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ рассмотрим однородную и формально сопряженные задачи, связанные с этой задачи (см. (2.3.61)):

$$\mathcal{P}_\lambda^+[u,\, v] \equiv (\mathcal{L}^*[u],\, v)_0 + \overline{\lambda}(u,\, v)_0 =< G,\, v > \quad \forall v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega), \quad u \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega). \tag{2.3.63}$$

$$(\mathcal{L}[u], v)_0 + \lambda(u,\, v)_0 = 0 \quad \forall v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega), \quad u \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega), \tag{2.3.64}$$

$$(\mathcal{L}^*[u],\, v)_0 + \overline{\lambda}(u,\, v)_0 = 0 \quad \forall v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega), \quad u \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega). \tag{2.3.65}$$

Теперь можно заметить, что на основе полученных выше неравенств (2.3.55), (2.3.60) и теорема 2.3.5 о компактности мы можем применить теорему Лакса-Мильграма [96, Теорема 2.0.2]. Применяя эту теорему и другие результаты о разрешимости операторных уравнений с вполне непрерывным оператором (см., например, [51, 105]) мы приходим к следующему результату:

Теорема 2.3.6. *Пусть* Ω *– ограниченная область в пространстве* R^n *с замкнутой* $(n-1)$ *-мерной границей* $\partial\Omega$, *число* α *такое, что*

$$-1/2 \le \alpha < r, \tag{2.3.66}$$

и пусть коэффициенты $b_k(x)$ *оператора*

$$\mathcal{L}[u](x) = \sum_{|k|=2r} b_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.3.67}$$

удовлетворяют следующим условиям:

$$Re \sum_{|\mu|=|q|=r} (-1)^r b_{\mu+q}(x)\zeta_\mu \overline{\zeta_q} \ge \rho^{2\alpha}(x) \varkappa \sum_{|\mu|=r} |\zeta_\mu|^2 \quad (x \in \Omega,\, \zeta = \{\zeta_\mu\}_{|\mu|=r} \subset \mathbb{C}), \tag{2.3.68}$$

$$|b_{\mu+q}(x)| \le M\rho^{2\alpha}(x) \quad (x \in \Omega,\, |\mu| = |q| = r)\,. \tag{2.3.69}$$

$$\left| b_k^{(p)}(x) \right| \le C_p\, \rho^{2\alpha - \delta(|p|)}(x), \quad x \in \Omega,\, |k| = 2r,\, |p| \le r, \tag{2.3.70}$$

где число $\delta(|p|)$ *удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:*

i) $|p| > \delta(|p|)$,

ii) $r\delta(|p|) < |p|\alpha$, $|p| < r$.

Тогда задача (2.3.62) – (2.3.65) фредгольмово разрешимаа, то есть:

1) *задача (2.3.64) имеет ненулевые решения (обобщенные собственные функции) только для счетного числа значений параметра* $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots$ *(собственные значения) и только бесконечность будет предельной точкой этих значений;*

2) *подпространство обобщенных собственных функций (собственное подпространство), отвечающее каждому собственному значению* λ_j *- конечномерно;*

3) собственные значения сопряженной задачи (2.3.65) равны $\overline{\lambda_j}$, $j = 1, 2, \ldots$;

4) отвечающие собственным значениям λ_j *и* $\overline{\lambda_j}$ *собственные подпространства задач (2.3.64) и (2.3.65) имеют одинаковую размерность;*

5) для существования хоть одного решения задачи (2.3.62) необходимо и достаточно, чтобы тождество $\langle F, v \rangle \equiv 0$ *имело место для любого решения* $v(x)$ *задачи (2.3.65);*

6) для существования хоть одного решения задачи(2.3.63) необходимо и достаточно, чтобы тождество $\langle G, u \rangle \equiv 0$ *имело место для любого решения* $u(x)$ *задачи (2.3.64).*

Согласно теореме 2.2.3 множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в пространстве $W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\alpha \le -1/2$ или $\alpha \ge r - 1/2$, то есть в этом случае имеет место равенство $\mathring{W}^r_{2;\,\alpha}(\Omega) = W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$. Поэтому в случае $-1/2 \le \alpha \le r - 1/2$, то есть, когда $\mathring{W}^r_{2;\,\alpha}(\Omega) \ne W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ можно изучить разрешимость вариационной задачи Дирихле в случае неоднородности граничных условий. Такая задача имеем следующую подстановку:

Задача $\mathbb{D}_\lambda$. Для заданного элемента F из пространства $\left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданной функции Φ из пространства $W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$\mathcal{P}_\lambda[U,\, v] \equiv (\mathcal{L}[U], v)_0 + \lambda(U,\, v)_0 =< F,\, v > \quad \forall v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega), \qquad (2.3.71)$$

которое принадлежит пространству $W^r_{2;\alpha}(\Omega)$ и удовлетворяет условию

$$U(x) - \Phi(x) \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega). \qquad (2.3.72)$$

Условие (2.3.72) означает, что решение $U(x)$ уравнения (2.3.71) и заданная функция $\Phi(x)$ имеют одни те же следы на границе $\partial\Omega$ области

Ω. Как уже мы отметили условие (2.3.72) содержит неоднородные граничные условия только в случае $-1/2 < \alpha < r - 1/2$. Ниже мы будем предполагать, что эти условия выполнены.

Теперь изучим фредголмовую разрешимость вариационной задачи Дирихле $\mathbb{D}_\lambda$ с неоднородными граничными условиями. С этой целью также рассмотрим сопряженную и однородные задачи, связанные с задачей Дирихле $\mathbb{D}_\lambda$.

Задача $\mathbb{D}^0_\lambda$. Найти решение $U(x)$ уравнения

$$(\mathcal{L}[u], v)_0 + \lambda(u,\, v)_0 = 0 \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)), \tag{2.3.73}$$

которое принадлежит пространству $\mathring{W}^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Задача $\mathbb{D}^*_\lambda$. Для произвольного заданного функционала G из пространства $\left(\mathring{W}^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и любой заданной функции $\Psi(x)$пространства $W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ требуется найти решение $V(x)$ уравнения

$$\mathcal{P}^+_\lambda[V,\, v] \equiv (\mathcal{L}^*[V],\, v)_0 + \overline{\lambda}(V,\, v)_0 = \langle G,\, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)), \tag{2.3.74}$$

которое удовлетворяет условию

$$V(x) - \Psi(x) \in \mathring{W}^r_{2;\,\alpha}(\Omega). \tag{2.3.75}$$

Задача $\mathbb{D}^{0*}_\lambda$. Найти решение $V(x)$ уравнения

$$(\mathcal{L}^*[V],\, v)_0 + \overline{\lambda}(V,\, v)_0 = 0 \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)), \tag{2.3.76}$$

которое принадлежит пространству $\mathring{W}^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Далее нам понадобятся две вспомогательные леммы.

Лемма 2.3.3. *Функционал Q, определенный равенством*

$$< Q,\, v >= -\mathcal{P}_\lambda[\Phi,\, v], \quad v \in \mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega), \tag{2.3.77}$$

где Φ – любая заданная функция из пространства $W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$, принадлежит пространству $\left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и при этом справедливо неравенство

$$\left\|Q;\, \left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| \le (M + |\lambda|)\left\|\Phi;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|, \tag{2.3.78}$$

где положительное число M не зависит от выбора функции $\Phi(x)$.

Доказательство. Пусть Φ – некоторая заданная функция из пространства $W^r_{2,\alpha}(\Omega)$. Действуя также как при доказательстве неравенства (2.3.60) доказывается, что

$$|\mathcal{P}_\lambda[\Phi,\, v]| \leq (M + |\lambda|) \left\|\Phi;\, W^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v;\, W^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\|$$

для всех $v \in \mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$. С учетом равенства (2.3.77) отсюда находим

$$|< Q,\, v >| \leq (M + |\lambda|) \left\|\Phi;\, W^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v;\, W^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \tag{2.3.79}$$

для всех $v \in \mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$. Так как

$$\left\|Q;\, \left(\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| = \max |< Q,\, v >|,$$

где максимум берется по всем $v \in \mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$ таким, что

$$\left\|v;\, W^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\| = 1,$$

то из неравенства (2.3.79) следует оценка (2.3.78).

Лемма 2.3.3 доказана.

Лемма 2.3.4. *Функционал $\widetilde{Q}$, определенный равенством*

$$< \widetilde{Q},\, v >= -\mathcal{P}^+_\lambda[\Psi,\, v], \quad v \in \mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega), \tag{2.3.80}$$

где Ψ – любая заданная функция из пространства $W^r_{2,\alpha}(\Omega)$, принадлежит пространству $\left(\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ и при этом справедливо следующее неравенство

$$\left\|\widetilde{Q};\, \left(\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| \leq (M + |\lambda|) \left\|\Psi;\, W^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\|, \tag{2.3.81}$$

где положительное число M не зависит от $\Psi(x)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.3.3.

Пусть Φ – некоторая заданная функция из $W^r_{2,\alpha}(\Omega)$ и $U(x)$ – соответствующее решение задачи $\mathbb{D}_\lambda$. Рассмотрим функцию $\widehat{U}(x) = U(x) - \Phi(x)$. Подставляя $U(x) = \widehat{U}(x) + \Phi(x)$ в уравнение (2.3.71) имеем

$$\mathcal{P}_\lambda[\widehat{U},\, v] = \mathcal{P}_\lambda[U,\, v] + \mathcal{P}_\lambda[\Phi,\, v] = \langle F,\, v\rangle \quad \forall v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega).$$

Следовательно, функция $\widehat{U}(x)$ будет решением следующей задачи

$$\mathcal{P}_\lambda[\widehat{U},\, v] = \langle F + Q,\, v\rangle \quad \forall v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega), \widehat{U} \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega), \tag{2.3.82}$$

где Q – функционал, определенный леммой 2.3.3.

Аналогично, легко можно показать, что функция $\widehat{V}(x) = V(x) - \Psi(x)$, где Ψ – заданная функция из $W^r_{2,\alpha}(\Omega)$ и $V(x)$ – соответствующее решение задачи $\mathbb{D}^*_\lambda$, будет решением следующей задачи

$$\mathcal{P}^+_\lambda[\widehat{V},\, v] = \langle G + \widetilde{Q},\, v\rangle \quad \forall v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega), \widehat{U} \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega), \tag{2.3.83}$$

где $\widetilde{Q}$ – функционал, определенный леммой 2.3.4.

Таким образом, мы свели задачи $\mathbb{D}_\lambda$, $\mathbb{D}^*_\lambda$ с неоднородными граничными условиями к соответствующим задачи (2.3.82), (2.3.83), которые имеют однородные граничные условия. Далее для разрешимости задач (2.3.82), (2.3.83) можно применить теорему 2.3.6. В итоге получим следующую теорему о фредгольмовой разрешимости задачи $\mathbb{D}_\lambda$, которая имеет неоднородные граничные условия.

Теорема 2.3.7. *Пусть Ω – ограниченная область в пространстве R^n с замкнутой $(n-1)$ -мерной границей $\partial\Omega$, число α такое, что*

$$-1/2 \le \alpha < r - 1/2, \tag{2.3.84}$$

и пусть коэффициенты $b_k(x)$ оператора

$$\mathcal{L}[u](x) = \sum_{|k|=2r} b_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C^\infty_0(\Omega). \tag{2.3.85}$$

удовлетворяют следующим условиям:

$$Re \sum_{|\mu|=|q|=r} (-1)^r b_{\mu+q}(x)\zeta_\mu\overline{\zeta_q} \geq \rho^{2\alpha}(x)\varkappa \sum_{|\mu|=r} |\zeta_\mu|^2$$

$$(x \in \Omega,\, \zeta = \{\zeta_\mu\}_{|\mu|=r} \subset \mathbb{C}), \quad (2.3.86)$$

$$|b_{\mu+q}(x)| \leq M\rho^{2\alpha}(x) \quad (x \in \Omega,\, |\mu| = |q| = r)\,. \qquad (2.3.87)$$

$$\left|b_k^{(p)}(x)\right| \leq C_p\,\rho^{2\alpha-\delta(|p|)}(x), \quad x \in \Omega,\, |k| = 2r,\, |p| \leq r, \qquad (2.3.88)$$

где число $\delta(|p|)$ *удовлетворяет хотя бы одно из неравенство*

i) $|p| > \delta(|p|)$,

ii) $r\delta(|p|) < |p|\alpha,\, |p| < r$.

Тогда задача $\mathbb{D}_\lambda$ *фредгольмово разрешима, то есть:*

1) *задача* $\mathbb{D}_\lambda^0$ *имеет ненулевые решения (обобщенные собственные функции) только для счетного числа значений параметра* $\lambda = \lambda_j,\ j = 1, 2, \ldots$ *(собственные значения) и только бесконечность будет предельной точкой этих значений;*

2) *подпространство обобщенных собственных функций - собственное подпространство, отвечающее каждому собственному значению* λ_j, *- конечномерно;*

3) *собственные значения сопряженной задачи* $\mathbb{D}_\lambda^{0*}$ *равны* $\overline{\lambda_j},\ j = 1, 2, \ldots$;

4) *собственные подпространства задач* $\mathbb{D}_\lambda^0$ *и* $\mathbb{D}_\lambda^{0*}$, *которые отвечают собственным значениям* λ_j *и* $\overline{\lambda_j}$, *имеют одинаковую размерность;*

5) *для существовании хоть одного решения задачи* $\mathbb{D}_\lambda$ *необходимо и достаточно, чтобы условие* $\langle \widetilde{F}, v\rangle \equiv 0$, *где* $\langle \widetilde{F}, v\rangle = \langle F, v\rangle - (\mathcal{L}[\Phi], v)_0 - \lambda(\Phi, v)_0$, *выполнялось для любого решения* $v(x)$ *задачи* $\mathbb{D}_\lambda^{0*}$;

6) для существовании хоть одного решения задачи $\mathbb{D}^*_\lambda$ *необходимо и достаточно, чтобы условие* $\langle \widetilde{G}, u\rangle \equiv 0$, *где* $\langle \widetilde{G}, u\rangle = \langle G, v\rangle - (\mathcal{L}^*[\Psi], v)_0 - \overline{\lambda}(\Psi, v)_0$, *выполнялось для любого решения* $u(x)$ *задачи* $\mathbb{D}^0_\lambda$.

2.4. Задача Дирихле для эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих ненулевые младшие коэффициенты

О разрешимости вариационной задачи Дирихле в пространстве $V^r_{2,\alpha}(\Omega)$ для эллиптических операторов с согласованным вырождением

Пусть r – некоторое натуральное число и пусть J – некоторое подмножество целых неотрицательных чисел, не превосходящих r, то есть $J \subset \{0,\, 1,\, 2, \ldots,\, r\}$. Далее предположим, что $r \in J$. Рассмотрим следующий дифференциальный оператор

$$L[u](x) = \sum_{j\in J} \rho^{2\alpha_j}(x) \sum_{|k|=2j} a_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.4.1}$$

Здесь, также как в предыдущих параграфах через Ω обозначим ограниченную область в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, граница $\partial\Omega$ которой замкнута и имеет меру $(n-1)$ и через $\rho(x)$ обозначим регуляризованное расстояние точки $x \in \Omega$ до границы области $\partial\Omega$.

Далее определим понятие согласованного вырождения оператора (2.4.1).

Определение 2.4.1. *Вырождение дифференциального оператора (2.4.1) называется согласованным, если числа α_j, $j \in J$, удовлетворяют условиям*

$$\alpha_j = \alpha_r - r + j \tag{2.4.2}$$

для всех $j \in J$.

Сначала мы рассмотри операторы вида (2.4.1), которые имеют согласованное вырождение коэффициентов вдоль всей границы области. Поэтому при определении основного функционального пространства решений рассматриваемых ниже задач учитывается только вырождение старших коэффициентов. В связи с этим, далее в тексте число α_r обозначим через α.

Далее предположим, коэффициенты $a_k(x)$ оператора (2.4.1) удовлетворяют следующим условиям:

I) найдется такое положительное число $\varkappa$, что

$$\mathrm{Re} \sum_{|\mu|=|q|=r} (-1)^r a_{\mu+q}(x)\zeta_\mu \overline{\zeta_q} \geq \varkappa \sum_{|\mu|=r} |\zeta_\mu|^2 \tag{2.4.3}$$

для всех $x \in \Omega$ и для любого множества комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_\mu\}_{|\mu|=r}$;

II) при всех $j \in J$ коэффициенты $a_k(x)$, $|k| = 2j$ имеют производные до порядка j включительно и найдется число $M > 0$ такое, что

$$\left| a_k^{(p)}(x) \right| \leq M\, \rho^{-|p|}(x) \tag{2.4.4}$$

для всех $x \in \Omega$, всех мультииндексов k длиною $2j$ и всех мультииндексов p, по длине не превосходящих j.

Напомним, что норма пространства $V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ определяется равенством

$$\left\| u;\, V^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| = \left\{ \left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|^2 + \| u;\, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega) \|^2 \right\}^{1/2},$$

где

$$\left\| u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| = \left(\sum_{|k|=r} \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha}(x) \left| u^{(k)}(x) \right|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\| u;\, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega) \| = \left(\int\limits_\Omega \rho^{2\alpha-2r}(x) |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Заметим, что пространство $L_{2,\,\alpha-r}(\Omega)$ является гильбертовым пространством и скалярное произведение в этом пространстве определяется с помощью равенства

$$(u,\, v)_{\alpha-r} = \int\limits_\Omega \rho^{2(\alpha-r)}(x) u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Ранее мы также воспользовались пространством $\left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$, которое было определено как пополнением пространства $L_{2,\,\alpha-r}(\Omega)$ относительно следующей норме

$$\left\|f;\,\left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| = \sup\,\frac{|(f,\,v)_{\alpha-r}|}{\left\|u;\,V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $v(x)$ из пространства $V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$. Элементы из пространства $\left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ отождествляются с соответствующими антилинейными функционалами, определенными над пространством $V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$. Ниже обозначим через $< f,\,v >$ значение функционала f из пространства $\left(V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ на функцию v из пространства $V^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$.

Теорема 2.4.1. *Предположим, что выполняются условия (2.4.2)–(2.4.4). Тогда найдутся такие положительные числа c^*, M^*, что*

$$Re\,(L[u],\,u)_0 \geq c^*\left\|u;\,L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 - M^*\left\|u;\,L_{2,\,\alpha-r}(\Omega)\right\|^2 \tag{2.4.5}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Доказательство. Сформулируем одну вспомогательную лемму, которая является частным случаем леммы 2.2 работы С.А.Исхокова [34].

Лемма 2.4.1. *Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется число $K(\varepsilon) > 0$ такое, что*

$$\left(\sum_{|q|\leq r-1}\int\limits_{\Omega}\rho^{2(\alpha-r+|q|)}(x)\left|v^{(q)}(x)\right|^2dx\right)^{1/2} \leq \varepsilon\left\|v;\,L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| + K(\varepsilon)\left\|v;\,L_{2,\,\alpha-r}(\Omega)\right\|$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Вводим вспомогательные дифференциальные операторы

$$L_j[u](x) = \sum_{|k|=2j}\rho^{2\alpha_j}(x)a_k(x)u^{(k)}(x), \quad j \in J, \quad u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Нетрудно проверить, что коэффициенты оператора $L_r[u]$ удовлетворяют всем условиям теоремы 2.3.1. Поэтому, действуя также как при выводе основного неравенства этой теоремы можно доказать, что

$$\operatorname{Re}\left(L_r[u],\, u\right)_0 \geq c\left\|u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 - M\left\|u;\, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega)\right\|^2 \tag{2.4.6}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Здесь $c,\, M$ – некоторые положительные числа. Согласно нашим предположениям $r \in J$. Поэтому вводя обозначение $J' = J \setminus \{r\}$, получим

$$L[u](x) = L_r[u](x) + \sum_{j \in J'} L_j[u](x). \tag{2.4.7}$$

Учитывая это равенство и применяя неравенство (2.4.6) получим

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\left(L[u],\, u\right)_0 \geq \\ &\quad \geq c\left\|u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 - \sum_{j \in J'} \left|\left(L_j[u],\, u\right)_0\right| - M \sum_{j \in J} \left\|u;\, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega)\right\|^2 \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Далее, чтобы сверху оценить величину $|(L_j[u],\, u)_0|$, интегрируя по частям для всех $u,\, v \in C_0^\infty(\Omega)$ получаем представление

$$\begin{aligned} (L_j[u],\, v)_0 &= \sum_{|k|=2j} \int_\Omega \rho^{2\alpha_j}(x) a_k(x) u^{(k)}(x)\overline{v(x)}\,dx = \\ &= \sum_{|l|=|\mu|=j} (-1)^j \int_\Omega u^{(l)}(x)\overline{\left(\rho^{2\alpha_j}(x) a_{l+\mu}(x) v(x)\right)^{(\mu)}}\,dx = \\ &= \sum_{|l|=j} (-1)^j \sum_{|p+q|=j} C_{p,\,q} \int_\Omega u^{(l)}(x)\left(\rho^{2\alpha_j}(x)\overline{a_{l+p+q}(x)}\right)^{(p)}\left(\overline{v(x)}\right)^{(q)} dx, \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

где $C_{p,\,q}$ – некоторые положительные числа. Согласно свойству функции $\rho(x)$ и условию (2.4.4) выполняется неравенство

$$\left|\left(\rho^{2\alpha_j}(x)\overline{a_{l+q+p}(x)}\right)^{(p)}\right| \leq M_1 \rho^{2\alpha_j - |p|}(x), \quad x \in \Omega,$$

где M_1 – некоторое положительное число. Поэтому из (2.4.9) следует

$$|(L_j[u],\, v)_0| \le M_2 \sum_{|l|=|q+p|=j} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha_j-|p|}(x) \left|u^{(l)}(x)\right| \left|v^{(q)}(x)\right|. \tag{2.4.10}$$

Так как (см. (2.4.2)) $2\alpha_j - |p| = 2\alpha - 2r + 2j - |p| = 2\alpha - 2r + j + |q|$, то применяя неравенство Коши-Буняковского из (2.4.10) получим

$$|(L_j[u],\, v)_0| \le M_3 \sum_{|l|=j,\, |q|\le j} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r+j+|q|}(x) \left|u^{(l)}(x)\right| \left|v^{(q)}(x)\right| \le$$

$$\le M_4 \sum_{|l|=j,\, |q|\le j} \left\{ \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r+2j}(x) \left|u^{(l)}(x)\right|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$\left\{ \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r+2|q|}(x) \left|v^{(q)}(x)\right|^2 dx \right\}^{1/2} \tag{2.4.11}$$

для всех $u,\, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Следовательно

$$|(L_j[u],\, u)_0| \le M_4 \sum_{|q|\le j} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r+2|q|}(x) \left|u^{(q)}(x)\right|^2 dx.$$

Так как $j \in J'$ и j строго меньше r, то применяя лемму 2.4.1 получим

$$|(L_j[u],\, u)_0| \le \varepsilon \left\|u;\, L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 + K(\varepsilon) \left\|u;\, L_{2,\,\alpha-r}(\Omega)\right\|^2,$$

Теперь подбирая число $\varepsilon > 0$ в этом неравенстве достаточно малым из (2.4.8) можно легко вывести неравенство (2.4.5).

Теорема 2.4.1 доказана.

Для удобства записи далее положим

$$P_\lambda[u,\, v] = (L[u],\, v)_0 + \lambda(u,\, v)_{\alpha-r}, \quad u,\, v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2.4.2. *Предположим, что выполняются все условия теоремы 2.4.1. Тогда существует неотрицательное число λ_0 такое, что при выполнении условия $\lambda \ge \lambda_0$ справедливы следующие утверждения:*

1) существует линейный оператор Λ, который осуществляет гомеоморфизм пространства $V^r_{2,\alpha}(\Omega)$ и $\big(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\big)'$ и такой, что

$$\langle \Lambda u,\, v\rangle = P_\lambda[u,\, v] \quad \forall u,\, v \in V^r_{2,\alpha}(\Omega);$$

2) всякий антилинейный непрерывный функционал $l(v)$ из пространства $\big(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\big)'$ допускает представление

$$l(v) = P_\lambda[u_0,\, v] = \langle \Lambda u_0,\, v\rangle,$$

и такое представление единственно.

Доказательство. Применяя теорему вложения для пространств $V^r_{2,\alpha}(\Omega)$ (см. теорему 2.3.1) из неравенства (2.4.11) при всех $j \in J'$ получим

$$|(L_j[u],\, v)_0| \le M_5 \left\|u;\, V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v;\, V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\|,$$

для всех $u,\, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Аналогично доказывается такое же неравенство при $j = r$. Из полученных неравенств ввиду равенства (2.4.7) следует, что

$$|(L[u],\, v)_0| \le M_6 \left\|u;\, V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v;\, V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\|.$$

Следовательно,

$$|P_\lambda[u,\, v]| \le (M_6 + |\lambda|) \left\|u;\, V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v;\, V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \qquad (2.4.12)$$

для всех $u,\, v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Далее заметим, что если $\operatorname{Re}\lambda \ge M^* + c^*$, то из неравенства (2.4.5) следует

$$\operatorname{Re} P_\lambda[u,\, u] \ge c^* \left\|u;\, V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2 \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \qquad (2.4.13)$$

На основе полученных неравенств (2.4.12), (2.4.13) и плотности класса $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $V^r_{2,\alpha}(\Omega)$ доказательство теоремы 2.4.2 завершается применением обобщенной теоремы Лакса-Мильграмма (см. [96, Теорема 2.0.1]).

Далее с помощью теоремы 2.4.2 изучим разрешимость следующей задачи.

Вариационная задача Дирихле. Для заданного элемента f из $\left(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ найти функцию $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$, для которой выполняется равенство

$$P_\lambda[u, v] =< f, v > \quad \forall v \in C^\infty_0(\Omega). \tag{2.4.14}$$

Решение этой задачи называется обобщенным решением следующего дифференциального уравнения

$$\sum_{j\in J} \rho^{2\alpha_j}(x) \sum_{|k|=2j} a_k(x) u^{(k)}(x) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Теорема 2.4.3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.4.2 и пусть число λ_0 – такое же как в этой теореме. Тогда при условии $\lambda \geq \lambda_0$ для любого заданного элемента f из пространства $\left(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ вариационная задача Дирихле (2.4.14) имеет единственное решение u_0 из пространства $V^r_{2,\alpha}(\Omega)$ и при этом выполняется неравенство*

$$\left\| u_0;\, V^r_{2,\alpha}(\Omega) \right\| \leq M \left\| f; \left(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\right)' \right\|,$$

где положительное число M не зависит от f и λ.

Доказательство проводится по стандартной схеме применением теоремы 2.4.2 и обобщенной теоремой Лакса-Мильграмма.

Замечание 2.4.1. *(см. теорему 2.3.10) Если число α удовлетворяет условиям $-1/2 < \alpha < r - 1/2, \quad \alpha + 1/2 \notin \{1, \ldots, r\}$ и граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу $C^{s_0+1+\varepsilon}$, где s_0 – целое число, удовлетворяющее условию $r-\alpha-1/2 \leq s_0 < r-\alpha+1/2$, то решение $u(x)$ задачи (2.4.14) удовлетворяет следующим однородным граничным условиям*

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1,$$

где $\partial/\partial n$ – производная по внутренней нормали. Поэтому граничные условия в задаче (2.4.14) в общем случае также формально считаются однородными.

О разрешимости вариационной задачи Дирихле в пространстве $\mathring{W}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)$ для эллиптических операторов с согласованным вырождением

Также как в предыдущем параграфе обозначим через $W^{r}_{2,\alpha}(\Omega)$ пространство функций $u(x)$, $x \in \Omega$,, имеющих в Ω обобщенные в смысле Соболева производные до r-того порядка включительно, норма которой определяется равенством

$$\left\| u;\, W^{r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\| = \left\{ \left\| u;\, L^{r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\|^2 + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \right\}^{1/2},$$

а через $\mathring{W}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)$ обозначим замыкание множества $C^{\infty}_{0}(\Omega)$ по норме пространства $W^{r}_{2,\alpha}(\Omega)$.

Вводим также пространство $\left(\mathring{W}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$, которое определяется как пополнение пространства $L_2(\Omega)$ по следующей норме

$$\left\| f;\, \left(\mathring{W}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)\right)' \right\| = \sup \frac{|(f,\, v)_0|}{\left\| u;\, W^{r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\|},$$

где

$$(f\,,\, v)_0 = \int\limits_{\Omega} f(x)\overline{v(x)} dx$$

и верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $v(x)$ из пространства $\mathring{W}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)$. При этом элементы из пространства $\left(\mathring{W}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ отождествляются с соответствующими антилинейными функционалами, определенными над пространством $\mathring{W}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)$. Обозначим через $< f, v >$ значение функционала $f \in \left(\mathring{W}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ на функцию $v \in \mathring{W}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)$.

Далее в этом параграфе мы изучим вариационной задачи Дирихле в пространстве $\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ для дифференциальных операторов (2.4.1), то есть

$$L[u](x) = \sum_{j\in J} \rho^{2\alpha_j}(x) \sum_{|k|=2j} a_k(x) u^{(k)}(x), \tag{2.4.15}$$

где J – некоторое подмножество множества $\{0,\,1,\,2,\dots,\,r\}$, причем $r\in J$.

Предположим, что коэффициенты исследуемого оператора (2.4.15) удовлетворяют следующим условиям:

I) найдётся положительное число $\varkappa$ такое, что

$$\mathrm{Re} \sum_{|\mu|=|q|=r} (-1)^r a_{\mu+q}(x)\zeta_\mu \overline{\zeta_q} \geq \varkappa \sum_{|\mu|=r} |\zeta_\mu|^2 \tag{2.4.16}$$

для любой точки $x\in\Omega$ и любого множества комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_\mu\}_{|\mu|=r}$;

II) при всех $j\in J$ коэффициенты $a_k(x)$, $|k|=2j$ имеют производные до порядка j включительно и существует такое положительное число M, что

$$\left| a_k^{(p)}(x) \right| \leq M\,\rho^{-|p|}(x) \tag{2.4.17}$$

для всех $x\in\Omega$, всех мультииндексов k длиною $2j$ и всех мультииндексов p, по длине не превосходящих j.

Вводим полуторалинейную форму

$$B_\lambda[u,\,v] = (L[u],\,v)_0 + \lambda \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx, \quad u,\,v\in C_0^\infty(\Omega).$$

Действуя также как в доказательстве теоремы 2.4.1 с помощью теорем вложения пространств $\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ (см. теорем 2.3.4 и 2.3.8) можно доказать следующую теоремау.

Теорема 2.4.4. *Пусть выполнены условия (2.4.16), (2.4.17) и пусть*

$$\alpha_j = \alpha - r + j, \quad j\in J.$$

Тогда существуют положительные числа c^*, M^* *такие, что*

$$Re\,(L[u],\,u)_0 \geq c^* \left\|u;\,L^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 - M^* \left\|u;\,L_2(\Omega)\right\|^2$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Теперь используя эту теорему и поступая также как в доказательстве теоремы 2.4.2 приходим к следующему результату:

Теорема 2.4.5. *В условиях теоремы 2.4.4 найдется неотрицательное число* λ_0 *такое, что при условии* $\lambda \geq \lambda_0$ *справедливы следующие утверждения:*

1) существует линейный оператор Λ, *который осуществляет гомеоморфизм пространства* $\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ *и* $\left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ *и имеет место равенство*

$$\langle \Lambda u,\,v\rangle = B_\lambda[u,\,v] \quad \forall u,\,v \in \mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega);$$

2) всякий антилинейный непрерывный функционал $l(v)$ *из пространства* $\left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ *представляется в виде*

$$l(v) = B_\lambda[u_0,\,v] = \langle \Lambda u_0,\,v\rangle,$$

и такое представление единственно.

Эта теорема играет важную роль в изучении разрешимости следующей задачи.

Вариационная задача Дирихле. Для заданного элемента f из $\left(\mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ найти функцию $u \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega)$, для которой выполняется равенство

$$B_\lambda[u,\,v] =< f,\,v > \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.4.18}$$

Теорема 2.4.6. *Предположим, что все условия теоремы 2.4.5 выполняются. Тогда при* $\lambda \geq \lambda_0$, *где* λ_0 *– такое же число как в теореме 2.4.5,* *для произвольного заданного функционала* $f \in \left(\mathring{W}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ *задача Дирихле (2.4.18) имеет единственное решение* $u_0 \in \mathring{W}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)$ *и выполняется неравенство*

$$\left\|u_0;\, W^{r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \le M \left\|f;\, \left(\mathring{W}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)\right)'\right\|,$$

где положительное число M *не зависит от* f *и* λ*.*

Доказательство проводится по стандартной схеме применением теоремы 2.4.5 и обобщенной теоремой Лакса-Мильграмма.

О разрешимости вариационной задачи Дирихле в пространстве $\mathring{W}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)$ для эллиптических операторов с несогласованным вырождением

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L[u](x) = \sum_{j\in J} \rho^{2\alpha_j}(x) \sum_{|k|=2j} a_k(x) u^{(k)}(x), \tag{2.4.19}$$

где J – некоторое подмножество множества $\{0,\,1,\,2,\ldots,\,r\}$, причем $r \in J$. Согласно определении 2.4.1 вырождение оператора (2.4.19) называется согласованным если $\alpha_j = \alpha_r - r + j$ для всех $j \in J$. В противном случае назовём вырождение оператора (2.4.19) **несогласованным**. До этого момента, в этом параграфе, мы рассматривали дифференциальные операторы с согласованным вырождением. Теперь предположим, что оператор (2.4.19) имеет несогласованное вырождение и для него изучим разрешимость вариационной задачи Дирихле, решение которой ищется в весовом пространстве типа Соболева. Это пространство является замыканием множества финитных бесконечно-дифференцируемых функций. Вводим понятие старших форм, и покажем, что только степени вырождения коэффициентов старших форм участвуют в определении пространства решений.

Для $j \in J$ вводим функциональное пространство $W^j_{2,\alpha_j}(\Omega)$ с нормой

$$\left\| u;\, W^j_{2,\alpha_j}(\Omega) \right\| = \left\{ \left\| u;\, L^j_{2,\alpha_j}(\Omega) \right\|^2 + \int\limits_\Omega |u(x)|^2\, dx \right\}^{1/2}, \qquad (2.4.20)$$

где

$$\left\| u;\, L^j_{2,\alpha_j}(\Omega) \right\| = \left(\sum_{|k|=j} \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha_j}(x) \left| u^{(k)}(x) \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Замыкание класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (2.4.20) обозначим через $\mathring{W}^j_{2,\alpha_j}(\Omega)$.

Предположим, что коэффициенты исследуемого оператора (2.4.19) для любого $j \in J$ удовлетворяют следующим условиям:

I) найдётся положительное число $\varkappa$ такое, что неравенство

$$\mathrm{Re} \sum_{|\mu|=|q|=j} (-1)^j a_{\mu+q}(x) \zeta_\mu \overline{\zeta_q} \geq \varkappa \sum_{|\mu|=j} |\zeta_\mu|^2$$

выполняется для всех точек $x \in \Omega$ и любого множества комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_\mu\}_{|\mu|=j}$;

II) коэффициенты $a_k(x)$, $|k| = 2j$ ограничены, имеют производные до порядка j включительно и для всех $x \in \Omega$ и всех мультииндексов p, по длине не превосходящих j, удовлетворяют условию

$$\left| a_k^{(p)}(x) \right| \leq M\, \rho^{-\delta_j(|p|)}(x),$$

где M – некоторое положительное число и число $\delta_j(|p|)$ удовлетворяет хотя бы одному из неравенств

a) $|p| > \delta_j(|p|)$,

b) $j\delta(|p|) < |p|\alpha_j$, $|p| < j$.

Полуторалинейную форму $B[u,\, v]$, связанную с оператором (2.4.19), представим в виде

$$B[u,\, v] = \int\limits_\Omega L[u](x)\overline{v(x)} dx = \sum_{j \in J} B_j[u,\, v], \qquad (2.4.21)$$

где

$$B_j[u,\,v] = \sum_{|k|=2j} \int\limits_{\Omega} a_k(x)\rho^{2\alpha_j}(x)u^{(k)}(x)\overline{v(x)}dx.$$

В силу теоремы 2 работы [**?**] для любого $j \in J$ найдутся такие положительные числа c_j, M_j, что

$$\operatorname{Re} B_j[u,\,u] \geq c_j \left\| u;\, L^j_{2,\,\alpha_j}(\Omega) \right\|^2 - M_j \left\| u;\, L_2(\Omega) \right\|^2,$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Поэтому в силу равенства (2.4.21) для любого $u \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} B[u,\,u] \geq \sum_{j \in J} \varkappa_0 \left\| u;\, L^j_{2,\,\alpha_j}(\Omega) \right\|^2 - K_0 \left\| u;\, L_2(\Omega) \right\|^2, \qquad (2.4.22)$$

где $\varkappa_0$, K_0 – некоторые положительные постоянные.

Учитывая ограниченность коэффициентов $a_k(x)$, $|k| = 2j$ оператора (2.4.19) с помощью теорем вложения для пространств $W^j_{2,\,\alpha_j}(\Omega)$ доказывается, что

$$|B_j[u,\,v]| \leq \mathbb{M}_j \left\| u;\, W^j_{2,\,\alpha_j}(\Omega) \right\| \left\| v;\, W^j_{2,\,\alpha_j}(\Omega) \right\|, \qquad u,\, v \in C_0^\infty(\Omega),\ j \in J, \quad (2.4.23)$$

где $\mathbb{M}_j$ – некоторое положительное число.

Далее обозначим через K различные положительные постоянные, точные значения которых не существенны в контексте нашего изложения.

Заметим, что согласно теореме вложения для пространств со степенным весом в ограниченной области (см. теорему 2.2.1 и теорему 2.2.8) при условии $\alpha_j + 1/2 \notin \{1,\, \ldots,\, j\}$ для любого целого $m \in [0,\, j]$ справедливо вложение

$$\mathring{W}^j_{2,\,\alpha_j}(\Omega) \to \mathring{W}^m_{2,\,\alpha_j+m-j}(\Omega),$$

которое равносильно следующему неравенству

$$\left\| v;\, W^m_{2,\,\alpha_j+m-j}(\Omega) \right\| \leq K \left\| v;\, W^j_{2,\,\alpha_j}(\Omega) \right\|, \quad v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Так как $0 < \rho(x) < \mathrm{const} < +\infty,\ \forall x \in \Omega$, то отсюда следует

$$\left\|v;\, W^m_{2,\beta_m}(\Omega)\right\| \le K \left\|v;\, W^j_{2,\alpha_j}(\Omega)\right\|, \quad v \in C_0^\infty(\Omega), \tag{2.4.24}$$

где β_m – любое число, удовлетворяющее условию $\beta_m \ge \alpha_j + m - j$.

Теперь определим подмножество I множества J, которое содержит индексы старших форм. Положим $i_0 = r$ и предположим, что $i_0 \in I$. Обозначим через J_0 множество всех элементов $j \in J$ таких, что $\alpha_j \ge \alpha_{i_0} + j - i_0$. Из (2.4.24) следует, что

$$\left\|v;\, W^j_{2,\alpha_j}(\Omega)\right\| \le K \left\|v;\, W^{i_0}_{2,\alpha_{i_0}}(\Omega)\right\|, \quad v \in C_0^\infty(\Omega),\ j \in J_0. \tag{2.4.25}$$

Далее обозначим через i_1 наибольший элемент множества $I_0 = J \setminus \{\{i_0\} \cup J_0\}$, удовлетворяющий условию $\alpha_{i_1} < \alpha_{i_0} + i_1 - i_0$ и множество всех $j \in I_0$, для которых $\alpha_j \ge \alpha_{i_1} + j - i_1$ обозначим через J_1. В силу неравенства (2.4.24) имеют места неравенства

$$\left\|v;\, W^j_{2,\alpha_j}(\Omega)\right\| \le K \left\|v;\, W^{i_1}_{2,\alpha_{i_1}}(\Omega)\right\|, \quad v \in C_0^\infty(\Omega),\ j \in J_1. \tag{2.4.26}$$

Далее определим i_2 как наибольший элемент множества $I_1 = J \setminus \{\{i_0\} \cup J_0 \cup J_1\}$, при котором выполняется неравенство $\alpha_{i_2} < \alpha_{i_1} + i_2 - i_1$. Поступая с i_2 так же, как с i_1, определим элемент i_3. Продолжая этот процесс, определим множество $I = \{i_0,\, i_1,\, \ldots,\, i_N\}$ и все формы $B_j[u,\, v]$, индексы j которых принадлежат множеству I, назовем *старшими формами.*

Теперь определим функциональное пространство $\mathbb{H}_+$ как пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u;\, \mathbb{H}_+\| = \left\{ \sum_{j=0}^{N} \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha_{i_j}}(x)|u(x)|^2 dx + \int\limits_\Omega |u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Вводим также пространство $\mathbb{H}_-$ – пополнение пространства $L_2(\Omega)$ по норме

$$\|f;\, \mathbb{H}_-\| = \sup \frac{|(f,\, v)_0|}{\|u;\, \mathbb{H}_+\|}.$$

Здесь

$$(f\,,\,v)_0=\int\limits_{\Omega}f(x)\overline{v(x)}dx-$$

скалярное произведение пространства $L_2(\Omega)$ и верхняя грань берется по всем ненулевым функциям v из пространства $\mathbb{H}_+$. При этом элементы из пространства $\mathbb{H}_-$ отождествляются с соответствующими антилинейными функционалами, определенными над пространством $\mathbb{H}_+$. Значение функционала $f\in\mathbb{H}_-$ на функцию $v\in\mathbb{H}_+$ обозначается символом $<f,\,v>$.

Из определения множества I и неравенств вида (2.4.25), (2.4.26) следует, что

$$\sum_{j\in J}\left\|u;\,W^{j}_{2,\,\alpha_j}(\Omega)\right\|\leq K\,\|u;\,\mathbb{H}_+\|\,,\quad u\in C_0^\infty(\Omega).$$

В силу этого неравенства из (2.4.21), (2.4.23) имеем

$$|B[u,\,v]|\leq K\,\|u;\,\mathbb{H}_+\|\,\|v;\,\mathbb{H}_+\|\,,\quad u\in C_0^\infty(\Omega).\tag{2.4.27}$$

Также в силу (2.4.22) справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}B[u,\,u]+\lambda_0\,\|u;\,L_2(\Omega)\|^2\geq\varkappa_1\,\|u;\,\mathbb{H}_+\|^2\,,\quad u\in C_0^\infty(\Omega),\tag{2.4.28}$$

где $\varkappa_1$, λ_0 – некоторые положительные постоянные.

Теперь, поступая стандартным образом, с помощью неравенств (2.4.27), (2.4.28) и обобщенной теоремы Лакса-Мильграмма (см., например, теорему 2.0.1 из [96]) можно исследовать разрешимость следующей обобщенной задачи Дирихле:

Задача D_λ. Для заданного функционала F из пространства $\mathbb{H}_-$ требуется найти решение $u(x)$ уравнения

$$B[u,\,v]+\lambda(u,\,v)_0=<F,\,v>,\forall v\in C_0^\infty(\Omega),$$

которое принадлежит пространству $\mathbb{H}_+$.

В итоге получим следующий результат:

Теорема 2.4.7. *Пусть выполнены условия I), II) и пусть* $\alpha_j + 1/2 \notin \{1, \ldots, j\}$, $j \in J$. *Тогда при* $\lambda \geq \lambda_0$, *где* λ_0 *такое же число, как в неравенстве (2.4.28), для любого заданного элемента* $F \in \mathbb{H}_-$ *существует единственное решение* $u(x)$ *задачи* D_λ *и для этого решения справедливо неравенство*

$$\|u;\, \mathbb{H}_+\| \leq M^* \, \|F;\, \mathbb{H}_-\| \,,$$

где положительное число M^* *не зависит от выбора функционала* F *и числа* λ.

Глава 3

Априорные оценки решения задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида с суммируемыми коэффициентам в ограниченной области

3.1. Вспомогательные результаты из общей теории эллиптических операторов

В этом параграфе, для удобства чтения, мы приводим, в удобном для нас виде, некоторые известные факты из общей теории эллиптических операторов в гильбертовом пространстве. Их можно найти в учебниках и монографиях [29, 60, 107].

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$P(x,\,D) = \sum_{|k|\le m} a_k(x) D^k, \tag{3.1.1}$$

где (см. [29, стр.13])

$$k = (k_1,\,\ldots,\,k_n), \quad |k| = k_1 + \cdots + k_n,$$
$$D^k = D_1^{k_1}\cdots D_n^{k_n}, \quad D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1,\,\ldots,\,n.$$

Определение 3.1.1. *(см. [29, стр.71]) Полином*

$$p_0(x,\,\xi) = \sum_{|k|=m} a_k(x)\xi^k$$

называется **характеристической формой** *дифференциального оператора (3.1.1).*

Определение 3.1.2. *(см. [29, стр.72]) Дифференциальный оператор (3.1.1) называется* **эллиптическим** *в области* Ω*, если существует такая положительная постоянная* c_0*, что*

$$|p_0(x,\,\xi)| \geq c_0|\xi|^m, \quad x \in \Omega,\ \xi \in R^n, \tag{3.1.2}$$

где p_0 *– характеристическая форма оператора* P*.*

Утверждение 3.1.1. *(см. [29, стр.72]) Условие (3.1.2) эквивалентно каждому из следующих двух:*

(1) $|p_0(x,\,\xi)| \neq 0$ *при* $x \in \overline{\Omega},\ \xi \in R^n \setminus 0$*;*

(2) $|p(x,\,\xi)| \geq c_0|\xi|^m - C_1$ *для* $x \in \Omega,\ \xi \in R^n,\, c_0 = const > 0$*.*

Здесь

$$p(x,\,\xi) = \sum_{|k|\leq m} a_k(x)\xi^k$$

Вводим следующие нормы (см. [29, стр.52])

$$\|u\|_0 = \left\{ \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2\, dx \right\}^{1/2},$$

$$\|u\|_s = \left\{ \int\limits_{\Omega} \sum_{|k|\leq s} \left|D^k u(x)\right|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Справедлива следующая теорема (см. [29, стр.72]), которая содержит неравенство Гординга для регулярных эллиптических операторов.

Теорема 3.1.1. *Пусть* $P(x,\,D)$ *– дифференциальный оператор четного порядка* m *с коэффициентами из класса* $C^{m/2}(\overline{\Omega})$ *и*

$$Re\, p_0(x,\,\xi) \geq c_0|\xi|^m \quad \text{для} \quad x \in \Omega,\ \xi \in R^n,\, c_0 = const > 0,$$

где Ω *– ограниченная область в* R^n*. Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется такая постоянная* C_ε*, что*

$$Re \int P(x,\,D)u(x) \cdot \overline{u(x)} dx \geq (c_0 - \varepsilon)\|u\|^2_{m/2} - C_\varepsilon \|u\|^2_0, \quad u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Утверждение 3.1.2. *(см. [29, стр.75]) В условиях теоремы 3.1.1 справедливо более точное неравенство Гординга-Хермандера*

$$Re\int P(x,\,D)u(x)\cdot\overline{u(x)}dx\geq c_0\|u\|^2_{m/2}-C\|u\|^2_0,\quad u\in C_0^\infty(\Omega).$$

Следствие 3.1.1. *(см. [29, стр.75]) Если $P(x,\,D)$ – эллиптический дифференциальный оператор порядка m и*

$$|p_0(x,\,\xi)|\geq c_0|\xi|^m\quad \textit{для}\quad x\in\Omega,\ \xi\in R^n,\, c_0=const>0,$$

то для каждого $\varepsilon>0$ найдется такая постоянная C_ε, что

$$\|Pu\|^2_0\geq(c_0^2-\varepsilon)\|u\|^2_m-C_\varepsilon\|u\|^2_0,\quad u\in C_0^\infty(\Omega).$$

Следствие 3.1.2. *(см. [29, стр.75]) Если $P(x,\,D)$ – эллиптический дифференциальный оператор порядка m и*

$$|p_0(x,\,\xi)|\geq c_0|\xi|^m\quad \textit{для}\quad x\in\Omega,\ \xi\in R^n,\, c_0=const>0,$$

то

$$\|Pu\|_0\geq\frac{c_0}{2}\|u\|_m,\quad u\in C_0^\infty(\omega),$$

если $diam\,\omega$ достаточно мал.

3.2. Априорная оценка решений задачи Дирихле для эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих только старшие коэффициенты

Здесь, также как в главе 1, символом Ω обозначим ограниченную область в $\mathbb{R}^n$, граница $\partial\Omega$ которой является замкнутым $(n-1)$ -мерным многообразием. Обозначим через $\rho(x)$ регуляризованное расстояние точки $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$, т.е. бесконечно-дифференцируемую функцию со следующими свойствами

$$\frac{1}{\varkappa}\,\mathrm{dist}\{x,\,\partial\Omega\} \le \rho(x) \le \varkappa\,\mathrm{dist}\{x,\,\partial\Omega\} \quad \forall x \in \Omega, \tag{3.2.1}$$

$$\left|\rho^{(k)}(x)\right| \le \varkappa \rho^{1-|k|}(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall k : |k| \le 2r. \tag{3.2.2}$$

Напомним, что $V^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)$ – функциональное пространство с конечной нормой

$$\left\|u;\, V^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\| =$$
$$= \left\{ \sum_{|k|=2r} \int_\Omega \rho^{2\alpha}(x) \left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx + \int_\Omega \rho^{2(\alpha-2r)}(x)|u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}. \tag{3.2.3}$$

Теперь сформулируем основной результат настоящего параграфа в виде следующей теоремы:

Теорема 3.2.1. *Пусть коэффициенты $b_k(x)$ оператора*

$$L_0[u](x) = \sum_{|k|=2r} \rho^\alpha(x) b_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{3.2.4}$$

удовлетворяют условию

$$M_0^{-1}|\xi|^{2r} \le \left|\sum_{|k|=2r} b_k(x)\xi^k\right| \le M_0|\xi|^{2r} \quad (x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n)\,. \tag{3.2.5}$$

и для любого достаточно малого числа $\nu > 0$ *существует такое положительное число* ε_ν, *что*

$$|b_k(y) - b_k(z)| < \nu, \quad |k| = 2r, \tag{3.2.6}$$

для любой точки $y \in \Omega$ *и любого*

$$z \in J_\varepsilon(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \, |z - y| < \frac{\varepsilon}{\varkappa}\rho(y) \right\}, \quad \varepsilon \in (0, \, \varepsilon_\nu). \tag{3.2.7}$$

Тогда существует такое положительное число c^*, *что для всех* $v \in C_0^\infty(\Omega)$ *выполняется неравенство*

$$c^* \left\| v; \, V^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|^2 \le \int\limits_\Omega \left| L_0[v(z)] \right|^2 dz. \tag{3.2.8}$$

Замечание 3.2.1. *Условие (3.2.6) выполняется если коэффициенты* $b_k(x)$ *оператора (3.2.4) непрерывны в замкнутой области* $\overline{\Omega}$.

Прежде, чем приступить к доказательству теоремы 3.2.1 рассмотрим одно ее приложение.

Рассмотрим следующую задачу Дирихле, связанную с оператором (3.2.4):

Задача Дирихле. Для заданной функции f из пространства $L_2(\Omega)$ найти решение $U(x)$, $x \in \Omega$, уравнения

$$L_0[U](x) = \sum_{|k|=2r} \rho^\alpha(x) b_k(x) U^{(k)}(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

которое принадлежит пространству $V^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)$.

Следствие 3.2.1. *В условиях теоремы 3.2.1 для решения* $U(x)$, $x \in \Omega$, *задачи Дирихле для оператора (3.2.4) выполняется оценка*

$$c_0 \left\| U; \, V^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \le \| f; \, L_2(\Omega) \|, \tag{3.2.9}$$

где постоянная $c_0 > 0$ *не зависит от выбора функции* $f \in L_2(\Omega)$.

Доказательство. Неравенство (3.2.9) следует из (3.2.8).

Переходим к **доказательству теоремы 3.2.1.**

Далее через $L_2(\mathbb{R}^n)$ обозначим лебегое пространство суммируемых с квадратом функций, определенных в $\mathbb{R}^n$, со следующей нормой

$$\|u;\, L_2(\mathbb{R}^n)\| = \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx \right\}^{1/2},$$

а через $W_2^{2r}(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство функций $u(x)$, имеющих в $\mathbb{R}^n$ все обобщенные по С.Л.Соболеву производные порядка $2r$, с следующей нормой

$$\left\|u; W_2^{2r}(\mathbb{R}^n)\right\| = \left\{ \sum_{|k|=2r} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u^{(k)}(x)|^2 dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx \right\}^{1/2}. \qquad (3.2.10)$$

Символом δ обозначим достаточно малое положительное число и через $I(0)$, $I_m(0)$, $m = 1,\, 2,\, \ldots$, обозначим открытые шары в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центрами в начале координат и радиусами δ, $\delta m/(m+1)$, $m = 1,\, 2,\, \ldots$, соответственно. Берем какую-нибудь функцию $\varphi_m \in C_0^\infty(I(0))$ обладающий следующими свойствами:

1) $0 \le \varphi_m(x) \le 1$ для всех точек $x \in I(0)$;

2) $\varphi_m(x) = 1$ для всех точек $x \in I_m(0)$;

3) существует положительное число C такое, что $|\varphi_m^{(k)}(x)| \le C$ для всех точек $x \in I(0)$ и всех мультииндексов k, удовлетворяющих условию $|k| \le 2r$.

Пусть y – произвольная фиксированная точка области Ω. Вводим следующий дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$L_{0,y}[u(x)] = \sum_{|k|=2r} b_k(y) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \qquad (3.2.11)$$

Из условии (3.2.5) следует, что оператор (3.2.11) является эллиптическим оператором с постоянными коэффициентами. Поэтому согласно следствие 3.1.2 (см. также следствие 2 из [29, стр.75]) существует положительное число c_0 такое, что

$$c_0 \left\| u; W_2^{2r}(\omega) \right\| \le \| L_{0,y} u;\, L_2(\omega) \|\,, \quad u \in C_0^\infty(\omega), \tag{3.2.12}$$

если $\operatorname{diam}\omega$ достаточно мал.

Далее считаем радиус δ шара $I(0)$ настолько малым, что неравенство (3.2.12) имеет место при $\omega = I(0)$. Рассмотрим произвольную функцию $u(x) \in C^\infty(I(0))$. Так как $\varphi_m \in C_0^\infty(I(0))$, то $v_m(x) = \varphi_m(x) u(x) \in C_0^\infty(I(0))$. Теперь используя неравенство (3.2.12) для функции $v_m(x)$ в силу равенства $v_m(x) = u(x)$, $x \in I_m(0)$, имеем

$$\sum_{|k|=2r} \int\limits_{I_m(0)} \left| u^{(k)}(x) \right|^2 dx + \int\limits_{I_m(0)} |u(x)|^2 \, dx \le M_0 \left\{ \int\limits_{I(0)} |L_{0,y} v_m(x)|^2 \, dx \right\} \tag{3.2.13}$$

Применяя правило Лейбница дифференцирования произведения двух функций, представим выражение $L_{0,y} v_m(x)$ в следующем виде

$$L_{0,y} v_m(x) = L_y^{(1)} v_m(x) + L_y^{(2)} v_m(x), \tag{3.2.14}$$

где

$$L_y^{(1)} v_m(x) = \sum_{|k|=2r} b_k(y) \varphi_m(x) u^{(k)}(x),$$

$$L_y^{(2)} v_m(x) = \sum_{|k|=2r} \sum_{0 \ne \nu \le k} C_{k,\nu} b_k(y) u^{(k-\nu)}(x) \varphi^{(\nu)}(x), \tag{3.2.15}$$

$C_{k,\nu}$ – некоторые постоянные числа.

Так как $\varphi_m \in C_0^\infty(I(0))$ и $\varphi_m(x) = 1$ для всех $x \in I_m(0)$, то

$$\int\limits_{I(0)} \left| L_y^{(1)} v_m(x) \right|^2 dx = \int\limits_{I_m(0)} |L_{0,y} u(x)|^2 \, dx + \int\limits_{I^{(m)}(0)} |\varphi_m(x) L_{0,y} u(x)|^2 \, dx, \tag{3.2.16}$$

где

$$I^{(m)}(0) = I(0) \setminus I_m(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \, \delta \frac{m}{m+1} < |x| < \delta \right\}.$$

Из условии эллиптичности (3.2.5) следует ограниченность коэффициентов $b_k(x)$. Поэтому, принимая во внимание то, что $|I^{(m)}(0)| \to 0$ при $m \to +\infty$ получим

$$\int\limits_{I^{(m)}(0)} |\varphi_m(x) L_{0,y} u(x)|^2 \, dx \le \mu_m \sum_{|k|=2r} \int\limits_{I(0)} \left| u^{(k)}(x) \right|^2 dx, \qquad (3.2.17)$$

где $\mu_m \to 0$ при $m \to +\infty$.

Таким образом, имеет место следующее неравенство (см. (3.2.16), (3.2.17))

$$\int\limits_{I(0)} \left| L_y^{(1)} v_m(x) \right|^2 dx \le \int\limits_{I_m(0)} |L_{0,y} u(x)|^2 \, dx + \mu_m \sum_{|k|=2r} \int\limits_{I(0)} \left| u^{(k)}(x) \right|^2 dx. \quad (3.2.18)$$

Так как коэффициенты $b_k(x)$ оператора L_0 (см. (3.2.4)) и все производные функций $\varphi_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots,$ порядка до $2r$ включительно ограничены, то из (3.2.15) следует, что

$$\int\limits_{I(0)} \left| L_y^{(2)} v_m(x) \right|^2 dx \le M_1 \sum_{|l| \le 2r-1} \int\limits_{I(0)} \left| u^{(l)}(x) \right|^2 dx. \qquad (3.2.19)$$

Далее используем одно интегральное неравенство с малым параметром, которое имеется в книге Егорова Ю.В. [29] (см. [29, стр.62, теорема 15]). Для наглядности сформулируем эту теорему:

Теорема 3.2.2. *Пусть $s > s'$, $s \ge -n/2$ и ω – область в $\mathbb{R}^n$ с диаметром δ. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$, что при $0 < \delta < \delta_0$ выполняется неравенство*

$$\|u\|_{s'} \le \varepsilon \|u\|_s \; \textit{для} \, u \in C_0^\infty(\omega). \qquad (3.2.20)$$

Здесь

$$\|u\|_s = \left\{ \sum_{|k| \le s} \int\limits_{\omega} |u^{(k)}(x)|^2 dx \right\}^{1/2}. \qquad (3.2.21)$$

Так как в случае пространств Соболева без веса норма (3.2.21) эквивалентна с нормой $\|u;\, W_2^s(\omega)\|$ (см. (3.2.10)), то из неравенства (3.2.20) в случае $s = 2r$ и $\omega = I(0)$ следует, что

$$\sum_{|l|\le 2r-1} \int\limits_{I(0)} \left|u^{(l)}(x)\right|^2 dx \le$$
$$\le \varepsilon \left\{ \sum_{|k|=2r} \int\limits_{I(0)} \left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx + \int\limits_{I(0)} |u(x)|^2\, dx \right\}. \quad (3.2.22)$$

Здесь и далее выражение $\mathrm{const}\cdot\varepsilon$ снова обозначим через ε. Условие $s \ge -n/2$ теоремы 3.2.2 при $s = 2r$ означает, что $r \ge -n/4$, а это условие всегда выполняется, так как r – натуральное число.

Теперь применяя неравенство (3.2.22) из (3.2.19) находим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|L_y^{(2)} v_m(x)\right|^2 dx \le \varepsilon \left\{ \sum_{|k|=2r} \int\limits_{I(0)} \left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx + \int\limits_{I(0)} |u(x)|^2\, dx \right\}, \quad (3.2.23)$$

где ε – достаточно малое положительное число.

Теперь, применяя полученные неравенства (3.2.18), (3.2.23) из (3.2.13), (3.2.14) находим

$$\sum_{|k|=2r} \int\limits_{I_m(0)} \left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx + \int\limits_{I_m(0)} |u(x)|^2\, dx \le$$
$$\le M_0 \int\limits_{I_m(0)} |L_{0,y} u(x)|^2\, dx +$$
$$+ (\mu_m + \varepsilon) \left\{ \sum_{|k|=2r} \int\limits_{I(0)} \left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx + \int\limits_{I(0)} |u(x)|^2\, dx \right\}.$$

Подставляя $\varepsilon = 1/m$, где m – достаточно большое натуральное число, отсюда имеем

$$\sum_{|k|=2r}\int\limits_{I_m(0)}\left|u^{(k)}(x)\right|^2dx+\int\limits_{I_m(0)}|u(x)|^2\,dx\le$$

$$\le M_0\int\limits_{I_m(0)}|L_{0,y}u(x)|^2\,dx+$$

$$+\varkappa_m\left\{\sum_{|k|=2r}\int\limits_{I(0)}\left|u^{(k)}(x)\right|^2dx+\int\limits_{I(0)}|u(x)|^2\,dx\right\},\quad(3.2.24)$$

где $\varkappa_m\to+0$ при $m\to+\infty$. Заметим, что неравенство (3.2.18) имеет место для всех $u\in C_0^\infty(I(0))$.

Рассмотрим отображение $z\to x$, определенное с помощью равенства

$$x=(z-y)\varkappa/\varepsilon\rho(y),\qquad(3.2.25)$$

где $\varkappa$ – константа из условии (3.2.1) и y – любая фиксированная точка из области Ω. Это отображение переводит шар

$$J_\varepsilon(y)=\left\{z\in\mathbb{R}^n:\,|z-y|<\delta\frac{\varepsilon}{\varkappa}\rho(y)\right\}\qquad(3.2.26)$$

в шар $I(0)$ радиуса δ, а $J_\varepsilon^{(m)}(y)$ – в $I_m(0)$, где

$$J_\varepsilon^{(m)}(y)=\left\{z\in\mathbb{R}^n:\,|z-y|<\delta\frac{m\varepsilon}{(m+1)\varkappa}\rho(y)\right\},$$

$$I_m(0)=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\,|x|<\delta\frac{m}{m+1}\right\}.$$

Берем произвольную функцию v из класса $C_0^\infty(\Omega)$. Легко можно проверить, что $J_\varepsilon(y)\subset\Omega$ при всех $y\in\Omega$, $\varepsilon\in(0,\,1)$, $\delta\in(0,\,1)$. Поэтому функция $\widehat{v}_y(x)=v(x\varepsilon\rho(y)/\varkappa+y)$ определена для всех $x\in I(0)$ и принадлежит классу $C^\infty(I(0))$.

Заметим, что если $u(x)=\widehat{v}_y(x)$, то

$$u^{(k)}(x)=\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{|k|}\rho^{|k|}(y)\widehat{v}_y^{(k)}(x).\qquad(3.2.27)$$

Используя это равенство из (3.2.11) имеем

$$L_{0,y}u(x) = \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{2r} \rho^{2r}(y) \sum_{|k|=2r} b_k(y)\widehat{v}_y^{(k)}(x) =$$

$$= \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{2r} \rho^{2r}(y) L_{0,y}\left[\widehat{v}_y(x)\right],$$

Учитывая эти равенства и применяя полученное выше неравенство (3.2.24) для функции $u(x) = \widehat{v}_y(x)$ имеем

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{4r} \rho^{4r}(y) \sum_{|k|=2r} \int\limits_{I_m(0)} \left|\widehat{v}_y^{(k)}(x)\right|^2 dx + \int\limits_{I_m(0)} \left|\widehat{v}_y(x)\right|^2 dx \leq$$

$$\leq M_0 \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{4r} \rho^{4r}(y) \int\limits_{I_m(0)} \left|L_{0,y}\left[\widehat{v}_y(x)\right]\right|^2 dx +$$

$$+ \varkappa_m \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{4r} \rho^{4r}(y) \sum_{|k|=2r} \int\limits_{I(0)} \left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx + \int\limits_{I(0)} \left|\widehat{v}_y(x)\right|^2 dx \right\}.$$

Обе части этого неравенства умножим на $\rho^{2\alpha}(y)$:

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{4r} \rho^{4r+2\alpha}(y) \sum_{|k|=2r} \int\limits_{I_m(0)} \left|\widehat{v}_y^{(k)}(x)\right|^2 dx + \rho^{2\alpha}(y) \int\limits_{I_m(0)} \left|\widehat{v}_y(x)\right|^2 dx \leq$$

$$\leq M_0 \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{4r} \rho^{4r+2\alpha}(y) \int\limits_{I_m(0)} \left|L_{0,y}\left[\widehat{v}_y(x)\right]\right|^2 dx +$$

$$+ \varkappa_m \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{4r} \rho^{4r+2\alpha}(y) \sum_{|k|=2r} \int\limits_{I(0)} \left|\widehat{v}_y^{(k)}(x)\right|^2 dx +$$

$$+ \varkappa_m \rho^{2\alpha}(y) \int\limits_{I(0)} \left|\widehat{v}_y(x)\right|^2 dx. \quad (3.2.28)$$

Далее выполним замену переменных интегрирования с помощью равенства $z = y + x\varepsilon\rho(y)/\varkappa$. Так как

$$x = (z-y)\varkappa/\varepsilon\rho(y), \quad dx = \left(\frac{\varkappa}{\varepsilon\rho(y)}\right)^n dz,$$

$$\widehat{v}_y(x) = v(x\varepsilon\rho(y)/\varkappa + y) = v(z), \quad \widehat{v}_y^{(k)}(x) = v^{(k)}(x\varepsilon\rho(y)/\varkappa + y) = v^{(k)}(z)$$

$$L_{0,y}\left[\widehat{v}_y(x)\right] = \sum_{|k|=2r} b_k(y)\widehat{v}_y^{(k)}(x) = \sum_{|k|=2r} b_k(y)v^{(k)}(x\varepsilon\rho(y)/\varkappa + y) =$$

$$= \sum_{|k|=2r} b_k(y)v^{(k)}(z) = L_{0,y}\left[v(z)\right],$$

то интегралы неравенства (3.2.28) меняются следующим образом:

$$\int\limits_{I(0)} \left|\widehat{v}_y(x)\right|^2 dx = \left(\frac{\varkappa}{\varepsilon\rho(y)}\right)^n \int\limits_{J_\varepsilon(y)} |v(z)|^2 dz, \tag{3.2.29}$$

$$\int\limits_{I_m(0)} \left|\widehat{v}_y^{(k)}(x)\right|^2 dx = \left(\frac{\varkappa}{\varepsilon\rho(y)}\right)^n \int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} \left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz, \tag{3.2.30}$$

$$\int\limits_{I(0)} \left|\widehat{v}_y^{(k)}(x)\right|^2 dx = \left(\frac{\varkappa}{\varepsilon\rho(y)}\right)^n \int\limits_{J_\varepsilon(y)} \left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz, \tag{3.2.31}$$

$$\int\limits_{I_m(0)} \left|L_{0,y}\left[\widehat{v}_y(x)\right]\right|^2 dx = \left(\frac{\varkappa}{\varepsilon\rho(y)}\right)^n \int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} \left|L_{0,y}\left[v(z)\right]\right|^2 dz, \tag{3.2.32}$$

Интегралы в неравенстве (3.2.28) заменяем через (3.2.29), (3.2.30), (3.2.31), (3.2.32):

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{4r} \rho^{4r+2\alpha}(y) \left(\frac{\varkappa}{\varepsilon\rho(y)}\right)^n \sum_{|k|=2r} \int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} \left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz +$$

$$+ \rho^{2\alpha}(y) \left(\frac{\varkappa}{\varepsilon\rho(y)}\right)^n \int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} \left|v(z)\right|^2 dz \le$$

$$\le M_0 \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{4r} \rho^{4r+2\alpha}(y) \left(\frac{\varkappa}{\varepsilon\rho(y)}\right)^n \int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} \left|L_{0,y}\left[v(z)\right]\right|^2 dz +$$

$$+ \varkappa_m \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{4r} \rho^{4r+2\alpha}(y) \left(\frac{\varkappa}{\varepsilon\rho(y)}\right)^n \sum_{|k|=2r} \int\limits_{J_\varepsilon(y)} \left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz +$$

$$+ \varkappa_m \rho^{2\alpha}(y) \left(\frac{\varkappa}{\varepsilon\rho(y)}\right)^n \int\limits_{J_\varepsilon(y)} |v(z)|^2 dz.$$

Следовательно

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{4r-n}\rho^{4r+2\alpha-n}(y)\sum_{|k|=2r}\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^2dz+\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{-n}\rho^{2\alpha-n}(y)\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)}|v(z)|^2\,dz\leq$$

$$\leq M_0\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{4r-n}\rho^{4r+2\alpha-n}(y)\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)}\left|L_{0,y}\left[v(z)\right]\right|^2dz+$$

$$+\varkappa_m\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{4r-n}\rho^{4r+2\alpha-n}(y)\sum_{|k|=2r}\int\limits_{J_\varepsilon(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^2dz+\varkappa_m\rho^{2\alpha-n}(y)\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{-n}\int\limits_{J_\varepsilon(y)}|v(z)|^2dz.$$

Обе части этого неравенства умножим на

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{-4r+n}\rho^{-4r}(y)$$

и результат интегрируем по $y\in\Omega$:

$$\sum_{|k|=2r}\int\limits_\Omega\rho^{2\alpha-n}(y)\left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^2dz\right)dy+$$

$$+\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{-4r}\int\limits_\Omega\rho^{2\alpha-4r-n}(y)\left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)}|v(z)|^2dz\right)dy\leq$$

$$\leq M_0\int\limits_\Omega\rho^{2\alpha-n}(y)\left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)}\left|L_{0,y}\left[v(z)\right]\right|^2dz\right)dy+$$

$$+\varkappa_m\sum_{|k|=2r}\int\limits_\Omega\rho^{2\alpha-n}(y)\left(\int\limits_{J_\varepsilon(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^2dz\right)dy+$$

$$+\varkappa_m\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{-4r}\int\limits_\Omega\rho^{2\alpha-4r-n}(y)\left(\int\limits_{J_\varepsilon(y)}|v(z)|^2dz\right)dy. \quad (3.2.33)$$

Далее приведем доказательства двух вспомогательных лемм.

Лемма 3.2.1. *Пусть* ε *– произвольное число из интервала* $(0,\,1)$, m *– натуральное число и* $\chi_\varepsilon^{(m)}(x,\,y)$ *– характеристическая функция множества*

$$J_\varepsilon^{(m)}(y)=\left\{z\in\mathbb{R}^n:\,|z-y|<\delta\frac{m\varepsilon}{(m+1)\varkappa}\rho(y)\right\}.$$

Тогда выполняются неравенства

$$\left(\frac{\delta\varepsilon}{1+\delta\varepsilon}\right)^n\le\rho^{-n}(x)\varkappa^n\omega_n^{-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n\int\limits_\Omega\chi_\varepsilon^{(m)}(x,\,y)dy\le$$
$$\le\left(\frac{\delta\varepsilon}{1-\delta\varepsilon}\right)^n,\quad(3.2.34)$$

где ω_n *– площадь единичной сферы в пространстве* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть точки $x,\,y\in\Omega$ удовлетворяют условию

$$|x-y|<\delta\frac{\varepsilon}{\varkappa}\rho(y).$$

Пользуясь равенством

$$\rho(x)-\rho(y)=\int\limits_0^1\frac{d}{dt}\rho(y+t(x-y))dt\qquad(3.2.35)$$

с учетом неравенства (см. (3.2.2)) $|\nabla\rho(x)|\le\varkappa$ имеем

$$|\rho(x)-\rho(y)|\le\varkappa|x-y|<\varkappa\delta\frac{\varepsilon}{\varkappa}\rho(y)=\varepsilon\delta\rho(y).$$

Отсюда имеем

$$(1-\varepsilon\delta)\rho(y)<\rho(x)<(1+\varepsilon\delta)\rho(y).\qquad(3.2.36)$$

Пусть

$$G_\varepsilon^{(m)}(x)=\left\{y\in\mathbb{R}^n:\,|x-y|<\frac{\delta m\varepsilon\rho(y)}{(m+1)\varkappa}\right\}.$$

Тогда

$$\int\limits_\Omega\chi_\varepsilon^{(m)}(x,\,y)dy=\int\limits_{G_\varepsilon^{(m)}(x)}1\cdot dy=\left|G_\varepsilon^{(m)}(x)\right|.\qquad(3.2.37)$$

Используя (3.2.36) для всех $y \in G_\varepsilon^{(m)}(x)$ имеем

$$|x-y| < \frac{\delta m\varepsilon\rho(y)}{(m+1)\varkappa} < \frac{\delta m\varepsilon\rho(x)}{\varkappa(m+1)(1-\varepsilon\delta)}$$

Следовательно, множество $G_\varepsilon^{(m)}(x)$ содержится в шаре радиуса $\delta m\varepsilon\rho(x)/\varkappa(m+1)(1-\varepsilon\delta)$. Поэтому

$$\left|G_\varepsilon^{(m)}(x)\right| \leq \omega_n\left(\frac{\delta\varepsilon m\rho(x)}{\varkappa(m+1)(1-\varepsilon\delta)}\right)^n,$$

то есть

$$\rho^{-n}(x)\varkappa^n\omega_n^{-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n\left|G_\varepsilon^{(m)}(x)\right| \leq \left(\frac{\delta\varepsilon}{1-\delta\varepsilon}\right)^n.$$

Отсюда и из (3.2.37) следует правое неравенство в (3.2.34).

Рассмотрим множество

$$Q_\varepsilon^{(m)}(x) = \left\{y \in \mathbb{R}^n:\ |x-y| < \frac{\varepsilon_m\rho(x)}{\varkappa}\right\},$$

где

$$\varepsilon_m = \frac{m\delta\varepsilon}{(m+1)(1+\delta\varepsilon)}.$$

Из равенства (3.2.35) с учетом неравенства (см. (3.2.2)) $|\nabla\rho(x)| \leq \varkappa$ для всех $y \in Q_\varepsilon^{(m)}(x)$ имеем

$$|\rho(x)-\rho(y)| \leq \varkappa|x-y| < \varkappa\frac{\varepsilon_m\rho(x)}{\varkappa} = \varepsilon_m\rho(x).$$

Следовательно

$$(1-\varepsilon_m)\rho(x) \leq \rho(y) \leq (1+\varepsilon_m)\rho(x), \quad y \in Q_\varepsilon^{(m)}(x).$$

Далее используя это неравенство для $y \in Q_\varepsilon^{(m)}(x)$, находим

$$|x-y| < \frac{\varepsilon_m\rho(x)}{\varkappa} \leq \frac{\varepsilon_m}{\varkappa}(1-\varepsilon_m)^{-1}\rho(y).$$

Так как

$$\frac{\varepsilon_m}{(1-\varepsilon_m)} = \frac{m\delta\varepsilon}{(m+1)(1+\delta\varepsilon)}\left(1-\frac{m\delta\varepsilon}{(m+1)(1+\delta\varepsilon)}\right)^{-1} =$$
$$= \frac{m\delta\varepsilon}{(m+1)(1+\delta\varepsilon)}\left(\frac{(m+1)(1+\delta\varepsilon)-m\delta\varepsilon}{(m+1)(1+\delta\varepsilon)}\right)^{-1} =$$
$$= \frac{m\delta\varepsilon}{(m+1)(1+\delta\varepsilon)}\left(\frac{m+1+\delta\varepsilon}{(m+1)(1+\delta\varepsilon)}\right)^{-1} = \frac{m\delta\varepsilon}{m+1+\delta\varepsilon} < \frac{\delta m\varepsilon}{m+1},$$

то отсюда следует, что

$$|x-y| \le \frac{\delta m\varepsilon\rho(y)}{(m+1)\varkappa},$$

то есть $y \in G_\varepsilon^{(m)}(x)$. Поэтому

$$\left|Q_\varepsilon^{(m)}(x)\right| \le \left|G_\varepsilon^{(m)}(x)\right|.$$

Далее в силу равенства

$$\left|Q_\varepsilon^{(m)}(x)\right| = \omega_n\left(\frac{\varepsilon_m\rho(x)}{\varkappa}\right)^n = \omega_n\left(\frac{m\delta\varepsilon}{(m+1)\varkappa(1+\delta\varepsilon)}\right)^n\rho^n(x)$$

имеем

$$\left(\frac{\delta\varepsilon}{1+\delta\varepsilon}\right)^n \le \omega_n^{-1}\varkappa^n\left(1+\frac{1}{m}\right)^n\rho^{-n}(x)\left|G_\varepsilon^{(m)}(x)\right|.$$

Отсюда учитывая равенство (3.2.37) получим левое неравенство в (3.2.34).

Лемма 3.2.1 доказана.

Лемма 3.2.2. *Пусть* ε *– произвольное число из интервала* $(0,\,1)$ *и пусть* $\chi_\varepsilon(x,\,y)$ *– характеристическая функция шара* $J_\varepsilon(y)$. *Тогда имеют места следующие неравенства*

$$\left(\frac{\delta\varepsilon}{1+\delta\varepsilon}\right)^n \le \rho^{-n}(x)\varkappa^n\omega_n^{-1}\int\limits_\Omega \chi_\varepsilon(x,\,y)dy \le \left(\frac{\delta\varepsilon}{1-\delta\varepsilon}\right)^n,$$

где ω_n *– площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство следует из доказательстве леммы 3.2.1, если в нем заменить $m/(m+1)$ единицей.

Выше мы доказывали, что (см. (3.2.36))

$$(1-\varepsilon\delta)\rho(y) < \rho(z) < (1+\varepsilon\delta)\rho(y),$$

или

$$(1+\varepsilon\delta)^{-1}\rho(z) \le \rho(y) \le (1-\varepsilon\delta)^{-1}\rho(z) \qquad (3.2.38)$$

для всех z, $y \in \Omega$, удовлетворяющих условию

$$|z-y| < \frac{\delta\varepsilon}{\varkappa}\rho(y). \qquad (3.2.39)$$

При условии (3.2.39) из (3.2.38) следует, что

$$(1-\delta\varepsilon)\rho^{-1}(z) \le \rho^{-1}(y) \le (1+\delta\varepsilon)\rho^{-1}(z). \qquad (3.2.40)$$

Теперь возведя неравенства (3.2.38), (3.2.40) в степени $\theta > 0$ имеем

$$(1+\delta\varepsilon)^{-\theta}\rho^{\theta}(z) \le \rho^{\theta}(y) \le (1-\delta\varepsilon)^{-\theta}\rho^{\theta}(z)$$

$$(1-\delta\varepsilon)^{\theta}\rho^{-\theta}(z) \le \rho^{-\theta}(y) \le (1+\delta\varepsilon)^{\theta}\rho^{-\theta}(z).$$

Из этих двух последних неравенств для любого вещественного числа $\theta \in (-\infty, +\infty)$ имеем

$$(1+\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,\theta)^{-\theta}\rho^{\theta}(z) \le \rho^{\theta}(y) \le (1-\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,\theta)^{-\theta}\rho^{\theta}(z). \qquad (3.2.41)$$

Теперь переходим к оценке интегралов неравенства (3.2.33). Далее для удобства записи вводим следующую полунорму

$$\left\|u;\, L^{2r}_{2,\theta}(\Omega)\right\| = \left\{ \sum_{|k|=2r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\theta}(x)|u^{(k)}(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Сначала оценим снизу первый интеграла в левой части неравенства (3.2.33).

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(y) \left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(y) \left(\int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon^{(m)}(z,\, y) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy \geq$$

$$\geq \{\text{используем неравенство}\,(3.2.41)\} \geq$$

$$\geq (1-\delta\varepsilon)^n (1+\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,\alpha)^{-2\alpha} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(z) \left(\int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon^{(m)}(z,\, y) dy \right) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \geq$$

$$\geq \{\text{используем лемму } 3.2.1\} \geq$$

$$\geq (1-\delta\varepsilon)^n (1+\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,\alpha)^{-2\alpha} \left(\frac{\delta\varepsilon}{1+\delta\varepsilon} \right)^n \left(\frac{m}{\varkappa(1+m)} \right)^n \omega_n \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(z) \rho^n(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz =$$

$$= \omega_n (1+\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,\alpha)^{-2\alpha} \left(\frac{m\delta\varepsilon(1-\delta\varepsilon)}{\varkappa(1+m)(1+\delta\varepsilon)} \right)^n \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz =$$

$$= \varepsilon^n \delta^n M_{1,m}(\alpha,\, \delta,\, \varepsilon) \left\| v;\, L^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|^2, \quad (3.2.42)$$

где

$$M_{1,m}(\alpha,\, \delta,\, \varepsilon) = \omega_n (1+\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,\alpha)^{-2\alpha} \left(\frac{m(1-\delta\varepsilon)}{\varkappa(1+m)(1+\delta 2.2.31)} \right)^n. \quad (3.2.43)$$

Теперь оценим снизу второй интеграла в левой части неравенства

(3.2.33).

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{-4r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-4r-n}(y)\left(\int\limits_{J_{\varepsilon}^{(m)}(y)}|v(z)|^2dz\right)dy=$$

$$=\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{-4r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-4r-n}(y)\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{\varepsilon}^{(m)}(z,\,y)\,|v(z)|^2\,dz\right)dy\geq$$

$$\geq\{\text{используем неравенство}\,(3.2.41)\}\geq$$

$$\geq(1-\delta\varepsilon)^{4r+n}(1+\delta\varepsilon\operatorname{sgn}\alpha)^{-2\alpha}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-4r-n}(z)\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{\varepsilon}^{(m)}(z,\,y)dy\right)|v(z)|^2\,dz\geq$$

$$\geq\{\text{используем лемму }\ 3.2.1\}\geq$$

$$\geq(1-\delta\varepsilon)^{4r+n}(1+\delta\varepsilon\operatorname{sgn}\alpha)^{-2\alpha}\left(\frac{\delta\varepsilon}{1+\delta\varepsilon}\right)^{n}\left(\frac{m}{\varkappa(1+m)}\right)^{n}\omega_n\times$$

$$\times\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-4r-n}(z)\rho^{n}(z)\,|v(z)|^2\,dz=$$

$$=\omega_n(1-\delta\varepsilon)^{4r}(1+\delta\varepsilon\operatorname{sgn}\alpha)^{-2\alpha}\left(\frac{m\delta\varepsilon(1-\delta\varepsilon)}{\varkappa(1+m)(1+\delta\varepsilon)}\right)^{n}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-4r}(z)\,|v(z)|^2\,dz=$$

$$=\varepsilon^n\delta^n(1-\delta\varepsilon)^{4r}M_{1,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)\,\|v;\,L_{2,\,\alpha-2r}(\Omega)\|^2\,,\quad(3.2.44)$$

где число $M_{1,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)$ определяется равенством (3.2.43).

Далее сверху оценим второй интеграл в правой части неравенства

(3.2.33):

$$\sum_{|k|=2r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-n}(y)\left(\int\limits_{J_\varepsilon(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^2dz\right)dy=$$
$$=\sum_{|k|=2r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-n}(y)\left(\int\limits_{\Omega}\chi_\varepsilon(z,\,y)\left|v^{(k)}(z)\right|^2dz\right)dy\leq$$
$$\leq\{\text{используем неравенство}\,(3.2.41)\}\leq$$
$$\leq(1+\delta\varepsilon)^n(1-\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,\alpha)^{-2\alpha}\sum_{|k|=2r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-n}(z)\left(\int\limits_{\Omega}\chi_\varepsilon(z,\,y)dy\right)\left|v^{(k)}(z)\right|^2dz\leq$$
$$\leq\{\text{используем лемму}\;\;3.2.2\}\leq$$
$$\leq\omega_n\varkappa^{-n}(1-\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,\alpha)^{-2\alpha}\left(\frac{\delta\varepsilon(1+\delta\varepsilon)}{1-\delta\varepsilon}\right)^n\sum_{|k|=2r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(z)\left|v^{(k)}(z)\right|^2dz=$$
$$=\varepsilon^n\delta^nM_2(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)\left\|v;\,L^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2,\quad(3.2.45)$$

где

$$M_2(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)=\omega_n(1-\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,\alpha)^{-2\alpha}\left(\frac{1+\delta\varepsilon}{\varkappa(1-\delta\varepsilon)}\right)^n.$$

Далее сверху оценим третий интеграл в правой части неравенства

(3.2.33):

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-4r-n}(y) \left(\int\limits_{J_\varepsilon(y)} |v(z)|^p dz \right) dy = \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-4r-n}(y) \left(\int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon(z,\, y) |v(z)|^2 dz \right) dy \leq$$

$$\leq \{\text{используем неравенство}\,(3.2.41)\} \leq$$

$$\leq (1+\delta\varepsilon)^{n+4r}(1-\delta\varepsilon \operatorname{sgn}\alpha)^{-2\alpha} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-4r-n}(z) \left(\int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon(z,\, y) dy \right) |v(z)|^2 dz \leq$$

$$\leq \{\text{используем лемму } 3.2.2\} \leq$$

$$\leq (1+\delta\varepsilon)^{n+4r}(1-\delta\varepsilon \operatorname{sgn}\alpha)^{-2\alpha} \left(\frac{\delta\varepsilon}{\varkappa(1-\delta\varepsilon)} \right)^n \omega_n \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-4r-n}(z) \rho^n(z) \left| v(z) \right|^2 dz =$$

$$= (1+\delta\varepsilon)^{4r}(1-\delta\varepsilon \operatorname{sgn}\alpha)^{-2\alpha} \left(\frac{\delta\varepsilon(1+\delta\varepsilon)}{\varkappa(1-\delta\varepsilon)} \right)^n \omega_n \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-4r}(z) \left| v(z) \right|^2 dz =$$

$$= \varepsilon^n \delta^n M_3(\alpha,\, \delta,\, \varepsilon) \left\| v;\, L_{2,\,\alpha-2r}(\Omega) \right\|^2, \quad (3.2.46)$$

где

$$M_3(\alpha,\, \delta,\, \varepsilon) = \omega_n (1+\delta\varepsilon)^{4r} (1-\delta\varepsilon \operatorname{sgn}\alpha)^{-2\alpha} \left(\frac{1+\delta\varepsilon}{\varkappa(1-\delta\varepsilon)} \right)^n .$$

С учетом доказанных выше неравенств (3.2.42), (3.2.45), (3.2.44), (3.2.46) неравенство (3.2.33) примет следующий вид

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^n \delta^n M_{1,m}(\alpha,\, \delta,\, \varepsilon) \left\| v;\, L^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|^2 + \\
&\quad + \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa} \right)^{-4r} \varepsilon^n \delta^n (1-\delta\varepsilon)^{4r} M_{1,m}(\alpha,\, \delta,\, \varepsilon) \left\| v;\, L_{2,\,\alpha-2r}(\Omega) \right\|^2 \leq \\
&\qquad \leq M_0 \mathcal{L}^{(1)}_{\varepsilon,\, m}(v) + \varkappa_m \varepsilon^n \delta^n M_2(\alpha,\, \delta,\, \varepsilon) \left\| v;\, L^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|^2 + \\
&\qquad\quad + \varkappa_m \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa} \right)^{-4r} \varepsilon^n \delta^n M_3(\alpha,\, \delta,\, \varepsilon) \left\| v;\, L_{2,\,\alpha-2r}(\Omega) \right\|^2, \quad (3.2.47)
\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{L}^{(1)}_{\varepsilon,\, m}(v) = \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(y) \left(\int\limits_{J^{(m)}_\varepsilon(y)} \left| L_{0,y} \left[v(z) \right] \right|^2 dz \right) dy \qquad (3.2.48)$$

Далее мы будем сверху оценить функционал $\mathcal{L}^{(0)}_{\varepsilon,m}(v)$. Сначала докажем одну вспомогательную лемму

Лемма 3.2.3. *Пусть* ε *– произвольное число из интервала* $(0,\,1)$, m *– натуральное число и* $y\in\Omega$. *Тогда для любого действительного числа* θ *и для любого* $z\in J^{(m)}_{\varepsilon}(y)$ *имеет место неравенство*

$$\left|\rho^{\theta}(y)-\rho^{\theta}(z)\right|\le\varepsilon\delta N_{1,m}(\delta,\,\varepsilon,\,\theta)\rho^{\theta}(z),\tag{3.2.49}$$

где

$$N_{1,m}(\delta,\,\varepsilon,\,\theta)=n\varkappa|\theta|(1+\delta\varepsilon\, sgn\,(\theta-1))^{\theta-1}\frac{m}{(m+1)\varkappa}\,(1-\delta\varepsilon\, sgn\,\theta)^{-\theta}.\tag{3.2.50}$$

Доказательство. Согласно свойству (3.2.2) функции $\rho(x)$, $x\in\Omega$,

$$|\nabla\rho(x)|\le\varkappa\quad x\in\Omega.\tag{3.2.51}$$

Далее используя равенство

$$\rho^{\theta}(y)-\rho^{\theta}(z)=\int\limits_0^1\frac{d}{dt}\left\{\rho^{\theta}(y+t(z-y))\right\}dt,$$

имеем

$$\left|\rho^{\theta}(y)-\rho^{\theta}(z)\right|=\int\limits_0^1\left|\frac{d}{dt}\left\{\rho^{\theta}(y+t(z-y))\right\}\right|dt\le$$

$$\le n|\theta|\int\limits_0^1\rho^{\theta-1}(y+t(z-y))|\nabla\rho(y+t(z-y))|dt\le\{\text{используем неравенство (3.2.51)}\}\le$$

$$\le n\varkappa|\theta|\int\limits_0^1\rho^{\theta-1}(y+t(z-y))dt\le$$

$$\le n\varkappa|\theta||z-y|\max_{0\le t\le1}\rho^{\theta-1}(y+t(z-y)).\tag{3.2.52}$$

Далее заметим, что $z \in J_\varepsilon^{(m)}(y)$ и выполняется неравенство (см. лемму 3.2.1)

$$|z-y| < \frac{m\delta\varepsilon}{(m+1)\varkappa}\,\rho(y). \tag{3.2.53}$$

Поэтому при $\xi = y + t(z-y)$ имеем

$$|\xi - y| = t|z-y| \le |z-y| < \frac{m\delta\varepsilon}{(m+1)\varkappa}\,\rho(y) < \frac{\delta\varepsilon}{\varkappa}\,\rho(y).$$

В силу этого неравенства из (3.2.38) следует, что

$$(1-\delta\varepsilon)\rho(y) \le \rho(\xi) \le (1+\delta\varepsilon)\rho(y), \quad \text{или} \quad (1+\delta\varepsilon)^{-1}\rho(\xi) \le \rho(y) \le (1-\delta\varepsilon)^{-1}\rho(\xi).$$

Следовательно

$$(1-\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,(\theta-1))^{\theta-1}\rho^{\theta-1}(y) \le \rho^{\theta-1}(\xi) \le (1+\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,(\theta-1))^{\theta-1}\rho^{\theta-1}(y).$$

Применяя это неравенство из (3.2.52) имеем

$$\left|\rho^\theta(y) - \rho^\theta(z)\right| \le n\varkappa|\theta||z-y| \max_{0\le t\le 1} \rho^{\theta-1}(y+t(z-y)) \le$$
$$\le n\varkappa|\theta||z-y|(1+\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,(\theta-1))^{\theta-1}\rho^{\theta-1}(y) \le$$
$$\le \{\text{используем неравенство (3.2.53)}\} \le n\varkappa|\theta|(1+\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,(\theta-1))^{\theta-1}\frac{m\delta\varepsilon}{(m+1)\varkappa}\,\rho^\theta(y).$$

Таким образом мы доказали неравенство

$$\left|\rho^\theta(y) - \rho^\theta(z)\right| \le n\varkappa|\theta|(1+\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,(\theta-1))^{\theta-1}\frac{m\delta\varepsilon}{(m+1)\varkappa}\,\rho^\theta(y).$$

Далее применяя неравенство (3.2.41) имеем

$$\left|\rho^\theta(y) - \rho^\theta(z)\right| \le n\varkappa|\theta|(1+\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,(\theta-1))^{\theta-1}\frac{m\delta\varepsilon}{(m+1)\varkappa}\,\rho^\theta(y) \le$$
$$\le n\varkappa|\theta|(1+\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,(\theta-1))^{\theta-1}\frac{m\delta\varepsilon}{(m+1)\varkappa}\,(1-\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,\theta)^{-\theta}\rho^\theta(z).$$

Вводя обозначение (3.2.50) отсюда получим неравенство (3.2.49).

Лемма 3.2.3 доказана.

Напомним, что (см. (3.2.11))

$$L_{0,y}[v(z)] = \sum_{|k|=2r} b_k(y) v^{(k)}(z).$$

Вводим обозначение

$$\mathcal{L}^{(2)}_{\varepsilon,\, m}(v) = \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,\, y) \rho^{2\alpha-n}(z) \left| \sum_{|k|=2r} b_k(y) v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy. \qquad (3.2.54)$$

Отметим, что (см. (3.2.48))

$$\mathcal{L}^{(1)}_{\varepsilon,\, m}(v) = \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(y) \left(\int\limits_{J^{(m)}_{\varepsilon}(y)} \left| L_{0,y}\left[v(z)\right] \right|^2 dz \right) dy =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(y) \left(\int\limits_{\Omega} \chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,\, y) \left| \sum_{|k|=2r} b_k(y) v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy,$$

Имеем

$$\left| \mathcal{L}^{(1)}_{\varepsilon,\, m}(v) - \mathcal{L}^{(2)}_{\varepsilon,\, m}(v) \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,\, y) \left(\rho^{2\alpha-n}(y) - \rho^{2\alpha-n}(z) \right) \left| \sum_{|k|=2r} b_k(y) v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,\, y) \left| \rho^{2\alpha-n}(y) - \rho^{2\alpha-n}(z) \right| \left| \sum_{|k|=2r} b_k(y) v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy \leq$$

$$\leq \{\text{применяем лемму 3.2.3}\} \leq$$

$$\leq \delta \varepsilon N_{1,m}(\varepsilon,\, 2\alpha - n) \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,\, y) \rho^{2\alpha-n}(z) \left| \sum_{|k|=2r} b_k(y) v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy.$$

В силу ограниченности коэффициентов $b_k(x)$, $x \in \Omega$, $|k| \leq 2r$, и неравенства (3.2.45) отсюда следует, что

$$\left|\mathcal{L}^{(1)}_{\varepsilon,\,m}(v)-\mathcal{L}^{(2)}_{\varepsilon,\,m}(v)\right|\le$$

$$\le\delta\varepsilon N_{1,m}(\delta,\,\varepsilon,\,2\alpha{-}n)\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,\,y)\rho^{2\alpha-n}(z)\left|\sum_{|k|=2r}b_k(y)v^{(k)}(z)\right|^2dz\right)dy\le$$

$$\le\delta\varepsilon N_{1,m}(\delta,\,\varepsilon,\,2\alpha-n)C_1\sum_{|k|=2r}\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,\,y)\rho^{2\alpha-n}(z)\left|v^{(k)}(z)\right|^2dz\right)dy\le$$

$$\le\delta\varepsilon N_{1,m}(\delta,\,\varepsilon,\,2\alpha-n)C_2\omega_n(1-\varepsilon\operatorname{sgn}\alpha)^{-2\alpha}\left(\frac{\delta\varepsilon(1+\delta\varepsilon)}{\varkappa(1-\delta\varepsilon)}\right)^n\times$$

$$\times\sum_{|k|=2r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(z)\left|v^{(k)}(z)\right|^2dz=$$

$$=(\delta\varepsilon)^{n+1}N_{2,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)\left\|v;\,L^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2,\quad(3.2.55)$$

где C_1, C_2 – положительные постоянные,

$$N_{2,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)=N_{1,m}(\delta,\,\varepsilon,\,2\alpha-n)C_2\omega_n(1-\delta\varepsilon\operatorname{sgn}\alpha)^{-2\alpha}\left(\frac{1+\delta\varepsilon}{\varkappa(1-\delta\varepsilon)}\right)^n.$$

и число $N_{1,m}(\delta,\,\varepsilon,\,2\alpha-n)$ определяется равенством (3.2.50).

Теперь вводим обозначение

$$\mathcal{L}^{(3)}_{\varepsilon,\,m}(v)=\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,\,y)\rho^{2\alpha-n}(z)\left|\sum_{|k|=2r}b_k(z)v^{(k)}(z)\right|^2dz\right)dy.\quad(3.2.56)$$

Замечание 3.2.2. *Если в обозначении (см. (3.2.54))* $\mathcal{L}^{(2)}_{\varepsilon,\,m}(v)$ *заменить* $b_k(y)$ *на* $b_k(z)$, *то получим* $\mathcal{L}^{(3)}_{\varepsilon,\,m}(v)$.

Имеем

$$\left|\mathcal{L}^{(2)}_{\varepsilon,\,m}(v)-\mathcal{L}^{(3)}_{\varepsilon,\,m}(v)\right|\le$$

$$\le C_3\sum_{|k|=2r}\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,\,y)\rho^{2\alpha-n}(z)\left|b_k(y)-b_k(z)\right|\left|v^{(k)}(z)\right|^2dz\right)dy,\quad(3.2.57)$$

где C_3 – некоторая положительная постоянная.

Согласно нашим предположениям (3.2.6), (3.2.7), для любого достаточно малого положительного числа ν найдется такое положительное число ε_ν, что

$$|b_k(y) - b_k(z)| < \nu, \quad |k| = 2r,$$

для любого $y \in \Omega$ и любого

$$z \in J_\varepsilon(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \, |z - y| < \frac{\delta\varepsilon}{\varkappa}\, \rho(y) \right\}, \quad \varepsilon \in (0,\, \varepsilon_\nu).$$

В силу этого условия из (3.2.57) следует

$$\begin{aligned}
&\left| \mathcal{L}^{(2)}_{\varepsilon,\, m}(v) - \mathcal{L}^{(3)}_{\varepsilon,\, m}(v) \right| \le \\
&\qquad \le \nu\, C_3 \sum_{|k|=2r} \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \chi^{(m)}_\varepsilon(z,\, y) \rho^{2\alpha-n}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy \le \\
&\qquad \le \{\text{применяем неравенство (3.2.42)}\} \le \\
&\qquad \le \nu\, C_3 \omega_n (1 + \delta\varepsilon \operatorname{sgn} \alpha)^{-2\alpha} \left(\frac{m\delta\varepsilon(1 - \delta\varepsilon)}{\varkappa(1+m)(1+\delta\varepsilon)} \right)^n \times \\
&\qquad\qquad \times \sum_{|k|=2r} \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz, \quad \varepsilon \in (0,\, \varepsilon_\nu).
\end{aligned}$$

Таким образом доказано неравенство

$$\begin{aligned}
&\left| \mathcal{L}^{(2)}_{\varepsilon,\, m}(v) - \mathcal{L}^{(3)}_{\varepsilon,\, m}(v) \right| \le \\
&\qquad \le \nu\, \delta^n \varepsilon^n\, N_{3,m}(\varepsilon,\, \alpha) \left\| v;\, L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\|^2, \quad \varepsilon \in (0,\, \varepsilon_\nu), \quad (3.2.58)
\end{aligned}$$

где

$$N_{3,m}(\alpha,\, \delta,\, \varepsilon) = C_3\, \omega_n (1 + \delta\varepsilon \operatorname{sgn} \alpha)^{-2\alpha} \left(\frac{m(1 - \delta\varepsilon)}{\varkappa(1+m)(1+\delta\varepsilon)} \right)^n.$$

Далее применяя лемму 3.2.1 оценим функционал (см. (3.2.56)) $\mathcal{L}^{(3)}_{\varepsilon,\,m}(v)$

$$\mathcal{L}^{(3)}_{\varepsilon,\,m}(v) = \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,\,y)\rho^{2\alpha-n}(z)\left|\sum_{|k|=2r} b_k(z)v^{(k)}(z)\right|^2 dz\right)dy =$$
$$= \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,\,y)\rho^{-n}(z)\left|\sum_{|k|=2r} \rho^{\alpha}(z)b_k(z)v^{(k)}(z)\right|^2 dz\right)dy =$$
$$= \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,\,y)\rho^{-n}(z)\left|L_0[v(z)]\right|^2 dz\right)dy =$$
$$= \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,\,y)dy\right)\rho^{-n}(z)\left|L_0[v(z)]\right|^2 dz \le$$
$$\le \omega_n\left(\frac{\delta\varepsilon m}{\varkappa(1-\delta\varepsilon)(m+1)}\right)^n\int\limits_{\Omega}\rho^{-n}(z)\rho^{n}(z)\left|L_0[v(z)]\right|^2 dz =$$
$$= \delta^n\varepsilon^n N_{4,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)\int\limits_{\Omega}\left|L_0[v(z)]\right|^2 dz, \quad (3.2.59)$$

где

$$N_{4,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon) = \omega_n\left(\frac{m}{\varkappa(1-\delta\varepsilon)(m+1)}\right)^n.$$

Теперь используя доказанные выше неравенства (3.2.55), (3.2.58), (3.2.59) оценим функционал (см. (3.2.48)) $\mathcal{L}^{(1)}_{\varepsilon,\,m}(v)$.

$$\mathcal{L}^{(1)}_{\varepsilon,\,m}(v) \le \left|\mathcal{L}^{(1)}_{\varepsilon,\,m}(v) - \mathcal{L}^{(2)}_{\varepsilon,\,m}(v)\right| + \left|\mathcal{L}^{(2)}_{\varepsilon,\,m}(v) - \mathcal{L}^{(3)}_{\varepsilon,\,m}(v)\right| + \mathcal{L}^{(3)}_{\varepsilon,\,m}(v) \le$$
$$\le \delta^n\varepsilon^n\left(\delta\varepsilon N_{2,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon) + \nu\, N_{3,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)\right)\left\|v;\, L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2 +$$
$$+ \delta^n\varepsilon^n N_{4,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)\int\limits_{\Omega}\left|L_0[v(z)]\right|^2 dz, \quad \varepsilon\in(0,\,\varepsilon_\nu).$$

В силу этого неравенства из (3.2.47) следует, что

$$\varepsilon^n\delta^n M_{1,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)\left\|v;\;L^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2+$$
$$+\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{-4r}\varepsilon^n\delta^n(1-\delta\varepsilon)^{4r}M_{1,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)\left\|v;\;L_{2,\,\alpha-2r}(\Omega)\right\|^2\leq$$
$$\leq M_0\delta^n\varepsilon^n\left[\delta\varepsilon N_{2,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)+\nu\,N_{3,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)\right]\left\|v;\;L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2+$$
$$+\delta^n\varepsilon^n M_0N_{4,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)\int\limits_{\Omega}\left|L_0[v(z)]\right|^2dz+\varkappa_m\varepsilon^n\delta^n M_{2,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)\left\|v;\;L^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2+$$
$$+\varkappa_m\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{-4r}\varepsilon^n\delta^n M_{3,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)\left\|v;\;L_{2,\,\alpha-2r}(\Omega)\right\|^2,$$

Сокращая на $\varepsilon^n\delta^n$ после несложных преобразований получим

$$\Big(M_{1,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)-\varepsilon\delta M_0N_{2,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)-\nu\,M_0N_{3,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)-\varkappa_m M_{2,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)\Big)\times$$
$$\times\left\|v;\;L^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2+$$
$$+\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{-4r}\Big((1-\delta\varepsilon)^{4r}M_{1,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)-\varkappa_m\,M_{3,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)\Big)\left\|v;\;L_{2,\,\alpha-2r}(\Omega)\right\|^2\leq$$
$$\leq M_0N_{4,m}(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)\int\limits_{\Omega}\left|L_0[v(z)]\right|^2dz.$$

Так как (см. (3.2.24)) $\varkappa_m\to 0+$ при $m\to+\infty$, то подбирая натуральное число m достаточно большим, а положительные числа ε, δ и ν – достаточно малым из полученного неравенства выводим следующее неравенство

$$c^*\left\{\left\|v;\;L^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2+\left\|v;\;L_{2,\,\alpha-2r}(\Omega)\right\|^2\right\}\leq\int\limits_{\Omega}\left|L_0[v(z)]\right|^2dz$$

для всех $v\in C_0^\infty(\Omega)$. Здесь c^* – некоторая положительная постоянная. Отсюда в силу равенства (3.2.3) следует основное неравенство (3.2.8) теоремы 3.2.1, что и завершает доказательство этой теоремы.

3.3. Априорная оценка решений задачи Дирихле для эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих ненулевые младшие коэффициенты

Отметим, что операторы, изученные в предыдущем параграфе 3.2 имели только ненулевые старшие коэффициенты. В отличие от этого здесь мы рассмотрим эллиптические операторы, которые имеют ненулевые младшие коэффициенты. Основным результатом настоящего параграфа является следующая теорема:

Теорема 3.3.1. *Пусть все коэффициенты* $b_k(x)$ *оператора*

$$L[u](x) = \sum_{|k|\le 2r} \rho^{\alpha_{|k|}}(x) b_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{3.3.1}$$

ограничены и выполнены следующие условия:

I) Существует такое положительное число $\varkappa_0$*, что*

$$\varkappa_0 |\xi|^{2r} \le \left| \sum_{|k|=2r} b_k(x) \xi^k \right| \tag{3.3.2}$$

для всех $x \in \Omega$ *и всех* $\xi \in R^n$*.*

II) Для любого достаточно малого числа $\nu > 0$ *существует положительное число* ε_ν *такое, что*

$$|b_k(y) - b_k(z)| < \nu, \quad |k| = 2r, \tag{3.3.3}$$

для любого $y \in \Omega$ *и любого*

$$z \in J_\varepsilon(y) = \left\{ z \in R^n : |z - y| < \frac{\varepsilon}{\varkappa} \rho(y) \right\}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_\nu). \tag{3.3.4}$$

III) Число $\alpha = \alpha_{2r} > -1/2$ *не принадлежит множеству* $\{1, 2, \ldots, 2r\}$ *и числа* $\alpha_j > -1/2$, $j = \overline{1, 2r-1}$ *удовлетворяют одному из следующих условий: 1)* $2r - \alpha > j - \alpha_j$*; 2)* $\alpha_j > \alpha j / 2r$, $j > 0$*.*

Тогда существуют такие положительные числа c^*, K^**, что*

$$c^* \left\| v; W_{2,\alpha}^{2r}(\Omega) \right\| \le \| L[v]; L_2(\Omega) \| + K^* \| v; L_2(\Omega) \| \tag{3.3.5}$$

для всех $v \in \mathring{W}^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)$.

Рассмотрим приложение теоремы 3.3.1 к соответствующей задачи Дирихле, связанной с оператором (3.3.1):

Задача Дирихле. Для заданной функции f из пространства $L_2(\Omega)$ найти решение $U(x)$, $x \in \Omega$, уравнения

$$L[U](x) = \sum_{|k| \leq 2r} \rho^{\alpha_{|k|}}(x) b_k(x) U^{(k)}(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

которое принадлежит пространству $\mathring{W}^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)$.

Справедливо следующее

Следствие 3.3.1. *В условиях теоремы 3.3.1 решение* $U(x)$, $x \in \Omega$, *задачи Дирихле для оператора (3.3.1) удовлетворяет следующую априорную оценку*

$$c^* \left\| U;\, U^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \right\| \leq \| f;\, L_2(\Omega) \| + K^* \| U;\, L_2(\Omega) \|, \tag{3.3.6}$$

где положительные постоянные c^*, K^* *не зависят от выбора функции* $f \in L_2(\Omega)$.

Доказательство. Неравенство (3.3.6) следует из (3.3.5).

Доказательство теоремы 3.3.1. Представим оператор (2.3.1) в виде

$$L[u(x)] = L_0[u(x)] + L_1[u(x)],$$

где

$$L_0[u(x)] = \sum_{|k| \leq 2r} \rho^{\alpha}(x) b_k(x) u^{(k)}(x), \quad \alpha = \alpha_{2r}, \tag{3.3.7}$$

$$L_1[u(x)] = \sum_{|k| \leq 2r-1} \rho^{\alpha_{|k|}}(x) b_k(x) u^{(k)}(x).$$

В нашем случае коэффициенты оператора (3.3.7) удовлетворяют всем условиям теоремы 3.2.1 из предыдущего параграфа. Согласно этой теореме существует положительное число c_1 такое, что

$$c_1 \left\{ \left\| v;\, L^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|^2 + \| v;\, L_{2,\,\alpha-2r}(\Omega) \|^2 \right\} \le \int\limits_{\Omega} |L_0[v(z)]|^2 \, dz \tag{3.3.8}$$

для всех $v \in C^\infty_0(\Omega)$.

Напомним определения некоторых ранее введенных норм и полунорм

$$\| v;\, L_{p,\,\theta}(\Omega) \| = \left\{ \int\limits_{\Omega} \rho^{p\theta}(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

$$\left\| v;\, L^{2r}_{p,\,\alpha}(\Omega) \right\| = \left\{ \sum_{|k|=2r} \int\limits_{R^n} \rho^{p\alpha}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

$$\left\| v;\, V^{2r}_{p,\,\alpha}(\Omega) \right\| = \left\{ \left\| v;\, L^{2r}_{p,\,\alpha}(\Omega) \right\|^p + \| v;\, L_{p,\,\alpha-2r}(\Omega) \|^p \right\}^{1/p},$$

$$\left\| v;\, W^{2r}_{p,\,\alpha}(\Omega) \right\| = \left\{ \left\| v;\, L^{2r}_{p,\,\alpha}(\Omega) \right\|^p + \| v;\, L_{p}(\Omega) \|^p \right\}^{1/p}.$$

Сформулируем одну вспомогательную лемму:

Лемма 3.3.1. *(см. [96, Теорема 1.1.7]) Пусть* $p \in [1,\, \infty)$, $r_1 > r_2 \ge 0$, $\delta_1,\, \delta_2$ *— действительные числа, больше (-1/p). Пусть выполнено одно из следующих условий: 1)* $r_1 - \delta_1 > r_2 - \delta_2$*; 2)* $\delta_2 > \delta_1 r_2 / r_1$, $r_2 > 0$.

Тогда для любого положительного числа ε *найдется положительная постоянная* $C = C(\varepsilon)$ *такая, что для всех* $u \in W^{r_1}_{2;\,\delta_1}(\Omega)$ *справедлива оценка*

$$\| u; W^{r_2}_{p;\,\delta_2}(\Omega) \| \le \varepsilon \| u; W^{r_1}_{p;\,\delta_1}(\Omega) \| + C(\varepsilon) \| u; L_p(\Omega) \|.$$

Из этой леммы в случае $p = 2$, $r_1 = 2r$, $\delta_1 = \alpha$, $r_2 = j$, $\delta_2 = \alpha_j$ следует:

Следствие 3.3.2. *Пусть* $2r > j \ge 0$, $\alpha > -1/2$, $\alpha_j > -1/2$ *и выполнено одно из следующих условий: 1)* $2r - \alpha > j - \alpha_j$*; 2)* $\alpha_j > \alpha j / 2r$, $j > 0$.

Тогда для любого числа ε найдется постоянная $C = C(\varepsilon)$ такая, что для всех $u \in W^{2r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ справедлива оценка

$$\|u; L^{j}_{2;\,\alpha_j}(\Omega)\| \leq \varepsilon \|u; L^{2r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\| + C(\varepsilon)\|u; L_2(\Omega)\|. \tag{3.3.9}$$

Далее предположим, что коэффициенты $b_k(x)$ оператора (3.3.1) ограничены при $|k| \leq 2r-1$ и числа α, α_j, $j \leq 2r-1$, удовлетворяют условиям следствии 3.3.2. Тогда применяя неравенство (3.3.9) имеем

$$\left(\int\limits_{\Omega} |L_1[v(x)]|^2\, dx\right)^{1/2} = \|L_1[v];\, L_2(\Omega)\| \leq \sum_{|k|=j\leq 2r-1} \left\|\rho^{\alpha_j} b_k v^{(k)};\, L_2(\Omega)\right\| \leq$$

$$\leq M_1 \sum_{j=0}^{2r-1} \left\|v;\, L^{j}_{2,\,\alpha_j}(\Omega)\right\| \leq \varepsilon \|v; L^{2r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\| + C(\varepsilon)\|v; L_2(\Omega)\|, \tag{3.3.10}$$

где ε – достаточно малое положительное число.

Пусть число α такое, что $\alpha \notin \{1,\, 2,\, \ldots,\, 2r\}$. Тогда (см. [96, Теорема 1.2.4] или теорему 2.2.8) с точностью до эквивалентности норм имеет место равенство

$$V^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega) = \mathring{W}^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega),$$

где $\mathring{W}^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)$ – замыкание класса $C^{\infty}_0(\Omega)$ в пространстве $W^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)$. В этом случае из неравенства (3.3.8) следует, что

$$c_2 \left\|v;\, W^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq \|L_0[v];\, L_2(\Omega)\| \tag{3.3.11}$$

для всех $v \in \mathring{W}^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)$. Здесь c_2 – некоторое положительное число. Теперь применяя неравенства (3.3.10), (3.3.11) имеем

$$\left(\int\limits_{\Omega} |L[v(x)]|^2\, dx\right)^{1/2} = \|L[v];\, L_2(\Omega)\| \geq \|L_0[v];\, L_2(\Omega)\| - \|L_1[v];\, L_2(\Omega)\| \geq$$

$$\geq (c_2 - \varepsilon) \left\|v;\, W^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| - C(\varepsilon) \left\|v;\, L_2(\Omega)\right\|.$$

Фиксируя некоторое подходящее значение параметра ε отсюда получим

$$c_3 \left\|v;\, W^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq \|L[v];\, L_2(\Omega)\| + M_3 \left\|v;\, L_2(\Omega)\right\| \tag{3.3.12}$$

для всех $v \in \mathring{W}^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)$; c_3, M_3 – некоторые положительные числа. Это и есть неравенство (3.3.5).

Теорема 3.3.1 доказана.

Неравенство (3.3.12) позволяет нам расширить область определения оператора (3.3.1) до всего пространства $\mathring{W}^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)$. Учитывая это вводим оператор

$$\mathbb{L}u = L[u], \quad D(\mathbb{L}) = \mathring{W}^{2r}_{2,\alpha}(\Omega). \tag{3.3.13}$$

Из оценки (3.3.12) следует, что оператор $\mathbb{L}$ действует из $\mathring{W}^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, то есть $R(\mathbb{L}) \subset L_2(\Omega)$.

Теорема 3.3.2. *Пусть $2r - \alpha > 0$ и выполнены условия теоремы 3.3.1. Тогда оператор $\mathbb{L}$ замкнут, имеет конечномерное ядро $N(\mathbb{L})$ и замкнутое в пространстве $L_2(\Omega)$ множество значений $R(\mathbb{L})$.*

Доказательство этой теоремы следует из компактности вложения (см. [96, Теорема 1.1.3]) $W^{2r}_{2,\alpha}(\Omega) \to L_2(\Omega)$ и следующей леммы

Лемма 3.3.2. *(см. [75, Лемма 5.1, стр. 185]). Пусть E, F, G – рефлексивные банаховы пространства, причем $E \subset F$ и вложение E в F компактно; пусть P – непрерывный линейный оператор из E в G. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

I) множество значений $R(P)$ оператора P в G замкнут, и ядро $N(P)$ оператора P конечномерно;

II) существует такая постоянная C, что

$$\|u;\, E\| \le C\{\|Pu;\, G\| + \|u;\, F\|\} \quad \forall u \in E. \tag{3.3.14}$$

Согласно теореме 3.3.1 неравенство (3.3.14) выполняется для оператора $P = \mathbb{L}$ при $E = \mathring{W}^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)$ и $G = F = L_2(\Omega)$. Поэтому из этого неравенства в силу леммы 3.3.2 следуют утверждения теоремы 3.3.2.

Теорема 3.3.2 доказана.

3.4. Априорная оценка решений задачи Дирихле для слабо позитивных эллиптических операторов недивергентного вида с вырождением

Проведем определение слабо позитивного дифференциального оператора.

Определение 3.4.1. *(см., например, [18]) Дифференциальный оператор*

$$P[u](x) = \sum_{|k|\le 2r} a_k(x)u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega),$$

называется **слабо позитивным**, *если*

$$Re \sum_{|k|=2r} a_k(x)\xi^k \ge 0, \quad \forall \xi \in R^n, \forall x \in \Omega.$$

Следуя этому определению, мы назовём вырождающийся дифференциальный оператор

$$L[u(x)] = \sum_{|k|\le 2r} \rho^{\alpha_{|k|}}(x) b_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{3.4.1}$$

слабо позитивным, если выполняется условия

$$\mathrm{Re} \sum_{|k|=2r} b_k(x)\xi^k \ge 0, \quad \forall \xi \in R^n, \forall x \in \Omega. \tag{3.4.2}$$

Следующая теорема является основным результатом настоящего параграфа:

Теорема 3.4.1. *Пусть коэффициенты $b_k(x)$, $|k| \le 2r$, оператора (3.4.1) являются ограниченными функциями и удовлетворяют условию (3.4.2), а также следующим условиям:*

I) Существует такое положительное число $\varkappa_0$, что

$$\varkappa_0 |\xi|^{2r} \le \left| \sum_{|k|=2r} b_k(x)\xi^k \right|$$

для всех $x \in \Omega,\ \xi \in R^n$.

II) Для любого заданного достаточно малого положительного числа ν *существует положительное число* ε_ν *такое, что*

$$|b_k(y) - b_k(z)| < \nu, \quad |k| = 2r,$$

для любой точки $y \in \Omega$ *и любого*

$$z \in J_\varepsilon(y) = \left\{ z \in R^n : |z - y| < \frac{\varepsilon}{\varkappa}\rho(y) \right\}, \quad \varepsilon \in (0,\, \varepsilon_\nu).$$

III) Число $\alpha = \alpha_{2r} > -1/2$ *не принадлежит множеству* $\{1,\, 2,\, \ldots,\, 2r\}$ *и числа* $\alpha_j > -1/2$, $j = \overline{1,\, 2r-1}$ *удовлетворяют одному из следующих условий: 1)* $2r - \alpha > j - \alpha_j$*; 2)* $\alpha_j > \alpha j/2r$, $j > 0$.

Тогда существуют положительные числа $\varkappa_0$, λ_0 *такие, что при* $\lambda \geq \lambda_0$ *имеет место неравенство*

$$\|\mathbb{L}v + \lambda v;\, L_2(\Omega)\| \geq \varkappa_0 \left\| v;\, W^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega), \tag{3.4.3}$$

где $\mathbb{L}$ *– замыкание оператора (3.4.1) с областью определения* $D(\mathbb{L}) = \mathring{W}^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)$.

Доказательство. Сначала мы рассмотрим дифференциальный оператор, который имеет только ненулевые старшие коэффициенты

$$L_0[u(x)] = \sum_{|k|=2r} \rho^{\alpha_{|k|}}(x) b_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.4.4}$$

Предположим, что выполняется условие (3.4.2) и условие

$$M_0^{-1}|\xi|^{2r} \leq \left| \sum_{|k|=2r} b_k(x)\xi^k \right| \leq M_0|\xi|^{2r} \quad (x \in \Omega,\ \xi \in R^n)\,. \tag{3.4.5}$$

Пусть y – произвольная фиксированная точка области Ω. Вводим следующий дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$L_{0,y}[u(x)] = \sum_{|k|=2r} b_k(y) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(R^n). \tag{3.4.6}$$

Действую также как при доказательстве неравенства Гординга в книге Егорова Ю.В. [29, стр.72-73] в силу условии (3.4.2), имеем

$$\mathrm{Re}\,(L_{0,y}[u],\,u)_0 = \mathrm{Re}\int\limits_{R^n} L_{0,y}[u(x)]\cdot\overline{u(x)}dx =$$

$$= (2\pi)^{-n}\mathrm{Re}\int\limits_{R^n}\left(\sum_{|k|=2r} b_k(y)\xi^k\right)|\widetilde{u}(\xi)|^2\,d\xi \geq 0, \quad (3.4.7)$$

где $\widetilde{u}(\xi)$ – преобразование Фурье функции $u(x)\in C_0^\infty(R^n)$. Рассмотрим произвольную функцию $u(x)\in C^\infty(I(0))$. Так как $\varphi_m\in C_0^\infty(I(0))$, то $v_m(x)=\varphi_m(x)u(x)\in C_0^\infty(I(0))$. Используя (3.4.7) для функции $v_m(x)$ имеем

$$\mathrm{Re}\,(L_{0,y}[v_m],\,v_m)_0 = \sum_{|k|=2r}\mathrm{Re}\int\limits_{R^n} b_k(y)v_m^{(k)}(x)\overline{v_m(x)}dx \geq 0. \quad (3.4.8)$$

Применяя правило Лейбница дифференцирования произведения двух функций, представим выражение $L_{0,y}v_m(x)$ в виде

$$L_{0,y}[v_m(x)] = L_y^{(1)}[v_m(x)] + L_y^{(2)}[v_m(x)], \quad (3.4.9)$$

где

$$L_y^{(1)}[v_m(x)] = \sum_{|k|=2r} b_k(y)\varphi_m(x)u^{(k)}(x) \quad (3.4.10)$$

$$L_y^{(2)}[v_m(x)] = \sum_{|k|=2r}\sum_{0\neq\nu\leq k} C_{k,\,\nu}b_k(y)u^{(k-\nu)}(x)\varphi^{(\nu)}(x), \quad (3.4.11)$$

$C_{k,\,\nu}$ – некоторые постоянные числа.

Таким образом

$$(L_{0,y}[v_m],\,v_m)_0 = (L_y^{(1)}[v_m],\,v_m)_0 + (L_y^{(2)}[v_m],\,v_m)_0. \quad (3.4.12)$$

Так как $\varphi_m\in C_0^\infty(I(0))$ и $\varphi_m(x)=1$ для всех $x\in I_m(0)$, то

$$(L_y^{(1)}[v_m],\,v_m)_0 = \int\limits_{I(0)} L_y^{(1)}[v_m(x)]\overline{v_m(x)}dx =$$

$$= \int\limits_{I_m(0)} L_{0,y}[u(x)]\overline{u(x)}dx + \int\limits_{I^{(m)}(0)} \varphi_m^2(x)L_{0,y}[u(x)]\overline{u(x)}dx, \quad (3.4.13)$$

где

$$I^{(m)}(0) = I(0) \setminus I_m(0) = \left\{ x \in R^n : \, \delta \frac{m}{m+1} < |x| < \delta \right\}. \tag{3.4.14}$$

Из условии эллиптичности (3.4.5) следует ограниченность коэффициентов $b_k(x)$. Поэтому, принимая во внимание то, что $|I^{(m)}(0)| \to 0$ при $m \to +\infty$ получим

$$\left| \int\limits_{I^{(m)}(0)} \varphi_m^2(x) L_{0,y}[u(x)]\overline{u(x)} dx \right| \leq$$

$$\leq \mu_m \left(\sum_{|k|=2r} \int\limits_{I(0)} \left| u^{(k)}(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_{I(0)} |u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \tag{3.4.15}$$

где $\mu_m \to 0$ при $m \to +\infty$.

Так как коэффициенты $b_k(x)$ оператора L_0 и все производные функций $\varphi_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots,$ порядка до $2r$ включительно ограничены, то из (3.4.11) следует, что

$$\left| \int\limits_{I(0)} L_y^{(2)}[v_m(x)]\overline{v_m(x)} dx \right| \leq$$

$$\leq M_1 \left(\sum_{|l| \leq 2r-1} \int\limits_{I(0)} \left| u^{(l)}(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_{I(0)} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{3.4.16}$$

Далее используем вспомогательное неравенство (3.2.22) из параграфа 3.2:

$$\sum_{|l| \leq 2r-1} \int\limits_{I(0)} \left| u^{(l)}(x) \right|^2 dx \leq$$

$$\leq \varepsilon \left\{ \sum_{|k|=2r} \int\limits_{I(0)} \left| u^{(k)}(x) \right|^2 dx + \int\limits_{I(0)} |u(x)|^2 \, dx \right\}. \tag{3.4.17}$$

Здесь ε – достаточно малое положительное число и число δ – радиус шара $I(0)$ такое, что $0 < \delta < \delta_0 = \delta(\varepsilon)$. Для удобства записи далее выражение $\mathrm{const}\cdot\varepsilon$ снова обозначим через ε.

Из (3.4.16) и (3.4.17) следует, что

$$\left|\int\limits_{I(0)} L_y^{(2)}[v_m(x)]\overline{v_m(x)}dx\right| \le$$

$$\le \varepsilon \left\{\sum_{|k|=2r}\int\limits_{I(0)}\left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx + \int\limits_{I(0)}|u(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}\left(\int\limits_{I(0)}|u(x)|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{3.4.18}$$

Теперь используя полученные выше соотношения (3.4.8), (3.4.12), (3.4.13), (3.4.15), (3.4.18) имеем

$$0 \le \mathrm{Re}\,(L_{0,y}[v_m],\,v_m)_0 = \mathrm{Re}\,(L_y^{(1)}[v_m],\,v_m)_0 + \mathrm{Re}\,(L_y^{(2)}[v_m],\,v_m)_0 =$$

$$= \mathrm{Re}\int\limits_{I_m(0)} L_{0,y}[u(x)]\overline{u(x)}dx + \mathrm{Re}\int\limits_{I^{(m)}(0)}\varphi_m^2(x)L_{0,y}[u(x)]\overline{u(x)}dx + \mathrm{Re}\,(L_y^{(2)}[v_m],\,v_m)_0 \le$$

$$\le \mathrm{Re}\int\limits_{I_m(0)} L_{0,y}[u(x)]\overline{u(x)}dx + \mu_m\left(\sum_{|k|=2r}\int\limits_{I(0)}\left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{I(0)}|u(x)|^2\,dx\right)^{1/2} +$$

$$+\,\varepsilon\left\{\sum_{|k|=2r}\int\limits_{I(0)}\left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx + \int\limits_{I(0)}|u(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}\left(\int\limits_{I(0)}|u(x)|^2 dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le \mathrm{Re}\int\limits_{I_m(0)} L_{0,y}[u(x)]\overline{u(x)}dx +$$

$$+\,(\mu_m+\varepsilon)\left\{\sum_{|k|=2r}\int\limits_{I(0)}\left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx + \int\limits_{I(0)}|u(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}\left(\int\limits_{I(0)}|u(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Подставляя $\varepsilon = 1/m$, где m – достаточно большое натуральное число, отсюда имеем

$$\mathrm{Re} \int\limits_{I_m(0)} L_{0,y}[u(x)]\overline{u(x)}dx \geq$$

$$\geq -\varkappa_m \left\{ \sum_{|k|=2r} \int\limits_{I(0)} \left| u^{(k)}(x) \right|^2 dx + \int\limits_{I(0)} \left| u(x) \right|^2 dx \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{I(0)} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (3.4.19)$$

где $\varkappa_m \to +0$ при $m \to +\infty$.

Рассмотрим отображение $z \to x$, определенное с помощью равенства

$$x = (z-y)\varkappa/\varepsilon\rho(y),$$

где $\varkappa$ – константа из условии (3.2.1) и y – любая фиксированная точка из области Ω. Это отображение переводит шар

$$J_\varepsilon(y) = \left\{ z \in R^n : \, |z-y| < \delta \frac{\varepsilon}{\varkappa} \rho(y) \right\}$$

в шар $I(0)$ радиуса δ, а $J_\varepsilon^{(m)}(y)$ – в $I_m(0)$, где

$$J_\varepsilon^{(m)}(y) = \left\{ z \in R^n : \, |z-y| < \delta \frac{m\varepsilon}{(m+1)\varkappa} \rho(y) \right\},$$

$$I_m(0) = \left\{ x \in R^n : \, |x| < \delta \frac{m}{m+1} \right\}.$$

Берем произвольную функцию v из класса $C_0^\infty(\Omega)$. Легко можно проверить, что $J_\varepsilon(y) \subset \Omega$ при всех $y \in \Omega$, $\varepsilon \in (0,\, 1)$, $\delta \in (0,\, 1)$. Следовательно функция $\widehat{v}_y(x) = v(x\varepsilon\rho(y)/\varkappa + y)$ определена для всех точек $x \in I(0)$ и принадлежит классу $C^\infty(I(0))$.

Заметим, что если $u(x) = \widehat{v}_y(x)$, то

$$u^{(k)}(x) = \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa} \right)^{|k|} \rho^{|k|}(y) \widehat{v}_y^{(k)}(x).$$

Используя это равенство из (3.4.4) имеем

$$L_{0,y}[u(x)] = \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{2r} \rho^{2r}(y) \sum_{|k|=2r} b_k(y) \widehat{v}_y^{(k)}(x) = \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{2r} \rho^{2r}(y) L_{0,y}\left[\widehat{v}_y(x)\right],$$

Учитывая эти равенства и применяя полученное выше неравенство (3.4.19) для функции $u(x) = \widehat{v}_y(x)$ имеем

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{2r} \rho^{2r}(y) \int\limits_{I_m(0)} L_{0,y}\left[\widehat{v}_y(x)\right] \cdot \overline{\widehat{v}_y(x)} dx \geq$$

$$\geq -\varkappa_m \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{4r} \rho^{4r}(y) \sum_{|k|=2r} \int\limits_{I(0)} \left|\widehat{v}_y^{(k)}(x)\right|^2 dx + \int\limits_{I(0)} \left|\widehat{v}_y(x)\right|^2 dx \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{I(0)} \left|\widehat{v}_y(x)\right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Обе части этого неравенства умножим на $\rho^{\alpha}(y)$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{2r} \rho^{2r+\alpha}(y) \int\limits_{I_m(0)} L_{0,y}\left[\widehat{v}_y(x)\right] \cdot \overline{\widehat{v}_y(x)} dx \geq$$

$$\geq -\varkappa_m \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{4r} \rho^{4r+2\alpha}(y) \sum_{|k|=2r} \int\limits_{I(0)} \left|\widehat{v}_y^{(k)}(x)\right|^2 dx + \rho^{2\alpha}(y) \int\limits_{I(0)} \left|\widehat{v}_y(x)\right|^2 dx \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{I(0)} \left|\widehat{v}_y(x)\right|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (3.4.20)$$

Далее в интегралах этого неравенства выполным замену переменных интегрирования с помощью равенства $z = y + x\varepsilon\rho(y)/\varkappa$:

$$x = (z-y)\varkappa/\varepsilon\rho(y), \quad dx = \left(\frac{\varkappa}{\varepsilon\rho(y)}\right)^n dz,$$

$$\widehat{v}_y(x) = v(x\varepsilon\rho(y)/\varkappa + y) = v(z), \quad \widehat{v}_y^{(k)}(x) = v^{(k)}(x\varepsilon\rho(y)/\varkappa + y) = v^{(k)}(z)$$

$$L_{0,y}\left[\widehat{v}_y(x)\right] = \sum_{|k|=2r} b_k(y)\widehat{v}_y^{(k)}(x) = \sum_{|k|=2r} b_k(y)v^{(k)}(x\varepsilon\rho(y)/\varkappa + y) =$$

$$= \sum_{|k|=2r} b_k(y)v^{(k)}(z) = L_{0,y}\left[v(z)\right]$$

Интегралы меняются следующим образом:

$$\int\limits_{I(0)} |\widehat{v}_y(x)|^2\,dx = \left(\frac{\varkappa}{\varepsilon\rho(y)}\right)^n \int\limits_{J_\varepsilon(y)} |v(z)|^2 dz, \qquad (3.4.21)$$

$$\int\limits_{I(0)} \left|\widehat{v}_y^{(k)}(x)\right|^2 dx = \left(\frac{\varkappa}{\varepsilon\rho(y)}\right)^n \int\limits_{J_\varepsilon(y)} \left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz, \qquad (3.4.22)$$

$$\int\limits_{I_m(0)} L_{0,y}\left[\widehat{v}_y(x)\right]\cdot\overline{\widehat{v}_y(x)}dx = \left(\frac{\varkappa}{\varepsilon\rho(y)}\right)^n \int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} L_{0,y}\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz. \qquad (3.4.23)$$

Интегралы в неравенстве (3.4.20) заменяем через (3.4.21), (3.4.22), (3.4.23):

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{2r}\rho^{2r+\alpha}(y)\left(\frac{\varkappa}{\varepsilon\rho(y)}\right)^n \mathrm{Re}\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} L_{0,y}\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz \geq$$

$$\geq -\varkappa_m\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{4r}\rho^{4r+2\alpha}(y)\sum_{|k|=2r}\left(\frac{\varkappa}{\varepsilon\rho(y)}\right)^n\int\limits_{J_\varepsilon(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz + \right.$$

$$\left. +\rho^{2\alpha}(y)\left(\frac{\varkappa}{\varepsilon\rho(y)}\right)^n\int\limits_{J_\varepsilon(y)}|v(z)|^2dz\right\}^{1/2} \times$$

$$\times\left(\left(\frac{\varkappa}{\varepsilon\rho(y)}\right)^n\int\limits_{J_\varepsilon(y)}|v(z)|^2dz\right)^{1/2}.$$

Следовательно

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{2r-n}\rho^{2r+\alpha-n}(y)\mathrm{Re}\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} L_{0,y}\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\geq$$

$$\geq-\varkappa_m\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{4r-n}\rho^{4r+2\alpha-n}(y)\sum_{|k|=2r}\int\limits_{J_\varepsilon(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^2dz+\right.$$

$$\left.+\rho^{2\alpha-n}(y)\left(\frac{\varkappa}{\varepsilon}\right)^n\int\limits_{J_\varepsilon(y)}|v(z)|^2dz\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\left(\rho^{-n}(y)\left(\frac{\varkappa}{\varepsilon}\right)^n\int\limits_{J_\varepsilon(y)}|v(z)|^2dz\right)^{1/2}.$$

Обе части этого неравенства умножим на

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{-2r+n}\rho^{-2r}(y),$$

и приходим к следующему результату

$$\rho^{\alpha-n}(y)\cdot\mathrm{Re}\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} L_{0,y}\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\geq$$

$$\geq-\varkappa_m\left\{\rho^{2\alpha-n}(y)\sum_{|k|=2r}\int\limits_{J_\varepsilon(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^2dz+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{-4r}\rho^{-4r+2\alpha-n}(y)\int\limits_{J_\varepsilon(y)}|v(z)|^2dz\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\left(\rho^{-n}(y)\int\limits_{J_\varepsilon(y)}|v(z)|^2dz\right)^{1/2}.$$

Теперь интегрируем это неравенство по $y \in \Omega$ и для оценки правой части применяем неравенство Коши-Буняковского в виде

$$-\int\limits_{\Omega} \{\mathbb{U}(y)\}^{1/2} (\mathbb{V}(y))^{1/2} dy \geq -\left\{\int\limits_{\Omega} \mathbb{U}(y)dy\right\}^{1/2} \cdot \left(\int\limits_{\Omega} \mathbb{V}(y)dy\right)^{1/2}$$

и в результате приходим к неравенству

$$\operatorname{Re}\int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha-n}(y) \left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} L_{0,y}\left[v(z)\right] \cdot \overline{v(z)}dz\right) dy \geq -\varkappa_m \cdot$$

$$\cdot \left\{\sum_{|k|=2r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(y) \left(\int\limits_{J_\varepsilon(y)} \left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz\right) dy + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{-4r} \int\limits_{\Omega} \rho^{-4r+2\alpha-n}(y) \left(\int\limits_{J_\varepsilon(y)} |v(z)|^2 dz\right) dy\right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{\int\limits_{\Omega} \rho^{-n}(y) \left(\int\limits_{J_\varepsilon(y)} |v(z)|^2 dz\right) dy\right\}^{1/2}. \quad (3.4.24)$$

Далее мы воспользуемся следующими двумя леммами, доказательство которых имеется в параграфе 3.2 (см. лемму 3.2.1 и лемму 3.2.2)

Лемма 3.4.1. *Пусть* ε *– произвольное число из интервала* $(0, 1)$, m *– натуральное число и пусть* $\chi_\varepsilon^{(m)}(x, y)$ *– характеристическая функция множества*

$$J_\varepsilon^{(m)}(y) = \left\{z \in R^n : |z-y| < \delta \frac{m\varepsilon}{(m+1)\varkappa} \rho(y)\right\}.$$

Тогда имеют места неравенства

$$\left(\frac{\delta\varepsilon}{1+\delta\varepsilon}\right)^n \leq \rho^{-n}(x) \varkappa^n \omega_n^{-1} \left(1+\frac{1}{m}\right)^n \int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon^{(m)}(x, y)dy \leq$$

$$\leq \left(\frac{\delta\varepsilon}{1-\delta\varepsilon}\right)^n, \quad (3.4.25)$$

где ω_n *– площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$.

Лемма 3.4.2. *Пусть* ε *– произвольное число из интервала* $(0,\,1)$ *и пусть* $\chi_\varepsilon(x,\,y)$ *– характеристическая функция множества* $J_\varepsilon(y)$. *Тогда*

$$\left(\frac{\delta\varepsilon}{1+\delta\varepsilon}\right)^n \le \rho^{-n}(x)\varkappa^n\omega_n^{-1}\int\limits_\Omega \chi_\varepsilon(x,\,y)dy \le \left(\frac{\delta\varepsilon}{1-\delta\varepsilon}\right)^n, \tag{3.4.26}$$

где ω_n *– площадь единичной сферы в пространства* $\mathbb{R}^n$.

С помощью этих двух лемм ранее в параграфе 3.2 для любого вещественного числа $\theta \in (-\infty,\,+\infty)$ было доказано неравенство

$$(1+\delta\varepsilon\operatorname{sgn}\theta)^{-\theta}\rho^\theta(z) \le \rho^\theta(y) \le (1-\delta\varepsilon\operatorname{sgn}\theta)^{-\theta}\rho^\theta(z) \tag{3.4.27}$$

для всех $z,\,y\in\Omega$, удовлетворяющих условию

$$|z-y| < \frac{\delta\varepsilon}{\varkappa}\rho(y).$$

Теперь переходим к оценке интегралов неравенства (3.4.24). Далее для удобства записи вводим следующую полунорму

$$\left\|u;\,L^{2r}_{2,\theta}(\Omega)\right\| = \left\{\sum_{|k|=2r}\int\limits_\Omega \rho^{2\theta}(x)|u^{(k)}(x)|^2dx\right\}^{1/2}.$$

Сначала оценим сверху первый интеграла в правой части неравенства

(3.4.24).

$$\sum_{|k|=2r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(y) \left(\int_{J_\varepsilon(y)} \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy =$$

$$= \sum_{|k|=2r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(y) \left(\int_{\Omega} \chi_\varepsilon(z,\, y) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy \leq$$

$$\leq \{\text{используем неравенство}\,(3.4.27)\} \leq$$

$$\leq (1+\delta\varepsilon)^n (1-\delta\varepsilon \operatorname{sgn}\alpha)^{-2\alpha} \sum_{|k|=2r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(z) \left(\int_{\Omega} \chi_\varepsilon(z,\, y) dy \right) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \leq$$

$$\leq \{\text{используем лемму 3.4.2}\} \leq$$

$$\leq \omega_n \varkappa^{-n} (1-\delta\varepsilon \operatorname{sgn}\alpha)^{-2\alpha} \left(\frac{\delta\varepsilon(1+\delta\varepsilon)}{1-\delta\varepsilon} \right)^n \sum_{|k|=2r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz =$$

$$= \varepsilon^n \delta^n M_2(\alpha,\, \delta,\, \varepsilon) \left\| v;\, L^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\|^2, \quad (3.4.28)$$

где

$$M_2(\alpha,\, \delta,\, \varepsilon) = \omega_n (1-\delta\varepsilon \operatorname{sgn}\alpha)^{-2\alpha} \left(\frac{1+\delta\varepsilon}{\varkappa(1-\delta\varepsilon)} \right)^n. \qquad (3.4.29)$$

Теперь оценим сверху второй интеграла в правой части неравенства

(3.4.24).

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-4r-n}(y) \left(\int\limits_{J_\varepsilon(y)} |v(z)|^p dz \right) dy =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-4r-n}(y) \left(\int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon(z,\, y) |v(z)|^2 dz \right) dy \leq$$

$$\leq \{\text{используем неравенство}\,(3.4.27)\} \leq$$

$$\leq (1+\delta\varepsilon)^{n+4r}(1-\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,\alpha)^{-2\alpha} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-4r-n}(z) \left(\int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon(z,\, y) dy \right) |v(z)|^2 dz \leq$$

$$\leq \{\text{используем лемму }\ 3.4.2\} \leq$$

$$\leq (1+\delta\varepsilon)^{n+4r}(1-\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,\alpha)^{-2\alpha} \left(\frac{\delta\varepsilon}{\varkappa(1-\delta\varepsilon)} \right)^n \omega_n \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-4r-n}(z) \rho^n(z) \left| v(z) \right|^2 dz =$$

$$= (1+\delta\varepsilon)^{4r}(1-\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,\alpha)^{-2\alpha} \left(\frac{\delta\varepsilon(1+\delta\varepsilon)}{\varkappa(1-\delta\varepsilon)} \right)^n \omega_n \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-4r}(z) \left| v(z) \right|^2 dz =$$

$$= \varepsilon^n \delta^n M_3(\alpha,\, \delta,\, \varepsilon) \left\| v;\, L_{2,\,\alpha-2r}(\Omega) \right\|^2, \quad (3.4.30)$$

где

$$M_3(\alpha,\, \delta,\, \varepsilon) = \omega_n (1+\delta\varepsilon)^{4r}(1-\delta\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,\alpha)^{-2\alpha} \left(\frac{1+\delta\varepsilon}{\varkappa(1-\delta\varepsilon)} \right)^n. \qquad (3.4.31)$$

Далее оценим сверху последний интеграла в правой части неравенства

(3.4.24).

$$\int\limits_{\Omega}\rho^{-n}(y)\left(\int\limits_{J_\varepsilon(y)}|v(z)|^p dz\right)dy=\int\limits_{\Omega}\rho^{-n}(y)\left(\int\limits_{\Omega}\chi_\varepsilon(z,\,y)|v(z)|^2dz\right)dy\le$$

$$\le\{\text{используем неравенство}\,(3.4.27)\}\le$$

$$\le(1+\delta\varepsilon)^n\int\limits_{\Omega}\rho^{-n}(z)\left(\int\limits_{\Omega}\chi_\varepsilon(z,\,y)dy\right)|v(z)|^2dz\le$$

$$\le\{\text{используем лемму }\ 3.4.2\}\le(1+\delta\varepsilon)^n\left(\frac{\delta\varepsilon}{\varkappa(1-\delta\varepsilon)}\right)^n\omega_n\int\limits_{\Omega}\rho^{-n}(z)\rho^n(z)\left|v(z)\right|^2dz=$$

$$=\left(\frac{\delta\varepsilon(1+\delta\varepsilon)}{\varkappa(1-\delta\varepsilon)}\right)^n\omega_n\int\limits_{\Omega}\left|v(z)\right|^2dz=\varepsilon^n\delta^nM_4(\delta,\,\varepsilon)\left\|v;\;L_2(\Omega)\right\|^2, \quad (3.4.32)$$

где

$$M_4(\delta,\,\varepsilon)=\omega_n\left(\frac{1+\delta\varepsilon}{\varkappa(1-\delta\varepsilon)}\right)^n. \qquad (3.4.33)$$

С учетом доказанных выше неравенств (3.4.28), (3.4.30), (3.4.32) неравенство (3.4.24) примет следующий вид

$$\operatorname{Re}\int\limits_{\Omega}\rho^{\alpha-n}(y)\left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)}L_{0,y}\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\right)dy\ge$$

$$\ge-\varkappa_m\varepsilon^n\delta^n\left\{M_2(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)\left\|v;\;L^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2+M_3(\alpha,\,\delta,\,\varepsilon)\left\|v;\;L_{2,\,\alpha-2r}(\Omega)\right\|^2\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\left\{M_4(\delta,\,\varepsilon)\left\|v;\;L_2(\Omega)\right\|^2\right\}^{1/2}. \quad (3.4.34)$$

Далее предположим, что $0<\varepsilon<1/2,\ 0<\delta<1/2$. Тогда

$$\left(\frac{1+\delta\varepsilon}{\varkappa(1-\delta\varepsilon)}\right)^n=\varkappa^{-n}(1-\delta\varepsilon)^{-n}(1+\delta\varepsilon)^n\le$$

$$\le\varkappa^{-n}\left(\frac{4}{3}\right)^n\left(\frac{5}{4}\right)^n=\varkappa^{-n}\left(\frac{5}{3}\right)^n. \quad (3.4.35)$$

Если $\alpha>0$, то

$$(1-\delta\varepsilon\operatorname{sgn}\alpha)^{-2\alpha}=(1-\delta\varepsilon)^{-2\alpha}\le\left(\frac{4}{3}\right)^{2\alpha}.$$

Если $\alpha < 0$, то

$$(1-\delta\varepsilon \operatorname{sgn}\alpha)^{-2\alpha} = (1+\delta\varepsilon)^{2|\alpha|} \le \left(\frac{5}{4}\right)^{2|\alpha|}.$$

Поэтому

$$(1-\delta\varepsilon \operatorname{sgn}\alpha)^{-2\alpha} \le \left(\frac{4}{3}\right)^{2|\alpha|}. \qquad (3.4.36)$$

Далее в силу неравенств (3.4.35), (3.4.36) из (3.4.29), (3.4.31), (3.4.33) следует, что

$$M_2(\alpha,\, \delta,\, \varepsilon) = \omega_n (1-\delta\varepsilon \operatorname{sgn}\alpha)^{-2\alpha} \left(\frac{1+\delta\varepsilon}{\varkappa(1-\delta\varepsilon)}\right)^n \le$$
$$\le \omega_n \left(\frac{4}{3}\right)^{2|\alpha|} \varkappa^{-n} \left(\frac{5}{3}\right)^n \le \omega_n \varkappa^{-n} 2^{2|\alpha|+n}. \quad (3.4.37)$$

$$M_3(\alpha,\, \delta,\, \varepsilon) = \omega_n (1+\delta\varepsilon)^{4r} (1-\delta\varepsilon \operatorname{sgn}\alpha)^{-2\alpha} \left(\frac{1+\delta\varepsilon}{\varkappa(1-\delta\varepsilon)}\right)^n \le$$
$$\le \omega_n \left(\frac{4}{3}\right)^{2r} \left(\frac{4}{3}\right)^{2|\alpha|} \varkappa^{-n} \left(\frac{5}{3}\right)^n \le \omega_n \varkappa^{-n} 2^{2|\alpha|+2r+n}. \quad (3.4.38)$$

$$M_4(\delta,\, \varepsilon) = \omega_n \left(\frac{1+\delta\varepsilon}{\varkappa(1-\delta\varepsilon)}\right)^n \le \omega_n \varkappa^{-n} \left(\frac{5}{3}\right)^n \le \omega_n \varkappa^{-n} 2^n. \qquad (3.4.39)$$

Теперь используя неравенства (3.4.37), (3.4.38), (3.4.39) из (3.4.34) находим

$$\operatorname{Re} \int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha-n}(y) \left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} L_{0,y}\left[v(z)\right] \cdot \overline{v(z)} dz \right) dy \ge$$
$$\ge -\varkappa_m \varepsilon^n \delta^n \left[\omega_n \varkappa^{-n} 2^{2|\alpha|+2r+n} \omega_n \varkappa^{-n} 2^n\right]^{1/2} \times$$
$$\times \left\{ \left\| v;\, L_{2,\,\alpha}^{2r}(\Omega) \right\|^2 + \left\| v;\, L_{2,\,\alpha-2r}(\Omega) \right\|^2 \right\}^{1/2} \left\| v;\, L_2(\Omega) \right\|.$$

Так как $\varkappa_m \to 0+$ при $m \to +\infty$, то обозначая выражение $\varkappa_m \cdot \mathrm{const}$ снова через $\varkappa_m$ и учитывая равенство

$$\left\| v;\, V_{2,\,\alpha}^{2r}(\Omega) \right\| = \left\{ \left\| v;\, L_{2,\,\alpha}^{2r}(\Omega) \right\|^2 + \left\| v;\, L_{2,\,\alpha-2r}(\Omega) \right\|^2 \right\}^{1/2}$$

получим

$$\operatorname{Re}\int\limits_{\Omega}\rho^{\alpha-n}(y)\left(\int\limits_{J_{\varepsilon}^{(m)}(y)}L_{0,y}\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\right)dy\geq-\varkappa_m\varepsilon^n\delta^n\left\|v;\,V_{2,\,\alpha}^{2r}(\Omega)\right\|\left\|v;\,L_2(\Omega)\right\|.$$

Далее, используя равенство

$$\operatorname{Re}\int\limits_{\Omega}\rho^{\alpha-n}(y)\left(\int\limits_{J_{\varepsilon}^{(m)}(y)}L_{0,y}\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\right)dy=$$
$$=\operatorname{Re}\int\limits_{\Omega}\rho^{-n}(z)\left(\int\limits_{J_{\varepsilon}^{(m)}(y)}L_{0}\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\right)dy-$$
$$-\left\{\operatorname{Re}\int\limits_{\Omega}\rho^{-n}(z)\left(\int\limits_{J_{\varepsilon}^{(m)}(y)}L_{0}\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\right)dy-\right.$$
$$\left.-\operatorname{Re}\int\limits_{\Omega}\rho^{\alpha-n}(y)\left(\int\limits_{J_{\varepsilon}^{(m)}(y)}L_{0,y}\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\right)dy\right\},$$

получаем неравенство

$$\operatorname{Re}\int\limits_{\Omega}\rho^{-n}(z)\left(\int\limits_{J_{\varepsilon}^{(m)}(y)}L_{0}\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\right)dy\geq$$
$$\geq-\varkappa_m\varepsilon^n\delta^n\left\|v;\,V_{2,\,\alpha}^{2r}(\Omega)\right\|\left\|v;\,L_2(\Omega)\right\|-\mathcal{M}_{m,\varepsilon,\delta}[v],\quad(3.4.40)$$

где

$$\mathcal{M}_{m,\varepsilon,\delta}[v] =$$

$$= \left| \int\limits_{\Omega} \rho^{-n}(z) \left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} L_0\left[v(z)\right] \cdot \overline{v(z)} dz \right) dy - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha-n}(y) \left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} L_{0,y}\left[v(z)\right] \cdot \overline{v(z)} dz \right) dy \right| .$$

Напомним, что (см. (3.4.4), (3.4.6))

$$L_{0,y}[v(z)] = \sum_{|k|=2r} b_k(y) v^{(k)}(z), \quad v \in C_0^\infty(R^n),$$

$$L_0[v(z)] = \sum_{|k|=2r} \rho^\alpha(z) b_k(z) v^{(k)}(z), \quad v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.4.41}$$

Вводим следующие вспомогательные функционалы

$$\mathcal{M}^{(1)}_{m,\varepsilon,\delta}[v] =$$

$$= \left| \int\limits_{\Omega} \rho^{-n}(z) \left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} L_0\left[v(z)\right] \cdot \overline{v(z)} dz \right) dy - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha-n}(z) \left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} L_{0,y}\left[v(z)\right] \cdot \overline{v(z)} dz \right) dy \right| ,$$

$$\mathcal{M}^{(2)}_{m,\varepsilon,\delta}[v] =$$

$$= \left| \int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha-n}(z) \left(\int\limits_{J^{(m)}_{\varepsilon}(y)} L_{0,y}\left[v(z)\right] \cdot \overline{v(z)} dz \right) dy - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha-n}(y) \left(\int\limits_{J^{(m)}_{\varepsilon}(y)} L_{0,y}\left[v(z)\right] \cdot \overline{v(z)} dz \right) dy \right|, \quad (3.4.42)$$

и отметим, что

$$\mathcal{M}_{m,\varepsilon,\delta}[v] \leq \mathcal{M}^{(1)}_{m,\varepsilon,\delta}[v] + \mathcal{M}^{(2)}_{m,\varepsilon,\delta}[v], \quad v \in C_0^{\infty}(R^n). \quad (3.4.43)$$

Далее, чтобы оценить сверху функционалы $\mathcal{M}^{(1)}_{m,\varepsilon,\delta}[v]$, $\mathcal{M}^{(2)}_{m,\varepsilon,\delta}[v]$ при всех $v \in C_0^{\infty}(R^n)$, нам понадобится следующая лемма, доказанная в параграфе 3.2 (см. лемму 3.2.3):

Лемма 3.4.3. *Пусть ε – произвольное число из интервала $(0,\, 1)$, m – натуральное число и $y \in \Omega$. Тогда для любого действительного числа θ и для любого $z \in J^{(m)}_{\varepsilon}(y)$ имеет место неравенство*

$$\left|\rho^{\theta}(y) - \rho^{\theta}(z)\right| \leq \varepsilon\delta N_{1,m}(\delta,\, \varepsilon,\, \theta)\rho^{\theta}(z), \quad (3.4.44)$$

где

$$N_{1,m}(\delta,\, \varepsilon,\, \theta) = n\varkappa|\theta|(1 + \delta\varepsilon\, sgn\,(\theta - 1))^{\theta-1} \frac{m}{(m+1)\varkappa} \left(1 - \delta\varepsilon\, sgn\,\theta\right)^{-\theta}.$$

Отметим, что согласно условию I) теоремы 3.4.1 для любого достаточно малого числа $\nu > 0$ существует положительное число ε_{ν} такое, что

$$|b_k(y) - b_k(z)| < \nu, \quad |k| = 2r, \quad (3.4.45)$$

для любой точки $y \in \Omega$ и любого

$$z \in J_{\varepsilon}(y) = \left\{ z \in R^n :\, |z - y| < \frac{\delta\varepsilon}{\varkappa}\,\rho(y) \right\}, \quad \varepsilon \in (0,\, \varepsilon_{\nu}). \quad (3.4.46)$$

Для оценки функционала $\mathcal{M}^{(1)}_{m,\varepsilon,\delta}[v]$ имеем

$$\mathcal{M}^{(1)}_{m,\varepsilon,\delta}[v] = \left| \sum_{|k|=2r} \int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha-n}(z) \left(\int\limits_{J^{(m)}_{\varepsilon}(y)} (b_k(z) - b_k(y))dy \right) v^{(k)}(z)\overline{v(z)}dz \right| \leq$$

$$\leq \sum_{|k|=2r} \int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha-n}(z) \left(\int\limits_{\Omega} \chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,\, y)|b_k(z) - b_k(y)|dy \right) \left| v^{(k)}(z) \right| |v(z)|dz \leq$$

$$\leq \{\text{Используем условию (3.4.45)}\} \leq$$

$$\leq \nu \sum_{|k|=2r} \int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha-n}(z) \left(\int\limits_{\Omega} \chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,\, y)dy \right) \left| v^{(k)}(z) \right| |v(z)|dz \leq$$

$$\leq \{\text{Используем неравенство (3.4.26)}\} \leq$$

$$\leq \nu \varkappa^{-n} \omega_n \left(\frac{m}{m+1} \right)^n \left(\frac{\delta\varepsilon}{1-\delta\varepsilon} \right)^n \sum_{|k|=2r} \int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha}(z) \left| v^{(k)}(z) \right| |v(z)|dz \leq$$

$$\leq \nu \varkappa^{-n} \omega_n \left(\frac{\delta\varepsilon}{1-\delta\varepsilon} \right)^n \left\| v;\, L^{2r}_{2,\,\alpha} \right\| \cdot \left\| v;\, L_2(\Omega) \right\|.$$

Так как $0 < \varepsilon < 1/2$ и $0 < \delta < 1/2$, то выполняется неравенство

$$\left(\frac{1}{1-\delta\varepsilon} \right)^n < \left(\frac{4}{3} \right)^n < 2^n, \tag{3.4.47}$$

и поэтому в силу полученного выше неравенства находим

$$\mathcal{M}^{(1)}_{m,\varepsilon,\delta}[v] \leq \nu \delta^n \varepsilon^n M_1 \left\| v;\, L^{2r}_{2,\,\alpha} \right\| \cdot \left\| v;\, L_2(\Omega) \right\|, \quad M_1 = \varkappa^{-n} \omega_n 2^n. \tag{3.4.48}$$

Теперь оценим функционал $\mathcal{M}^{(2)}_{m,\varepsilon,\delta}[v]$. Учитывая ограниченность коэффициентов $b_k(z)$ оператора (3.4.41), в силу равенства (3.4.42) имеем

$$\mathcal{M}^{(2)}_{m,\varepsilon,\delta}[v] = \left| \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{J^{(m)}_{\varepsilon}(y)} \left(\rho^{\alpha-n}(z) - \rho^{\alpha-n}(y)\right) L_{0,y}\left[v(z)\right] \cdot \overline{v(z)} dz \right) dy \right| \leq$$

$$\leq \sum_{|k|=2r} \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,\, y) \left|\rho^{\alpha-n}(z) - \rho^{\alpha-n}(y)\right| |b_k(y)| dy \right) |v^{(k)}(z)||v(z)| dz \leq$$

$$\leq \{\text{Используем неравенство (3.4.44) при } \theta = \alpha - n\} \leq$$

$$\leq \varepsilon\delta N_{1,m}(\delta,\, \varepsilon,\, \alpha-n) M_0 \sum_{|k|=2r} \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,\, y) dy \right) \rho^{\alpha-n}(z) |v^{(k)}(z)||v(z)| dz \leq$$

$$\leq \{\text{Используем неравенство (3.4.26)}\} \leq$$

$$\leq \varepsilon\delta N_{1,m}(\delta,\, \varepsilon,\, \alpha-n) M_0 \varkappa^{-n} \omega_n \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \left(\frac{\delta\varepsilon}{1-\delta\varepsilon}\right)^n \times$$

$$\times \sum_{|k|=2r} \int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha}(z) |v^{(k)}(z)||v(z)| dz \leq$$

$$\leq \{\text{Используем неравенство (3.4.47)}\} \leq$$

$$\leq \varepsilon^{n+1}\delta^{n+1} N_{1,m}(\delta,\, \varepsilon,\, \alpha-n) M_0 \varkappa^{-n} \omega_n 2^n \left\| v;\, L^{2r}_{2,\,\alpha} \right\| \cdot \left\| v;\, L_2(\Omega) \right\|. \quad (3.4.49)$$

Из равенства (3.4.46) при $0 < \varepsilon < 1/2,\; 0 < \delta < 1/2$ следует (см. (3.4.36))

$$N_{1,m}(\delta,\, \varepsilon,\, \alpha-n) =$$

$$= n|\alpha - n|(1 + \delta\varepsilon \operatorname{sgn}(\alpha - n - 1))^{\alpha-n-1} \frac{m}{(m+1)} (1 - \delta\varepsilon \operatorname{sgn}(\alpha - n))^{-\alpha+n} \leq$$

$$\leq n|\alpha - n| \left(\frac{4}{3}\right)^{|\alpha-n-1|+|\alpha-n|} \leq n(|\alpha| + n) 2^{2|\alpha|+2n+1}$$

Поэтому из неравенства (3.4.49) находим

$$\mathcal{M}^{(2)}_{m,\varepsilon,\delta}[v] \leq \varepsilon\delta M_{2,\,\alpha} \left\| v;\, L^{2r}_{2,\,\alpha} \right\| \cdot \left\| v;\, L_2(\Omega) \right\|, \quad (3.4.50)$$

где

$$M_{2,\,\alpha} = n(|\alpha| + n) 2^{2|\alpha|+3n+1} M_0 \varkappa^{-n} \omega_n$$

Теперь в силу равенства (3.4.43) из (3.4.48) и (3.4.50) следует, что

$$\mathcal{M}_{m,\varepsilon,\delta}[v] \leq \varepsilon^n \delta^n \varkappa(\varepsilon,\, \delta,\, \nu) \left\| v;\, L^{2r}_{2,\,\alpha} \right\| \cdot \| v;\, L_2(\Omega) \| \,, \quad v \in C_0^\infty(\Omega), \qquad (3.4.51)$$

где

$$\varkappa(\varepsilon,\, \delta,\, \nu) = \nu M_1 + \varepsilon\delta M_{2,\,\alpha}$$

и $\varkappa(\varepsilon,\, \delta,\, \nu) \to 0+$ при $\varepsilon \to 0+$, $\delta \to 0+$, $\nu \to 0+$.

Далее применяя неравенство (3.4.51) из (3.4.40) имеем

$$\operatorname{Re} \int\limits_\Omega \rho^{-n}(z) \left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} L_0\left[v(z)\right] \cdot \overline{v(z)} dz \right) dy \geq$$

$$\geq -\varepsilon^n \delta^n \left(\varkappa_m + \varkappa(\varepsilon,\, \delta,\, \nu)\right) \left\| v;\, V^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \| v;\, L_2(\Omega) \| \,, \quad v \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3.4.52)$$

Напомним, что

$$\begin{cases} \varkappa_m \to 0+ & \text{при} \quad m \to +\infty; \\ \varkappa(\varepsilon,\, \delta,\, \nu) \to 0+ & \text{при} \quad \varepsilon \to 0+,\, \delta \to 0+,\, \nu \to 0+ \end{cases} \qquad (3.4.53)$$

Далее нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

Лемма 3.4.4. *Пусть вещественнозначная функция $\Phi(z)$ принадлежит пространству $L_1(\Omega)$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_\Omega \left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} \rho^{-n}(z)\Phi(z) dz \right) dy \leq \varepsilon^n \delta^n \varkappa^{-n} \omega_n \left(\frac{m}{m+1} \right)^n (1-\varepsilon\delta)^{-n} \int\limits_\Omega \Phi(z) dz +$$

$$+ \varepsilon^n \delta^n \varkappa^{-n} \omega_n \left(\frac{m}{m+1} \right)^n \left[(1-\varepsilon\delta)^{-n} - (1+\varepsilon\delta)^{-n} \right] \int\limits_\Omega \Phi^-(z) dz, \quad (3.4.54)$$

где

$$\Phi^-(z) = \frac{|\Phi(z)| - \Phi(z)}{2}.$$

Доказательство. Вводим также вспомогательную функцию

$$\Phi^{+}(z) = \frac{|\Phi(z)| + \Phi(z)}{2}.$$

Заметим, что функции $\Phi^{+}(z)$, $\Phi^{-}(z)$ неотрицательны и $\Phi(z) = \Phi^{+}(z) - \Phi^{-}(z)$. Учитывая это в силу леммы 3.4.1 (см. неравенство (3.4.25)) получим

$$\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{J_{\varepsilon}^{(m)}(y)} \rho^{-n}(z)\Phi^{+}(z)dz\right)dy = \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{\varepsilon}^{(m)}(z,\, y)\rho^{-n}(z)\Phi^{+}(z)dz\right)dy =$$
$$= \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{\varepsilon}^{(m)}(z,\, y)dy\right)\rho^{-n}(z)\Phi^{+}(z)dz \le \{\text{Применяем лемму 3.4.1 }\} \le$$
$$\le \varkappa^{-n}\omega_n\left(\frac{\delta\varepsilon}{1-\delta\varepsilon}\right)^{n}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{n}\int\limits_{\Omega}\Phi^{+}(z)dz, \quad (3.4.55)$$

$$\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{J_{\varepsilon}^{(m)}(y)} \rho^{-n}(z)\Phi^{-}(z)dz\right)dy = \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{\varepsilon}^{(m)}(z,\, y)\rho^{-n}(z)\Phi^{-}(z)dz\right)dy =$$
$$\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{\varepsilon}^{(m)}(z,\, y)dy\right)\rho^{-n}(z)\Phi^{-}(z)dz \ge \{\text{Применяем лемму 3.4.1 }\} \ge$$
$$\ge \varkappa^{-n}\omega_n\left(\frac{\delta\varepsilon}{1+\delta\varepsilon}\right)^{n}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{n}\int\limits_{\Omega}\Phi^{-}(z)dz. \quad (3.4.56)$$

В силу равенства $\Phi(z) = \Phi^+(z) - \Phi^-(z)$ из (3.4.55), (3.4.56) следует, что

$$\int\limits_\Omega \left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} \rho^{-n}(z)\Phi(z)dz \right) dy =$$

$$= \int\limits_\Omega \left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} \rho^{-n}(z)\Phi^+(z)dz \right) dy - \int\limits_\Omega \left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} \rho^{-n}(z)\Phi^-(z)dz \right) dy \leq$$

$$\leq \varkappa^{-n}\omega_n \left(\frac{\delta\varepsilon}{1-\delta\varepsilon}\right)^n \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \int\limits_\Omega \Phi^+(z)dz-$$

$$- \varkappa^{-n}\omega_n \left(\frac{\delta\varepsilon}{1+\delta\varepsilon}\right)^n \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \int\limits_\Omega \Phi^-(z)dz =$$

$$= \varepsilon^n\delta^n\varkappa^{-n}\omega_n \left(\frac{m}{m+1}\right)^n (1-\varepsilon\delta)^{-n} \int\limits_\Omega \Phi(z)dz+$$

$$+ \varepsilon^n\delta^n\varkappa^{-n}\omega_n \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \left[(1-\varepsilon\delta)^{-n} - (1+\varepsilon\delta)^{-n}\right] \int\limits_\Omega \Phi^-(z)dz.$$

Это и есть неравенство (3.4.54). Лемма 3.4.4 доказана.

Теперь применяя лемму 3.4.4 для функции $\Phi(z) = \operatorname{Re} L_0\left[v(z)\right] \cdot \overline{v(z)}$ получим

$$\operatorname{Re} \int\limits_\Omega \rho^{-n}(z) \left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} L_0\left[v(z)\right] \cdot \overline{v(z)} dz \right) dy \leq$$

$$\leq \varepsilon^n\delta^n\varkappa^{-n}\omega_n \left(\frac{m}{m+1}\right)^n (1-\varepsilon\delta)^{-n} \operatorname{Re} \int\limits_\Omega L_0\left[v(z)\right] \cdot \overline{v(z)} dz+$$

$$+ \varepsilon^n\delta^n\varkappa^{-n}\omega_n \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \left[(1-\varepsilon\delta)^{-n} - (1+\varepsilon\delta)^{-n}\right] \int\limits_\Omega \left|L_0\left[v(z)\right]\right| |v(z)| dz.$$

Так как

$$\int\limits_{\Omega} |L_0\,[v(z)]\,||v(z)|dz \leq M_2 \sum_{|k|=2r} \int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha} \left| v^{(k)}(z) \right| |v(z)|dz \leq$$

$$\leq M_2 \left\{ \sum_{|k|=2r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha} \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right\}^{1/2} \left\{ \int\limits_{\Omega} |v(z)|^2 dz \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq M_2 \left\| v;\, V^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \|v;\, L_2(\Omega)\|\,,$$

то отсюда следует, что

$$\mathrm{Re} \int\limits_{\Omega} \rho^{-n}(z) \left(\int\limits_{J^{(m)}_{\varepsilon}(y)} L_0\,[v(z)] \cdot \overline{v(z)} dz \right) dy \leq$$

$$\leq \varepsilon^n \delta^n \varkappa^{-n} \omega_n \left(\frac{m}{m+1} \right)^n (1-\varepsilon\delta)^{-n} \mathrm{Re} \int\limits_{\Omega} L_0\,[v(z)] \cdot \overline{v(z)} dz +$$

$$+ \varepsilon^n \delta^n M_3 \left[(1-\varepsilon\delta)^{-n} - (1+\varepsilon\delta)^{-n} \right] \left\| v;\, V^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \|v;\, L_2(\Omega)\|\,.$$

Применяя это неравенство из (3.4.52) получим

$$\varepsilon^n \delta^n \varkappa^{-n} \omega_n \left(\frac{m}{m+1} \right)^n (1-\varepsilon\delta)^{-n} \mathrm{Re} \int\limits_{\Omega} L_0\,[v(z)] \cdot \overline{v(z)} dz \geq$$

$$\geq -\varepsilon^n \delta^n \left(\varkappa_m + \varkappa(\varepsilon,\, \delta,\, \nu) + M_3 \left[(1-\varepsilon\delta)^{-n} - (1+\varepsilon\delta)^{-n} \right] \right) \left\| v;\, V^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \|v;\, L_2(\Omega)\|\,.$$

В силу соотношения (3.4.53) и

$$\left[(1-\varepsilon\delta)^{-n} - (1+\varepsilon\delta)^{-n} \right] \to 0+ \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+,\, \delta \to 0+$$

отсюда следует, что

$$\mathrm{Re}\, \left(L_0[v],\, v\right)_0 = \mathrm{Re} \int\limits_{\Omega} L_0\,[v(z)] \cdot \overline{v(z)} dz \geq$$

$$\geq -\mu_m(\varepsilon,\, \delta) \left\| v;\, V^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega) \right\| \|v;\, L_2(\Omega)\|\,, \quad v \in C^{\infty}_0(\Omega),$$

где m – достаточно большое, ε, δ – достаточно малые числа и

$$\mu_m(\varepsilon,\,\delta)\to 0+\quad\text{при}\quad m\to+\infty,\,\varepsilon\to 0+,\,\delta\to 0+\,.$$

Для удобства записи величину $\mu_m(\varepsilon,\,\delta)$ обозначим через ε и из полученного результата следует, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ для всех $v\in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\mathrm{Re}\;(L_0[v],\,v)_0=\mathrm{Re}\int\limits_\Omega L_0\left[v(z)\right]\cdot\overline{v(z)}dz\geq-\varepsilon\left\|v;\,V^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|\left\|v;\,L_2(\Omega)\right\|. \tag{3.4.57}$$

Ниже нам понадобится неравенство

$$2A\cdot B\leq\frac{1}{q}A^2+qB^2,\quad A\geq 0,\quad B\geq 0. \tag{3.4.58}$$

Далее будем считать, что λ – неотрицательный параметр. Используя неравенства (3.4.57), (3.4.58), имеем

$$\begin{aligned}2\lambda\mathrm{Re}\;(L_0[v],\,v)_0&\geq-2\lambda\varepsilon\left\|v;\,V^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|\left\|v;\,L_2(\Omega)\right\|\geq\\&\geq-\varepsilon\left\|v;\,V^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2-\varepsilon\lambda^2\left\|v;\,L_2(\Omega)\right\|^2.\end{aligned} \tag{3.4.59}$$

Теперь рассмотрим дифференциальный оператор, имеющий не нулевые младшие члены

$$L[v(x)]=\sum_{|k|\leq 2r}\rho^{\alpha_{|k|}}(x)b_k(x)v^{(x)},\quad\alpha_{2r}=\alpha.$$

Представим этот оператор в виде

$$L[v(x)]=L_0[v(x)]+L_1[v(x)], \tag{3.4.60}$$

где

$$L_0[v(x)]=\sum_{|k|=2r}\rho^{\alpha}(x)b_k(x)v^{(x)},$$

$$L_1[v(x)]=\sum_{|k|\leq 2r-1}\rho^{\alpha_{|k|}}(x)b_k(x)v^{(x)}.$$

Так как числа α_j, $0 \le j \le 2r$, удовлетворяют условию III) теоремы 3.4.1, то для любого достаточно малого положительного числа μ существует положительное число $K(\mu)$ такое, что имеет место неравенство

$$\|L_1[v];\, L_2(\Omega)\| \le \mu \left\|v;\, V^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\| + K(\mu)\, \|v;\, L_2(\Omega)\|\,, \quad v \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3.4.61)$$

Далее в место выражения $\mu \cdot \mathrm{const}$, $K(\mu)\cdot \mathrm{const}$ мы снова будем писать μ, $K(\mu)$, соответственно.

Используя неравенство (3.4.61), имеем

$$2\lambda\, \mathrm{Re}\, \left(L_1[v],\, v\right)_0 = 2\lambda\, \mathrm{Re} \int\limits_\Omega L_1[v(z)]\overline{v(z)}dz \le 2\lambda \int\limits_\Omega |L_1[v(z)]|\, |v(z)| dz \le$$

$$\le 2\lambda \|L_1[v];\, L_2(\Omega)\| \cdot \|v;\, L_2(\Omega)\| \le \{\text{Используем неравенство (3.4.58)}\} \le$$
$$\le \frac{\lambda^2}{q}\|v;\, L_2(\Omega)\|^2 + q\, \|L_1[v];\, L_2(\Omega)\|^2 \le$$
$$\le \{\text{Используем неравенство (3.4.61)}\} \le$$
$$\le q\mu^2 \left\|v;\, V^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2 + qK(\mu)^2 \|v;\, L_2(\Omega)\|^2 + \frac{\lambda^2}{q}\|v;\, L_2(\Omega)\|^2 .$$

Следовательно

$$2\lambda\, \mathrm{Re}\, \left(L_1[v],\, v\right)_0 \ge$$
$$\ge -q\mu^2 \left\|v;\, V^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2 - qK(\mu)^2 \|v;\, L_2(\Omega)\|^2 - \frac{\lambda^2}{q}\|v;\, L_2(\Omega)\|^2 . \quad (3.4.62)$$

Теперь применяя неравенства (3.4.59), (3.4.62) в силу равенства (3.4.60) находим

$$2\lambda\, \mathrm{Re}\, \left(L[v],\, v\right)_0 = 2\lambda\, \mathrm{Re}\, \left(L_0[v],\, v\right)_0 + 2\lambda\, \mathrm{Re}\, \left(L_1[v],\, v\right)_0 \ge$$
$$\ge -\left(\varepsilon + q\mu^2\right) \left\|v;\, V^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2 - \left(qK(\mu)^2 + \frac{\lambda^2}{q} + \varepsilon\lambda^2\right) \|v;\, L_2(\Omega)\|^2 .$$

В условиях нашей теоремы на функциях $v \in C_0^\infty(\Omega)$ нормы $\left\|v;\, V^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|$,

$\left\|v;\, W^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|$ эквивалентны. Поэтому из полученного неравенства следует, что

$$2\lambda\,\mathrm{Re}\,\left(L[v],\,v\right)_0 \geq$$
$$\geq -\left(\varepsilon + q\mu^2\right)\left\|v;\, W^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 - \left(qK(\mu)^2 + \frac{\lambda^2}{q} + \varepsilon\lambda^2\right)\left\|v;\, L_2(\Omega)\right\|^2 \tag{3.4.63}$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Здесь ε, μ – сколь угодно малые положительные числа.

В условиях нашей теоремы выполняются все условия теоремы 3.2.1. По утверждению этой теоремы найдутся положительные числа c_*, K_* такие, что

$$c_*\left\|v;\, W^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq \left\|L[v];\, L_2(\Omega)\right\| + K_*\left\|v;\, L_2(\Omega)\right\| \tag{3.4.64}$$

для всех $v \in \mathring{W}^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)$.

Так как при $a \geq 0,\ b \geq 0$

$$2ab \leq a^2 + b^2 \Rightarrow (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2),$$

то возведя неравенство (3.4.64) в квадрат имеем

$$\varkappa_1\left\|v;\, W^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 \leq \left\|L[v];\, L_2(\Omega)\right\|^2 + K_*^2\left\|v;\, L_2(\Omega)\right\|^2, \quad \varkappa_1 = \frac{c_*^2}{2}. \tag{3.4.65}$$

Далее заметим, что если $\lambda \geq 0$, то

$$\left\|\mathbb{L}v + \lambda v;\, L_2(\Omega)\right\|^2 = \left(L[v] + \lambda v,\, L[v] + \lambda v\right)_0 =$$
$$= \left\|L[v];\, L_2(\Omega)\right\|^2 + \lambda^2\left\|v;\, L_2(\Omega)\right\|^2 + 2\lambda\mathrm{Re}\,\left(L[v],\,v\right)_0.$$

Отсюда в силу неравенств (3.4.63), (3.4.65) следует, что

$$\left\|\mathbb{L}v + \lambda v;\, L_2(\Omega)\right\|^2 \geq \left(\varkappa_1 - \varepsilon - q\mu^2\right)\left\|v;\, W^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 +$$
$$+\left(\lambda^2 - \varepsilon\lambda^2 - \frac{\lambda^2}{q} - qK(\mu)^2 - K_*^2\right)\left\|v;\, L_2(\Omega)\right\|^2. \tag{3.4.66}$$

Не ограничивая общности можно считать, что число $\varkappa_1 > 0$ в неравенстве (3.4.65) не превосходит $1/2$, то есть $0 < 2\varkappa_1 < 1$. Тогда при

$$\varepsilon = \frac{\varkappa_1}{8}, \quad \mu^2 = \frac{\varkappa_1}{8}, \quad q = 3$$

имеем

$$\varkappa_1 - \varepsilon - q\mu^2 = \varkappa_1 - \frac{\varkappa_1}{8} - 3\frac{\varkappa_1}{8} = \left(1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\right)\varkappa_1 = \frac{1}{2}\varkappa_1,$$

$$1 - \varepsilon - \frac{1}{q} = 1 - \frac{\varkappa_1}{8} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{\varkappa_1}{8} > \frac{2}{3} - \frac{1}{16} = \frac{29}{48} > \frac{1}{2}$$

В этом случае из неравенства (3.4.66) находим

$$\|\mathbb{L}v + \lambda v;\, L_2(\Omega)\|^2 \geq \frac{\varkappa_1}{2}\left\|v;\, W^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|^2 + \left(\frac{\lambda^2}{2} - M_*\right)\|v;\, L_2(\Omega)\|^2,$$

где

$$M_* = 3K(\mu)^2 + K_*^2 > 0, \quad \mu = \sqrt{\frac{\varkappa_1}{8}}.$$

Таким образом, мы доказали, что в сделанных выше предположениях существуют положительные числа $\varkappa_0$, λ_0 такие, что при $\lambda > \lambda_0$ имеет место неравенство

$$\|\mathbb{L}v + \lambda v;\, L_2(\Omega)\| \geq \varkappa_0\left\|v;\, W^{2r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\|$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Это и есть неравенство (3.4.3).

Теорема 3.4.1 доказана.

Обсуждение полученных результатов

Основные результаты диссертационной работы сформулированы в теоремах 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4, 2.3.6, 2.3.7, 2.4.1, 2.4.3, 2.4.6, 2.4.7, 3.2.1, 3.3.1, 3.3.2, 3.4.1.

Эти результаты относятся к исследованию разрешимости задачи Дирихле для эллиптических операторов недивергентного вида в ограниченной области n-мерного евклидова пространства, коэффициенты которых имеют степенное вырождение вдоль всей границы области. Аналогичные результаты ранее были известны только в случае операторов, первоначально заданных в дивергентном виде. Дивергентный вид исследуемого оператора позволяет сразу определить связанную с ним полуторалинейную форму и для решения поставленной задачи применить аппарат полуторалинейных форм в гильбертовом пространстве. Если же исследуемый оператор задан в недивергентном виде, то такой подход не работает. Здесь требуется применить другой метод, который основан на теории линейных операторов в банаховых пространствах. Таким образом, в диссертационной работе обобщены некоторые результаты, известные ранее на случай эллиптических операторов дивергентного вида, на случай эллиптических операторов недивергентного вида, и разработанная в работе техника позволяет и в дальнейшем получить новые результаты по этому направлению.

Для наглядности напомним определения операторов градиента и дивергенции. Если $u(x)$ – дважды дифференцируемая функция, определенная в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ переменных x_1, x_2, $\ldots$, x_n, то

$$\mathbf{grad}\, u(x) = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial u(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right),$$

$$\textbf{div}\ (\textbf{grad}\, u(x)) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right).$$

Исходя из этого равенства, вид дифференциального оператора второго порядка

$$L[u](x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)$$

называется **"дивергентным"**.

Дифференциальные операторы в частных производных дивергентного вида порядка $2r$, где r – некоторое натуральное число, определяются равенством

$$L[u](x) = \sum_{|k|,\,|l|\le r} \left(a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\right)^{(l)}. \qquad (1^*)$$

Здесь $k = (k_1,\, k_2,\, \ldots,\, k_n)$, $l = (l_1,\, l_2,\, \ldots,\, l_n)$ – мультииндексы, $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$, $|l| = l_1 + l_2 + \cdots + l_n$ – длины этих мультииндексов и

$$u^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|} u(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}}.$$

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с замкнутой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$ и $\rho(x)$, $x\in\Omega$, – регуляризованное расстояние точки $x\in\Omega$ до границы $\partial\Omega$. Задача Дирихле, связанная с оператором

$$L[u](x) = \sum_{|k|,\,|l|\le r} (-1)^{|l|}\left(a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\right)^{(l)}, \qquad (2^*)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$|a_{kl}(x)| \le M\,\rho(x)^{2\alpha}(x), \quad x\in\Omega,$$

$$\sum_{|k|,\,|l|\le r} a_{kl}(x)\xi_k\overline{\xi_l} \ge \varkappa\rho(x)^{2\alpha}(x)\sum_{|k|=r}|\xi_k|^2, \quad x\in\Omega,\ \{\xi_k\}\subset\mathbb{C},$$

хорошо изучена в работах С.М.Никольского и П.И.Лизоркина [68], [69–71], [94, 118, 120], Н.В.Мирошина [78–85], В.В.Шанькова [106] и Б.Л.Байдельдинова [5, 6].

Очевидно, оператор (2*), также как и оператор (1*) имеет дивергентный вид. В первой главе нашей диссертационной работе изучена разрешимость задачи Дирихле для оператора недивергентного вида

$$L[u](x) = \sum_{j\in J} \rho^{2\alpha_j}(x) \sum_{|k|=2j} a_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{3*}$$

где $J \subset \{0,\, 1,\, 2, \ldots,\, r\}$ и $r \in J$.

Предполагается, что коэффициенты этого оператора дифференцируемы и, в частности, удовлетворяют условиям

$$\mathrm{Re} \sum_{|\mu|=|q|=r} (-1)^r a_{\mu+q}(x) \zeta_\mu \overline{\zeta_q} \geq \varkappa \sum_{|\mu|=r} |\zeta_\mu|^2, \quad x \in \Omega,\ \{\zeta_\mu\}_{|\mu|=r} \subset \mathbb{C},$$

$$\left| a_k^{(p)}(x) \right| \leq M\, \rho^{-|p|}(x), \quad x \in \Omega,\ |k| = 2j,\ |p| \leq j,\ j \in J. \tag{4*}$$

Класс операторов вида (3*) шире чем класса операторов вида (2*) и наши результаты являются обобщениями соответствующих работ С.М.Никольского, П.И.Лизоркина, Н.В.Мирошина, В.В.Шанькова и Б.Л.Байдельдинова.

Отметим, что вырождение оператора (3*) называется согласованным, если числа α_j, $j \in J$, удовлетворяют условиям $\alpha_j = \alpha_r - r + j$ для всех $j \in J$. Если эти условия не выполняются, оно называется несогласованным. В первой главе диссертации изучена разрешимость задачи Дирихле для оператора (3*) как в случае согласованного вырождения так и в случае несогласованного вырождения оператора (3*).

Согласно условию (4*) коэффициенты оператора (3*), рассмотренного в первой главе, дифференцируемы. В отличие от этого, во второй главе диссертационной работы изучаются эллиптические операторы не дивергентного вида с негладкими коэффициентами. Здесь дифференцируемость коэффициентов не требуется, а требуется лишь их принадлежность некоторым L_p-пространствам с весом. Аналог результатов второй главы диссертационной работы ранее были известны только в случае эллиптических операторов без вырождения.

Выводы

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- теоремы об однозначной разрешимости вариационной задачи Дирихле с однородными и неоднородными граничными условиями, связанной с вырождающимся эллиптическим оператором высшего порядка недивергентного вида с гладкими коэффициентами в случае согласованного вырождения коэффициентов [1-А], [2-А], [3-А], [6-А], [7-А], [8-А];

- теоремы об однозначной разрешимости вариационной задачи Дирихле с однородными и неоднородными граничными условиями для вырождающегося эллиптического оператора высшего порядка недивергентного вида с гладкими коэффициентами в случае несогласованного вырождения коэффициентов [5-А], [9-А];

- априорная оценка решения вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих только негладкие старшие коэффициенты, в которой норма решения в пространство основных решений оценивается сверху через норму правой части уравнения [4-А];

- теорема об конечномерности ядра и замкнутости области значений одного класса вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами [4-А];

- априорная оценка решения вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами, имеющих младшие коэффициенты, в которой норма решения задачи в пространстве основных решений оценивается сверху через норму правой части уравнения и норма решения в пространстве L_2 [4-А];

- оценка нормы слабо позитивных эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами, в которой норма оператора оценивается снизу через положительную константу умноженную на нормой функции в основном пространстве [9-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты, полученные в диссертационной работе, имеют теоретический характер. Они могут быть использованы при развитии теории вырождающихся эллиптических операторов высокого порядка недивергентного вида, в частности, при изучении разрешимости краевых задач для таких операторов и исследовании их спектральных свойств.

Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью вырождающихся дифференциальных уравнений в решении прикладных задач механики и других разделов физики.

Литература

1. Агмон С. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы / С.Агмон, А.Дуглис, Л.Ниренберг. – Москва, 1962. – 205 с.

2. Баев А.Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А.Д.Баев // Доклады АН СССР. – 1982.– Т. 265. – №5. – С. 1044–1046.

3. Баев А.Д. Теорема о существовании и единственности решения одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка /А.Д.Баев, С.С.Бунаев // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т. 12. – №3. – С. 8–17.

4. Баев А.Д. Априорные оценки решений краевых задач в полосе для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д.Баев, С.С.Бунаев // Изв. вузов. Матем. – 2012. – №7. – С. 50–53.

5. Байдельдинов Б.Л. Об одном аналоге первой краевой задачи для эллиптического уравнения порядка $2m$ со степенным вырождением на границе / Б.Л.Байдельдинов // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 270. –№5. – С. 1038-1042.

6. Байдельдинов Б.Л. Об аналоге первой краевой задачи для эллиптических уравнений с вырождением. Метод билинейных форм / Б.Л.Байдельдинов // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1984. – Т. 170. – С. 3-11.

7. Бесов О.В. О плотности финитных функций в весовом пространстве С. Л. Соболева / О.В.Бесов // Труды Математического института им.В. А. Стеклова АН СССР. – 1983. – Т. 161. – С. 29-47.

8. Бесов О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О.В.Бесов, В.П.Ильин, С.М.Никольский. – М.: Наука. – 1975. – 480 с.

9. Бесов О.В. О некоторых свойствах весовых классов /О.В.Бесов, Я.Кадлец, А.Куфнер // Доклады АН СССР.– 1966.– Т. 171.– №3.– С. 514-516.

10. Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка / К.Х.Бойматов // Доклады АН СССР. – 1992. – Т.327. – №1. – С. 9-15.

11. Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле, порожденная некоэрцитивной формой / К.Х.Бойматов // Доклады АН России, – 1993. – Т. 330. – №3. – С.285-290.

12. Бойматов К.Х. Матричные дифференциальные операторы, порожденные некоэрцитивными формами / К.Х.Бойматов// Доклады АН России. – 1994. – Т. 339. – №1. – С.5-10.

13. Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле для систем вырожденно-эллиптических уравнений, ассоциированных с некоэрцитивными формами / К.Х.Бойматов// Международная конференция "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ". Сборник тезисов. Москва. – 1995. – С.54-55.

14. Бойматов К.Х. Граничные задачи для некоэрцитивных форм / К.Х.Бойматов// Доклады АН РТ. – 1998. – Т. XLI. – №10. – С.10-16.

15. Бойматов К.Х. О базисности по Абелю корневых вектор-функций вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов с сингулярными матричными коэффициентами / К.Х.Бойматов// Сибирский математический журнал. – 2006. – Т. 47. – №1. – С. 46-57.

16. Бойматов К.Х. О разрешимости и спектральных свойствах вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой / К.Х.Бойматов, С.А.Исхоков // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. – 1997. – Т.214. – С.107-134.

17. Бойматов К.Х. О собственных значениях и собственных функциях матричных дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами / К.Х.Бойматов, С.А.Исхоков// Вестник Хорогского Университета. Естественные науки. – 2000. – №2. – С.13-24.

18. Бриш Н.И. Задача Дирихле для эллиптических уравнений с неограниченными младшими коэффициентами. II / Н.И.Бриш, И.Н.Якшина // Дифференц. уравнения. – 1970. – Т. 6. – №11. – С. 2021-2029.

19. Вашарин А.А. Граничные свойства функций касса $W^1_{2,\alpha}$ и их приложение к решению одной краевой задачи математической физики / А.А.Вашарин// Известия АН СССР. Серия математики.– 1959.– Т.23.– №2.– С. 421-454.

20. Вашарин А.А. Некоторые краевые задачи для эллиптических уравнений с сильным вырождением на границе / А.А.Вашарин, П.И.Лизоркин // Доклады АН СССР. – 1961.– Т. 137. – №5. – С. 1015-1018.

21. Гадоев М.Г. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических операторов / М.Г.Гадоев, Т.П.Константинова // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т. 21. – №2. – С. 8-21.

22. Гадоев М.Г. Вариационная задача Дирихле для одного класса вырождающихся дифференциальных операторов / М.Г.Гадоев,

Т.П.Константинова // Международная конференция "Наука и инновационные разработки - северу" (г. Мирный, 12-14 марта 2014 г.). – 2014. – Мирный. – С. 261-262.

23. Гадоев М.Г. Об оценки резольвенты одного класса эллиптических операторов с вырождением / М.Г.Гадоев, Т.П.Константинова // Материалы международной научной конференции "Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел", посвященная 75-летию профессора Т.С. Сабирова (г. Душанбе, 29-30 октября 2015 г.). – 2015.– С. 84-87.

24. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. Наука. 1989. – 464 с.

25. Глушко В.П. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи / В.П.Глушко, Ю.Б.Савченко// Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Математический анализ. – 1985. – Т. 23. – С. 125-218.

26. Глушко В.П. Эллиптическая задача с существенно переменными коэффициентами в полуцилиндрами / В.П.Глушко, О.П.Малютина // В книге: Современные методы в теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XII. тезисы докладов. – 2001. – С. 51-52.

27. Глушко В.П. Эллиптическая граничная задача с вырождением в полуцилиндре / В.П.Глушко, О.П.Малютина // В книге: Воронежская зимняя математическая школа - 2002. Ответственный редактор В.И. Овчинников. – 2002. – С. 18-19.

28. Глушко В.П. О спектральных свойствах оператора, порожденного эллиптической задачей с вырождением / В.П.Глушко, О.П.Малютина

// В книге: Топологические и вариационные методы нелинейного анализа и их приложения. материалы международной научной конференции ТВМНА-2005. Председатель оргкомитета: И.И. Борисов. – 2005. – С. 38-39.

29. Егоров Ю.В. Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительны главы. 1985. – 168 с.

30. Исхоков С.А. Вариационная задача Дирихле для вырождающейся на границе эллиптической системы дифферециальных операторов / С.А.Исхоков // Доклады АН СССР. – 1992. – Т. 322. – №1. – С. 33-37.

31. Исхоков С.А. О гладкости решений обобщенной задачи Дирихле и задачи на собственные значения для дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами / С.А. Исхоков // Доклады Академии наук (Россия). – 1995. – Т. 342. – №1. – С. 20-22.

32. Исхоков С.А. Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов с нестепенным вырождением, порожденных некоэрцитивными билинейными формами / С.А.Исхоков // Вторая международная конференция "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования посвященная 80-летию члена-корреспондента РАН, профессора Л.Д.Кудрявцева. Тезисы докладов. –2003. – С. 172-174.

33. Исхоков С.А. Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов с нестепенным вырождением, порожденных некоэрцитивными формами / С.А. Исхоков // Доклады Академии наук (Россия),– 2003. – Т. 392. – №5. – С. 606-609.

34. Исхоков С.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением / С.А.Исхоков // Математические заметки. – 2010. – Т. 87. – №2. – С. 201-216.

35. Исхоков С.А. О гладкости решения вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов, ассоциированных с некоэрцитивными билинейными формами / С.А.Исхоков, А.Г.Каримов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2004. – Т. 47. – №4. – С. 68-74.

36. Исхоков С.А. О гладкости решения вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов, ассоциированных с некоэрцитивными билинейными формами / С.А.Исхоков, А.Г.Каримов // Математические заметки ЯГУ. – 2005. – Т. 12. – №1. – С. 74-86.

37. Исхоков С.А. Об одной вариационной задаче для эллиптического оператора, вырождающегося на границе ограниченной области / С.А.Исхоков, А.Я.Кужмуратов // Тезисы докладов IV Международной конференции по мат. моделированию (Якутск, 27-31.07.2004). – 2014. – С. 19-20.

38. Исхоков С.А. О вариационной задаче Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов / С.А.Исхоков, А.Я.Кужмуратов // Доклады Академии наук (Россия). – 2005. – Т. 403. – №2. – С. 165-168.

39. Исхоков С.А. Априорная оценка решений однородной задачи Дирихле для общих эллиптических уравнений с вырождением / С.А.Исхоков, А.Я.Кужмуратов // Материалы международной конференции "Актуальные вопросы математического анализа, дифференциальных уравнений и информатики посвященной 70-летию академика АН РТ Усманова З.Д. (Душанбе 24-25 августа 2007 г.).– 2007. – С. 43-44

40. Исхоков С.А. О гладкости обобщенного решения вариационной задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения в дивергентной форме / С.А.Исхоков, А.Я.Куджмуродов // // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2008. – Т. 51. – №12. – С. 802-809.

41. Исхоков С.А. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными формами / С.А.Исхоков, М.Г.Гадоев, Т.П.Константинова // Доклады Российской Академии Наук. – 2015. – Т. 462. – №1. – С. 7-10.

42. Исхоков С.А. О разрешимости вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной формой / С.А.Исхоков, Т.П.Константинова // Четвертая международная конференция "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", посвященная 90-летию члена-корреспондента РАН, академика Европейской Академии наук, профессора Л.Д.Кудрявцева (Москва, 25 – 29 марта 2013 г.). Тезисы докладов. – 2013. – С. 199-200.

43. Исхоков С.А. Обобщенная задача Дирихле для эллиптических операторов с несогласованным вырождением / С.А.Исхоков, И.А.Якушев // VIII Международ. конф. по матем.модел. Тезисы докладов, Якутск, 4-8 июля 2017г. – С. 41.

44. Исхоков С.А. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области / С.А.Исхоков, И.А.Якушев // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций». Душанбе, 27-28 февраля 2018 г. – С. 86-88.

45. Исхоков С.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области / С.А.Исхоков, И.А.Якушев // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2018. – Т.61. – №5. – С. 427-432.

46. Исхоков С.А. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических операторов / С.А.Исхоков, И.А.Якушев // Чебышевский сборник. – 2018. – Т. 19. – №3. – С. 164-182.

47. Исхоков С.А. О гладкости решения вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов с несогласованным вырождением в ограниченной области / С.А.Исхоков, И.А.Якушев // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2019. – Т. 62. – №3-4. – С. 139-144.

48. Исхоков С.А. О фредгольмовой разрешимости одной граничной задачи, связанной с некоэрцитивными формами / С.А. Исхоков, И.А.Якушев // Материалы 2-ой Международной конференции «Наука и инновационные разработки - Северу». Политехнический институт (ф) Северо-Восточного федерального университета им. М.К.Аммосова (Россия, г. Мирный. 14-15 марта 2019 г.). – С. 189-192.

49. Исхоков С.А. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для одного класса эллиптических операторов вырождающихся на многообразиях разных измерений / С.А.Исхоков, И.А.Якушев, А.Ё.Куджмуродов // Материалы Междуна-родной конференции "Современные пробле-мы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа" (Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.). – С. 121-124.

50. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В.Канторович, Г.П.Акилов – М.: Наука. – 1977. – 816 с.

51. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа. 4-е изд. / А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. – М.: Наука. – 1976. – 544 с.

52. Кондрашов В.И. Об одной оценке для семейств функций, удовлетворяющих некоторым интегральным неравенствам / В.И.Кондрашев // Доклады АН СССР. – 1938. – Т. 18.- №4-5.– С. 253-254.

53. Константинова Т.П. Однородная вариационная задача Дирихле связанная с некоэрцитивной формой, младшие коэффициенты которой принадлежат лебеговым пространствам / Т.П.Константинова // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Серия физ.мат.хим. геол. и тех. науки. – 2015. – №3(160). – С. 15-23.

54. Константинова Т.П. Оценка резольвенты и спектральные свойства одного класса вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области / Т.П.Константинова // Математические заметки СВФУ. – 2019. – Т. 26. – №4. – С. 37-50.

55. Куджмуродов А.Ё. Об одной априорной оценке решений однородной задачи Дирихле для эллиптических уравнений в дивергентной форме / А.Ё.Куджмуродов // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2007. – Т. 50. – №7. – С. 573-579.

56. Кудрявцев Л.Д. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений / Л.Д.Кудрявцев // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. – 1959. – Т. 55. – С. 1-182.

57. Кудрявцев Л. Д. Свойства граничных значений функций из весовых классов Й их приложения к краевым задачам / Л.Д.Кудрявцев // Мех. сплошн. среды и родств. пробл. анализа. – М: Наука. – 1972. – С 259-265.

58. Кудрявцев Л.Д. О вариационном методе отыскания обобщенных решений дифференциальных уравнений в функциональных пространствах со степенным весом / Л.Д.Кудрявцев // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19. – №10. – С. 1723-1740.

59. Кудрявцев Л.Д. О существование и единственности решений вариационных задач / Л.Д.Кудрявцев // Доклады АН СССР. – 1988. – Т. 298. – №5. – С. 1055-1060.

60. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А.Ладыженская, Н.Н.Уральцква. – Москва: Наука. – 1973. – 576 с.

61. Левендорский С.З. Об одном классе эллиптических операторов, вырождающихся нестепенным образом на границе / С.З.Левендорский // Сиб. матем. журн. – 1992. – Т. 33. – №5. – С. 91–99.

62. Левендорский С.З. Вырождающиеся эллиптические уравнения и их краевые задачи / С.З.Левендорский, Б.П.Панеях // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – 1990.– Т. 63. – С. 131-200.

63. Левендорский С.З. О типах вырождающихся эллиптических операторов / С.З.Левендорский // Матем. сб. – 1989. – Т. 180. – №4. – С. 513-528.

64. Левендорский С.З. О типах вырождающихся эллиптических операторов / С.З.Левендорский // Доклады АН СССР. – 1988. – Т. 303. – №1. С. 24-28.

65. Левендорский С.З. Коэрцитивность вырождающихся эллиптических операторов / С.З.Левендорский // Доклады АН СССР. – 1988. – Т. 298. – №1. С. 29-31.

66. Левендорский С.З. Об обобщениях формулы Вейля для вырождающихся операторов / С.З.Левендорский // Доклады АН СССР. – 1987. – Т. 293. – №6. С. 1297-1301.

67. Лизоркин П.И. К тории вырождающихся эллиптических уравнений / П.И.Лизоркин // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1985. – Т.172. – С. 235-271.

68. Лизоркин П.И. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением. Вариационный метод / П.И.Лизоркин, С.М.Никольский // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1981. – Т. 157. – С. 90-118.

69. Лизоркин П.И. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением (случай обобщенных решений) / П.И.Лизоркин, С.М.Никольский // Доклады АН СССР. – 1981. – Т. 259. – №1. – С. 28-30.

70. Лизоркин П.И. Эллиптические уравнения с вырождением. Дифференциальные свойства решений / П.И.Лизоркин, С.М.Никольский // Доклады АН СССР. – 1981. – Т. 257. – №2. – С. 278-282.

71. Лизоркин П.И. Эллиптическое уравнение с вырождением. Вариационный метод / П.И.Лизоркин, С.М.Никольский // Доклады АН СССР. – 1981. – Т. 257. – №1. – С. 42-45.

72. Лизоркин П.И. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью / П.И.Лизоркин, С.М.Никольский // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. – 1983. – Т. 161. – С. 157-183.

73. Лизоркин П.И. О гладкости решения первой краевой задачи для одного модельного вырождающегося эллиптического оператора второго

порядка / П.И.Лизоркин, Н.В.Мирошин // Дифференциальные уравнения. – 1986. – Т.22. – №11. – С. 1945-1951.

74. Лизоркин П.И. Обобщенный интеграл Пуассона и гладкость решения задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов / П.И.Лизоркин, Н.В.Мирошин // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т.24. – №2. – С. 305-313

75. Лионс Ж-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж-Л.Лионс, Э.Мадженес. – М.: Мир.– 1971 – 372 с.

76. Малютина О.П. Эллиптическая задача с вырождением и сингулярности на бесконечности / О.П.Малютина, В.П.Глушко // В книге: Четвертый Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике. (ИНПРИМ-2000). – 2000. – С. 82.

77. Малютина О.П. О разрешимости одной эллиптической задачи с вырождением в полубесконечном цилиндре / О.П.Малютина, В.П.Глушко // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2001. №2. – С. 78-92.

78. Мирошин Н.В. Обобщенная задача Дирихле для одного класса эллиптических дифференциальных операторов, вырождающихся на границе области. Некоторые спектральные свойства / Н.В.Мирошин // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12.– №6.– С. 1099-1111.

79. Мирошин Н.В. Первая краевая задача для эллиптических операторов, вырождающихся на границе области / Н.В.Мирошин // Доклады АН СССР. – 1976. – Т. 230. – №2. – С. 275-278.

80. Мирошин Н.В. Внешняя задача Дирихле для вырождающегося эллиптического оператора / Н.В.Мирошин // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1979. – Т. 150. – С. 198-211.

81. Мирошин Н.В. Об одном соотношении между весовыми пространствами и однородной краевой задачей с „весом"на границе области / Н.В.Мирошин // Матем. методы исслед. физ. процессов. – М.: Энергоиздат. – 1982.– С. 44-50.

82. Мирошин Н.В. К вариационной задаче Дирихле для вырождающихся на границе эллиптических операторов / Н.В.Мирошин // Доклады АН СССР. – 1988. – Т. 298. – №5. – С. 1069-1072.

83. Мирошин Н.В. Вариационная задача Дирихле для вырождающегося на границе эллиптического оператора / Н.В.Мирошин // Дифференц. уравнения.– 1988. – Т. 24. – №3.– С. 455-464.

84. Мирошин Н.В. О гладкости решений краевых задач и задач на собственные значения для вырождающихся на границе эллиптических операторов / Н.В.Мирошин // Доклады АН СССР. – 1988. – Т. 299. – №6. – С. 1310-1312.

85. Мирошин Н.В. Задача Неймана для вырождающегося на границе эллиптического оператора / Н.В.Мирошин // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43. – №2. – С. 247-255.

86. Митрохин С.И. Асимптотика спектра периодической краевой задачи для дифференциального оператора с суммируемым потенциалом / С.И.Митрохин // Тр. ИММ УрО РАН. – 2019. – Т. 25. – №1. – С. 136-149.

87. Митрохин С.И. О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом / С.И.Митрохин // Уфимск. матем. журн. – 2011. – Т. 3. – №4. – С. 95-115.

88. Митрохин С.И. О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами / С.И.Митрохин // Труды МИРАН. – 2010. – Т. 270. – С. 188-197.

89. Митрохин С.И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами / С.И.Митрохин // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. – 2009. – №3 – С. 14-17.

90. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения (Второе издание, переработанное и дополненное) / С.М.Никольский. – Москва. Наука. – 1977. – 455 с.

91. Никольский С.М. О теоремах вложения, продолжения и приближения дифференцируемых функций многих переменных / С.М.Никольский // Успехи мат. наук. – 1961. – Т. 16. –№5. – С. 63-114.

92. Никольский С.М. Вариационная проблема для уравнения эллиптического типа с вырождением на границе / С.М.Никольский // Тр. Матем. ин-та. АН СССР. – 1979. – Т. 150. – С. 212-238.

93. Никольский С.М. О некоторых неравенствах для функций из весовых классов и краевых задачах с сильным вырождением на границе / С.М.Никольский, П.И.Лизоркин // Доклады АН СССР. – 1964. – Т. 159. – №3. – С. 512-515.

94. Никольский С.М. К теории эллиптических уравнений порядка 2n, вырождающихся на границе области / С.М.Никольский, П.И.Лизоркин // В кн.: Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики, Изд-во Ереван. ун-та, Ереван. – 1982. – С. 198-208.

95. Никольский С.М. О краевой задаче эллиптического типа с сильным вырождением / С.М.Никольский, П.И.Лизоркин // В кн.: Актуальные проблемы математической физики и вычислительной математики. – 1984. – Москва, Наука. – С. 128–134.

96. Никольский С.М. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / С.М.Никольский, П.И.Лизоркин, Н.В.Мирошин // Известия Вузов. Математика. – 1988. – №8. – С.4-30.

97. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1966. – 292с.

98. Соболев С.Л. Задача Коши в пространстве функционалов / С.Л.Соболев // Доклады АН СССР. – 1935. – Т. 3. – С. 291-294.

99. Соболев С.Л. Methode nouvelle a reseodre le probleme de Cauche pour les equations lineaires hyperboliques normales / С.Л.Соболев // Матем. сб. – 1936. – Т. 1 (43). – С. 39-72.

100. Соболев С.Л. Об одной теореме функционального анализа / С.Л.Соболев // Матем. сб. – 1938. – Т. 4 (46). – С. 471-497.

101. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа а математической физике / С.Л.Соболев. – 1950. – ЛГУ. – 255 с.; – 1962. – Новосибирск. – 255 с.

102. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций /И.Стейн.– 1973. – М.: Наука. – 342 с.

103. Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе/ С.А. Терсенов. – 1973. – Новосибирск. – 144с.

104. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / Х.Трибель. – 1980. – М.: Мир. – 664 с.

105. Треноги В.А. Функциональный анализ / В.А.Триногин. – 1980. – М.: Наука. – 497 с.

106. Шаньков В.В. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением / В.В.Шаньков // Доклады АН СССР.– 1985. – Т. 218. – №6. – С. 1320-1322.

107. Шишмарев И.А. Введение в теорию эллиптических уравнений / И.А.Шишмарев. – 1979. – М., Изд-во Моск. ун-та. – 184 с.

108. Якушев И.А. О суммируемости в смысле Абеля-Лидского системы корневых вектор-функций одного класса эллиптических операторов с вырождением / И.А. Якушев, Т.П. Константинова // "Современные проблемы математики и её приложений " Материалы международной научной конференции, посвящённой 70-летию со дня рождения академика Академии наук Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Илолова Мамадшо (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.) – 2018. – С. 153-155.

109. Beppo Levi Sul principio di Dirichlet / L.Beppo // Rend. Palermo. – 1906. – Vol. 22. – P. 293-359.

110. Chabrowski, J.H. On the Dirichlet problem for a linear elliptic equation with unbounded coefficients / J.H. Chabrowski // Boll. Unione mat. ital. – 1986. – Vol. 85. – No. 1. – P. 71-79.

111. Chabrowski, J.H. On the Dirichlet problem for a degenerate elliptic equation / J.H. Chabrowski // Comm. math. Univ. carol. – 1987. – Vol. 28. – No. 1. – P. 141-155.

112. Chabrowski, J.H. On the Dirichlet problem for degenerate elliptic equations / J.H. Chabrowski // Publ. Res. Inst. Math. Sci. – 1987. – Vol. 23. – No. 1. – P. 1-16.

113. Cavalheiro A.C. Weighted Sobolev Spaces and Degenerate Elliptic Equations / A.C. Cavalheiro // Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.). – 2008. – Vol. 26. – No. 1-2. – P. 117-132.

114. Chen H. Lower bounds of Dirichlet eigenvalues for some degenerate elliptic operators / H. Chen, P. Luo // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. – 2015. – Vol. 53. – No. 3-4. – 23 p.

115. Chen H. Dirichlet problem for semilinear edge-degenerate elliptic equations with singular potential term / H. Chen, X. Liu // Journal of Differential Equations.– 2012. – vol. 252. – P. 4289-4314.

116. Kim D. Elliptic equations with nonzero boundary conditions in weighted Sobolev spaces / D. Kim // Jour. Math. Anal. Appl. – 2008. – Vol. 337. – P. 1465-1479.

117. Levendorskii S. Degenerate Elliptic Equations. Mathematics and its applications / S. Levendorskii. – 1994. – Kluwer Academic Publisher. – Vol. 258. – 442 p.

118. Lizorkin P.I. Elliptical operators with degeneration / P.I.Lizorkin, S.M. Nikol'skii // In book: Functions, series, operators (Budapest). – 1980, v. I, II, Colloq. Math. Soc. Ja?nos Bolyai. – Vol. 35; – 1983. – North-Holland, Amsterdam. – P. 773-779.

119. Lototsky S.V. Sobolev spaces with weights in domains and boundary value problems for degenerate elliptic equations / S.V. Lototsky // Methods Appl. Anal. – 2000. – Vol. 7. – No. 1. – P. 195-204.

120. Nikolskii S.M. Some boundary problems for the equations with strong degeneration / S.M.Nikolskii // Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Comenianae Math. – 1967. – Vol. 17. – P. 121–127.

121. Popivanov P.R. The degenerate oblique derivative problem for elliptic and parabolic equations / P.R. Popivanov, D.K. Palagachev. – Mathematical Research, Vol. 93, Akademie Verlag (Wiley-VCH), Berlin (1997). – 153 p.

122. Stredulinsky, E.W. Weighted inequalities and degenerate elliptic partial differential equations / E.W. Stredulinsky // Lect. Notes Math.– 1984. – Vol. 1074. – 142 p.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. В журналах, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации:

1-А. Хакназаров К.Э. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов не дивергентного вида в ограниченной области [Текст] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2020, т.63, № 5-6, с. 309-315.

2-А. Хакназаров К.Э. О фредгольмовой разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида [Текст] / К.Э.Хакназаров // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2020, т.63, № 9-10, с. 586-590.

3-А. Хакназаров К.Э. Вариационная задача Дирихле с однородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида [Текст] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Доклады Национальной академии наук Таджикистана, 2021, т. 64, № 7-8, с. 393-400.

4-А. Хакназаров К.Э. О конечномерности ядра некоторых вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида [Текст] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Доклады НАН Таджикистана, 2022, 5-А. Хакназаров К.Э. Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов недивергентного вида с несогласованным вырождением [Текст] / К.Э.Хакназаров // Известия НАН Таджикистана. Отделения физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2022

2. В других изданиях:

6-А. Хакназаров К.Э. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида [Текст] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Материалы Международной конференция «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвящённой 70-летию со дня рождения академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора К.Х.Бойматова (Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.) с. 150-154.

7-А. Хакназаров К.Э. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида [Текст] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Материалы Международной конференции «Актуальные проблемы современной математики», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.) – С. 90-94.

8-А. Хакназаров К.Э. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида [Текст] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Материалы международной научно-практической конференции, посвященной памяти Абдуфаттоха Хотамова (Душанбе, 15-16 мая 2022 г.) – С. 41-45.

9-А. Хакназаров К.Э. О фредгольмовой разрешимости неоднородной вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов недивергентного вида в ограниченной области [Текст] / С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию со дня рождения академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Шабозова М.Ш. (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.) – С. 75-78.