

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу Хакназарова Кобила Эражзода «Задача Дирихле для некоторых классов вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида», представленную на соискание учёной степени доктора философии (PhD) – доктора по специальности 6D060100 – Математика: 6D060101 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Актуальность темы диссертации. Диссертационная работа Хакназарова Кобила Эражзода «Задача Дирихле для некоторых классов вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида» посвящена изучению разрешимости задачи Дирихле в обобщённой постановке для некоторых классов вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида. Исследуемые эллиптические операторы задаются в ограниченной области и имеют степенное вырождение на границе области. Из приведённого в диссертации обзора литературных источников по теме исследования следует, что подобные задачи ранее хорошо изучались в случае операторов дивергентного вида в работах С.М.Никольского, Х.Трибеля, Л.Д.Кудрявцева, П.И.Лизоркина, Н.В.Мирошина, К.Х.Бойматова С.А.Исхокова и др. Это связано с тем, что в случае операторов дивергентного вида можно определить соответствующие им полуторалинейные формы и затем применить теорию форм в гильбертовом пространстве. В отличие от этого, все эллиптические операторы, рассмотренные в диссертации К.Э.Хакназарова, имеют недивергентный вид, что свидетельствует об актуальности темы диссертации.

Оценка содержания диссертации. Диссертационная работа состоит из списка обозначений, введения, общей характеристики работы, трёх глав, обсуждения полученных результатов, выводов, рекомендаций по практическому использованию результатов и списка литературы, насчитывающего 131 наименование. Во введении обоснована актуальность темы исследования, раскрыта степень научной разработанности изучаемой проблемы. В разделе «Общая характеристика работы» приведены цели и задачи исследования, научная новизна полученных результатов, положения, выносимые на защиту, и методы исследования.

Первая глава работы посвящена анализу литературы по теме исследования. Она состоит из трёх параграфов. В первом параграфе первой главы параграфе приведён обзор результатов по функциональным пространствам со степенными весами, которые используются в диссертационной работе. Во втором параграфе

первой главы приведён анализ работ по вырождающимся эллиптическим операторам с вещественнозначными коэффициентами и случай таких операторов с комплекснозначными коэффициентами рассмотрен в третьем параграфе первой главы.

Вторая глава диссертации посвящена изучению разрешимости задачи Дирихле для эллиптических операторов с гладкими коэффициентами. Она состоит из четырёх параграфов. Первые два параграфа имеют вспомогательный характер. В первом параграфе второй главы приведены известные результаты из общей теории вариационных задач в гильбертовом пространстве, а во втором параграфе приведены некоторые теоремы вложения и теоремы о следах из теории нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных в ограниченной области со степенными весами. Эти теоремы получены в работах С.М.Никольского, Л.Д.Кудрявцева, П.И.Лизоркина, К.Х.Бойматова, Н.В.Мирошина и др. Основные научные результаты второй главы диссертации получены в третьем и четвертом параграфах этой главы. В третьем параграфе рассматриваются эллиптические операторы, которые имеют только ненулевые старшие коэффициенты. В этом параграфе сначала изучается однозначная разрешимость задачи Дирихле в пространстве $V_{2,\alpha}^r(\Omega)$, затем изучается фредгольмова разрешимость задачи Дирихле в пространстве $W_{2,\alpha}^r(\Omega)$. В четвертом параграфе рассматриваются операторы более общего вида, которые имеют ненулевые младшие коэффициенты. Степень вырождения младших коэффициентов влияют на разрешимость изучаемой задачи Дирихле, и поэтому в диссертации введены понятия согласованного и несогласованного вырождения коэффициентов исследуемого оператора. В случае согласованного вырождения коэффициентов только степени вырождения старших коэффициентов участвуют в определении пространства решений основной задачи, то есть, вырождения младших коэффициентов оператора не влияют на разрешимость задачи. В отличие от этого, в случае несогласованного вырождения коэффициентов вырождение младших коэффициентов влияет на разрешимость задачи Дирихле. Учитывая это, в работе сначала вводится понятие «старшая форма» и затем с учётом степени вырождения коэффициентов старших форм вводится основное пространство решений вариационной задачи Дирихле. В третьей главе диссертационной работы рассматриваются классы вырождающихся эллиптических операторов, коэффициенты которых недифференцируемы. В этом случае коэффициенты называются негладкими. Изучение таких операторов намного сложнее, чем операторы с дифференцируемыми коэффициентами, рассмотренные ранее во второй главе диссертации.

Третья глава диссертационной работы состоит из четырёх параграфов. Первый параграф имеет вспомогательный характер, в нём приведены некоторые известные утверждения из общей теории эллиптических дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве. В третьей главе диссертации, также как и во второй главе, сначала рассматриваются операторы, которые имеют только старшие коэффициенты, а затем рассматривается более общий случай, то есть, случай, когда операторы могут иметь ненулевые младшие коэффициенты. Во втором параграфе третьей главы для вырождающихся эллиптических операторов, имеющих только старшие коэффициенты, доказываемое неравенство, которое содержит оценку снизу нормы значения исследуемого оператора. Основное неравенство, доказанное в третьем параграфе третьей главы, является аналогом неравенства Гординга для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида. В четвёртом параграфе третьей главы изучены слабо позитивные эллиптические операторы со степенным вырождением. На основе всех неравенств для норм значения эллиптического оператора, полученных в третьей главе, в диссертации доказаны соответствующие априорные оценки решения задачи Дирихле.

Новизна полученных результатов.

⇒ доказаны теоремы об однозначной разрешимости обобщённой задачи Дирихле с однородными и неоднородными граничными условиями для вырождающегося эллиптического оператора высшего порядка недивергентного вида с гладкими коэффициентами. Отдельно рассмотрены случаи согласованного и несогласованного вырождения коэффициентов оператора;

⇒ для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида, имеющих только негладкие старшие коэффициенты, доказана априорная оценка решения вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями, в которой норма решения в пространстве основных решений оценивается сверху через норму правой части уравнения;

⇒ доказана теорема об конечномерности ядра и замкнутости области значений одного класса вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами;

⇒ для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами, имеющих младшие коэффициенты, доказана априорная оценка решения вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями, в которой норма решения задачи в пространстве основных решений оценивается сверху через норму правой части уравнения и норму решения в пространстве L_2 ;

⇒ для слабо позитивных эллиптических операторов недивергентного вида с негладкими коэффициентами доказана оценка, в которой норма оператора оценивается снизу через положительную константу, умноженную на норму функции в основном пространстве.

Степень достоверности и апробация результатов исследования. Научные результаты, полученные в диссертации К.Э.Хакназарова, обоснованы строгими математическими доказательствами с применением методов теории операторов в гильбертовом пространстве и теории дифференцируемых функций многих вещественных переменных. Достоверность и новизна полученных автором результатов не вызывают сомнений.

Основные результаты диссертации обсуждались на общеинститутском семинаре Института математики им. А.Джураева НАНТ и нескольких международных научных конференциях. Они в полном объёме отражены в научных публикациях автора, 5 из которых опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан.

Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов. Основные результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в научных институтах и организациях, занимающихся современными проблемами теории краевых задач для уравнений с частными производными и теории пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных, в том числе в Математическом институте им. В.А.Стеклова Российской академии наук, Российском университете дружбы народов, Институте математики им. А.Джураева НАН Таджикистана. Они также могут быть использованы в учебных заведениях в учебном процессе при чтении спецкурсов.

Соответствие автореферата основному содержанию диссертации. Автореферат диссертации правильно и полно отражает содержание, актуальность темы исследования, новизну и значимость полученных результатов, содержит все основные положения и выводы. Диссертация и автореферат оформлены в соответствии с соответствующими требованиями. Содержание диссертации соответствует выбранной специальности доктора философии (PhD) – доктора по специальности 6D060100 – Математика: 6D060101 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Помимо достоинств диссертационной работы надо говорить и о её недостатках. По диссертационной работе есть некоторые замечания:

✓ Автору следовало бы расширить список в разделе «Обозначения», вклю-

чив, например, расшифровку обозначений $C_0^\infty(\Omega)$, $\langle F, v \rangle$ и т.д.

✓ Имеются несколько незначительных опечаток редакционного и стилистического характера, например, на стр.34 в одном интеграле отсутствует dx ; на стр.40 в теореме 2.3.3 вместо «положительное число $M > 0$ » можно было коротко написать «число $M > 0$ » и т.д.

Следует отметить, что эти замечания легко устранимы, имеют только редакционный характер и ни как не влияют на правильность представленных в диссертационной работе результатов.

Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным «Положением о присуждении учёных степеней». На основании вышеизложенного считаю, что диссертационная работа «Задача Дирихле для некоторых классов вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида» соответствует всем требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени доктора философии (PhD) – доктора по специальности 6D060100 – Математика: 6D060101 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ, а её автор, Хакназаров Кобил Эражзода заслуживает присуждения ему искомой учёной степени.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ, заведующий кафедрой математического анализа Таджикского государственного педагогического университета им. С.Айни
22.02.2023 г.



Юсупов Г.А.

Место работы: 734003, г.Душанбе, проспект Рудаки,121,
Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни
Тел.: (+992)93-500-22-14.
E-mail: info@tgpu.tj

Подпись Г.А.Юсупова удостоверяю.
Начальник ОК и СЧ ТГПУ



Мустафозода А.