РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ С. АЙНИ

УДК 517.518.66 На правах рукописи

САФАРЗОДА ЭШМАТИ ХОТАМ

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ И СУММИРУЕМОСТЬ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 - Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук Хасанов Юсуфали

Душанбе – 2023

Оглавление

Обозначения

$L_p^{(2)}$ $(1 \leq p < \infty)$ −пространство измеримых по Лебегу суммируемых со степенью p 2π − периодических функций $f(x_1, x_2)$;

$vraisup$ − существенная верхняя грань;

$\omega_r(f;u)_{L_p^{(2)}}$ − модуль непрерывности r −го порядка функции

$f(x_1, x_2) \in L_p^{(2)}[-\pi, \pi]$;

sup −точная верхняя грань;

inf −точная нижняя грань;

$\Delta_h^m f(x)$ −разность m −го порядка функции f в точке x с шагом h;

$E_n(f)_{L_p^{(2)}}$ −величина наилучшего приближения функции

$f(x_1, x_2) \in L_p^{(2)}[-\pi, \pi]$;

A_n^β − размещение из n элемент по β;

B_p − пространство почти-периодических в смысле Безиковича функций;

$W_r(f, H)_{B_2}$ − модуль усреднения порядка r $(r \in N)$ функции $f \in B_2$;

N −множество натуральных чисел;

$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)dx$ − среднее значение функции $f(x)$.

Введение

Актуальность темы исследования. В теории почти-периодических функций Бора, Безиковича, Степанова и Вейля изучения и исследования критерий равномерной и абсолютной сходимостей и суммируемости рядов Фурье как в одномерном, так и в многомерном случаях, играют особую роль.

Исследованию абсолютной сходимости рядов Фурье периодических функций посвящены работы С.Н.Бернштейна [5-6], О.Саса [83-84, А.Зигмунда [10-11], С.Б.Стечкина [79-82], Р.М.Тригуба [99], Ж.П.Кахань [12], А.А.Конюшкова [64], М.Ф.Тимана [22], [87], [93], [94], [98], [122], [123]. В случае кратных тригонометрических рядов Фурье аналогичные исследования проводились М.Ф.Тиманом [88], [95], [96], Б.И.Голубовым [40-42], Ю.Муселиаком [70], М.И.Дьяченко [47-48], [50-54], С.П.Коноваловым [62-63], А.А. Саакян [77], Г.Д.Джумабаевым [46], А.Н.Бахваловым [32], S.Bochner [33], Е.Д.Нурсултановым [71], А.П.Антоновым [1], С.М.Никольским [17]. Что же касается вопросов абсолютной суммируемости таких функций, то имеются работы Л.Лейндлера [67], К.Тандори [86], М.Ф.Тимана [90], [91], [93], С.А.Барона [3], Л.В.Грепачевской [43-44], G.Sonouchi [78]. А в случае кратных рядов Фурье исследованы в работах В.Г.Челидзе [121], М.Ф.Тимана [89], [95-97], И.Е.Жака [57-58], Ю.А.Пономаренко [72], [73], [75], М.И.Дьяченко [49], [51], [55], Л.В.Жижиашвили [59-61], А.П.Антонова [31], А.И.Янушаускаса [30], Т.М. Вуколова [37-38], Л.Д.Гоголадзе [39], R.Taberski [85] и других.

Если анализировать теорию почти-периодических функций, то абсолютная сходимость и суммируемость рядов Фурье исследованы слабо, чем периодических функций. В работах Б.М.Левитана [14], [15], Е.А.Бредихиной [34-36], Н.П.Купцова [66], Я.Г.Притулы [76], М.Ф.Тимана [92], Ю.Муселиака [69], А.С.Джафарова и Мамедова [45], Ю.Х.Хасанова [101], [105], [109], [111-113], [124] получены некоторые необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье почти - периодических функций. В случае кратных тригонометрических рядов Фурье почти-периодических функций нам известны только результаты Ю.Х.Хасанова [102-104], [106-108], [119], [125].

Актуальность и целесообразность результатов, полученные в диссертации, определяются тем, что в ней автору впервые удалось установить новые признаки абсолютной сходимости и суммируемости двойных рядов Фурье почти-периодических функций двух переменных по Безиковичу.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Первые вопросы о почти-периодических функций исследованы датским математиком Г. Бором в 20-30-х годах XX века и в настоящее время изучены различные вопросы сходимости и суммируемости рядов Фурье таких функций в этой теории.

Дальнейшее развитие теории почти-периодических функций было продолжено рижским математиком П. Болем и французским математиком Е.Эскалангоном.

Особую роль в теории почти-периодических функций играют исследования проблем абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье таких функций. Но в отличие от периодических функций, проблемы, касающиеся установления признаков абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций исследованы слабо. Это связано с тем, что показатели Фурье таких функций могут лежать всюду плотно.

В исследованиях Ю. Муселиака [69], Б.М. Левитана [14], [15] Н.П. Купцова [66], Я.Г. Притулы [76], Е.А. Бредихиной [34], [35], А.С. Джафарова и Г.А. Мамедова [45], Ю.Х. Хасанова [101], [104], [105], [112], [124] получены некоторые необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических в смысле Бора, Безиковича и Степанова функций.

Связь работы с научными программами (проектами), темами.

Диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета имени С. Айни в 2016-2022г. по теме «Теория приближения функций».

Общая характеристика работы

Цель исследования. Основная цель исследования в диссертационной работы состоит в нахождении необходимых и достаточных условий абсолютной сходимости и суммируемости двойных рядов Фурье почти-периодических функций Безиковича, когда: а) их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности; б) их спектр имеет единственную предельную точку в нуле, т.е. получение результатов, которые получены в одномерном случае Хасановым Ю.Х.

Задачи исследования. На основание поставленной цели, в диссертации рассмотрены следующие задачи:

- выявить необходимые и достаточные признаки абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодических функций двух переменных в смысле Безиковича, когда: а) их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности; б) их спектр имеет единственную предельную точку в нуле;
- установить достаточные условия абсолютной суммируемости двойных рядов Фурье почти-периодических функций по Безиковичу, когда: а) их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности; б) их спектр имеет единственную предельную точку в нуле;
- исследовать проблемы абсолютной чезаровской суммируемости двойных рядов Фурье в терминах поведения коэффициентов Фурье.

Объект исследования. Объектами исследования являются теория почти-периодических функций в смысле Безиковича, сходимость и суммируемость двойных рядов Фурье таких функций и абсолютная суммируемость двойных рядов Фурье в терминах поведения коэффициентов Фурье.

Предмет исследования. Предметом исследования является выявление критериев, устанавливающих абсолютную сходимость и чезаровскую суммируемость кратных рядов Фурье почти-периодических в смысле Безиковича функций, в зависимости от поведения коэффициентов Фурье.

Научная новизна исследований. Полученные в диссертации результаты считаются новыми, установлены автором самостоятельно и заключаются в следующем:

- выявлены необходимые и достаточные признаки абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодических функций двух переменных в смысле Безиковича, когда: а) их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности; б) их спектр имеет единственную предельную точку в нуле;
- установлены достаточные условия абсолютной суммируемости двойных рядов Фурье почти-периодических функций по Безиковичу, когда: а) их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности; б) их спектр имеет единственную предельную точку в нуле;
- исследованы проблемы абсолютной чезаровской суммируемости двойных рядов Фурье в терминах поведения коэффициентов Фурье.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа носит как теоретический, так и практический характер. Результаты диссертационной работы могут быть применены в теории рядов Фурье и специальных разделах теории функций.

Положения, выносимые на защиту:

- нахождение необходимых и достаточных условий абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодических функций двух переменных по Безиковичу, имеющих единственную предельную точку в бесконечности и в нуле;
- получение утверждений для установления достаточных и необходимых условий абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодических функций двух переменных, имеющих единственную предельную точку в бесконечности и в нуле;

- получение утверждений для установления критериев абсолютной суммируемости двойных рядов Фурье почти-периодических функций в смысле Безиковича, когда: а) их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности; б) их спектр имеет единственную предельную точку в нуле;
- доказательств теорем для нахождения условий абсолютной чезаровской суммируемости двойных рядов Фурье в терминах поведения коэффициентов Фурье.

Степень достоверности результатов проведенных исследований. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений и вспомогательных предложений, приведенных в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов.

Соответствия диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 01.01. 01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ и является разделом математического анализа, указанного в пункте III параграфа 3 паспорта научной специальности.

Личный вклад соискателя ученой степени. Задача исследования и выбор метода доказательств сформулированы научным руководителем работы, оказывающим также консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, перечисленные в разделе «Научная новизна», получены лично автором.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- семинары кафедры информатики и информационных технологий Российско-Таджикского (Славянского) университета под руководством профессора Хасанова Ю.Х. (Душанбе 2016-2022);
- международной научной конференции «Геометрический анализ и его приложения» (Волгоград, 2016 г.);

- международной научной конференции «Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел» (Душанбе, 2017 г.);
- международной научной конференции «Актуальные проблемы современной математики», посвященная 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова (Душанбе, 25-26 июня 2021г.);
- международной научной конференции «Современные проблемы теории чисел и математического анализа», посвященная 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Дододжона Исмоилова (Душанбе, 29-39 апреля 2021г.);

Публикации. Основные результаты автора по теме диссертации опубликованы в 12 работах, список которых приведен в конце автореферата. Работы [1-А, 2-А, 3-А, 4-А, 5-А, 6-А] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК РТ при Президенте Республики Таджикистан. В работах, написанных совместно с Ю.Х. Хасановым, соавтору принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка цитированной литературы из 125 наименований и занимает 132 страницы машинописного текста. Главы диссертации разбиты на отдельные параграфы. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм или формул в данном параграфе.

Глава 1. Анализ литературы по условиям абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье

§ 1.1. Анализ исследований по вопросам абсолютной сходимости кратных рядов Фурье периодических функций

Изучению и исследованию вопросов абсолютной сходимости кратных рядов Фурье периодических функций многих переменных достаточно полно посвящены работы Челидзе В.Г. [121], Жака И.Е. [56], Голубова Б.И. [42], Тимана М.Ф. [88], Пономаренко Ю.А. [73], Дьяченко М.И. [47] и других математиков.

Что же касается аналогичных вопросов в пространстве почти-периодических функций, то некоторые результаты установлены Хасановым Ю.Х. [108], [112], [114], [115].

Прежде чем перейти к изложению результатов настоящей главы, приведём основные понятия, определения и наиболее известных результатов по проблемам абсолютной сходимости двойных и кратных рядов Фурье периодических функций многих переменных.

Пусть $f(x_1, x_2) -$ интегрируемая со степенью $p\,(1 \le p < \infty)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ функция и $L_p^{(2)}\,(1 \le p < \infty)$ - совокупность всех измеримых 2π-периодических по каждой из переменных x_1, x_2 функций $f(x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию:

$$\|f(x)\|_{L_p^{(2)}} = \left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x_1, x_2,)|^p \, dx_1 \, dx_2\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty, \qquad (1 \le p < \infty),$$

а при $p = \infty$

$$\|f(x)\|_{L_\infty^{(2)}} = \underset{x_1, x_2}{vrai\,sup} |f(x_1, x_2)| < \infty.$$

Для каждой функции $f(x_1, x_2) \in L_p^{(2)}$ рассмотрим её ряд Фурье

$$f(x_1, x_2) \sim \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} A_{n_1,n_2}(x_1, x_2), \tag{1.1.1}$$

где

$$A_{n_1,n_2}(x_1, x_2) = \mu_{n_1,n_2} \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_{2=1}}^{2} a_{n_1,n_2}^{(i_1,i_2)} \cdot \prod_{\upsilon=1}^{2} \gamma_{i_\upsilon}(n_\upsilon, x_\upsilon)$$

$$\mu_{n_1,n_2} = 2^{-m} \ \ (m - \text{число индексов } n_\upsilon, \text{равных нулю})$$

$$a_{n_1,n_2}^{(i_1,i_2)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) \prod_{\upsilon=1}^{2} \gamma_{i_\upsilon}(n_\upsilon, x_\upsilon) dx_1 dx_2$$

$$\gamma_i(nx) = \begin{cases} cosnx, & \text{если } \ i = 1 \\ sinnx, & \text{если } \ i = 2. \end{cases}$$

В тригонометрическом виде ряда (1.1.1) можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{4} a_{0,0} + \frac{1}{2} \sum_{n_1=1}^{\infty} (a_{n_1,0} \cos n_1 x_1 + b_{n_1,0} \sin n_1 x_1) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n_2=1}^{\infty} (a_{0,n_2} \cos n_2 x_2 + c_{0,n_2} \sin n_2 x_2) +$$

$$+ \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} (a_{n_1,n_2} \cos n_1 x_1 \cos n_2 x_2 + b_{n_1,n_2} \sin n_1 x_1 \cos n_2 x_2 +$$

$$+ c_{n_1,n_2} \cos n_1 x_1 \sin n_2 x_2 + d_{n_1,n_2} \sin n_1 x_1 \sin n_2 x_2).$$

При установлении признаков равномерной и абсолютной сходимостей кратных тригонометрических рядов Фурье функции $f(x_1, \dots, x_k) \in L_p^{(k)}$ $(1 \le p < \infty)$, основными аппаратами являются следующие операторы, определяющие характер гладкости рассматриваемой функции:

1. Модули непрерывности (смешанные) порядка k функции $f(x_1,\dots,x_k)\in L_p^{(k)}$

$$\omega_{r_1\dots r_k}(f;u_1,\dots,u_k)_{L_p^{(k)}}=\sup_{|t_j|\le u_j}\left\|\Delta^{r_1,\dots,r_k}_{t_1,\dots,t_k}f(x_1,\dots,x_k)\right\|_{L_p^{(k)}},\qquad(1.1.2)$$

где

$$1\le p<\infty, u_j>0, j=1,2,\dots,k;$$

$$\Delta^{r_1,\dots,r_k}_{t_1,\dots,t_k}f(x_1,\dots,x_k)=\Delta^{r_1}_{1,t_1}\Delta^{r_2}_{2,t_2}\dots\Delta^{r_k}_{k,t_k}f(x_1,\dots,x_k),$$

$$\Delta^{r}_{t,u}f(x_1,\dots,x_k)=\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{r-\nu}\binom{r}{\nu}f(x_1,\dots,x_{i-1}+\nu u,x_{i+1},\dots,x_k)$$

$$(i=1,2,\dots,k);$$

2. Частные модули гладкости функции $f(x_1,\dots,x_k)\in L_p^{(k)}$

$$\omega_{r,(j)}(f;u)_{L_p^{(k)}}=\sup_{|t|\le u}\left\|\Delta^{r}_{j,t}f(x_1,\dots,x_k)\right\|_{L_p^{(k)}},\qquad(1.1.3)$$

где $j=1,2,\dots,k; u>0$;

3. Частные наилучшие приближения тригонометрическими полиномами степени не выше n

$$E^{(j)}_{n,\infty}(f)_{L_p^{(k)}}=\inf_{T_n}\|f(x_1,\dots,x_k)-T_n(X)\|_{L_p^{(k)}},\qquad(1.1.4)$$

где

$$T_n(X)=T_n(x_1,\dots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\dots,x_k)$$

- тригонометрические полиномы по переменной x_j порядка не выше n, с коэффициентами $A_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$, которые принадлежать пространству $L_p^{(k)}$.

Смешанные и частные модули непрерывности определяют структурные свойства, а частные наилучшие приближения $E_{n,\infty}^{(j)}(f)_{L_p^{(k)}}$ конструктивных свойств функции $f(x_1, \dots, x_k)$ в метрике пространства $L_p^{(k)}$ $(1 \le p < \infty)$.

В работе [57] Жак И.Е. для двойных рядов Фурье функции

$f(x,y) \in L_2^{(2)}$ доказал, что, при

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{-\frac{1}{2}}\omega_{1,1}\left(f;\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)_{L_2^{(2)}} < \infty$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}}\omega_{1,(j)}\left(f;\frac{1}{n}\right)_{L_2^{(2)}} < \infty,\ (j = 1,2), \tag{1.1.5}$$

и двойной ряд Фурье функции $f(x,y)$ будет сходиться абсолютно в метрике пространства $L_2^{(2)}$.

Для изложения следующего результата Жака И.Е. [57], нам понадобиться:

Определение 1.1.1. *Функция $f(x,y)$ имеет в прямоугольнике $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ ограниченную вариацию в смысле Каратеодори, если*

$$sup\left\{\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left|f(x_i,y_j) - f(x_{i-1},y_j) - f(x_i,y_{j+1}) - f(x_{i+1},y_{j+1})\right|\right\} < \infty,$$

где

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_m = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_j < y_{j+1} < \cdots < y_n = d.$$

Теорема 1.1.1 *(Жак И.Е.). Если для непрерывной функции* $f(x,y) \in L_{\infty}^{(2)}$ *выполнены условия:*

$$\sum_{m=1}^{\infty}(mn)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\omega_{1,1}\left(f;\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)_{L_{\infty}^{(2)}}\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\left\{\omega_{1,(j)}\left(f;\frac{1}{n}\right)_{L_{\infty}^{(2)}}\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (j = 1,2) \tag{1.1.6}$$

и она имеет ограниченную вариацию как по каждой из переменных x, y *при фиксированной второй, так и по множеству обеих переменных* x, y *в смысле Каратеодори, то двойной тригонометрический ряд Фурье заданной функции* $f(x,y) \in L_{\infty}^{(2)}$ *является абсолютно сходящейся.*

Ю. Муселиак [70] на случай функции $f(x_1, \dots, x_k)$, при $k > 2$, усилил теорему И.Е.Жака и получил обобщённую теорему. В этих результатах Ю.Муселиака вместо условий (1.1.5) или (1.1.6) требовались $2^k - 1$ условий по различным группам переменных $x_1, \dots, x_k$, которые устанавливают сходимость в абсолютном смысле кратного ряда Фурье функции $f(x_1, \dots, x_k)$.

Изложенные выше результаты И.Е.Жака и Ю.Муселиака по исследуемым проблемам указывают на то, какими структурными свойствами должна обладать функции многих переменных по совокупности всех групп переменных $x_1, \dots, x_k$, чтобы была обеспечена абсолютная сходимость ряда Фурье функции многих переменных. В указанных работах требуются условия, которые как правило имеют затруднительных характер и главным образом, учитывают, как свойства функций по каждой из переменных $x_1, \dots, x_k$ в отдельности, так и их свойства по совокупности всех групп переменных.

Такой алгоритм выполнения действий для определения признаков абсолютной сходимости кратных рядов Фурье заставляет прийти к необходимости требовать большого количества условий, что затрудняет возможность проверки их выполнения. Следовательно, возникают новые требования к гладкости рассматриваемых функций, какими свойствами они должны обладать, чтобы только по каждой из отдельных переменных $x_1, \dots, x_k$ обеспечивать абсолютную сходимость ее кратного тригонометрического ряда Фурье. Для функций класса L_p $(1 \le p < \infty)$, такими структурными характеристиками являются математические аппараты приближения, как наилучшие приближения вида (1.1.4) функции $f(x_1, \dots, x_k)$, или частные модули гладкости вида (1.1.3).

Для решения этой проблемы М.Ф. Тиман [88] впервые ставил вопрос об уточнении различных свойств, в том числе гладкости, рассматриваемой функции только по каждой из переменных $x_1, \dots, x_k$ в отдельности, которые могли бы обеспечивать абсолютного приближения её кратного ряда Фурье к самой функции.

Поэтому, М.Ф.Тиман в работе [88] наглядным примером доказал, что условия, которые накладываются на функцию двух переменных $f(x_1, \dots, x_k)$ по каждой из её переменных в отдельности и, которые обеспечивают абсолютную сходимость соответствующего ряда Фурье ещё не могут быть достаточными для абсолютной сходимости кратного ряда Фурье функции $f(x_1, \dots, x_k)$. То есть, указывается, что свойства функции многих переменных $f(x_1, \dots, x_k)$ по каждой из переменных в отдельности, которые являются достаточным условиям абсолютной сходимость её ряда Фурье, в некотором смысле должны быть, более усиленными, чем аналогичные критерий для простой функции одной переменной. Поэтому целесообразно привести некоторых утверждений М.Ф. Тимана, которые показывают, какими свойствами должна удовлетворять многомерная функция $f(x_1, \dots, x_k) \in L_p^{(k)}$

$(1 < p \leq 2)$ по каждой из переменных $x_1, \dots, x_k$ в отдельности для абсолютной сходимости её кратного тригонометрического ряда Фурье.

Теорема 1.1.2 (М.Ф.Тиман). *Пусть* 2π – *периодическая по каждой из переменных функция* $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2$ *и пусть* $c_{n_1}, c_{n_2}, \dots, c_{n_k}$ – *коэффициенты тригонометрического ряда Фурье. Пусть для какой-либо последовательности чисел* $\alpha_v > 0$ $(v = 1,2, \dots, k)$ $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$ *и любого* $v = 1,2, \dots, k$ *выполнены условия:*

$$\sum_{n_v=1}^{\infty} n_v^{-\frac{1}{2}} E_{n_v,\infty}^{\alpha_v}(f)_{L_2} < \infty ,$$

тогда сходится ряд

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_k=-\infty}^{\infty} \left| c_{n_1,\dots,n_k} \right|. \tag{1.1.7}$$

Если числа $\left| c_{n_1}, c_{n_2}, \dots, c_{n_k} \right|$ *имеют характер монотонного убывания по каждому из индексов* $c_{n_1,\dots,n_k}$, *то расходимость по крайней мере одного из рядов*

$$\sum_{n_v=1}^{\infty} n_v^{-\frac{1}{2}} E_{n_v,\infty}(f)_{L_2}$$

влечет за собой расходимость ряда (1.1.7).

В этой теореме “слабые” свойства функции $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2$ по одним переменным заменяются наиболее сильными ее свойствами по другим переменным. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1.3 (М.Ф.Тиман). *Пусть* $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2$. *Тогда для сходимости коэффициентов ряда (1.1.7) достаточно, чтобы при любом* $v = 1,2, \dots, k$ *выполнялись условия:*

$$\sum_{n_v=1}^{\infty} n_v^{\frac{k}{2}-1} E_{n_v,\infty}(f)_{L_2} < \infty. \tag{1.1.8}$$

Теоремы 1.1.2 и 1.1.3 показывают, какими конструктивными свойствами должны обладать функции по каждой из переменных $x_1, \dots, x_k$ в отдельности, чтобы была обеспечена абсолютная сходимость ее кратного тригонометрического ряда Фурье. Следовательно, целесообразно привести также две утверждения, соответственно являющиеся эквивалентными теоремам 1.1.2 и 1.1.3, и показывают указанные свойства в терминах структурных свойств.

Теорема 1.1.4 (М.Ф.Тиман). *Пусть для последовательности положительных* $\alpha_v > 0$ $(v = 1,2, \dots, k)$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$ *и кроме того, сходится следующий ряд:*

$$\sum_{n_v=1}^{\infty} n_v^{-\frac{1}{2}} \omega_{r_v,\infty}^{\alpha_v}\left(f; \frac{1}{n_v}\right)_{L_2},$$

где $r_v > \frac{1}{2\alpha_v}$, *то кратный ряд Фурье функции* $f(x_1, \dots, x_k)$ *абсолютно сходится.*

Теорема 1.1.5 (М.Ф.Тимана). *Пусть функции* $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2$ *и сходится ряд*

$$\sum_{n_v=1}^{\infty} n_v^{\frac{k}{2}-1} \omega_{r_v}\left(f; \frac{1}{n_v}\right)_{L_2},$$

где $v = 1,2, \dots, k$. *Тогда сходится и тригонометрический ряд (1.1.7).*

Так как в теореме 1.1.5 только один из чисел α_v может быть больше $\frac{1}{2}$, а все остальные α_v меньше $\frac{1}{2}$, то абсолютная сходимость ряда Фурье зависит, главным образом $\left(r_v > \frac{1}{2\alpha_v}\right)$, с характером убывания модулей непрерывности функции по каждой из переменных $x_1, \dots, x_k$. Этот факт подтверждается и утверждением 1.1.5. Хотя для простой функции одной переменной достаточно использовать лишь их модули гладкости.

В работе [94] М.Ф.Тиман доказал ряд утверждений, которые являются обобщением вышеприведенных теорем 1.1.2 и 1.1.3.

Теорема 1.1.6 (М.Ф.Тиман). *Если* $f(x_1, \dots, x_k) \in L_p$ $(1 < p \leq 2)$, *кроме того для некоторой последовательности положительных чисел* $\alpha_v > 0$ $(v = 1, \dots, k)$,

$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$ *и при любых чисел* $v = 1,2, \dots, k$ *сходится ряд*

$$\sum_{n_v=1}^{\infty} n_v^{\delta_v - \frac{\beta(p-1)}{p}} E_{n_v,\infty}^{\beta\alpha_v}(f)_{L_p}$$

или эквивалентно

$$\sum_{n_v=1}^{\infty} n_v^{\delta_v - \frac{\beta(p-1)}{p}} \omega_{r_v}^{\beta\alpha_v}\left(f; \frac{1}{n_v}\right)_{L_p},$$

где $r_v > \frac{p-1}{p\alpha_v}$ $(r_v -$ *целые числа*$)$, $0 \leq \delta_v < \frac{\beta(p-1)}{p}$ $(v = 1,2, \dots, k), 0 < \beta < \frac{p}{p-1}$, *то*

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_k=-\infty}^{\infty} \left|c_{n_1,\dots,n_k}\right|^{\beta} (|n_1| + 1)^{\delta_1} \dots (|n_k| + 1)^{\delta_k} < \infty.$$

Важно отметить, что в теореме 1.1.6 установлены k условий, которые обеспечивают достаточных критериев абсолютной сходимости тригонометрического ряда Фурье. В данном случае при $p = 2, \beta = 1$ скорость стремления к нулю величин наилучшего приближения $E_{n_v,\infty}(f)_{L_2}$ для всех $v = 1,2, \dots, k$ должна иметь оценку $O\left\{n^{-\frac{k}{2}}\right\}$ и, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{k}{2}-1} E_{n_v}(f)_{L_2} < \infty.$$

Теорема 1.1.7 (М.Ф.Тиман). *Если* $f(x_1, \dots, x_k) \in L_p$ $(1 < p \le 2)$ *и*

$$\sum_{n_v=1}^{\infty} n_v^{k\left(1-\frac{\beta(p-1)}{p}\right)-1} \omega_k^{\beta}\left(f; \frac{1}{n_v}\right)_{L_p} < \infty \;\; (v = 1,2, \dots, k),$$

где $0 < \beta < \frac{p}{p-1}$, *то ряд*

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=-\infty}^{\infty} \left|c_{n_1,\dots,n_k}\right|^{\beta}$$

сходится.

А теперь, приводим некоторые результаты, показывающие какие свойства функции $f(x_1, \dots, x_k) \in L_p$ $(1 < p \le 2)$ по каждой из переменных в отдельности обеспечивают абсолютную сходимость ее кратного ряда Фурье.

Теорема 1.1.8 (М.Ф. Тиман). *Если функция*

$f(x_1, \dots, x_k) \in L_p^{(k)}$ $(1 < p \le 2)$ *и при* $\text{о} = 1,2, \dots, k$, $r > k\left(\frac{1}{\beta} - \frac{p-1}{p}\right)$,

$0 < \beta < \frac{p}{p-1}$ *выполнены условия:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k\left(1-\beta\frac{p-1}{p}\right)-1} \left\{\omega_{r,(j)}\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_p^{(k)}}\right\}^{\beta} < \infty, \tag{1.1.9}$$

либо эквивалентные им условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k\left(1-\beta\frac{p-1}{p}\right)-1} \left\{E_{n,\infty}^{(j)}(f)_{L_p^{(k)}}\right\}^{\beta} < \infty, \tag{1.1.10}$$

то

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=0}^{\infty} \rho_{n_1,\ldots,n_k}^{\beta} < \infty,$$

где

$$\rho_{n_1,\ldots,n_k} = \mu_{n_1,\ldots,n_k} \left\{ \sum_{i_1=1}^{2} \cdots \sum_{i_k=1}^{2} \left| a_{n_1,\ldots,n_k}^{(i_1,\ldots,i_k)} \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

А.А. Конюшковым [64] это утверждение установлено в случае $k = 1$. А С.Б. Стечкиным [79] установлен при $p = 2,\ \beta = 1, k = 1$. Впервые, теорема 1.1.8, только с условием (1.1.9), при $p = 2,\ \beta = 1, k = 1$, встречается в работах О. Саса [83].

Украинский математик М.Ф. Тиман [88], доказал, что условия (1.1.10) при $p = 2,\ \beta = 1$, являются, в известном смысле, окончательными, а именно

Теорема 1.1.9 (М.Ф. Тиман). *Пусть для монотонно убывающей к нулю система чисел* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ *выполнены условия:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{k}{2}-1} \alpha_n = \infty,$$

тогда найдется непрерывная 2π *−периодическая по каждой из переменных* $x_1, \ldots, x_k$ *функция* $f(x_1, \ldots, x_k)$*, для которой выполнены условия*

$$E_{n,\infty}^{(j)}(f)_{L_{\infty}^{(k)}} \ll \alpha_n \quad (j = 1,2,\ldots,k),$$

а ее тригонометрический ряд Фурье не будет абсолютно сходящейся.

В работе [5], при $k = 1$, это утверждение установлено С.Н. Бернштейном.

Следует заметить, что в теореме 1.1.8 приведенные k условий гладкости функции обеспечивают абсолютную сходимость кратного тригонометрического ряда Фурье. В данном случае, при $p = 2,\ \beta = 1$ скорость стремления к нулю величин $E_{n,\infty}^{(j)}(f)_{L_2^{(k)}}$ для всех $j = 1,2,\dots,k$ должна удовлетворять оценку $o\left\{n^{-\frac{k}{2}}\right\}$ и такой, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{k}{2}-1} E_{n,\infty}^{(j)}(f)_{L_2^{(k)}}.$$

В этой связи, можно привести также следующий полученный М.Ф.Тиманом результат [94], в котором «слабые» свойства функции $f(x_1,\dots,x_k) \in L_p^{(k)}$ по одним отдельным переменным для установления абсолютной сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье могут быть заменены наиболее сильными её свойствами по другим переменным $x_1,\dots,x_k$.

Теорема 1.1.10 (М.Ф.Тиман). *Пусть функция* $f(x_1,\dots,x_k) \in L_p^{(k)}$ *и для некоторой последовательности положительных чисел* $\alpha_j > 0$ $(j = 1,2,\dots,k)$ *имеет место соотношение* $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$, *и для любого числа* $j = 1,2,\dots,k$ *сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \left\{E_{n,\infty}^{(j)}(f)_{L_2^{(k)}}\right\}^{\alpha_j},$$

либо сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \left\{\omega_{r_j,(j)}\left(f;\frac{1}{n}\right)_{L_2^{(k)}}\right\}^{\alpha_j} \left(j = 1,2,\dots,k,\ \ r_j > \frac{1}{2\alpha_j}\right).$$

Тогда и ряд Фурье функции $f(x_1,\dots,x_k)$ *абсолютно сходится.*

Подобные результаты как в теорем 1.1.8-1.1.10 для кратных тригонометрических рядов Фурье почти-периодических по Безыковичу функций многих переменных $f(x_1, \ldots, x_k) \in B_p^{(k)}$ установлены Хасановым Ю.Х. [107] и [117] .

§1.2. Обзор результатов по проблемам абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций

В работах Бари Н.К. [4], Бернштейна С.Н. [5], [6], Зигмунда А. [10], [11], Тимана М.Ф. [21], [22], Грепачевской Л.В. [43], [44], Жижиашвили Л.В. [60], Конюшкова А.А. [64], Sonouchi G. [78], Стечкина С.Б. [79-82], Саса О. [83], [84], Тригуба Р.М. [99] найдены достаточные признаки абсолютной сходимости рядов Фурье периодических функций достаточно полно изучены и исследованы.

Что же касается подобных проблем для класса почти-периодических функций, рассмотрены в работах Б.М.Левитана [15], Е.А.Бредихиной [34], [35], [36], А.С.Джафарова и Г.А.Мамедова [45], Н.П. Купцова [66], Ю.Муселиака [69], Я.Г.Притулы [76], Ю.Х.Хасанова [112].

Исследования по нахождению достаточных и необходимых признаков как абсолютной, так и равномерной сходимостей обычных тригонометрических рядов Фурье почти-периодических функций с начала появления этих проблем сопутствуются со многими трудностями. Это происходить по причине, что показатели Фурье (спектр функций) указанных функций вполне могут быть расположены в произвольном порядке, то ест, эти спектры функций могут располагаться всюду плотно и, поэтому, не известно, в каком порядке необходимо выполнить суммированию коэффициентов тригонометрического ряда Фурье. Если ряд Фурье заданной функции сходится абсолютно, то проблема о порядке суммирования членов данного ряда Фурье не требует решения.

Для изложения аналогичных результатов вышеприведенного характера, которые относятся к почти-периодическим функциям, приводим некоторые важные представители таких функций и структурные характеристики для определения гладкости функций.

Определение 1.2.1. *Непрерывная на всей вещественной оси некоторую функцию* $f(x)$ *принято называть равномерной почти-периодической, если каждому числу* $\varepsilon > 0$ *соответствует такое число* $l = l(\varepsilon) > 0$*, что в каждом интервале длины* l *можно указать хотя бы одно число* τ*, для которого выполняется следующее неравенство*

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \quad (-\infty < x < \infty).$$

Определения и основные свойства почти-периодических функций можно найти в монографиях [14], [15].

Через B принято обозначать класс всех равномерных почти-периодических по Бору функций и норма функций Бора определяет следующая величина

$$\|f(x)\|_B = \sup_x |f(x)|. \tag{1.2.1}$$

Пусть функция $f(x) \in B$ и она имеет спектр $\Lambda\{\lambda_n\}$ $(n = 1,2,3,\dots)$. Спектром для функции $f(x)$ является совокупность ее показатели Фурье $\Lambda\{\lambda_n\}$.

При установлении достаточных и необходимых условий абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье функций $f(x) \in B$ в зависимости порядка расположения спектра целесообразно использовать следующие разнообразные операторы, определяющие их структурные свойства:

1. модуль непрерывности порядка k функции $f(x) \in B$

$$\omega_k(f;h)_B = \sup_{|t|\le h} \sup_x \left|\Delta_t^k f(x)\right|, \tag{1.2.2}$$

$$\Delta_t^k f(x) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} f(x+rt) \quad (h > 0, k \in N);$$

2. оператор сдвига, который определяется с помощью преобразование Лапласа

$$\Omega(f;H;\theta)_B = \sup_x \left| \int_0^\infty e^{-\delta t} f(x-t) e^{i\theta t} dt \right| \quad (\delta > 0, \theta \in R); \tag{1.2.3}$$

3. модуль усреднения порядка k функции $f(x) \in B$ на всей вещественной оси

$$W_k(f;H;\theta)_B = \sup_{T \geq H} \sup_x \left| f_{T^k}(x;\theta) \right| \ (H > 0, \qquad k \in N, \qquad \theta \in R, \qquad (1.2.4)$$

$f_{T^k}(x;\theta) =$

$$= \frac{e^{i\theta x}}{(2T)^k} \int_{x-T}^{x+T} dt_1 \int_{t_1-T}^{t_1+T} dt_2 \dots \int_{t_{k-2}-T}^{t_{k+2}+T} dt_{k-1} \int_{t_{k-1}-T}^{t_{k-1}+T} f(t_k) e^{-i\theta t_k} dt_k;$$

4. вариация порядка k функции $f(x) \in B$ на заданном конечном отрезке $[a,b]$

$$V_k[a,b] = \sup_x \sum_{r=0}^{n-1} \left| \Delta_{h_r}^k f(x_r) \right|, \qquad (1.2.5)$$

где $k \in N,\ h_r = \frac{x_{r+1}-x_r}{k}$, а верхняя грань величины берется по разбиениям

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Если оператор $V_k[a,b]$ является ограниченной на отрезке $[a,b]$, то совокупность функций $f(x) \in B$ принято обозначать символом BV_k.

В работе предполагается, что в операторах(1.2.3) и (1.2.4) $\theta = 0$ и $\theta \,\overline{\in}\, \Lambda\{\lambda_n\}$. Тогда можно убедиться, что при $k = 1$ и $H \to \infty$ оператор (1.2.4) соответствует всем свойствам, аналогичным модулю непрерывности $\omega_1(f;H)$ $(h \to 0)$. Оператор (1.2.4) обладает следующими основными свойствами:

1. $W(f;H)$ монотонно убывающая, если $H \to \infty$;
2. при n целое число, имеет место

$$W(f;nH) \leq nW(f;H),$$

а при λ любое положительное число

$$W(f;\lambda H) \leq (\lambda + 1)W(f;H);$$

3. функция $W(f;H)$ является полуаддитивной, т.е. для любых $T_1 > 0, T_2 > 0$ выполняется неравенство

$$W(f;T_1 + T_2) \leq W(f;T_1) + W(f;T_2);$$

4. функция $W(f;H)$ на отрезке $0 < H < \infty$ является непрерывной.

Определение 1.2.2. (см. [66]). *Функция* $f(x)$ *называется* B_p *−почти-периодической, или почти-периодической по Безиковичу* $(p \geq 1)$, *если*

1. $f(x)$ *измеримая функция и* $|f(x)|^p$ *является интегрируемой по Лебегу на любом конечном отрезке;*

2. $D_{B_p}\{f(x)\} = \left\{\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} = \{\bar{M}(|f(x)|^p)\}^{\frac{1}{p}} < \infty;$ (1.2.6)

3. *найдется совокупность тригонометрических сумм* $\{P_n(x)\}$

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k x},$$

для которой выполняется соотношения

$$\lim_{n\to\infty} D_{B_p}\{f(x) - P_n(x)\} = 0. \quad (1.2.7)$$

Пространство всех функций, которые удовлетворяют этим условиям определения 1.2.2, обычно называют B_p −пространством, или пространством Безиковича. Для класса таких функций $f(x) \in B_p$ $(p \geq 1)$ норма определяется с помощью величины

$$\|f(x)\|_{B_p} = \{\bar{M}(|f(x)|^p)\}^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (1.2.8)$$

Из определения 1.2.2 вытекает, что для каждой функции $f(x) \in B_p$ $(p \geq 1)$ соответствует множества чисел $\Lambda\{\lambda_n\}$, которая является спектром исходной функции. Через конкретной функции, с помощью этого спектра можно поставить ей в соответствие ее тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x},$$

где $A_n = \bar{M}\{f(x)e^{-i\lambda_n x}\} -$ коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

В дальнейшем полезными являются следующие определения:

Определение 1.2.3 (см. [23]). *Рассмотрим на отрезке* $[a, b]$ *функцию* $f(x)$. *Этот отрезок* $[a, b]$ *разобьем на части точками*

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b.$$

В случае, когда верхняя грань сумм

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left| f(x_{j+1}) - f(x_j) \right|^k \tag{1.2.9}$$

конечна при разбиениях отрезка $[a,b]$, *то будем говорить, что функция* $f(x)$ *имеет ограниченную* k *– вариацию на заданном отрезке.*

Верхняя грань сумм (1.2.9) при разбиениях отрезка $[a,b]$ называется k – вариацией функции $f(x) \in B_p$ $(p \geq 1)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается символом $V_k[a,b]$.

Теперь сформулируем некоторые известные результаты, которые относятся к рассматриваемым проблемам.

Теорема 1.2.1 (Б.М.Левитана). *Пусть спектр функции* $f(x) \in B$ *линейно независимы. Тогда ряд Фурье этой функции сходится абсолютно.*

Теорема 1.2.2 (Ю.Муселиака). *Пусть спектр* $f(x) \in B_2$ *имеет точку сгущения в бесконечности, т.е.* $\lambda_n \to \infty$ $(n = 1,2,3,\dots)$ *и при* $\alpha > 0$ *справедливо соотношение*

$$n^\alpha = O\{\lambda_n\}.$$

Если при $0 < \beta < 2$ *сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1-\frac{\beta}{2}}{\alpha}-1} \omega_1^\beta \left(f; \frac{1}{n}\right)_{B_2}, \tag{1.2.10}$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^\beta < \infty\,. \tag{1.2.11}$$

Замечание 1.2.1. *В работе [112] выявлено, что если* $\beta = 1,\ 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, *то из выполнение условия (1.2.10) следует, что функция* $f(x) \in B_2$ *почти всюду превращается в константу.*

В работе [66] Н.П.Купцов показал, что если для функции $f(x) \in B$, в условие (1.2.10), при $\alpha = \beta = 1$ замена величины $\omega_1\left(f; \frac{1}{n}\right)_{B_2}$ на величину $\omega_2\left(f; \frac{1}{n}\right)_B$, влечет абсолютную сходимость тригонометрического ряда Фурье.

Теорема 1.2.3 (Н.П.Купцова). *Если* $f(x) \in B$, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} -$ *спектр функции и выполнены условия:*

А). *показатели Фурье* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *функции* $f(x) \in B$ *содержит конечное число конечных точек сгущения* $b_1, b_2, \dots, b_s$, *причем ни одно из чисел* λ_n *не совпадает с числами* $b_1, b_2, \dots, b_s$ *;*

В). *найдется такая константа* C, *что для любого числа* n *можно указать* j $(j = 1,2, \dots s)$, *удовлетворяющее условию*

$$\left|\lambda_n - b_j\right| \le \frac{C}{n};$$

С). *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \Omega_2^{\frac{1}{2}}\left(f; \frac{1}{n}\right)_B < \infty,$$

где

$$\Omega_2(f; \delta)_B = \max_{j=1,2,\dots s} \delta^2 M_x \left\{ \left| \int_0^{\infty} e^{-(\delta - i b_j) t} f(x - t) dt \right|^2 \right\},$$

то ряд, образованный из абсолютных значений коэффициентов Фурье функции $f(x) \in B$, *также сходится.*

Как следствие из этого утверждения Н.П.Купцовым [66] установлен, что если выполнены условий А), В) теоремы 1.2.3, условия С) заменяется неравенством

$$\left| \int_0^t f(x - \tau) e^{i b_j \tau} d\tau \right| \le A t^{\frac{1}{2} - \varepsilon}, \tag{1.2.12}$$

где $t > 0; j = 1,2, \dots, s,$ A и $\varepsilon -$ положительные постоянные, то ряд, образованный из абсолютных величин коэффициентов Фурье заданной функции сходится.

Утверждение того факта, что условие (1.2.12) является достаточной для абсолютной сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f(x) \in B$, показал Б.М.Левитан [15].

Н.П.Купцовым [66] также получены результаты, обеспечивающие достаточных условий абсолютной сходимости в случае, когда показатели Фурье функции $f(x) \in B$ имеют единственную предельную точку на бесконечности.

Теорема 1.2.4 (Н.П.Купцова). *Пусть функция* $f(x) \in B$ *и* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots -$ *ее показатели Фурье. Если выполнены условия:*

а) *найдется такая константа* $C > 0$, *что для всех целых* n *выполняется соотношение* $|\lambda_n| \geq Cn$ *;*

б) *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}} < \infty,$$

где

$$\omega(\delta) = \sup_{|h| \leq \delta} \sqrt{M_x\{|f(x+h) - f(x)|^2\}}$$

то сходится и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

$a_k -$ *коэффициенты Фурье функции из метрики пространства* B.

В качестве следствии теоремы 1.2.4 Н.П.Купцов доказал следующее утверждение: Пусть функция $f(x) \in B$ подчиняется условиям а) теоремы 1.2.4 и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}},$$

где

$$\bar{\omega}(\delta) = \sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ |h| \leq \delta}} |f(x+h) - f(x)|.$$

Тогда ряд, образованный из абсолютных значений коэффициентов Фурье функции $f(x) \in B$, также сходится.

Теорема 1.2.5 (Ю.Муселиака). *Пусть для показателей Фурье функции* $f(x) \in B_2$ *выполняются условия*

$$n^{\alpha} = O\{\lambda_n\}, (\alpha > 0)\ \lambda_n \to \infty \text{ при } n \to \infty$$

и более того, в случае $0 < k \le 2$ *функция* $f(x)$ *будет иметь ограниченную* k *– вариацию и при* $0 < \beta < 2$ *сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1-\frac{\beta}{2}}{\alpha}-\frac{\beta}{2}-1} \omega_1^{\left(1-\frac{k}{2}\right)\beta}\left(f;\frac{1}{n}\right)_{B_2} < \infty. \quad (1.2.13)$$

Тогда и ряд (1.2.11) сходится.

Теорема 1.2.6 (Ю.Муселиака). *Если функция* $f(x) \in B_2$ *и выполнены условия*

$$n = O\{\lambda_n\}\ (\lambda_n \to \infty \text{ при } n \to \infty),$$

и кроме того при $\rho > 0, 0 < k < 2$ *справедлива оценка*

$$\omega_1(f;h)_{B_2} = O\{h^{\rho}\},$$

$$V_k(f) < \infty,$$

где $V_k(f)$ *-* k*–вариация функции* $f(x)$. *Тогда ряд (1.2.11) сходится.*

Замечание 1.2.2. *В работе [112] замечено, что если принять* $k < 1, \beta = \frac{2}{2-k}$ *и* $\alpha \le \frac{1-k}{3-k}$, *то из выполнение условие (1.2.13) вытекает, что функция* $f(x) \in B_2$ *почти всюду превращается в константу.*

Дальнейшее развитие указанных результатов были получены в исследованиях Я.Г.Притулы [76].

Теорема 1.2.7 (Я.Г.Притула). *Пусть спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *функции* $f(x) \in B_p$ $(1 < p \le 2)$ *имеют единственную предельную точку на бесконечности (*$\lambda_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$*) и когда* $0 < \beta < q$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, $\gamma > 0$ *сходится ряд*

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2^v}}{\lambda_{2^{v-1}}}\right)^{\beta} \omega_1^{\beta}\left(f;\lambda_{2^v}^{-1}\right)_{B_p} 2^{v\left(\gamma+\frac{q-\beta}{q}\right)}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|^{\beta} n^{\gamma} < \infty. \quad (1.2.14)$$

А.С.Джафаровым и Г.А.Мамедовым [45] исследованы проблемы сходимости рядов Фурье почти-периодических в смысле Безиковича функций, т.е. $f(x) \in$

$B_p\ (1 < p \leq 2)$, показатели Фурье $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ которой имеет единственную предельную точку в нуле, и найдены достаточные признаки сходимости рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}|A_n|^{\beta}\varphi(n), \tag{1.2.15}$$

где $\varphi(n) -$ положительная и четная функция, которая определена во множестве целых чисел посредством величины (1.2.3), когда параметр $\theta = 0$.

Теорема 1.2.8 (А.С.Джафарова и Г.А.Мамедова). *Пусть спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *функции* $f(x) \in B_p$ $\left(1 < p \leq 2,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ *имеет единственную предельную точку в нуле* ($\lambda_n \to 0$ *при* $n \to \infty$).

Если ряд

$$\sum_{v=0}^{\infty}\psi(2^v)\Omega_2^{\beta}(f;\lambda_{2^v})_{B_p} < \infty,$$

то ряд (1.2.15) сходится, и справедливо соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|^{\beta}\varphi(n) \ll \sum_{v=0}^{\infty}\psi(2^v)\Omega_2^{\beta}(f;\lambda_{2^v})_{B_p},$$

где

$$\psi(2^v) = \left\{\sum_{n=2^{v-1}-1}^{2^v}[\varphi(n)]^{\frac{q}{q-\beta}}\right\}^{1-\frac{\beta}{q}}.$$

В работе [112] Ю.Х.Хасанов продолжает исследовать проблемы абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье, функции $f(x) \in B_2$, спектр функции $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, которой имеют единственную предельную точку на бесконечности, которые ранее рассматривались Ю. Муселиаком (теоремы 1.2.2, 1.2.3), Я.Г.Притулы (теорема 1.2.4).

Теперь сформулируем ряд результатов из работы [112], которые являются дополнением, а в некоторых случаях усиливающие (см. замечание 1.2.1 и 1.2.2) результаты для функций Безиковича, т.е. $f(x) \in B_2$.

Пусть ряд Фурье функции $f(x) \in B_2$ имеет вид:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}, \tag{1.2.16}$$

где

$$\lambda_0 = 0;\ \lambda_{-n} = -\lambda_n, |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|;\ \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty,$$

$$A_n = \bar{M}\left\{f(x)e^{-i\lambda_n x}\right\}\ (n = 1,2,\dots).$$

В [112] исследуются вопросы сходимости рядов вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{\beta} n^{\gamma} \tag{1.2.17}$$

для различных значений $\beta\ (0 < \beta < 2)$ и $\gamma\ (0 \le \gamma < 1)$, где $\{A_n\}$ – коэффициенты Фурье функции $f(x) \in B_2$.

Теорема 1.2.9. *Если показатели Фурье* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *функции* $f(x) \in B_2$ *удовлетворяют условиям:*

$$\lambda_0 = 0;\ \lambda_{-n} = -\lambda_n, |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|;\ \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty,$$

$$n^{\alpha} = O\{\lambda_n\} \quad (n > 0, \alpha > 0). \tag{1.2.18}$$

и при $0 < \beta < 2, 0 < \gamma < 1, k > \frac{\gamma+1-\frac{\beta}{2}}{\alpha\beta}$ *выполнены условия:*

$$\sum_{v=1}^{\infty} n^{\rho-1} \omega_k^{\beta}\left(f; \frac{1}{n}\right)_{B_2} < \infty, \tag{1.2.19}$$

где $\rho = \frac{\gamma+1-\frac{\beta}{2}}{\alpha}$, *то ряд (1.2.17) сходится.*

Когда $\gamma = 0, k = 1$, то предположений теоремы 1.2.9 полностью охватывает теорему Муселиака (теорема 1.2.2). Так как справедливо соотношение

$$\omega_k(f;h)_{B_2} \leq 2^k \omega_1(f;h)_{B_2},$$

то, при выборе параметра $\gamma = 0$ из теоремы 1.2.9 вытекает более лучшие условия сходимости рядов вида (1.2.17), чем теоремы 1.1.2. Более того, при соответствующем выборе числа k в теореме 1.2.9 ликвидируется недостаток условий Ю.Муселиака, который был отмечен в замечании 1.1.1, при

$0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Чтобы привести следующие результаты работы [112], полезно использовать следующее определение.

Определение 1.2.4. *Говорят, что функция $f(x) \in B$ имеет ограниченную вариацию (ограниченное изменение) порядка,$(m, 2)$ если найдется частная сумма*

$$V_{m,2}(f) = \sup_{\delta} \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - 2f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right|^m,$$

где $\delta -$ любое разбиение интервала $[\alpha, \beta]$ некоторыми точками

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Совокупность указанных функций, принято обозначать символом $BV_{m,2}$.

Теорема 1.2.10. *Если показатели Фурье $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ функции $f(x) \in BV_{m,2}$ $(0 < m < 2)$ удовлетворяют условий (1.2.18), и кроме того, при $0 < \beta < 2$, сходится ряд*

$$\sum_{v=1}^{\infty} n^{\rho-1} \omega_k^{\beta\left(1-\frac{m}{2}\right)}\left(f; \frac{1}{n}\right)_B < \infty,$$

где $\rho = \frac{1-\frac{\beta}{2}}{\alpha} = \frac{\beta}{2}$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{\beta} < \infty.$$

В [112] впервые доказано утверждение, что для всякой функции $f(x) \in B_2$ с со спектром $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, имеющий единственную предельную точку в бесконечности, выполнение условие (1.2.19) является и необходимой для абсолютной сходимости рядов Фурье функции $f(x) \in B_2$, когда коэффициенты Фурье монотонно убывают.

Теорема 1.2.11. *Если функция* $f(x) \in B_2$ *и ее коэффициенты Фурье* $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ *монотонно убывают, и кроме того для чисел* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворены условия:*

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n \ (n = 1,2,\dots), \lambda_n = n^{\alpha} \ (\alpha > 0),$$

то из сходимости ряда (1.2.17) следует сходимость ряда:

$$\sum_{v=1}^{\infty} 2^{v\left(\gamma+1-\frac{\beta}{2}\right)} \omega_k^{\beta}(f; 2^{-v\alpha})_{B_2}, \tag{1.2.20}$$

где $0 < \beta < 2, 0 \leq \gamma < 1, k > \frac{\gamma+1-\frac{\beta}{2}}{\alpha\beta}$.

Следующее утверждение работы [112] является обобщением теоремы 1.2.9.

Рассматриваются ряды вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) |\{A_n\}|^{\beta} \quad (0 < \beta < 2), \tag{1.2.21}$$

где $\varphi(n) -$ четная, положительная функция, которая определена на множестве целых чисел, $\{A_n\} -$ коэффициент Фурье функции $f(x) \in B_2$.

Также рассматривается величина

$$\psi_{\beta}(2^v) = \left\{ \sum_{n=2^{v-1}}^{2^v+1} [\varphi(n)]^{\frac{2}{2-\beta}} \right\}^{1-\frac{\beta}{2}}.$$

Теорема 1.2.12. *Пусть спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *функции* $f(x) \in B_2$ *удовлетворяет условиям:*

$$\lambda_0 = 0;\ \lambda_{-n} = -\lambda_n, |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|;\ \lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = \infty,\ \ (n = 1,2,\dots).$$

Если при $0 < \beta < 2$ *выполнено соотношение*

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2^v}}{\lambda_{2^{v-1}}}\right)^{k\beta}\psi_\beta(2^v)\omega_k^\beta\left(f;\lambda_{2^{v-1}}^{-1}\right)_{B_2} < \infty, \tag{1.2.22}$$

то ряд (1.2.21) сходится.

Дальнейшие результаты Ю.Х.Хасанова [112] посвящены исследованию вопросов, относящихся к почти-периодическим в смысле Безиковича функциям ($f(x) \in B_2$), спектр функции, которых имеют единственную предельную точку в нуле. Найдены новые необходимые условия, которые могут обеспечивать абсолютную сходимость тригонометрических рядов Фурье функции $f(x) \in B_2$, которые дополняют и усиливают результаты работ [45], [66], а также [68].

Пусть ряд Фурье функции $f(x) \in B_2$ имеет вид:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}, \tag{1.2.23}$$

где

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n, |\lambda_n| < |\lambda_{n-1}|;\ \lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = 0,$$

$$A_n = \overline{M}\left\{f(x)e^{-i\lambda_n x}\right\}\ (n = 1,2,\dots).$$

Для различных значений $\beta\ (0 < \beta < 2)$ и $\gamma\ (0 \le \gamma < 1)$, рассматриваются ряды вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|^\beta n^\gamma \tag{1.2.24}$$

где $\{A_n\}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x) \in B_2$.

Теорема 1.2.13. *Пусть для спектра* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *функции* $f(x) \in B_2$ *выполняются условия:*

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n, \qquad \lambda_n = O\{n^{-\alpha}\} \ (n = 1,2,\dots;\ \alpha > 0),$$

если выполнено

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho-1} W_k^{\beta}(f; n)_{B_2} < \infty, \tag{1.2.25}$$

где

$$0 < \beta < 2, \qquad \rho = \frac{\gamma + 1 - \frac{\beta}{2}}{\alpha}, \qquad 0 \le \gamma < 1, \qquad k > \frac{\gamma + 1 - \frac{\beta}{2}}{\alpha\beta},$$

то тогда ряд (1.2.24) сходится.

В дальнейшем, исследуются проблемы нахождения признаков сходимости, в какой мере критерии (1.2.25) теоремы 1.2.13 являются необходимыми для сходимости рядов вида (1.2.24).

Ниже будем привести утверждение из работы [112], которое указывает, в какой мере условия 1.2.25 является необходимой для сходимости рядов вида 1.2.24.

Теорема 1.2.14. *Если для показателей Фурье* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *функции* $f(x) \in B_2$ *выполнены условия* $\lambda_{-n} = -\lambda_n,\ \lambda_n = n^{-\alpha}\ (n = 1,2,\dots;\alpha > 0)$, *и совокупность ее коэффициентов Фурье* $\{A_n\}$ *монотонно убывает, то из сходимости ряда (1.2.24) следует*

$$\sum_{v=0}^{\infty} 2^{v\left(\gamma+1-\frac{\beta}{2}\right)} \cdot W_k^{\beta}(f; 2^{v\alpha})_{B_2} < \infty, \tag{1.2.26}$$

где $0 < \beta < 2, 0 \le \gamma < 1, k > \frac{\gamma+1-\frac{\beta}{2}}{\alpha\beta}$.

Далее установлено утверждение, которое является обобщением теоремы 1.2.13 для рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)|A_n|^{\beta} \qquad (0 < \beta < 2), \tag{1.2.27}$$

где $\varphi(n) -$ четная и положительная функция, которая определяется на множестве целых чисел. В этом случае, спектр функции $f(x) \in B_2$ имеют единственную предельную точку в нуле.

Теорема 1.2.15. *Если показатели Фурье* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *функции* $f(x) \in B_2$ *удовлетворяют условиям:*

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n, |\lambda_n| < |\lambda_{n-1}| \ (n = 1,2,\dots); \ \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0$$

и при $0 < \beta < 2$ *выполнены условия*

$$\sum_{v=1}^{\infty} \psi_{\beta}(2^v) W_k^{\beta}\left(f; \lambda_{2^{v-1}}^{-1}\right)_{B_2} < \infty, \tag{1.2.28}$$

где

$$\psi_{\beta}(2^v) = \left\{ \sum_{n=2^{v-1}}^{2^v+1} [\varphi(n)]^{\frac{2}{2-\beta}} \right\}^{1-\frac{\beta}{2}},$$

то ряд (1.2.27) сходится.

§1.3. Краткий исторический обзор по выявлению признаков абсолютной суммируемости кратных рядов Фурье периодических функций

При проведения исследования в теории чезаровского суммирования рассмотрение кратных тригонометрических рядов приобретает особый интерес, так как переход от обычных рядов к кратным рядам дополняет в теорию суммирования новые возможности и предоставляет много новых проблем. Например, в работе [3] утверждается, что при определении признаков суммирования кратных тригонометрических рядов практически все методы суммирования утрачивают свойства регулярности и обычные зависимости между собой и ряд других свойств, характеризующие их в области простых рядов в одномерном случае. Отсюда и появляются ряд новых понятий, как понятия ограниченной регулярности, ограниченной суммируемости и др.

Выяснению условий, которым должна удовлетворять периодическая по каждой из переменных $x_1, \dots, x_k$ функции $f(x_1, \dots, x_k)$, которые могут обеспечивать суммируемость её тригонометрического ряда Фурье, посвящён ряд монографий, такие как [56], [75], [120]. Полученные в этих монографиях результаты имеют некоторые ограничения на функцию $f(x_1, \dots, x_k)$ по совокупности всех групп её переменных $x_1, \dots, x_k$.

Для выяснения этой проблемы изучаем некоторые ранее полученные результаты по вопросам абсолютной чезаровской суммируемости кратных тригонометрических рядов Фурье функции $f(x_1, \dots, x_k) \in L_p^{(k)}$ $(1 \leq \mathrm{p} < \infty)$, другими математиками.

Если для функции $f(x_1, \dots, x_k) \in L_p^{(k)}$ $(1 \leq p < \infty)$ выполнены условия:

$$\|f(x_1, \dots, x_k)\|_{L_p^{(k)}} = \left\{ \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} |f(x_1, \dots, x_k)|^p \, dx_1 \dots dx_k \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

$$\|f(x_1, \dots, x_k)\|_{L_\infty^{(k)}} = \underset{x_1, \dots, x_k}{vraisup} |f(x_1, \dots, x_k)| < \infty,$$

то для этой функции ряд

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_k} A_{n_1} A_{n_2} \dots A_{n_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) \tag{1.3.1}$$

является её тригонометрическим рядом Фурье, где

$$A_{n_1\dots n_k}(x_1,\dots,x_k)=\mu_{n_1\dots n_k}\sum_{i_1=1}^{2}\dots\sum_{i_k=1}^{2}a_{n_1,\dots,n_k}^{(i_1,\dots,i_k)}\prod_{\nu=1}^{k}\gamma_{i_\nu}(n_\nu,x_\nu),$$

$\mu_{n_1\dots n_k}=2^{-m}$ $(m$ - число индексов n_ν, равных нулю),

$$a_{n_1,\dots,n_k}^{(i_1,\dots,i_k)}=\frac{1}{(2\pi)^k}\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi}f(x_1,x_2,\dots,x_k)\prod_{\nu=1}^{k}\gamma_{i_\nu}(n_\nu,x_\nu)dx_1\dots dx_k,$$

$$\gamma_i(nx)=\begin{cases}\cos nx, & i=1,\\ \sin nx, & i=2.\end{cases}$$

Определение 1.3.1. *Кратный ряд*

$$\sum_{n_1,\dots,n_k}^{\infty}u_{n_1,\dots,n_k}$$

называется $|C;\beta_1,\dots,\beta_k|$- *суммируемым* $(\beta_i>-1,\ i=1,2,\dots,k)$, *если для произвольное множество чисел* $n_{\nu_1},\dots,n_{\nu_m}$ $(m\le k)$ *сходится ряд*

$$\sum_{n_{\nu_1}=1}^{\infty}\dots\sum_{n_{\nu_m}=1}^{\infty}\frac{\left|\tau_{n_{\nu_1},\dots,n_{\nu_m}}^{\beta_{\nu_1},\dots,\beta_{\nu_m}}\right|}{n_{\nu_1},\dots,n_{\nu_m}},$$

где

$$\tau_{n_{\nu_1},\dots,n_{\nu_m}}^{\beta_{\nu_1},\dots,\beta_{\nu_m}}=$$

$$=\frac{\sum_{\mu_{\nu_1}=1}^{n_{\nu_1}}\dots\sum_{\mu_{\nu_m}=1}^{n_{\nu_m}}A_{n_{\nu_1-\mu_{\nu_1}}}^{\beta_{\nu_1}-1}\dots A_{n_{\nu_m-\mu_{\nu_m}}}^{\beta_{\nu_m}-1}\mu_{\nu_1},\dots,\mu_{\nu_m}u_{0,\dots,0,\mu_{\nu_1},0,\dots,0,\mu_{\nu_m},\dots,0}}{A_{n_{\nu_1}}^{\beta_{\nu_1}}\dots A_{n_{\nu_m}}^{\beta_{\nu_m}}},$$

$$A_n^{\beta}=\frac{(\beta+1)\dots(\beta+n)}{n!}.$$

В работе [75] Ю.А.Пономаренко и М.Ф.Тиман определили, какие свойства функции $f(x_1,\dots,x_k)$ по каждой из переменных $x_1,\dots,x_k$ в отдельности, обеспечивают абсолютную суммируемость кратного тригонометрического ряда Фурье с помощью метода Чезаро. При этом, в указанной работе [75] использовались следующие структурные характеристики для выяснения гладкости функции:

$$\omega_r^{(\nu)}(f;h)_{L_p^{(k)}} =$$

$$= \sup_{|t|\le h}\left\|\sum_{\mu=0}^{r}(-1)^{r-\mu}\binom{r}{\mu} f(x_1,\dots,x_{\nu-1},x_\nu+\mu t,x_{\nu+1},\dots,x_k)\right\|_{L_p^{(k)}}$$

$$(\nu = 1,2,\dots,k; r = 1,2,\dots), \qquad (1.3.2)$$

$$E_{n,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_p^{(k)}} = \inf_{T_n}\|f(x_1,\dots,x_k)-T_n(x_1,\dots,x_{\nu-1},(x_\nu),x_{\nu+1},\dots,x_k)\|_{L_p^{(k)}}, \qquad (1.3.3)$$

где $T_n(x_1,\dots,x_{\nu-1},(x_\nu),x_{\nu+1},\dots,x_k)$ – полином (тригонометрический) порядка $\le n$, по переменным $x_1,\dots,x_k$.

Величину (1.3.2) обычно называют частным модулем непрерывности порядка r функции $f(x_1,\dots,x_k)$ по переменным $x_1,\dots,x_k$в метрике $L_p^{(k)}$, а величина (1.3.3) частным наилучшим приближением порядка *n* тригонометрическими многочленами по переменным $x_1,\dots,x_k$ в метрике $L_p^{(k)}$.

В работе Ю.А.Пономаренко и М.Ф.Тимана [75] для рядов Фурье $2\pi-$ периодических функций двух переменных доказана следующая теорема, которая является обобщением теоремы Лейндлера [67] в одномерном случае.

Теорема 1.3.1. (Тиман М.Ф., Пономаренко Ю.А.).

A. *Если* $f(x_1,x_2)\in L_2^{(2)}$ *и выполнены условия:*

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}2^{n_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1\right)}2^{n_2\left(\frac{1}{2}-\beta_2\right)}\left\{\sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1}\sum_{k_2=2^{n_2}}^{2^{n_2+1}-1}\rho_{k_1,k_2}^2\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty,$$

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1(\frac{1}{2}-\beta_1)} \left\{ \sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1} \rho_{k_1,0}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\sum_{n_2=0}^{\infty} 2^{n_2(\frac{1}{2}-\beta_2)} \left\{ \sum_{k_2=2^{n_2}}^{2^{n_2+1}-1} \rho_{0,k_2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

где

$$\rho_{n_1,n_2} = \mu_{n_1,n_2} \left(\sum_{i_1=0}^{2} \sum_{i_2=0}^{2} \left| a_{n_1,n_2}^{i_1,i_2} \right| \right)^{\frac{1}{2}},$$

то двойной тригонометрический ряд Фурье функции $f(x_1, x_2) \in L_2^{(2)}$ *почти всюду* $|C; \beta_1, \beta_2|$ *– суммируемый для всех* $1 < \beta_1, \beta_2 < \frac{1}{2}$.

Б. *Если* $f(x_1, x_2) \in L_2^{(2)}$ *и выполняются условия:*

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sqrt{n_1 n_2} \left\{ \sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1} \sum_{k_2=2^{n_2}}^{2^{n_2+1}-1} \rho_{k_1,k_2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sqrt{n_1} \left\{ \sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1} \rho_{k_1,0}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \qquad \sum_{n_2=0}^{\infty} \sqrt{n_2} \left\{ \sum_{k_2=2^{n_2}}^{2^{n_2+1}-1} \rho_{0,k_2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

то двойной тригонометрический ряд Фурье этой функции $f(x_1, x_2) \in L_2^{(2)}$ *почти всюду будет* $\left|C; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right|$ *– суммируемым.*

В. *Если* $f(x_1, x_2) \in L_2^{(2)}$ *и выполняются условия:*

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1} \sum_{k_2=2^{n_2}}^{2^{n_2+1}-1} \rho_{k_1,k_2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\sum_{n_i=0}^{\infty}\left\{\sum_{k_1=2^{n_i}}^{2^{n_i+1}-1}\rho_{k_i,0}^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

где $i = 1, 2$, *то двойной тригонометрический ряд Фурье функции* $f(x_1, x_2) \in L_2^{(2)}$ *почти всюду* $|C; \beta_1, \beta_2| -$ *суммируемый для всех* $\beta_1, \beta_2 > \frac{1}{2}$.

Кроме того, авторами работы [75] найдены ряд достаточных признаков по вопросам абсолютной чезаровской суммируемости кратных тригонометрических рядов Фурье функции $f(x_1, x_2) \in L_p^{(2)}$, где конструктивные характеристики определяют аппарат наилучшего приближения порядка n тригонометрическими полиномами, а структурные свойства - модули непрерывности порядка r.

Теорема 1.3.2. (Тиман М.Ф., Пономаренко Ю.А.).

I. *Если функция* $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *и выполнены условия:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}-\beta_\nu-1} E_{n,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}} < \infty,$$

то кратный тригонометрический ряд Фурье заданной функции $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *почти всюду* $|C; \beta_1, \dots, \beta_k|$*- суммируемый для всех* $0 < \beta_\nu < \frac{1}{2}$;

II. *Если функция* $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *и выполнены условия:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{k-2}{2}} [ln(n+1)]^{-\frac{1}{2}} E_{n,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}} < \infty,$$

то кратный тригонометрический ряд Фурье заданной функции $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *почти всюду* $|C; \beta_1, \dots, \beta_k|$*- суммируемый для всех* $\beta_\nu > \frac{1}{2}$;

III. *Если функция* $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *и выполнены условия:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}-\beta_\nu}\left(E_{n,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}\right)^{\alpha_\nu} < \infty \ (\alpha_\nu > 0;\ \nu = 1,2,\dots,k;\ \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1),$$

то кратный ряд Фурье функции $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *почти всюду* $|C; \beta_1, \dots, \beta_k|$*-суммируемый для всех* $0 < \beta_\nu \le \frac{1}{2}$;

IV. *Если функция* $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *и выполнены условия:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1}}{ln(n+1)}\left(E_{n,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}\right)^{\alpha_\nu} < \infty,$$

где $\alpha_\nu > 0;\ \nu = 1,2,\dots,k;\ \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$, *то ряд Фурье функции* $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *почти всюду* $|C; \beta_1, \dots, \beta_k|$*- суммируемый при* $\beta_\nu > \frac{1}{2}$.

Теорема 1.3.3 (Тиман М.Ф., Пономаренко Ю.А.).

1. *Если функция* $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *и выполнены условия:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}-\beta_\nu-1}\, \omega_{l,\infty}^{(\nu)}\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_2^{(k)}} < \infty \ \ (l \ge k, \nu = 1,2,\dots,k),$$

то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *почти всюду* $|C; \beta_1, \dots, \beta_k|$*- суммируемый для всех* $0 < \beta_\nu < \frac{1}{2}$;

2. *Если функция* $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *и выполнены условия:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{k-3}{2}}\, [ln(n+1)]^{-\frac{1}{2}} \omega_{l,\infty}^{(\nu)}\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_2^{(k)}} < \infty \ \ (l \ge k, \nu = 1,2,\dots,k),$$

то ряд Фурье функции $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *почти всюду* $|C; \beta_1, \dots, \beta_k|$*-суммируемый для всех* $\beta_\nu > \frac{1}{2}$*;*

3. *Если функция* $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *и выполнены условия:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}-\beta_\nu} \left(\omega_{l_\nu}^{(\nu)} \left(f; \frac{1}{n} \right)_{L_2^{(k)}} \right)^{\alpha_\nu} < \infty,$$

где $\alpha_\nu > 0$; $l_\nu > \frac{1-2\beta_\nu}{\alpha_\nu}$, $\nu = 1,2, \dots, k$; $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$, *то кратный ряд Фурье функции* $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *почти всюду* $|C; \beta_1, \dots, \beta_k|$*- суммируемый для всех* $0 < \beta_\nu \le \frac{1}{2}$*;*

4. *Если функция* $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *и выполнены условия:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1}}{ln(n+1)} \left(\omega_{l_\nu}^{(\nu)} \left(f; \frac{1}{n} \right)_{L_2^{(k)}} \right)^{\alpha_\nu} < \infty$$

где $\alpha_\nu > 0$; $l_\nu > \frac{1-2\beta_\nu}{2\alpha_\nu}$, $\nu = 1,2, \dots, k$; $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$, *то кратный ряд Фурье функции* $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *почти всюду* $|C; \beta_1, \dots, \beta_k|$*- суммируемый при* $\beta_\nu > \frac{1}{2}$*.*

§1.4. Анализ работ по изучению абсолютной сходимости и суммируемости кратных рядов Фурье почти-периодических функций многих переменных

В исследованиях В.Г.Челидзе [121], Ю.Муселиака [69], [70], И.Е.Жака [56], [57], М.Ф.Тимана [88], [95], [97] и других достаточно полно изучены нахождения необходимых и достаточных признаков абсолютной сходимости и суммируемости кратных тригонометрических рядов Фурье периодических функций многих переменных. А в исследованиях Хасанова Ю.Х. [107], [117]-[119] найдены ряд необходимых и достаточных критериев абсолютной сходимости и суммируемости кратных рядов тригонометрических Фурье почти-периодических функций. В отличие от других авторов, Хасановым Ю.Х. изучены проблемы абсолютной сходимости и чезаровской суммируемости кратных тригонометрических рядов Фурье почти-периодических по Безиковичу функций.

Определение 1.4.1. *Функцию $f(x_1,\dots,x_k)$ принято называть $B_p^{(k)}$ −почти-периодической, или почти-периодической по Безиковича ($p \geq 1$), если:*

1. $f(x_1,\dots,x_k)$ измеримая функция и $|f(x_1,\dots,x_k)|^p$ интегрируема по Лебегу на −мерном кубе (в пространстве R^k);

2. существует ограниченное среднее значение функции $f(x_1,\dots,x_k)$, т.е.

$$D_{B_p^{(k)}}\{f(x_1,\dots,x_k)\} = \left\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{(2T)^k}\int_{-T}^{T}\dots\int_{-T}^{T}|f(x_1,\dots,x_k)\,|^p dx_1\dots dx_k\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{\overline{M}\{|f(x_1,\dots,x_k)|^p\}\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty;$$

3. найдется такая последовательность тригонометрических полиномов $\{P_{n_1,\dots,n_k}(x_1,\dots,x_k)\}$

$$P_{n_1,\dots,n_k}(x_1,\dots,x_k) = \sum_{m_1=0}^{n_1}\dots\sum_{m_k=0}^{n_k} C_{m_1,\dots,m_k}\,exp\left(i\left(\lambda_{m_1}^{(1)}x_1 + \dots + \lambda_{m_k}^{(k)}x_k\right)\right),$$

для которой выполняется соотношение

$$D_{B_p^{(k)}}\{f(x_1,\dots,x_k) - P_{n_1,\dots,n_k}(x_1,\dots,x_k)\} = 0.$$

Пространство функций $f(x_1,\dots,x_k)$, удовлетворяющих всем условиям определения 1.4.1, обычно называется $B_p^{(k)}$ −пространством, или −мерным пространством Безиковича, а норму функции $f(x_1,\dots,x_k) \in B_p^{(k)}$ $(p \geq 1, k = 1,2,\dots)$ принимается оператор:

$$\|f(x_1,\dots,x_k)\|_{B_p^{(k)}} = \left\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{(2T)^k}\int_{-T}^{T}\dots\int_{-T}^{T}|f(x_1,\dots,x_k)\,|^p dx_1\dots dx_k\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_k) \in B_p^{(k)}$ имеет ряд Фурье вида:

$$\sum_{n_1} \dots \sum_{n_k} A_{n_1,\dots,n_k} exp\left(i\left(\lambda_{n_1}^{(1)} x_1 + \dots + \lambda_{n_k}^{(k)} x_k\right)\right),$$

где

$$A_{n_1,\dots,n_k} = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{(2T)^k} \int_{-T}^{T} \dots \int_{-T}^{T} f(x_1, \dots, x_k) exp\left\{i\left\{\lambda_{n_1}^{(1)} x_1 + \dots + \lambda_{n_k}^{(k)} x_k\right\}\right\} dx_1 \dots dx_k.$$

а показатели Фурье $\left\{\lambda_{n_i}^{(i)}\right\}_{i=1}^{k}$ удовлетворяют условиям

$$\lambda_{-n_j}^{(j)} = -\lambda_{n_j}^{(j)}; \ \left|\lambda_{n_{j-1}}^{(j-1)}\right| < \left|\lambda_{n_j}^{(j)}\right|; \ \lim_{n_j\to\infty} \lambda_{n_j}^{(j)} = \infty \ \left(j = \overline{1,k}\right), \quad (1.4.1)$$

т.е. показатели Фурье имеют единственную предельную точку на бесконечности.

Для функций $f(x_1, \dots, x_k) \in B_p^{(k)}$, как характеристика, определяющая свойства гладкости функции используется оператор:

$$\omega_{r,(j)}(f;h)_{B_p^{(k)}} = \sup_{|t|\le h} \left\|\Delta_{t,j}^r f(x_1, \dots, x_k)\right\|_{B_p^{(k)}},$$

где

$$\Delta_{t,j}^r f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{m=0}^{r} (-1)^{r-m} \binom{r}{m} f\left(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + mt, x_{j+1}, \dots, x_k\right) -$$

разность r –го порядка функции $f(x_1, \dots, x_k)$ с шагом t.

Доказаны ряд теорем, которые показывают, какие свойства функции по каждой из переменных $x_1, \dots, x_k$ в отдельности могут способствовать абсолютную сходимость её кратного ряда Фурье в случае, когда величины

$$\Lambda_1 \left\{\lambda_{n_1}^{(1)}\right\}_{n_1=1}^{\infty}, \Lambda_2 \left\{\lambda_{n_2}^{(2)}\right\}_{n_2=1}^{\infty}, \dots, \Lambda_k \left\{\lambda_{n_k}^{(k)}\right\}_{n_k=1}^{\infty},$$

подчиняются требованиям (1.4.1).

Теорема 1.4.1. *Если функция* $f(x_1, \dots, x_k) \in B_p^{(k)}$ $(1 < p \le 2)$ *и* $\Lambda_j \left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}_{j=1}^{k}$ *удовлетворяет условиям (1.4.1, а при* $0 < \beta < \frac{p}{p-1}$, $r > k\left(\frac{1}{\beta} - \frac{p-1}{p}\right)$ *и* $j = 1,2, \dots k$ *сходится ряд*

$$\sum_{v=1}^{\infty} 2^{vk\left(1-\beta\frac{p-1}{p}\right)} \left(\frac{\lambda_{2^v}^{(j)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}}\right)^{r} \omega_{r,(j)}^{\beta}\left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(j)}}\right)_{B_p^{(k)}} < \infty,$$

то сходится и ряд

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_k=0}^{\infty} \left|A_{n_1,\dots,n_k}\right|^{\beta}.$$

В работах [118], [119] также найдены достаточные условия или признаки абсолютной сходимости кратных рядов Фурье функции $f(x_1, \dots, x_k) \in B_p^{(k)}$ $(1 < p \le 2)$, когда показатели Фурье $\Lambda_j \left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}_{j=1}^{k}$ функции $f(x_1, \dots, x_k)$ имеют единственную предельную точку на нуле, т.е. выполнены условия

$$\lambda_{-n_j}^{(j)} = -\lambda_{n_j}^{(j)}; \ \left|\lambda_{n_{j-1}}^{(j-1)}\right| < \left|\lambda_{n_j}^{(j)}\right|; \ \lim_{n_j \to \infty} \lambda_{n_j}^{(j)} = 0 \ \left(j = \overline{1, k}\right). \tag{1.4.2}$$

Пусть для функции $f(x_1, \dots, x_k) \in B_p^{(k)}$ существуют спектры $\Lambda_j \left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}$ $(j = 1,2, \dots, k)$, к которым не принадлежат их предельные точки, т.е.

$$\overline{M}_{x_j}\{f(x_1, \dots, x_k)\} \neq 0 \ \ (j = 1,2, \dots, k). \tag{1.4.3}$$

Для функции $f(x_1, \dots, x_k) \in B_p^{(k)}$, с условиями (1.4.2) используем модуль усреднения порядка r $(r \in N)$ на всей вещественной оси $(-\infty; \infty)$.

$$W_{r,(j)}(f, H)_{B_p^{(k)}} = \sup_{|T| \ge H} \left\| f_{T^r}^{(j)}(x_1, \dots, x_k) \right\|_{B_p^{(k)}} \ \ (H > 0),$$

где

$f_{T^r}^{(j)}(x_1, \dots, x_k) =$

$$= \frac{1}{(2T)^r} \int\limits_{x_j-T}^{x_j+T} dt_1 \int\limits_{t_1-T}^{t_1+T} dt_2 \dots \int\limits_{t_{r-2}-T}^{t_{r-2}+T} dt_{r-1} \int\limits_{t_{r-1}-T}^{t_{r-1}+T} f(x_1, \dots, x_{j-1}, t_r, x_{j+1}, \dots, x_k) dt_r.$$

В этом случае, наряду с условием (1.4.2) должен выполняться и (1.4.3).

Теорема 1.4.2 (Хасанов Ю.Х.). *Если для показателей Фурье* $\Lambda_j \left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}_{j=-\infty}^{k}$ *функции* $f(x_1, \dots, x_k) \in B_p^{(k)}$ $1 < p \leq 2$ *выполнены условия (1.4.2) и (1.4.3 и при* $0 < \beta < \frac{p}{p-1}, r > k\left(\frac{1}{\beta} - \frac{p}{p-1}\right)$ *и каждом* $j = 1,2, \dots k$ *сходится ряд*

$$\sum_{v=1}^{\infty} 2^{vk\left(1-\beta\frac{p-1}{p}\right)} W_{r,(j)}^{\beta}\left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(j)}}\right)_{B_p^{(k)}},$$

то

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_k=0}^{\infty} \left|A_{n_1,\dots,n_k}\right|^{\beta} < \infty.$$

Для функций $f(x_1, \dots, x_k) \in L_p^{(k)}$ $(1 < p \leq 2)$ теоремы 1.4.1 и 1.4.2 установлены М.Ф.Тиманом [88].

В работе Хасанова Ю.Х. [113] выявлены некоторые признаки абсолютной чезаровской суммируемости кратных тригонометрических рядов Фурье функций $f(x_1, \dots, x_k) \in B_p^{(k)}$.

Определение 1.4.2. *Кратный ряд*

$$\sum_{n_1,n_2,\dots,n_k}^{\infty} u_{n_1,n_2,\dots,n_k}$$

называется $|C;\ \beta_1,\dots,\beta_k|-$ *суммируемым* $(\beta_i > -1,\ i = 1,2,\dots,k)$, *если для любой совокупности индексов* $n_{v_1},\dots,n_{v_m}$ $(m \le k)$ *выполнены условия*

$$\sum_{n_{v_1}=1}^{\infty}\dots\sum_{n_{v_m}=1}^{\infty}\frac{\tau_{n_{v_1},\dots,n_{v_m}}^{\beta_{v_1},\dots,\beta_{v_m}}}{n_{v_1}\dots n_{v_m}} < \infty$$

где

$\tau_{n_{v_1},\dots,n_{v_m}}^{\beta_{v_1},\dots,\beta_{v_m}} =$

$$= \frac{\sum_{\mu_{v_1}=1}^{n_{v_1}}\dots\sum_{\mu_{v_m}=1}^{n_{v_m}} A_{n_{v_1}-\mu_{v_1}}^{\beta_{v_1}-1}\dots A_{n_{v_m}-\mu_{v_m}}^{\beta_{v_m}-1}\mu_{v_1},\dots,\mu_{v_m}u_{0,\dots 0,\mu_{v_1},0,\dots,0,\mu_{v_m},\dots,0}}{A_{n_{v_1}}^{\beta_{v_1}}\dots A_{n_{v_m}}^{\beta_{v_m}}}$$

$$A_n^{\beta} = \frac{(\beta+1)\dots(\beta+n)}{n!}.$$

Далее изучаем ряд работ (например [113]), где доказаны утверждения, дающие критерии абсолютной суммируемости кратного ряда Фурье функции $f(x_1,\dots,x_k) \in B_p^{(k)}$ в терминах поведения коэффициентов Фурье.

Теорема 1.4.3. *Положим* $f(x_1,x_2,\dots,x_k) \in B_2^{(k)}$.

1. *Если удовлетворены условия*

$$\sum_{n_{v_1}=0}^{\infty}\dots\sum_{n_{v_i}=0}^{\infty}\prod_{\mu=1}^{i}2^{\frac{n_{v_\mu}(1-2\alpha_{v_\mu})}{2}}\left(\sum_{k_1=2^{n_{v_1}}}^{2^{n_{v_1}+1}-1}\dots\sum_{k_i=2^{n_{v_i}}}^{2^{n_{v_i}+1}-1}\rho_{0,\dots 0,n_{v_1},0,\dots,0,n_{v_i},\dots,0}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

где $-1 < \alpha_v < \frac{1}{2},\ v = 1,2,\dots,k$ *при любом* $i \le k$, *то тригонометрический ряд Фурье заданной функции является* $|C;\ \alpha_1,\dots,\alpha_k|-$ *суммируемым методом Чезаро почти всюду.*

2. *При выполнении условия*

$$\sum_{n_{v_1}=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_{v_i}=0}^{\infty}\left(\prod_{\mu=1}^{i}n_{v_\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k_1=2^{n_{v_1}}}^{2^{n_{v_1}+1}-1}\cdots\sum_{k_i=2^{n_{v_i}}}^{2^{n_{v_i}+1}-1}\rho^2_{0,\dots 0,n_{v_1},0,\dots,0,n_{v_i},\dots,0}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty,$$

где $\alpha_v=\frac{1}{2},\ v=1,2,\dots,k$ *при любом* $i\le k$, *ряд Фурье функции* $f(x_1,x_2,\dots,x_k)\in B_2^{(k)}$ *почти всюду* $\left|C;\ \frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}\right|-$ *суммируем методом Чезаро.*

3. *В случае выполнении условий*

$$\sum_{n_{v_1}=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_{v_i}=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=2^{n_{v_1}}}^{2^{n_{v_1}+1}-1}\cdots\sum_{k_i=2^{n_{v_i}}}^{2^{n_{v_i}+1}-1}\rho^2_{0,\dots 0,n_{v_1},0,\dots,0,n_{v_i},\dots,0}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty,$$

где $\alpha_v>\frac{1}{2},\ v=1,2,\dots,k$ *при любом* $i\le k$, *тригонометрический ряд Фурье функции* $f(x_1,\dots,x_k)\in B_2^{(k)}$ *почти всюду* $|C;\ \alpha_1,\dots,\alpha_k|-$ *суммируем методом Чезаро.*

Теорема 1.4.3 обобщает результатов Л.Лейндлера [67], которая установлена для функций $f(x)\in L_2$ (в одномерном случае).

Теперь анализируем ряд работ, где выясняются вопросы о том, какие структурные свойства функции по каждой из переменных в отдельности являются достаточными для абсолютной чезаровской суммируемости кратного тригонометрического ряда Фурье функции $f(x_1,x_2,\dots,x_k)\in B_2^{(k)}$.

Теорема 1.4.4. *Если функция* $f(x_1,x_2,\dots,x_k)\in B_2^{(k)}$ *и для ее спектра* $\left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}$ $(j=1,2,\dots,k)$ *имеют места условий (1.4.1), то*

1. *при* $0<\beta<2, r>k$ *и каждом* $j=1,2,\dots,k$, *из*

$$\sum_{v=1}^{\infty}2^{v\left(\frac{k}{2}-\alpha_v-1\right)}\left(\frac{\lambda_{2^v}^{(j)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}}\right)^{r}\omega_{r,(j)}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^v}^{(j)}}\right)_{B_2^{(k)}}<\infty,$$

следует $|C;\ \alpha_1,\dots,\alpha_k|-$ *суммируемости при* $0<\alpha_v\le\frac{1}{2},\ i=1,2,\dots.$ *ряда*

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_k=0}^{\infty} \left|A_{n_1,\dots,n_k}\right|. \tag{1.4.4}$$

2. *при* $0 < \beta < 2, r > k$ *и каждом* $j = 1,2, \dots, k$ *из*

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{2^{v\left(\frac{k-1}{2}\right)}}{\sqrt{ln2^v}} \left(\frac{\lambda_{2^v}^{(j)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}}\right)^r \omega_{r,(j)} \left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(j)}}\right)_{B_2^{(k)}} < \infty,$$

следует $|C;\ \alpha_1, \dots, \alpha_k|$ *−суммируемости при* $\alpha_i > \frac{1}{2},\ i = 1,2, \dots$ *ряда (1.4.4)*

Далее доказаны аналоги теоремы 1.4.4 для кратных рядов Фурье, когда спектр функции $f(x_1, \dots, x_k) \in B_2^{(k)}$ имеет единственную предельную точку в нуле, т.е. если удовлетворены условия (1.4.2)-(1.4.3).

Теорема 1.4.5. *Если функция* $f(x_1, \dots, x_k) \in B_2^{(k)}$ *и для ее спектра* $\left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}$ $(j = 1,2, \dots, k)$ *выполнены условия (1.4.2) и (1.4.3), то*

1. *при* $0 < \beta < 2, r > k$ *и каждом* $j = 1,2, \dots, k$ *из*

$$\sum_{v=1}^{\infty} 2^{v\left(\frac{k}{2}-\alpha_v-1\right)} W_{r,(j)} \left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(j)}}\right)_{B_2^{(k)}} < \infty,$$

следует) суммируемости ряд (1.4.4 методом $|C;\ \alpha_1, \dots, \alpha_k|$ *для значений* $0 < \alpha_i \le \frac{1}{2},\ i = 1,2, \dots.$

2. *при* $0 < \beta < 2, r > k$ *и каждом* $j = 1,2, \dots, k$ *из*

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{2^{v\left(\frac{k-1}{2}\right)}}{\sqrt{ln2^v}} W_{r,(j)} \left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(j)}}\right)_{B_2^{(k)}} < \infty,$$

следует суммируемости ряд (1.4.4) методом $|C;\ \alpha_1, \dots, \alpha_k|$ *при* $\alpha_i > \frac{1}{2},\ i = 1,2, \dots.$

Глава 2. Абсолютная сходимость двойных рядов Фурье почти-периодических функций

§ 2.1. Абсолютная сходимость двойных рядов Фурье почти-периодических функций, со спектром, имеющих предельную точку в бесконечности

Определение 2.1.1. *Непрерывная на всей действительной оси функция $f(x)$ называется равномерной почти-периодической, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $l = l(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины l найдется хотя бы одно число τ, для которого*

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon(-\infty < x < \infty).$$

Основные понятия, определения и свойства этих функций хорошо изложены, в монографиях Б.М. Левитана [15], Г. Бора [8] и А.С. Безиковича [7].

Определение 2.1.2 [107]. *Функцию $f(x,y)$ принято называть $B_p^{(2)}$ −почти – периодической, или почти – периодической по Безиковичу , если при $p \geq 1$:*

1) *функция $f(x,y)$ является измеримой и $|f(x,y)|^p$ интегрируема по Лебегу на двумерном пространстве R^2;*

2) *существует ограниченное среднее значение*

$$D_{B_p^{(2)}}\{f(x,y)\} = \left\{\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} |f(x,y)|^p dxdy \right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{\overline{M}\{|f(x,y)|^p\}\right\}^{1/p} < \infty; \qquad (2.1.1)$$

3) *можно найти последовательность тригонометрических полиномов вида*

$$P_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} C(\lambda_k, \mu_l) exp\{i\{\lambda_k x + \mu_l y\}\},$$

где

$$C(\lambda_k, \mu_l) = M\{f(x,y) exp\{-i\{\lambda_k x + \mu_l y\}\}\},$$

-коэффициенты Фурье, для которой выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} D_{B_p^{(2)}}\{f(x,y) - P_n(x,y)\} = 0.$$

Пространство функций, которое удовлетворяет всех условий 1) – 3) обычно называют $B_p^{(2)}$ −пространством, или двумерным пространством по Безиковичу, где за норму функции $f(x,y) \in B_p^{(2)}$ $(p \geq 1)$ принимается среднее значение вида (2.1.1).

Когда исследуются проблем абсолютной сходимости двойных тригонометрических рядов Фурье функций $f(x,y) \in B_2^{(2)}$ используются следующие характеристики их свойства в зависимости от поведения спектра рассматриваемой функции:

1. модуль непрерывности порядка r функции $f(x,y) \in B_2^{(2)}$,

$$\omega_r(f;h)_{B_2^{(2)}} = \sup_{|t|<h} \|\Delta_t^r f(x,y)\|_{B_2^{(2)}} \quad (h > 0),$$

где

$$\Delta_t^r f(x,y) = \sum_{m=0}^{r} (-1)^{r-m} \binom{r}{m} f(\, x + mt, y + mt)$$

-разность r −го порядка функции $f(x,y)$ с шагом t.

2. модуль усреднения порядка r $(r \in N)$ этой функции на $(-\infty, \infty)$

$$W_r(f;H)_{B_2^{(2)}} = \sup_{|T|\geq H} \|f_{T^r}(x,y)\|_{B_2^{(2)}} \quad (H > 0),$$

где

$$f_{T^r}(x,y) = \frac{1}{(2T)^r} \int_{x-T}^{x+T} dt_1 \int_{t_1-T}^{t_1+T} dt_2 \dots \int_{t_{r-2}-T}^{t_{r-2}+T} dt_{r-1} \int_{t_{r-1}-T}^{t_{r-1}+T} f(t_r) dt_r.$$

Следует заметить, что пространство почти-периодических по Безиковичу функций B_2 получается в результате замыкания множества тригонометрических полиномов вида

$$t(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}, \qquad a_k \in C, \lambda_k, x \in R, n \in N,$$

где норма рассматриваемой функции определяется соотношением

$$\|f\|_{B_2} = \left\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Предположим, что тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) \in B_2$ представлен в виде

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x},$$

здесь

$$A_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\lambda_n x}\, dx$$

- коэффициенты Фурье, а спектр функции $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ подчиняются условиям:

$$\lambda_0 = 0, \lambda_{-n} = -\lambda_n, |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|, \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty. \qquad (2.1.2)$$

В работе [112] выявлены ряд необходимых и достаточных критерии сходимости рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{\beta} n^{\gamma} \qquad (2.1.3)$$

для значений параметров β $(0 < \beta < 2)$ и γ $(0 < \gamma < 2)$, где $\{A_n\}$ обозначают коэффициентов Фурье этой функции $f(x) \in B_2$.

Теорема 2.1.1 [112]. *Пусть $f(x) \in B_2$ и выполнены условия (2.1.2) и*

$n^{\alpha} = O\{\lambda_n\}$ $(n > 0, \alpha > 0)$. *Если при $k > \frac{\gamma+1-\frac{\beta}{2}}{\alpha\beta}$ и $\rho = \frac{\gamma+1-\frac{\beta}{2}}{\alpha}$ сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho-1}\omega_k(f;n^{-1})_{B_2},$$

где

$$\omega_k(f;h)_{B_2} = \sup_{|t|\le h}\left\|\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}f(x+rt)\right\| \ (h>0, k\in N)$$

-модуль непрерывности порядка k *функции* $f(x)\in B_2$*, то ряд (2.1.3) сходится.*

В этом параграфе нами получены результаты, которые являются аналогами теоремы 2.1.1 для двойных тригонометрических рядов Фурье почти-периодических функций Безиковича.

Пусть $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$ −почти- периодическая функция Безиковича. Для каждой функции $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$ рассмотрим при фиксированном j $(j=1{,}2)$ множество тех λ, для которых

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}f(x_1,x_2)exp\{i\lambda x_j\}dx_1dx_2 \ne 0.$$

Множество таких λ, (см. [57], ст. 39), образуют счётного множества, обозначается символом $\Lambda_j\left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}$ $(j=1{,}2)$ и назовём его показателями Фурье или спектром функции $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$ по переменным x_1,x_2.

Введя в рассмотрение числа

$$A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)=\bar{M}\left\{f(x_1,x_2)exp\left\{-i\left\{\lambda_{n_1}^{(1)}x_1+\lambda_{n_2}^{(2)}x_2\right\}\right\}\right\},$$

получаем, что каждой функции $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$ можно поставить в соответствие двойной ряд Фурье

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)exp\left\{i\left\{\lambda_{n_1}^{(1)}x_1+\lambda_{n_2}^{(2)}x_2\right\}\right\}. \qquad (2.1.4)$$

В случае, когда какие–либо из $\lambda_{n_j}^{(j)}=0$ $(j=1{,}2)$, для всех n_j, то ряда (2.1.4) можно представлять как ряд Фурье функции $f(x_1,x_2)$ только по таким переменным x_1, x_2, для которых хотя бы одно из них отлична от нуля, т.е. $\lambda_{n_j}^{(j)} \neq 0 \ (j = 1,2)$.

Пусть функция $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ имеет ряд Фурье вида:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} A\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) exp\left\{i\left\{\lambda_{n_1}^{(1)} x_1 + \lambda_{n_2}^{(2)} x_2\right\}\right\},$$

где показатели Фурье $\left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}$ определяются соотношениям

$$\lambda_0^{(j)} = 0;\ \lambda_{-n_j}^{(j)} = -\lambda_{n_j}^{(j)};\ \lim_{n_j \to \infty} \lambda_{n_j}^{(j)} = \infty\ ;\ \lambda_{n_j}^{(j)} < \lambda_{n_{j+1}}^{(j+1)} (\ j = 1,2). \qquad (2.1.5)$$

Для функции $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$, в качестве характеристики их структурных свойств рассмотрим модуль непрерывности порядка r функции $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$,

$$\omega_{r,(j)}(f; h)_{B_2^{(2)}} = \sup_{|t| \leq h} \left\| \Delta_{h_j}^r f(x_1, x_2) \right\|_{B_2^{(2)}} \ (h > 0,),$$

где

$$\Delta_{h_j}^r f(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^{r} (-1)^{r-m} \binom{r}{m} f(\,x_1 + m h_1, x_2 + m h_2) \ \ (j = 1,2)$$

-разность r –го порядка функции $f(x_1, x_2)$ с шагом h_j $(j = 1,2)$.

Теперь докажем наше утверждение, которое показывает какие свойства функции $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ по каждой из переменных в отдельности обеспечивают абсолютную сходимость её двойного тригонометрического ряда Фурье когда, когда показатели Фурье

$$\Lambda_1 \left\{\lambda_{n_1}^{(1)}\right\}_{n_1=-\infty}^{\infty}, \Lambda_2 \left\{\lambda_{n_2}^{(2)}\right\}_{n_2=-\infty}^{\infty},$$

подчиняются условиям (2.1.5).

Теорема 2.1.2. *Если функция* $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$ *и её спектр* $\Lambda_j\left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}_{j=1}^{2}$ *удовлетворяет условиям (2.1.5) и кроме того, при* $0<\beta<2, r>\frac{2}{\beta}-1$ *и каждом* $j=1{,}2$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{2\nu\left(1-\frac{\beta}{2}\right)}\left(\frac{\lambda_{2^\nu}^{(j)}}{\lambda_{2^{\nu-1}}^{(j)}}\right)^{r}\omega_{r,(j)}^{\beta}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^\nu}^{(j)}}\right)_{B_2^{(2)}}<\infty, \tag{2.1.6}$$

то сходится и ряд

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left|A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right|^{\beta}.$$

Доказательство. Так как

$$\left\|\Delta_{h_j}^{r}f(x_1,x_2)\right\|_{B_2^{(2)}}^{2}=\left\|\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\,sin^{2r}\frac{h_j}{2}\lambda_{n_j}^{(j)}\right\|_{B_2^{(2)}},$$

где h_j- шаг симметричной разности порядка r, то

$$\left\{\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left|A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right|^{2}\,sin^{2r}\frac{h_j}{2}\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}^{1/2}\le\omega_{r,(j)}\left(f;h_j\right)_{B_2^{(2)}}.$$

Тем более справедливо

$$\sum_{n_1=0}^{2^{\nu-1}}\sum_{n_2=0}^{2^{\nu}}\left|A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right|^{2}\,sin^{2r}\frac{h_j}{2}\lambda_{n_j}^{(j)}\le\omega_{r,(j)}^{2}\left(f;h_j\right)_{B_2^{(2)}}.\ (j=1{,}2) \tag{2.1.7}$$

Взяв в неравенстве (2.1.7) $h_j=\frac{\pi}{\lambda_{2^\nu}^{(j)}}$ и, используя неравенство

$$sinz\ge\frac{2}{\pi}z,\qquad z\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

[см. 16] получим, что для всех $\lambda_{2^{\nu-1}}^{(j)}<\lambda_{n_j}^{(j)}<\lambda_{2^\nu}^{(j)}$ $(j=1{,}2)$ справедливо

$$sin\frac{h_j}{2}\lambda_{n_j}^{(j)}\ge\frac{2}{\pi}\frac{\lambda_{n_j}^{(j)}}{\lambda_{2^\nu}^{(j)}}\quad(j=1{,}2).$$

Отсюда, используя последнее соотношение к оценке (2.1.7), будем иметь

$$\omega_{r,(j)}^{2}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^{v}}^{(j)}}\right)_{B_{2}^{(2)}}>\sum_{n_1=0}^{2^{v-1}}\sum_{n_2=0}^{2^{v}}\left|A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right|^{2}\left(\frac{\lambda_{n_j}^{(j)}}{\lambda_{2^{v}}^{(j)}}\right)^{2r}\geq$$

$$\geq\left(\frac{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}}{\lambda_{2^{v}}^{(j)}}\right)^{2r}\sum_{n_1=0}^{2^{v-1}}\sum_{n_2=0}^{2^{v}}\left|A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right|^{2},$$

т. е.

$$\sum_{n_1=0}^{2^{v-1}}\sum_{n_2=0}^{2^{v}}\left|A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right|^{2}\leq\left(\frac{\lambda_{2^{v}}^{(j)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}}\right)^{2r}\omega_{r,(j)}^{2}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^{v}}^{(j)}}\right)_{B_{2}^{(2)}}. \tag{2.1.8}$$

Если принять $0<\beta<2$, то использование неравенства Гёльдера, дает:

$$\sum_{n_1=0}^{2^{v-1}}\sum_{n_2=0}^{2^{v}}\left|A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right|^{\beta}<2^{2v(1-\beta/2)}\cdot\left\{\sum_{n_1=0}^{2^{v-1}}\sum_{n_2=0}^{2^{v}}\left|A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right|^{2}\right\}^{\frac{\beta}{2}}\leq$$

$$\leq 2^{2v\left(1-\frac{\beta}{2}\right)}\left(\frac{\lambda_{2^{v}}^{(j)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}}\right)^{r}\omega_{r,(j)}^{\beta}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^{v}}^{(j)}}\right)_{B_{2}^{(2)}}.$$

После суммирования по j и по v последнее неравенство, примет вид:

$$\sum_{v=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\sum_{n_1=0}^{2^{v-1}}\sum_{n_2=0}^{2^{v}}\left|A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right|^{\beta}<\sum_{v=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}2^{2v\left(1-\frac{\beta}{2}\right)}\left(\frac{\lambda_{2^{v}}^{(j)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}}\right)^{r}\omega_{r,(j)}^{\beta}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^{v}}^{(j)}}\right)_{B_{2}^{(2)}},$$

или

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left|A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right|^{\beta}<$$

$$<\sum_{v=1}^{\infty}2^{2v\left(1-\frac{\beta}{2}\right)}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\lambda_{2^{v}}^{(j)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}}\right)^{r}\omega_{r,(j)}^{\beta}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^{v}}^{(j)}}\right)_{B_{2}^{(2)}}. \tag{2.1.9}$$

Таким образом, из неравенства (2.1.9) в силу сходимости ряда (2.1.6) вытекает, что

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left|A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right|^{\beta} < \infty \quad (0<\beta<2).$$

Теорема 2.1.2 доказана.

Пусть $f(x_1,x_2)$ почти периодическая функция Безиковича, т.е. $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$ с рядом Фурье

$$f(x_1,x_2)\sim\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)exp\left\{i\left\{\lambda_{n_1}^{(1)}x_1+\lambda_{n_2}^{(2)}x_2\right\}\right\},$$

где $\left\{\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right\}$ – показатели Фурье, имеющие единственную предельную точку в бесконечности, т.е. если удовлетворены условия (2.1.5).

Далее следует исследовать наличия необходимых условий для абсолютной сходимости двойных тригонометрических рядов Фурье вида:

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left|A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right|^{\beta} n_1^{\gamma}n_2^{\gamma} \tag{2.1.10}$$

для различных значениях β $(0<\beta<2)$ и γ $(0\le\gamma<1)$.

Теорема 2.1.3. *Если функция $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$ и её коэффициенты Фурье* $\mathrm{A}(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)})$ *являются монотонно убывающими, кроме того числа* $\left\{\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right\}$ *подчиняются условиям (2.1.5), а также*

$$\lambda_{n_j}^{(j)}=n_j^{\alpha} \quad (\alpha>0,\ j=1,2),$$

то из сходимости ряда вида (2.1.10) следует, что

$$\sum_{v=0}^{\infty}2^{v\left(\gamma+1-\frac{\beta}{2}\right)}\omega_r^{\beta}(f;2^{-v\alpha})_{B_2^{(2)}}<\infty, \tag{2.1.11}$$

где $0<\beta<2,\ 0\le\gamma<1,\ r>\frac{\gamma+1-\frac{\beta}{2}}{\alpha\beta}$,

$$\omega_r(f;h)_{B_2^{(2)}}=\sup_{|t|\le h}\left\|\sum_{m=0}^{r}(-1)^{r-m}\binom{r}{m}f(\,x_1+mt,x_2+mt)\right\|_{B_2^{(2)}}\quad(h>0,).$$

Доказательство теоремы проводится с помощью следующих вспомогательных утверждений.

Лемма 2.1.1 (А. А. Конюшков [64, с. 62]). *Пусть при некотором* $\tau>0$ *последовательность* $\{n^{-\tau}d_n\}$ *почти убывает. Тогда имеет место неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-c}\left\{\sum_{m=1}^{n}d_m\right\}^{\delta}\le\sum_{n=1}^{\infty}n^{-c}(nd_n)^{\delta},\tag{2.1.12}$$

где $d_n\ge0,\ c>1,\ 0<d_n<1\ ,\ n=1,2,\dots.$

Предположим, что существует числовая последовательность $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$. Как и С.Н. Бернштейн [6], будем называть последовательность $\{d_n\}$ почти убывающей, если найдется такая константа D, что справедливо неравенство $d_{n_2}\le Dd_{n_1}$ равномерно по каждым n_1 и n_2 $(n_2>n_1)$.

Лемма 2.1.2 (А. А. Конюшков [64, с. 62]). *Пусть при некотором* $\tau>0$ *последовательность* $\{n^{-\tau}d_n\}$ *почти убывает. Тогда при* $0<\eta<1,\ \delta-\eta>-1$, *справедливо соотношение:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\delta-\eta}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}d_k\right\}^{\eta}\ll\sum_{n=1}^{\infty}n^{\delta}d_n^{\eta}.\tag{2.1.13}$$

Лемма 2.1.3 (Ю. Муселиак [69, с.12]). *Если числа* $a_1,a_2,\dots$ *положительные, то для любого числа* θ *ряды вида*

$$\sum_{v=1}^{\infty}2^{\theta v}a_{2^v}\qquad\text{и}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}n^{\theta-1}a_n,$$

сходятся, либо расходятся одновременно.

Доказательство теоремы 2.1.3. Сначала построим следующую симметрическую разность с порядком r $(r = 1,2,\dots)$ и с шагом h_j $(j = 1,2)$.

$$\Delta_{h_j}^r f(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^{r} (-1)^{r-m} \binom{r}{m} f(x_1 + mh_1, x_2 + mh_2) \ (j = 1,2).$$

Если рядом Фурье функции $f(x_1, x_2)$ является

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} A\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) exp\left\{i\left\{\lambda_{n_1}^{(1)} x_1 + \lambda_{n_2}^{(2)} x_2\right\}\right\},$$

то симметрическая разность порядка r этого ряда, будет

$$\left\|\Delta_{h_j}^r f(x_1, x_2)\right\|_{B_2^{(2)}}^2 = \left\|2^{2r} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) sin^{2r} \frac{h_j}{2} \lambda_{n_j}^{(j)}\right\|_{B_2^{(2)}} \ (j = 1,2).$$

Тогда

$$\left\|\Delta_{h_j}^r f(x_1, x_2)\right\|_{B_2^{(2)}}^2 = \left\|2^{2r} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) sin^{2r} \frac{h_j}{2} \lambda_{n_j}^{(j)}\right\|_{B_2^{(2)}} \le$$

$$\le \left\|2^{2r} \sum_{n_1=1}^{2^v} \sum_{n_2=1}^{2^v} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) sin^{2r} \frac{h_j}{2} \lambda_{n_j}^{(j)} + \right.$$

$$\left. +2^{2r} \sum_{n_1=2^v+1}^{\infty} \sum_{n_2=2^v+1}^{\infty} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right\|_{B_2^{(2)}} \le$$

$$\le \left\|\sum_{n_1=1}^{2^v} \sum_{n_2=1}^{2^v} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) h_j^{2r} \left(\lambda_{n_j}^{(j)}\right)^{2r} + \right.$$

$$+2^{2r}\sum_{n_1=2^v+1}^{\infty}\sum_{n_2=2^v+1}^{\infty}A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\Bigg\|_{B_2^{(2)}}=$$

$$=\left\|h_j^{2r}\sum_{n_1=1}^{2^v}\sum_{n_2=1}^{2^v}A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)n_j^{2r\alpha}+2^{2r}\sum_{n_1=2^v+1}^{\infty}\sum_{n_2=2^v+1}^{\infty}A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right\|_{B_2^{(2)}}.$$

Отсюда, при $h_j\leq\frac{1}{\lambda_{2^v}}=2^{-v\alpha}$ получаем, что

$$\omega_{r,(j)}(f;2^{-v\alpha})_{B_2^{(2)}}\ll\left\{2^{-2vr\alpha}\sum_{n_1=1}^{2^v}\sum_{n_2=1}^{2^v}A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)n_j^{2r\alpha}\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\left\{\sum_{n_1=2^v+1}^{\infty}\sum_{n_2=2^v+1}^{\infty}A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

или

$$\omega_{r,(j)}^{\beta}(f;2^{-v\alpha})_{B_2^{(2)}}\ll\left\{2^{-2vr\alpha}\sum_{n_1=1}^{2^v}\sum_{n_2=1}^{2^v}A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)n_j^{2r\alpha}\right\}^{\frac{\beta}{2}}+$$

$$+\left\{\sum_{n_1=2^v+1}^{\infty}\sum_{n_2=2^v+1}^{\infty}A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right\}^{\frac{\beta}{2}}.$$

В последнем неравенстве умножаем обе части на величину $2^{v\left(\gamma+1-\frac{\beta}{2}\right)}$ и, затем выполняя суммирование по параметру v, находим, что

$$\sum_{v=0}^{\infty}2^{v\left(\gamma+1-\frac{\beta}{2}\right)}\omega_{r,(j)}^{\beta}(f;2^{-v\alpha})_{B_2^{(2)}}\ll$$

$$\ll \sum_{v=0}^{\infty} 2^{v\left(\gamma+1-\frac{\beta}{2}\right)} 2^{-vr\alpha\beta} \left\{ \sum_{n_1=1}^{2^v} \sum_{n_2=1}^{2^v} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) n_j^{2r\alpha} \right\}^{\frac{\beta}{2}} +$$

$$+\sum_{v=0}^{\infty} 2^{v\left(\gamma+1-\frac{\beta}{2}\right)} \left\{ \sum_{n_1=2^v+1}^{\infty} \sum_{n_2=2^v+1}^{\infty} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) \right\}^{\frac{\beta}{2}} =$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} 2^{v\left(\gamma+1-\frac{\beta}{2}-r\alpha\beta\right)} \left\{ \sum_{n_1=1}^{2^v} \sum_{n_2=1}^{2^v} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) n_j^{2r\alpha} \right\}^{\frac{\beta}{2}} +$$

$$+\sum_{v=0}^{\infty} 2^{v\left(\gamma+1-\frac{\beta}{2}\right)} \left\{ \sum_{n_1=2^v+1}^{\infty} \sum_{n_2=2^v+1}^{\infty} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) \right\}^{\frac{\beta}{2}} = S_1 + S_2. \qquad (2.1.14)$$

Теперь остается вывести оценки для каждого слагаемого, которые расположены в правой части соотношения (2.1.14).

Применяя лемму 2.1.3, из которой следует, что сходимость ряда S_1 эквивалентна сходимости ряда

$$S_1^* = \sum_{n_j=1}^{\infty} n_j^{\gamma-\frac{\beta}{2}-r\alpha\beta} \left\{ \sum_{n_1=1}^{n} \sum_{n_2=1}^{n} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) n_j^{2r\alpha} \right\}^{\frac{\beta}{2}} \ (j=1,2),$$

покажем, что ряд S_1^* сходится. Для этого при $\delta = \frac{\beta}{2}$, $d_n = A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) n_j^{2r\alpha}$ и $c = \alpha\beta r + \frac{\beta}{2} - \gamma$, применяем лемму 2.1.1 и получим:

$$S_1^* \ll \sum_{n_j=1}^{\infty} n_j^{\gamma-\frac{\beta}{2}-r\alpha\beta} \left\{ n_j A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) n_j^{2r\alpha} \right\}^{\frac{\beta}{2}} =$$

$$= \sum_{n_j=1}^{\infty} \left| A\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) \right|^{\beta} n_j^{\gamma}, \qquad (j=1,2). \qquad (2.1.15)$$

Таким же подходом как в первой части доказательства, используя утверждение лемм 2.1.3 и 2.1.2 относительно второму слагаемому, при $\eta = \frac{\beta}{2}$, $\delta = \gamma$, а также учитывая монотонности коэффициентов Фурье $\left\{A\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right\}$, будем иметь

$$S_2 \leq \sum_{n_j=1}^{\infty} n_j^{\gamma-\frac{\beta}{2}} \left\{ \sum_{n_1=n+1}^{\infty} \sum_{n_2=n+1}^{\infty} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) \right\}^{\frac{\beta}{2}} \ll$$

$$\ll \sum_{n_j=1}^{\infty} \left| A\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) \right|^{\beta} n_j^{\gamma}. \qquad (j = 1,2) \tag{2.1.16}$$

Таким образом, подставляя оценки (2.1.15) и (2.1.16), в (2.1.14), получаем утверждение теоремы 2.1.3.

§ 2.2. Абсолютная сходимость рядов Фурье почти-периодических функций, со спектром, имеющих предельную точку в нуле

Пусть теперь выполнены условия:

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n, |\lambda_n| < |\lambda_{n-1}|, \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0. \tag{2.2.1}$$

Теорема 2.2.1 [112]. *Пусть для функции* $f(x) \in B_2$ *выполнены условия* (2.2.1) *и* $\lambda_n = O\left\{\frac{1}{n^{\alpha}}\right\}$ $(n = 1,2, \dots;\ \alpha > 0)$. *Если при* $0 < \beta < 2$, $\rho = \frac{\gamma+1-\frac{\beta}{2}}{\alpha}$,

$0 < \gamma < 1, k > \frac{\gamma+1-\frac{\beta}{2}}{\alpha\beta}$ *сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho-1} W_k^{\beta}(f; n)_{B_2},$$

где

$$W_k(f; H)_{B_2} = \sup_{T\geq H} \left\| f_{T^k}(x) \right\|_{B_2} \ H > 0,$$

$$f_{T^k}(x) = \frac{1}{(2T)^k} \int\limits_{x-T}^{x+T} dt_1 \int\limits_{t_1-T}^{t_1+T} dt_2 \ldots \int\limits_{t_{k-2}-T}^{t_{k-2}+T} dt_{k-1} \int\limits_{t_{k-1}-T}^{t_{k-1}+T} f(t_k) dt_k,$$

тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{\beta} n^{\gamma}$$

сходится.

Заметим, что величина $W_k(f;H)_{B_2}$ - модуль усреднения порядка k функции $f(x) \in B_2$ для функций многих переменных Безиковича впервые использована в работе Ю.Х.Хасанова [107].

Данный параграф главы 2 посвящен нахождению достаточных критериев абсолютной сходимости двойных тригонометрических рядов Фурье функции $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$, в случае когда для показатели Фурье $\Lambda_j \left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}$ $(j = 1,2)$ функции $f(x_1, x_2)$ установлены следующие требования

$$\lambda_{-n_j}^{(j)} = -\lambda_{n_j}^{(j)}; \ \left|\lambda_{n_j}^{(j)}\right| > \left|\lambda_{n_{j+1}}^{(j+1)}\right|; \ \lim_{n_j \to \infty} \lambda_{n_j}^{(j)} = 0 \ \ (j = 1,2). \qquad (2.2.2)$$

Задачей этого параграфа является получение аналогов теоремы 2.2.1 для двойных рядов Фурье почти-периодических функций $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$.

Пусть функция $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ и

$$D_{B_p^{(2)}}\{f(x_1, x_2)\} = \left\{ \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{4T^2} \int\limits_{-T}^{T} \int\limits_{-T}^{T} |f(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2 \right\}^{1/p} < \infty, \qquad (2.2.3)$$

а

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} A\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) exp\left\{i \left\{\lambda_{n_1}^{(1)} x_1 + \lambda_{n_2}^{(2)} x_2\right\}\right\}, \qquad (2.2.4)$$

её ряд Фурье, показатели Фурье которых $\Lambda_j\left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}$ $(j=1,2)$, удовлетворяют условиям (2.2.2).

Для функции $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$, в случае, когда для её спектр имеют места условия (2.2.2), в качестве математического аппарата приближения будем использовать модуль усреднения порядка r $(r\in N)$ этой функции на R^2 [107]

$$W_r(f;H)_{B_2^{(2)}}=\sup_{|T|\geq H}\|f_{T^r}(x_1,x_2)\|_{B_2^{(2)}}\quad (H>0), \tag{2.2.5}$$

где

$$f_{T^r}^{(j)}(x_1,x_2)=\frac{1}{(2T)^r}\int\limits_{x_j-T}^{x_j+T}dt_1\int\limits_{t_1-T}^{t_1+T}dt_2\dots\int\limits_{t_{r-2}-T}^{t_{r-2}+T}dt_{r-1}\int\limits_{t_{r-1}-T}^{t_{r-1}+T}f(t_r)dt_r.$$

Теорема 2.2.2. *Пусть спектр* $\Lambda_j\left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}$ $(j=1,2)$ *функции* $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$ *удовлетворяет условиям (2.2.2) и при* $0<\beta<2, r>\frac{2}{\beta}-1$ *и каждом* $j=1,2$ *сходится ряд*

$$\sum_{v=1}^{\infty}2^{2v(1-\beta/2)}W_{r,(j)}^{\beta}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}}\right)_{B_2^{(2)}}. \tag{2.2.6}$$

Тогда ряд составленный из коэффициентов Фурье

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left|\mathrm{A}(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)})\right|^{\beta} \tag{2.2.7}$$

также сходится.

Доказательство. Поскольку ряд (2.2.4) есть тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$, следовательно, для функции $f_{T^r}^{(j)}(x_1,x_2)$ рядом Фурье будет

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left|\mathrm{A}(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)})\right|^{\beta}exp\left\{i\left\{\lambda_{n_1}^{(1)}x_1+\lambda_{n_2}^{(2)}x_2\right\}\right\}\left\{\frac{sin\lambda_{n_j}^{(j)}T_j}{i\lambda_{n_j}^{(j)}T_j}\right\}^r.$$

Это вытекает из следующего тождества

$$\int\limits_{x_j-T}^{x_j+T} dt_1 \int\limits_{t_1-T}^{t_1+T} dt_2 \ldots \int\limits_{t_{r-2}-T}^{t_{r-2}+T} dt_{r-1} \int\limits_{t_{r-1}-T}^{t_{r-1}+T} exp\left\{i\left\{\lambda_{n_1}^{(1)}+\lambda_{n_2}^{(2)}\right\}t_r\right\} dt_r =$$

$$= exp\left\{i\left\{\lambda_{n_1}^{(1)}x_1+\lambda_{n_2}^{(2)}x_2\right\}\right\}\left\{\frac{sin\lambda_{n_j}^{(j)}T_j}{i\lambda_{n_j}^{(j)}T_j}\right\}^r \quad (j=1,2).$$

Следовательно, в силу неравенства Бесселя, получим:

$$\left\{\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left|A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\left\{\frac{sin\lambda_{n_j}^{(j)}T_j}{i\lambda_{n_j}^{(j)}T_j}\right\}^r\right|^2\right\}^{1/2} \leq \left\|f_{T^r}^{(j)}(x_1,x_2)\right\|_{B_2^{(2)}} \leq$$

$$\leq W_{r,(j)}(f;T_j)_{B_2^{(2)}} \; (j=1,2).$$

Тем более справедливо

$$\sum_{n_1=0}^{2^{\nu-1}}\sum_{n_2=0}^{2^{\nu}}\left|A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right|^2\left\{\frac{sin\lambda_{n_j}^{(j)}T_j}{i\lambda_{n_j}^{(j)}T_j}\right\}^{2r} \leq W_{r,(j)}^2(f;T_j)_{B_2^{(2)}} \; (j=1,2). \qquad (2.2.8)$$

Пусть для каждого $j=1,2$

$$T_j = \frac{\pi}{2\lambda_{2^{\nu-1}}^{(j)}}.$$

Тогда для всех $\lambda_{2^{\nu-1}}^{(j)} > \lambda_{n_j}^{(j)} > \lambda_{2^\nu}^{(j)}$ $(j=1,2)$ будет

$$\frac{sin\lambda_{n_j}^{(j)}T_j}{\lambda_{n_j}^{(j)}T_j} \geq \frac{2}{\pi}.$$

Значит, при таком выборе T_j, и с учётом монотонного убывания спектров $\left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}$ $(j=1,2)$, неравенство (2.2.8) принимает вид:

$$\sum_{n_1=0}^{2^{v-1}}\sum_{n_2=0}^{2^v}\left|\mathrm{A}(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)})\right|^2\left\{\frac{\sin\lambda_{n_j}^{(j)}T_j}{i\lambda_{n_j}^{(j)}T_j}\right\}^{2r}<$$

$$< W_{r,(j)}^2\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}}\right)_{B_2^{(2)}}\quad (j=1,2). \qquad (2.2.9)$$

Применяя неравенство Гёльдера в оценке (2.2.9), будем иметь

$$\sum_{n_1=0}^{2^{v-1}}\sum_{n_2=0}^{2^v}\left|\mathrm{A}(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)})\right|^{\beta} < 2^{2v(1-\beta/2)}\cdot\left\{\sum_{n_1=0}^{2^{v-1}}\sum_{n_2=0}^{2^v}\left|\mathrm{A}(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)})\right|^2\right\}^{\beta/2}\le$$

$$\le 2^{2v\left(1-\frac{\beta}{2}\right)}W_{r,(j)}^{\beta}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}}\right)_{B_2^{(2)}}\quad (j=1,2).$$

Отсюда, суммируя по j, а потом по v, получим:

$$\sum_{v=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\sum_{n_1=0}^{2^{v-1}}\sum_{n_2=0}^{2^v}\left|\mathrm{A}(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)})\right|^{\beta} < \sum_{v=1}^{\infty}2^{2v\left(1-\frac{\beta}{2}\right)}\sum_{j=1}^{2}W_{r,(j)}^{\beta}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}}\right)_{B_2^{(2)}},$$

или

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left|\mathrm{A}(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)})\right|^{\beta} < \sum_{v=1}^{\infty}2^{2v\left(1-\frac{\beta}{2}\right)}\sum_{j=1}^{2}W_{r,(j)}^{\beta}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}}\right)_{B_2^{(2)}}. \qquad (2.2.10)$$

Таким образом, из неравенства (2.2.10) в силу оценки (2.2.6) следует, что ряд (2.2.7) сходится что и требовалась доказать.

Пусть ряд Фурье функция $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)exp\left\{i\left\{\lambda_{n_1}^{(1)}x_1+\lambda_{n_2}^{(2)}x_2\right\}\right\},$$

имеет спектры $\Lambda_j\left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}$ $(j=1,2)$, удовлетворяющие условиям (2.2.2). Необходимыми условиями сходимости рядов Фурье функций $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$ является следующая.

Теорема 2.2.3. *Если для показателей Фурье* $\Lambda_j\left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}$ $(j=1,2)$ *почти-периодической функции* $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$ *выполнены условия (2.2.2) и*

$$\lambda_{n_j}^{(j)}=n_j^{-\alpha}\quad(\alpha>0,\ j=1,2),$$

и кроме того, последовательность её коэффициентов Фурье $\left\{A(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)})\right\}$ *монотонно убывает, то из сходимости ряда*

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left|A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right|^{\beta}n_1^{\gamma}n_2^{\gamma}\qquad(2.2.11)$$

вытекает сходимость ряда

$$\sum_{v=0}^{\infty}2^{v\left(\gamma+1-\frac{\beta}{2}\right)}W_k^{\beta}(f;2^{v\alpha})_{B_2^{(2)}},\qquad(2.2.12)$$

где $0<\beta<2,\ 0\le\gamma<1,\ k>\frac{\gamma+1-\frac{\beta}{2}}{\alpha\beta}$ *и*

$$W_{r,(j)}(f;H)_{B_2^{(2)}}=\sup_{|T|\ge H}\left\|f_{T^r}^{(j)}(x_1,x_2)\right\|_{B_2^{(2)}}\quad(H>0),$$

$$f_{T^r}^{(j)}(x_1,x_2)=\frac{1}{(2T)^r}\int\limits_{x_j-T}^{x_j+T}dt_1\int\limits_{t_1-T}^{t_1+T}dt_2\ldots\int\limits_{t_{r-2}-T}^{t_{r-2}+T}dt_{r-1}\int\limits_{t_{r-1}-T}^{t_{r-1}+T}f(t_r)dt_r.$$

Доказательство . В силу равенства Парсеваля, получаем что

$$\left\|f_{T^r}^{(j)}(x_1,x_2)\right\|_{B_2^{(2)}}^2=\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\left\{\frac{\sin\lambda_{n_j}^{(j)}T_j}{\lambda_{2^v}^{(j)}T_j}\right\}^{2k}=$$

$$= \sum_{n_1=1}^{2^v} \sum_{n_2=1}^{2^v} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) \left\{\frac{sin\lambda_{n_j}^{(j)} T_j}{\lambda_{2^v}^{(j)} T_j}\right\}^{2k} + \sum_{n_1=2^v+1}^{\infty} \sum_{n_2=2^v+1}^{\infty} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{n_1=1}^{2^v} \sum_{n_2=1}^{2^v} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) \left\{\frac{\lambda_{n_j}^{(j)}}{\lambda_{2^v}^{(j)}}\right\}^{2k} + \sum_{n_1=2^v+1}^{\infty} \sum_{n_2=2^v+1}^{\infty} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) =$$

$$= \left(\lambda_{2^v}^{(j)}\right)^{-2k} \sum_{n_1=1}^{2^v} \sum_{n_2=1}^{2^v} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) \left(\lambda_{n_j}^{(j)}\right)^{2k} + \sum_{n_1=2^v+1}^{\infty} \sum_{n_2=2^v+1}^{\infty} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right).$$

Так как $\lambda_{n_j}^{(j)} = n_j^{-\alpha}$ $(\alpha > 0, \ j = 1{,}2)$, то

$$\left\| f_{T^r}^{(j)}(x_1, x_2) \right\|_{B_2^{(2)}}^2 \leq$$

$$\leq 2^{2vk\alpha} \sum_{n_1=1}^{2^v} \sum_{n_2=1}^{2^v} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) n_j^{-2k\alpha} + \sum_{n_1=2^v+1}^{\infty} \sum_{n_2=2^v+1}^{\infty} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right).$$

Мы доказали, что последнее неравенство верно при любом T_j, поэтому в частности, при всяком $T_j \geq 2^{v\alpha}$, находим:

$$W_{k,(j)}(f; 2^{v\alpha})_{B_2^{(2)}} \ll \left\{2^{2vk\alpha} \sum_{n_1=1}^{2^v} \sum_{n_2=1}^{2^v} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) n_j^{-2k\alpha}\right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left\{\sum_{n_1=2^v+1}^{\infty} \sum_{n_2=2^v+1}^{\infty} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

или когда $0 < \beta < 2$ получаем, что

$$W_{k,(j)}^{\beta}(f; 2^{v\alpha})_{B_2^{(2)}} \ll \left\{2^{2vk\alpha} \sum_{n_1=1}^{2^v} \sum_{n_2=1}^{2^v} A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) n_j^{-2k\alpha}\right\}^{\frac{\beta}{2}} +$$

$$+\left\{\sum_{n_1=2^v+1}^{\infty}\sum_{n_2=2^v+1}^{\infty}A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right\}^{\frac{\beta}{2}}.$$

В последнем неравенстве умножаем обе части на величину $2^{2v\left(\gamma+1-\frac{\beta}{2}\right)}$ и, выполняя суммирование по параметру v, находим:

$$\sum_{v=0}^{\infty}2^{2v\left(\gamma+1-\frac{\beta}{2}\right)}W_{k,(j)}^{\beta}(f;2^{v\alpha})_{B_2^{(2)}}\ll$$

$$\ll\sum_{v=0}^{\infty}2^{2v\left(\gamma+1-\frac{\beta}{2}\right)}\left\{2^{2vk\alpha}\sum_{n_1=1}^{2^v}\sum_{n_2=1}^{2^v}A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\,n_j^{-2k\alpha}\right\}^{\frac{\beta}{2}}+$$

$$+\sum_{v=0}^{\infty}2^{2v\left(\gamma+1-\frac{\beta}{2}\right)}\left\{\sum_{n_1=2^v+1}^{\infty}\sum_{n_2=2^v+1}^{\infty}A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right\}^{\frac{\beta}{2}}\ll$$

$$\ll\sum_{v=0}^{\infty}2^{2v\left(\gamma+1-\frac{\beta}{2}+k\alpha\beta\right)}\left\{\sum_{n_1=1}^{2^v}\sum_{n_2=1}^{2^v}A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\,n_j^{-2k\alpha}\right\}^{\frac{\beta}{2}}+$$

$$+\sum_{v=0}^{\infty}2^{v\left(\gamma+1-\frac{\beta}{2}\right)}\left\{\sum_{n_1=2^v+1}^{\infty}\sum_{n_2=2^v+1}^{\infty}A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right\}^{\frac{\beta}{2}}=S_1+S_2\qquad(2.2.13)$$

Теперь находим оценки для каждого слагаемого, которые расположены в правой части неравенства (2.2.13). Благодаря лемме 2.1.3 имеем

$$S_1\ll\sum_{n_j=1}^{\infty}n_j^{\gamma-\frac{\beta}{2}+k\alpha\beta}\left\{\sum_{m_1=1}^{n}\sum_{m_2=1}^{n}A^2\left(\lambda_{m_1}^{(1)},\lambda_{m_2}^{(2)}\right)\,m_j^{-2k\alpha}\right\}^{\frac{\beta}{2}}=S_1^*\ (j=1,2),$$

$$S_2 \ll \sum_{n_j=1}^{\infty} n_j^{\gamma-\frac{\beta}{2}} \left\{ \sum_{m_1=n+1}^{\infty} \sum_{m_2=n+1}^{\infty} A^2\left(\lambda_{m_1}^{(1)}, \lambda_{m_2}^{(2)}\right) \right\}^{\frac{\beta}{2}} = S_2^* \quad (j = 1,2).$$

Покажем, что ряд S_1^* сходится. Для этого применяем лемму 2.1.1, при

$$\delta = \frac{\beta}{2}, \;\; d_n = A^2(\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}) n_j^{-2k\alpha}, \qquad c = \frac{\beta}{2} - \gamma - k\alpha\beta.$$

Тогда

$$S_1^* \ll \sum_{n_j=1}^{\infty} n_j^{\gamma-\frac{\beta}{2}+k\alpha\beta} \left\{ n_j A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) n_j^{-2k\alpha} \right\}^{\frac{\beta}{2}} =$$

$$= \sum_{n_j=1}^{\infty} \left| A\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) \right|^{\beta} n_j^{\gamma}. \tag{2.2.14}$$

Таким же приёмом, с помощью леммы 2.1.2, положив $\eta = \frac{\beta}{2}, \delta = \gamma$,

$d_n = A^2\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right)$, а также учитывая монотонного убывания коэффициентов Фурье $A\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right)$ выводим следующую оценку

$$S_2^* \ll \sum_{n_j=1}^{\infty} \left| A\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) \right|^{\beta} n_j^{\gamma} \quad (j = 1,2). \tag{2.2.15}$$

Поэтому, из полученных оценок (2.2.14) и (2.2.15), используя неравенству (2.2.13) получаем сходимость ряда (2.2.12), что и обеспечивает доказательство теоремы 2.2.3.

Глава 3. Абсолютная суммируемость двойных рядов Фурье почти-периодических функций

§3.1. Абсолютная суммируемость двойных рядов Фурье, со спектром имеющий предельную точку в бесконечности

В работах Л. Лейндлера [67], К.Тандори [86],М.Ф. Тимана [93], Л.В.Грепачевской [43], [44] и других математиков достаточно полно получены необходимые и достаточные условия по вопросам абсолютной чезаровской суммируемости рядов Фурье периодических функций как в одном, так и в многомерном случае.

А исследования по выявлению признаков абсолютной суммируемости кратных рядов Фурье почти-периодических в смысле Безиковича функций многих переменных проводились в работах Ю.Х.Хасанова [109], [113]. Приведем некоторые из них.

Теорема 3.1.1. *Пусть функция* $f(x) \in B_2$ *и ее спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}$ $(n = 1,2,\dots)$ *удовлетворяет условиям:*

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n, |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|, \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty, \qquad n^{\delta} = O(\lambda_n) \ (n > 0, \delta > 0).$$

Если при $0 < \beta < 2, 0 \le \alpha < 1,\ k > \frac{\alpha+1-\frac{\beta}{2}}{\beta\delta},\ \rho = \frac{\alpha+1-\frac{\beta}{2}}{\delta}$ *выполнены*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho-1} \omega_k^{\beta}\left(f; \frac{1}{n}\right)_{B_2} < \infty,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^{\beta}$$

суммируем методом $|C, -\alpha|$.

Далее рассматривается $|C, \alpha|$ – суммируемость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n exp(i\lambda_n x), \qquad (3.1.1)$$

где C_n – коэффициенты Фурье, когда степень суммируемости α принимает только положительные значения, т.е. $\alpha > 0$.

Теорема 3.1.2. *Пусть спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *функции* $f(x) \in B_2$ *удовлетворяет условиям:*

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n, |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|, \lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = \infty, \quad (n = 1,2,\dots).$$

Тогда:

I. *при* $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$ *условие:*

$$\sum_{v=0}^{\infty} 2^{v\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} \left(\frac{\lambda_{2^{v+1}}}{\lambda_{2^v}}\right)^k \omega_k\left(f;\ \lambda_{2^v}^{-1}\right)_{B_2} < \infty$$

влечет $|C,\alpha| -$ *суммируемость ряда (3.1.1);*

II. *условие:*

$$\sum_{v=0}^{\infty} 2^{-v} \left(\frac{\lambda_{2^{v+1}}}{\lambda_{2^v}}\right)^k \omega_k\left(f;\ \lambda_{2^v}^{-1}\right)_{B_2} < \infty$$

влечет $\left|C,\frac{1}{2}\right| -$ *суммируемость ряда (3.1.1);*

III. *при* $\alpha > \frac{1}{2}$ *условие:*

$$\sum_{v=0}^{\infty} 2^{-v}(lg2^v)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda_{2^{v+1}}}{\lambda_{2^v}}\right)^k \omega_k\left(f;\ \lambda_{2^v}^{-1}\right)_{B_2} < \infty$$

влечет $|C,\alpha| -$ *суммируемость ряда (3.1.1).*

Когда функция $f(x) \in L_2$, в тригонометрической системе и по любой ортогональной на отрезке системе функций подобные результаты, сформулированных в теореме 3.1.2, ранее был получены Л.В.Грепачевской [43], а в случае когда $f(x) \in L_p$ $(1 < p < 2)$ и $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$, М.Ф.Тиманом в работе [93].

Теперь будем доказать несколько теорем, где решаются вопросы о $|C,\alpha| -$ почти всюду суммируемости ряда Фурье функции $f(x) \in B_2$ при различных значений $\alpha\left(-1 < \alpha < \frac{1}{2}\right)$ в том случае, когда ее показатели Фурье $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют единственную предельную точку в нуле.

Теорема 3.1.3. *Пусть для спектра* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *функции* $f(x) \in B_2$ *выполняются условия:*

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n, \lambda_n = O\{n^{-\delta}\}\ (n = 1,2,\dots,\delta > 0).$$

Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho-1} W_k^{\beta}(f;n)_{B_2} < \infty,$$

где $0 < \beta < 2, 0 \leq \alpha < 1, k > \frac{\alpha+1-\frac{\beta}{2}}{\beta\delta},\ \rho = \frac{\alpha+1-\frac{\beta}{2}}{\delta},$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^{\beta}$$

суммируем методом $|C, -\alpha|$.

Далее в работе [113] указаны некоторые достаточные условия $|C,\alpha| -$ суммируемости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(i\lambda_n x) \tag{3.1.2}$$

для положительных значений $\alpha > 0$.

Теорема 3.1.4. *Если спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *функции* $f(x) \in B_2$ *и*

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n, |\lambda_{n+1}| < |\lambda_n|, \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0, \quad (n = 1,2,\dots),$$

то

I. *Если при* $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$ *выполнены условия:*

$$\sum_{v=0}^{\infty} 2^{v\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} W_k\left(f; \lambda_{2^v}^{-1}\right)_{B_2} < \infty,$$

то ряд (3.1.2) $|C,\alpha| -$ *суммируем почти всюду;*

II. *При* $\alpha = \frac{1}{2}$ *из условия*

$$\sum_{v=0}^{\infty} 2^{-v} W_k\left(f; \lambda_{2^v}^{-1}\right)_{B_2} < \infty$$

следует $\left|C, \frac{1}{2}\right| -$ *суммируемость ряда* (3.1.2) *почти всюду*;

III. *При* $\alpha > \frac{1}{2}$ *условие*

$$\sum_{v=0}^{\infty} 2^{-v}(lg2^{v})^{-\frac{1}{2}} W_k\left(f;\ \lambda_{2^v}^{-1}\right)_{B_2} < \infty$$

влечет $|C,\alpha|$ *— суммируемость ряда (3.1.2) почти всюду.*

Далее остановимся на выяснению вопроса о том, какие структурные свойства функции по каждой из переменных x_1, x_2 в отдельности (выяснения гладкости функции) обеспечивают абсолютную чезаровскую суммируемость двойного тригонометрического ряда Фурье почти-периодической функции $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$.

Справедливы следующие утверждения, в которых существенно учитывается кратность рядов Фурье.

Теорема 3.1.5. *Если функция* $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ *и ее спектр* $\left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}$ $(j = 1,2)$ *удовлетворяют условиям*

$$\lambda_{-n_j}^{(j)} = -\lambda_{n_j}^{(j)};\ \left|\lambda_{n_{j-1}}^{(j-1)}\right| > \left|\lambda_{n_j}^{(j)}\right|;\ \lim_{n_j \to \infty} \lambda_{n_j}^{(j)} = \infty\ (j = 1,2).$$

Кроме того, если при $0 < \beta < 2,\ r > k$ *и каждом* $j = 1,2$ *сходится ряд*

$$\sum_{v=1}^{\infty} 2^{v\left(\frac{k}{2}-\alpha_v-1\right)} \left(\frac{\lambda_{2^v}^{(j)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}}\right)^{r} \omega_{r,(j)}\left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(j)}}\right)_{B_2^{(2)}}, \tag{3.1.3}$$

то ряд

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \left|A_{n_1,n_2}\right| \tag{3.1.4}$$

$|C;\ \alpha_1, \alpha_2|$- *суммируемый при* $0 < \alpha_i \leq \frac{1}{2},\ \ i = 1,2.$

Доказательство. Доказательству теоремы будем проводить при

I) $\alpha_v = \frac{1}{2}$; **II)** $0 < \alpha_v < \frac{1}{2}$.

I) Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, тогда условия (3.1.3) можно записать в виде:

$$\sum_{v=1}^{\infty} 2^{-\frac{v}{2}} \left(\frac{\lambda_{2^v}^{(1)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(1)}} \right)^r \omega_{r,(1)} \left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(1)}} \right)_{B_2^{(1)}} < \infty, \tag{3.1.5}$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} 2^{-\frac{v}{2}} \left(\frac{\lambda_{2^v}^{(2)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(2)}} \right)^r \omega_{r,(2)} \left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(2)}} \right)_{B_2^{(2)}} < \infty. \tag{3.1.6}$$

Благодаря неравенству (см. [27] стр. 307)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1} + \cdots)^p \gg \sum_{n=1}^{\infty} (a_n n)^p \quad (0 < p < 1),$$

получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(mnU_{m,n} \right)^{\frac{1}{2}} \ll \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} U_{k,l} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.1.7}$$

так как

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} U_{m,n}^{\frac{1}{2}} = \sum_{m=1}^{\infty} m^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}} U_{m,n}^{\frac{1}{2}} \right) \le$$

$$\le \sqrt{2} \sum_{m=1}^{\infty} m^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{v=n}^{\infty} U_{m,v} \right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} m^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{v=n}^{\infty} U_{m,v} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \le$$

$$\le 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\mu=m}^{\infty} \sum_{v=n}^{\infty} U_{\mu,v} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Положив в неравенстве (3.1.7)

$$U_{m,n} = \sum_{\mu=2^{m-1}}^{2^m-1} \sum_{v=2^{n-1}}^{2^n-1} \rho_{\mu,v}^2,$$

будем иметь

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{mn} \left(\sum_{\mu=2^{m-1}}^{2^m-1} \sum_{v=2^{n-1}}^{2^n-1} \rho_{\mu,v}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \sum_{\mu=2^{k-1}}^{2^k-1} \sum_{v=2^{l-1}}^{2^l-1} \rho_{\mu,v}^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} \sum_{l=2^{n-1}}^{2^n-1} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2^m \cdot 2^n \left(\frac{1}{2^{2m} \cdot 2^{2n}} \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} \sum_{l=2^{n-1}}^{2^n-1} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m^2 \cdot n^2} \sum_{k=m}^{2^m-1} \sum_{l=n}^{2^n-1} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.1.8)$$

Используя тождество (см. [75], стр.354)

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |U_{m,n}| = |U_{0,0}| + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{2^n-1} \sum_{v=2^n}^{2^{n+1}-1} |U_{\mu,v}| + \sum_{\mu=2^n}^{2^{n+1}-1} \sum_{v=0}^{2^{n+1}-1} |U_{\mu,v}| \right)$$

с помощью неравенства Коши-Буняковского (см. [13]), получим:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|U_{m,n}| = |U_{0,0}| +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left\{\left(\sum_{\mu=0}^{2^n-1}\sum_{v=2^n}^{2^{n+1}-1}|U_{\mu,v}|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\left(\sum_{\mu=2^n}^{2^{n+1}-1}\sum_{v=0}^{2^{n+1}-1}|U_{\mu,v}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \ll$$

$$\ll |U_{0,0}| + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left\{\left(\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{v=2^n}^{\infty}|U_{\mu,v}|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\mu=2^n}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}|U_{\mu,v}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Так как величины

$$g_l = \left(\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{v=l}^{\infty}|U_{\mu,v}|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad h_k = \left(\sum_{\mu=k}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}|U_{\mu,v}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Имеют характера монотонного убывания с возрастанием k и l, то справедливо

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|U_{m,n}| \ll |U_{0,0}| + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=2^{n-1}}^{2^n-1} g_l + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} h_k =$$

$$= |U_{0,0}| + \sum_{n=1}^{\infty} g_n + \sum_{n=1}^{\infty} h_n =$$

$$= |U_{0,0}| + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{v=n}^{\infty}|U_{\mu,v}|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\mu=n}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}|U_{\mu,v}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}. \qquad (3.1.9)$$

Подставляя в неравенстве (3.1.9)

$$U_{m,n} = \left(\frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

будем иметь:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=n}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu+1)^2 (v+1)^2} \sum_{k=\mu}^{\infty} \sum_{l=v}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{v=n}^{\infty} \frac{1}{(\mu+1)^2 (v+1)^2} \sum_{k=\mu}^{\infty} \sum_{l=v}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + O(1).$$

Оценим первое слагаемое в последнем неравенстве

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=n}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu+1)^2 (v+1)^2} \sum_{k=\mu}^{\infty} \sum_{l=v}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=n}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \rho_{\mu,v}^2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \sum_{l=v}^{\infty} \frac{1}{(l+1)^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.1.10)$$

Так как

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \ll \frac{1}{n+1}, \quad \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)^2} = O(1),$$

то (3.1.10) принимает вид:

$$S_1 \ll \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\sum_{\mu=n}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \rho_{\mu,v}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким же подходом будем оценить второе слагаемое

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{v=n}^{\infty} \frac{1}{(\mu+1)^2 (v+1)^2} \sum_{k=\mu}^{\infty} \sum_{l=v}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{v=n}^{\infty} \rho_{\mu,v}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В работе [107] доказано, что

$$\sum_{n_1=0}^{2^{\nu-1}} \cdots \sum_{n_{j-1}=0}^{2^{\nu-1}} \sum_{n_j=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}} \sum_{n_{j+1}=0}^{2^{\nu}} \cdots \sum_{n_k=0}^{2^{\nu}} \left| A_{n_1,\dots,n_k} \right|^2 \le$$

$$\le \left(\frac{\lambda_{2^\nu}^{(j)}}{\lambda_{2^{\nu-1}}^{(j)}} \right)^{2r} \omega_{r,(j)}^2 \left(f; \frac{1}{\lambda_{2^\nu}^{(j)}} \right)_{B_2^{(k)}}. \qquad (3.1.11)$$

Отсюда, при $k = 2$, применяя оценку (3.1.11), окончательно имеем:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left| U_{m,n} \right| \ll$$

$$\ll \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\sum_{\mu=n}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{v=n}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{\lambda_{2^\nu}^{(1)}}{\lambda_{2^{\nu-1}}^{(1)}} \right)^{r} \omega_{r,(1)} \left(f; \frac{1}{\lambda_{2^\nu}^{(1)}} \right)_{B_2^{(2)}} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{\lambda_{2^{\nu}}^{(2)}}{\lambda_{2^{\nu-1}}^{(2)}}\right)^{r}\omega_{r,(2)}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^{\nu}}^{(2)}}\right)_{B_2^{(2)}}.$$

Теперь выполняя суммирования по числу ν и затем по параметру j, получим:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{\lambda_{2^{\nu}}^{(j)}}{\lambda_{2^{\nu-1}}^{(j)}}\right)^{r}\omega_{r,(j)}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^{\nu}}^{(j)}}\right)_{B_2^{(2)}}\leq$$

$$\leq\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}2^{-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{\lambda_{2^{\nu}}^{(j)}}{\lambda_{2^{\nu-1}}^{(j)}}\right)^{r}\omega_{r,(j)}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^{\nu}}^{(j)}}\right)_{B_2^{(2)}}.$$

Отсюда вытекает, что если выполняются условия (3.1.5) и (3.1.6), то и эти условия обеспечивают сходимость ряда (3.1.8). Следовательно, двойной ряд Фурье почти всюду является суммируем методом $\left|C;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right|$. Это означает, что теорема доказана для случая $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2}$.

Теперь переходим на вторую часть доказательства теоремы.

II) Пусть $0<\alpha_1,\alpha_2<\frac{1}{2}$. Очевидно, что

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha_1)}\,2^{\frac{n}{2}(1-2\alpha_2)}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}\rho_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha_1)}\,2^{\frac{n}{2}(1-2\alpha_2)}\left(\sum_{k=2^m}^{\infty}\sum_{l=2^n}^{\infty}\rho_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2^{m}\cdot 2^{n}\cdot 2^{-\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)}\,2^{-\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)}\left(\sum_{k=2^m}^{\infty}\sum_{l=2^n}^{\infty}\rho_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В силу монотонности

$$b_{m,n} = \left(\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

получаем:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha_1)}\, 2^{\frac{n}{2}(1-2\alpha_2)} \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)}\, 2^{-\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)} \left(\sum_{k=2^m}^{\infty} \sum_{l=2^n}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{m(1+2\alpha_1)}} \cdot \frac{1}{2^{n(1+2\alpha_2)}} \sum_{k=2^m}^{\infty} \sum_{l=2^n}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(m+1)^{1+2\alpha_1}(n+1)^{1+2\alpha_2}} \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Полагая

$$U_{m,n} = \left(\frac{1}{(m+1)^{1+2\alpha_1}(n+1)^{1+2\alpha_2}} \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

с помощью неравенства (3.1.9), находим:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(m+1)^{1+2\alpha_1}(n+1)^{1+2\alpha_2}} \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\infty} \left(\sum_{\mu=n}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu+1)^{1+2\alpha_1}(v+1)^{1+2\alpha_2}} \sum_{k=\mu}^{\infty} \sum_{l=v}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{v=n}^{\infty}\frac{1}{(\mu+1)^{1+2\alpha_1}(v+1)^{1+2\alpha_2}}\sum_{k=\mu}^{\infty}\sum_{l=v}^{\infty}\rho_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}+O(1).$$

Оценим каждое слагаемое в последнем неравенстве.

$$S_1=\sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\infty}\left(\sum_{\mu=n}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{1}{(\mu+1)^{1+2\alpha_1}(v+1)^{1+2\alpha_2}}\sum_{k=\mu}^{\infty}\sum_{l=v}^{\infty}\rho_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Переставляя порядок суммирования, будем иметь:

$$S_1=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\rho_{k,l}^2\sum_{\mu=n}^{\infty}\frac{1}{(\mu+1)^{1+2\alpha_1}}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{1}{(v+1)^{1+2\alpha_2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

При $0<\alpha_1,\alpha_2<\frac{1}{2}$, учитывая

$$\sum_{v=0}^{\infty}\frac{1}{(v+1)^{1+2\alpha_2}}=O(1),\quad \sum_{\mu=n}^{\infty}\frac{1}{(\mu+1)^{1+2\alpha_1}}\ll\frac{1}{(n+1)^{2\alpha_1}},$$

получаем:

$$S_1\ll\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{\alpha_1}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\rho_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, при $k=2$, применяя оценку (3.1.11)

$$S_1\le\sum_{v=1}^{\infty}2^{-v\alpha_1}\left(\frac{\lambda_{2^v}^{(1)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(1)}}\right)^r\omega_{r,(1)}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^v}^{(1)}}\right)_{B_2^{(2)}}. \qquad (3.1.12)$$

Аналогичным образом, находим:

$$S_2=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{v=n}^{\infty}\frac{1}{(\mu+1)^{1+2\alpha_1}(v+1)^{1+2\alpha_2}}\sum_{k=\mu}^{\infty}\sum_{l=v}^{\infty}\rho_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}\ll$$

$$\ll\sum_{v=1}^{\infty}2^{-v\alpha_1}\left(\frac{\lambda_{2^v}^{(2)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(2)}}\right)^r\omega_{r,(2)}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^v}^{(2)}}\right)_{B_2^{(2)}}. \tag{3.1.13}$$

Значит, учитывая неравенства (3.1.12) и (3.1.13), получаем:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(m+1)^{1+2\alpha_1}(n+1)^{1+2\alpha_2}}\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\rho_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\sum_{v=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}2^{-v\alpha_j}\left(\frac{\lambda_{2^v}^{(j)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}}\right)^r\omega_{r,(j)}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^v}^{(j)}}\right)_{B_2^{(2)}}. \tag{3.1.14}$$

В силу условий теоремы (3.1.3) вытекает, что правая часть (3.1.14) сходится. Это означает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sigma_{m,n}^{(\alpha_1,\alpha_2)}-\sigma_{m,n-1}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\right|<\infty,\ \text{при фиксированном }\ m,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|\sigma_{m,n}^{(\alpha_1,\alpha_2)}-\sigma_{m-1,n}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\right|<\infty,\ \ \text{при фиксированном }\ n.$$

Отсюда следует, что ряд (3.1.4) суммируем методом $|C;\alpha_1,\alpha_2\,|$ для всех значений $0<\alpha_1,\alpha_2<\frac{1}{2}$. Теорема 3.1.5 полностью доказана.

Теорема 3.1.6. *Пусть функция* $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$ *и её спектр* $\left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}$ $(j=1,2)$ *удовлетворяют условиям:*

$$\lambda_{-n_j}^{(j)}=-\lambda_{n_j}^{(j)};\ \left|\lambda_{n_{j-1}}^{(j-1)}\right|>\left|\lambda_{n_j}^{(j)}\right|;\ \lim_{n_j\to\infty}\lambda_{n_j}^{(j)}=\infty\ (j=1,2).$$

Если при $0<\beta<2,\ r>k$ *и каждом* $j=1,2$ *сходится ряд*

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{2^{v\left(\frac{k-1}{2}\right)}}{\sqrt{ln 2^v}} \left(\frac{\lambda_{2^v}^{(j)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}}\right)^r \omega_{r,(j)} \left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(j)}}\right)_{B_2^{(2)}} \qquad (3.1.15)$$

то ряд

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \left|A_{n_1,n_2}\right| \qquad (3.1.16)$$

почти всюду $|C;\ \alpha_1, \alpha_2|$*- суммируемый при* $\alpha_i > \frac{1}{2}$, $\ i = 1,2.$

Доказательство. Условия (3.1.15) запишем в виде:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{2^{-\frac{v}{2}}}{\sqrt{ln 2^v}} \left(\frac{\lambda_{2^v}^{(1)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(1)}}\right)^r \omega_{r,(1)} \left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(1)}}\right)_{B_2^{(1)}} < \infty, \qquad (3.1.17)$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{2^{-\frac{v}{2}}}{\sqrt{ln 2^v}} \left(\frac{\lambda_{2^v}^{(2)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(2)}}\right)^r \omega_{r,(2)} \left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(2)}}\right)_{B_2^{(2)}} < \infty. \qquad (3.1.18)$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.1.19)$$

В силу неравенства (см. [27] стр. 308)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \ll \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{v=n}^{\infty} a_v\right)^p \quad (0 < p < 1),$$

при $p = \frac{1}{2}$ получаем, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (U_{mn})^{\frac{1}{2}} \ll \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(m+1)(n+1)}} \left\{ \sum_{\mu=m}^{\infty} \sum_{v=n}^{\infty} U_{\mu v} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

При

$$U_{mn} = \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} \rho_{k,l}^2$$

из последнего неравенства получим:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} \rho_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(m+1)(n+1)}}\left(\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\sum_{\mu=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{v=2^l}^{2^{l+1}-1}\rho_{\mu,v}^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{m+1}\cdot 2^{n+1}}{2^{m+1}\cdot 2^{n+1}\sqrt{ln 2^{m+1}2^{n+1}}}\left(\sum_{\mu=2^m}^{\infty}\sum_{v=2^n}^{\infty}\rho_{\mu,v}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.1.20)$$

В силу монотонности коэффициентов Фурье сходимость ряда (3.1.20) вытекает из сходимости следующего

$$\sigma = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln(m+2)\ln(n+2)}\cdot\frac{1}{(m+1)^2(n+1)^2}\sum_{\mu=m}^{\infty}\sum_{v=n}^{\infty}\rho_{\mu,v}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В неравенстве (3.1.9), подставляя

$$U_{m,n} = \left(\frac{1}{\ln(m+2)\ln(n+2)}\cdot\frac{1}{(m+1)^2(n+1)^2}\sum_{\mu=m}^{\infty}\sum_{v=n}^{\infty}\rho_{\mu,v}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

будем иметь:

$$\sigma \le \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(\sum_{\mu=n}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(\mu+1)^{-2}(v+1)^{-2}}{\ln(\mu+2)\ln(v+2)} \sum_{k=\mu}^{\infty} \sum_{l=v}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{v=n}^{\infty} \frac{(\mu+1)^{-2}(v+1)^{-2}}{\ln(\mu+2)\ln(v+2)} \sum_{k=\mu}^{\infty} \sum_{l=v}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Оценим каждую сумму в правой части последнего

$$\sigma_1 \le \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=n}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(\mu+1)^{-2}(v+1)^{-2}}{\ln(\mu+2)\ln(v+2)} \sum_{k=\mu}^{\infty} \sum_{l=v}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Переставляя порядок суммирования, имеем:

$$\sigma_1 \le \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=n}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2 \ln(k+2)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)^2 \ln(l+2)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2 \ln(k+2)} \ll \frac{1}{(n+1)\ln(n+2)}$$

и

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)^2 \ln(l+2)} = O(1),$$

то

$$\sigma_1 \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)\ln(n+2)}} \left(\sum_{\mu=n}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \rho_{\mu,v}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1.21}$$

Таким же образом оценим и вторую сумму

$$\sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{v=n}^{\infty}\frac{(\mu+1)^{-2}(v+1)^{-2}}{\ln(\mu+2)\ln(v+2)}\sum_{k=\mu}^{\infty}\sum_{l=v}^{\infty}\rho_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)\ln(n+2)}}\left(\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{v=n}^{\infty}\rho_{\mu,v}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.1.22)$$

Складывая σ_1 и σ_2, будем иметь:

$$\sigma \ll \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)\ln(n+2)}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\rho_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)\ln(n+2)}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\rho_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.1.23)$$

При $k = 2$, применяя оценку (3.1.11), из (3.1.23), получаем:

$$\sigma \ll \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)\ln(n+2)}}\left(\frac{\lambda_{2^v}^{(1)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(1)}}\right)^{2r}\omega_{r,(1)}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^v}^{(1)}}\right)_{B_2^{(1)}} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)\ln(n+2)}}\left(\frac{\lambda_{2^v}^{(2)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(2)}}\right)^{2r}\omega_{r,(2)}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^v}^{(2)}}\right)_{B_2^{(2)}}.$$

В силу монотонности коэффициентов, имеем:

$$\sigma \ll \sum_{v=1}^{\infty}\frac{2^{-\frac{v}{2}}}{\sqrt{ln2^v}}\left(\frac{\lambda_{2^v}^{(1)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(1)}}\right)^{2r}\omega_{r,(1)}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^v}^{(1)}}\right)_{B_2^{(2)}} +$$

$$+\sum_{v=1}^{\infty}\frac{2^{-\frac{v}{2}}}{\sqrt{ln2^v}}\left(\frac{\lambda_{2^v}^{(2)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(2)}}\right)^{r}\omega_{r,(2)}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^v}^{(2)}}\right)_{B_2^{(2)}}. \qquad (3.1.24)$$

Отсюда следует, что условия (3.1.17) и (3.1.18) обеспечивают сходимость (3.1.24), следовательно $|C;\ \alpha_1, \alpha_2|$- суммируемость ряда (3.1.16) при $\alpha_i > \frac{1}{2}$, $i = 1,2$. Теорема 3.1.6 доказана.

§3.2. Абсолютная суммируемость двойных рядов Фурье, со спектром имеющий предельную точку в нуле

Задачи данного параграфа заключается в том, чтобы доказать аналоги теорем 3.1.5 и 3.1.6 для двойных тригонометрических рядов функции $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$, когда спектр рассматриваемой функции имеет единственную предельную точку в нуле, т.е., когда для показателей Фурье выполнены следующие две условии:

$$\lambda_{-n_j}^{(j)} = -\lambda_{n_j}^{(j)};\ \left|\lambda_{n_{j-1}}^{(j-1)}\right| > \left|\lambda_{n_j}^{(j)}\right|;\ \lim_{n_j \to \infty} \lambda_{n_j}^{(j)} = 0\ \ (j = 1,2), \tag{3.2.1}$$

$$\overline{M_{x_j}}\{f(x_1, x_2)\} = 0\ \ (j = 1,2,). \tag{3.2.2}$$

Теорема 3.2.1. *Пусть функция* $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ *и для совокупности чисел* $\left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}$ $(j = 1,2)$ *удовлетворены условия (3.2.1) и (3.2.2). Если при значений* $0 < \beta < 2,\ r > k$ *и каждом* $j = 1,2$ *сходится ряд*

$$\sum_{v=1}^{\infty} 2^{v\left(\frac{k}{2} - \alpha_v - 1\right)} W_{r,(j)}\left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(j)}}\right)_{B_2^{(2)}} \tag{3.2.3}$$

то ряд

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \left|A_{n_1,n_2}\right| \tag{3.2.4}$$

$|C;\ \alpha_1, \alpha_2,|$- *суммируемый при* $0 < \alpha_i \le \frac{1}{2}$, $i = 1,2$.

Доказательство. Согласно предположений теоремы доказательство проводится для случая: I) $\alpha_\nu = \frac{1}{2}$; II) $0 < \alpha_\nu < \frac{1}{2}$.

I) В случае $\boldsymbol{\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}}$, условия (3.2.3) запишется в виде:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\frac{\nu}{2}} W_{r,(1)}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^\nu}^{(1)}}\right)_{B_2^{(2)}} < \infty, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\frac{\nu}{2}} W_{r,(2)}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^\nu}^{(2)}}\right)_{B_2^{(2)}} < \infty\,. \qquad (3.2.5)$$

При доказательстве теоремы 3.2.1, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, нами было получено следующее соотношение:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|U_{m,n}| \ll$$

$$\ll \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\sum_{\mu=n}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\rho_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=n}^{\infty}\rho_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя оценки, которые получены в [107]

$$\sum_{n_1=0}^{2^{\nu-1}}{}'\cdots\sum_{n_{j-1}=0}^{2^{\nu-1}}{}'\sum_{n_{j-1}=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}}{}'\sum_{n_{j+1}=0}^{2^{\nu}}{}'\cdots\sum_{n_k=0}^{2^{\nu}}{}'\left|A_{n_1,\ldots,n_k}\right|^2\left\{\frac{\sin\lambda_{n_j}^{(j)}T_j}{i\lambda_{n_j}^{(j)}T_j}\right\}^{2r} \ll$$

$$\ll W_{r,(j)}^2\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^{\nu-1}}^{(j)}}\right)_{B_2^{(k)}} \quad (j = 1,2,\ldots,k). \qquad (3.2.6)$$

и принимая во внимание монотонного убывания коэффициентов Фурье, из последнего неравенства получим:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|U_{m,n}| \ll$$

$$\ll \sum_{v=1}^{\infty} 2^{-\frac{v}{2}} W_{r,(1)}\left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(1)}}\right)_{B_2^{(1)}} + \sum_{v=1}^{\infty} 2^{-\frac{v}{2}} W_{r,(2)}\left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(2)}}\right)_{B_2^{(2)}} . \qquad (3.2.7)$$

Благодаря условиям (3.2.5) следует сходимость (3.2.7), что и требовалось доказать.

II) Пусть теперь $0 < \alpha_v < \frac{1}{2}$. Тогда условия (3.2.3) при $k = 2$ записывается в следующем виде:

$$\sum_{v=1}^{\infty} 2^{-v\alpha_v} W_{r,(1)}\left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(1)}}\right)_{B_2^{(1)}} < \infty, \quad \sum_{v=1}^{\infty} 2^{-v\alpha_v} W_{r,(2)}\left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(2)}}\right)_{B_2^{(2)}} < \infty . \qquad (3.2.8)$$

В левой части (3.1.12) применяя оценку (3.2.6), находим:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(m+1)^{1+2\alpha_1}(n+1)^{1+2\alpha_2}}\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\rho_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sum_{v=1}^{\infty} 2^{-v\alpha_v} W_{r,(1)}\left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(1)}}\right)_{B_2^{(1)}} + \sum_{v=1}^{\infty} 2^{-v\alpha_v} W_{r,(2)}\left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(2)}}\right)_{B_2^{(2)}} =$$

$$\sum_{v=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} 2^{-v\alpha_j} W_{r,(j)}\left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(j)}}\right)_{B_2^{(2)}} .$$

Отсюда в силу условий (3.2.8) последний ряд будет сходящимся, что влечёт за собой $|C;\ \alpha_1, \alpha_2|$- суммируемость ряда (3.2.4) для $0 < \alpha_v < \frac{1}{2}$.

Теорема 3.2.1 полностью доказана.

Теорема 3.2.2. *Пусть функция* $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ *и её спектр* $\left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}$ $(j = 1,2)$ *удовлетворяют условиям (3.2.1) и (3.2.2). Если при* $0 < \beta < 2,\ r > k$ *и каждом* $j = 1,2$ *выполнены условия:*

$$\sum_{v=1}^{\infty}\frac{2^{v\left(\frac{k-1}{2}\right)}}{\sqrt{ln2^{v}}}W_{r,(j)}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^{v}}^{(j)}}\right)_{B_2^{(2)}}<\infty\,, \tag{3.2.9}$$

то ряд (3.2.4) является суммируемый методом $|C;\ \alpha_1,\alpha_2|$ *при* $\alpha_i>\frac{1}{2},\ \ i=1,2.$

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\ \sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}\rho_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В силу неравенства (см. [27] стр. 308)

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\ll\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{v=n}^{\infty}a_v\right)^p\qquad(0<p<1),$$

при $p=\frac{1}{2}$ получаем, что

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(U_{m,n}\right)^{\frac{1}{2}}\ll\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(m+1)(n+1)}}\left(\sum_{\mu=m}^{\infty}\sum_{v=n}^{\infty}U_{\mu,v}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В силу неравенства (3.1.23), получим:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(U_{m,n}\right)^{\frac{1}{2}}\ll\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)ln(n+2)}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\rho_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)ln(n+2)}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\rho_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя оценку (3.2.6), находим:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(U_{m,n}\right)^{\frac{1}{2}}\ll$$

$$\ll \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2^{v\left(\frac{k-1}{2}\right)}}{\sqrt{ln 2^v}} W_{r,(1)}\left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(1)}}\right)_{B_2^{(1)}} + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2^{v\left(\frac{k-1}{2}\right)}}{\sqrt{ln 2^v}} W_{r,(2)}\left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(2)}}\right)_{B_2^{(2)}} =$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \frac{2^{v\left(\frac{k-1}{2}\right)}}{\sqrt{ln 2^v}} W_{r,(j)}\left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(j)}}\right)_{B_2^{(2)}}.$$

Отсюда благодаря условию (3.2.9) последний ряд сходится и, следовательно, влечёт за собой $|C;\ \alpha_1, \alpha_2|$ суммируемость ряда (3.2.4) при $\alpha_i > \frac{1}{2}$, $i = 1,2$.

Теорема 3.2.2 доказана.

Как видно из теорем 3.2.1 и 3.2.2 условия, обеспечивающие абсолютную суммируемость кратного ряда Фурье вида (3.2.4), фактически зависит лишь от количества переменных и свойств функций $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ по той из переменных, по которой модуль усреднения стремится наиболее медленно к нулю.

§3.3. Абсолютная суммируемость двойных рядов Фурье в терминах поведения коэффициентов Фурье

Определение 3.3.1. *Скажем,что ряд*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$$

суммируем методом $(\mathrm{C}, \alpha, \beta)$, $\alpha, \beta > -1$, *к числу* s, *если*

$$\lim_{m.n \to \infty} \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = s,$$

где

$$\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = \left(A_m^{\alpha} A_n^{\beta}\right)^{-1} S_{m,n}^{\alpha,\beta} \quad и \quad A_k^{\gamma} = \frac{(\gamma+1)\cdot\ldots\cdot(\gamma+k)}{k!},$$

а числа $S_{m,n}^{\alpha,\beta}$ *определяются из формального соотношения*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} S_{m,n}^{\alpha,\beta} x^m y^n = (1-x)^{-\alpha-1}(1-y)^{-\beta-1}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} x^m y^n.$$

Определение 3.3.2. *Будем говорить, что двойной* ряд *Фурье*

$$\frac{1}{4}a_{0,0} + \frac{1}{2}\sum_{n_1=1}^{\infty}\left(a_{n_1,0}\cos\lambda_{n_1}x + b_{n_1,0}\sin\lambda_{n_1}x\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left(a_{0,n_2}\cos\lambda_{n_2}y + c_{0,n_2}\sin\lambda_{n_2}y\right) +$$

$$+\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}(a_{n_1,n_2}\cos\lambda_{n_1}x\cos\lambda_{n_2}y + b_{n_1,n_2}\sin\lambda_{n_1}x\cos\lambda_{n_2}y +$$

$$+c_{n_1,n_2}\cos\lambda_{n_1}x\sin\lambda_{n_2}y + d_{n_1,n_2}\sin\lambda_{n_1}x\sin\lambda_{n_2}y).$$

назовем абсолютно $|C;\ \alpha,\beta| -$ *суммируемым, или* $|C;\ \alpha,\beta| -$ *суммируемым* $\alpha,\beta > -1$, *если выполнены следующие условия:*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} - \sigma_{m,n-1}^{\alpha,\beta} - \sigma_{m-1,n}^{\alpha,\beta} + \sigma_{m-1,n-1}^{\alpha,\beta}\right| < \infty,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} - \sigma_{m-1,n}^{\alpha,\beta}\right| < \infty \quad \text{при фиксированном } n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} - \sigma_{m,n-1}^{\alpha,\beta}\right| < \infty \quad \text{при фиксированном } m,$$

где $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} - (\mathrm{C},\alpha,\beta)$ *−средние ряда Фурье,*

$$\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = \left(A_m^{\alpha}A_n^{\beta}\right)^{-1} S_{m,n} \qquad и \qquad A_k^{\gamma} = \frac{(\gamma+1)\cdot\ldots\cdot(\gamma+k)}{k!},$$

$S_{m,n}$ *– частичные суммы заданного ряда Фурье.*

Данный параграф главы диссертации посвящен получению ряд утверждений, дающих достаточных признаков абсолютной суммируемости двойного тригонометрического ряда Фурье почти-периодических функций $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$ в терминах коэффициентов Фурье, т.е. обобщение теоремы Лейндлера, которая была получена в случае $f(x)\in L_2$.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$. *Если выполнены условия:*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{m}{2}(\frac{1}{2}-\alpha_1)}\,2^{\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\alpha_2)}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}A_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty, \tag{3.3.1}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}2^{\frac{m}{2}(\frac{1}{2}-\alpha_1)}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}A_{k,0}^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty, \tag{3.3.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\alpha_1)}\left(\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}A_{0,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty, \tag{3.3.3}$$

где $-1<\alpha_1,\alpha_2<\frac{1}{2}$, *то ряд Фурье функции* $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$ *почти всюду* $|C;\alpha_1,\alpha_2|$ *- суммируемый.*

Доказательство. Выполнение условий (3.3.1) – (3.3.3) обеспечивают соответственно сходимость рядов

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sigma_{m,n}^{(\alpha_1,\alpha_2)}-\sigma_{m,n-1}^{(\alpha_1,\alpha_2)}-\sigma_{m-1,n}^{(\alpha_1,\alpha_2)}+\sigma_{m-1,n-1}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\right|<\infty, \tag{3.3.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sigma_{m,n}^{(\alpha_1,\alpha_2)}-\sigma_{m,n-1}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\right|<\infty, \tag{3.3.5}$$

при фиксированном m;

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|\sigma_{m,n}^{(\alpha_1,\alpha_2)}-\sigma_{m-1,n}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\right|<\infty, \tag{3.3.6}$$

при фиксированном n, где

$$\sigma_{m,n}^{(\alpha_1,\alpha_2)}=\left(A_m^{\alpha_1}A_n^{\alpha_2}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{m-k}^{\alpha_1}A_{n-l}^{\alpha_2}A_{k,l}$$

$-(C;\alpha_1,\alpha_2)$ - средние двойного ряда Фурье

$$\frac{1}{4}a_{0,0}+\frac{1}{2}\sum_{n_1=1}^{\infty}\left(a_{n_1,0}\cos\lambda_{n_1}x+b_{n_1,0}\sin\lambda_{n_1}x\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left(a_{0,n_2}\cos\lambda_{n_2}y+c_{0,n_2}\sin\lambda_{n_2}y\right)+$$

$$+\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}(a_{n_1,n_2}\cos\lambda_{n_1}x\cos\lambda_{n_2}y+b_{n_1,n_2}\sin\lambda_{n_1}x\cos\lambda_{n_2}y+$$

$$+c_{n_1,n_2}\cos\lambda_{n_1}x\sin\lambda_{n_2}y+d_{n_1,n_2}\sin\lambda_{n_1}x\sin\lambda_{n_2}y). \tag{3.3.7}$$

В свою очередь, сходимость рядов (3.3.4) – (3.3.6) обеспечивают абсолютную $|C;\alpha_1,\alpha_2|$ - суммируемость рядов

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n,m}\cos\lambda_m x\cos\lambda_n y+b_{m,n}\sin\lambda_m x\cos\lambda_n y+$$

$$+c_{m,n}\cos\lambda_m x\sin\lambda_n y+d_{m,n}\sin\lambda_m x\sin\lambda_n y, \tag{3.3.8}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{m,0}\cos\lambda_m x+b_{m,0}\sin\lambda_m x\right), \tag{3.3.9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{0,n}\cos\lambda_n y + c_{0,n}\sin\lambda_m y\right), \qquad (3.3.10)$$

следовательно, и $|C;\alpha_1,\alpha_2|$ - суммируемость ряда (3.3.7).

Известно, что (см. [57], стр. 35-36)

$$\sigma_{m,n}^{(\alpha_1,\alpha_2)} - \sigma_{m,n-1}^{(\alpha_1,\alpha_2)} - \sigma_{m-1,n}^{(\alpha_1,\alpha_2)} + \sigma_{m-1,n-1}^{(\alpha_1,\alpha_2)} =$$

$$= \frac{1}{mA_m^{\alpha_1} nA_n^{\alpha_2}} \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} k\cdot lA_{m-k}^{(\alpha_1-1)}A_{n-l}^{(\alpha_2-1)}A_{k,l}.$$

После суммирования по m и n, учитывая $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$, получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sigma_{m,n}^{(\alpha_1,\alpha_2)} - \sigma_{m,n-1}^{(\alpha_1,\alpha_2)} - \sigma_{m-1,n}^{(\alpha_1,\alpha_2)} + \sigma_{m-1,n-1}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\right| =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mA_m^{\alpha_1} nA_n^{\alpha_2}}\left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} k\cdot lA_{m-k}^{(\alpha_1-1)}A_{n-l}^{(\alpha_2-1)}A_{k,l}\right|. \qquad (3.3.11)$$

Обозначим

$$\sigma_{\alpha_1,\alpha_2} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mA_m^{\alpha_1} nA_n^{\alpha_2}}\Bigg(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\Bigg|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} k\cdot$$

$$\cdot\, lA_{m-k}^{(\alpha_1-1)}A_{n-l}^{(\alpha_2-1)}A_{k,l}\Bigg|\,dx_1dx_2\Bigg).$$

Из сходимости почти всюду последнего ряда следует сходимость почти всюду ряда (3.3.11) и, следовательно, $|C;\alpha_1,\alpha_2|$ - суммируемость ряда (3.3.8).

Так как $A_n^{\alpha}\approx n^{\alpha}$, то применяя неравенство Шварца и равенство Парсеваля, будем иметь:

$$\sigma_{\alpha_1,\alpha_2} \ll \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{\mu^{1+\alpha_1}\nu^{1+\alpha_2}}\cdot$$

$$\cdot\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\frac{klA_{k,l}}{(\mu-k+1)^{1-\alpha_1}(\nu-l+1)^{1-\alpha_2}}\right|dx_1dx_2 \ll$$

$$\ll \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}1^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{\mu^{2+2\alpha_1}\nu^{2+2\alpha_2}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\frac{klA_{k,l}}{(\mu-k+1)^{1-\alpha_1}(\nu-l+1)^{1-\alpha_2}}\right|^2dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{m}{2}}2^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\sum_{k=1}^{\mu}\sum_{l=1}^{\nu}\frac{k^2l^2A_{k,l}^2}{\mu^{2+2\alpha_1}\nu^{2+2\alpha_2}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[(\mu-k+1)^{2-2\alpha_1}(\nu-l+1)^{2-2\alpha_2}\right]^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)}\,2^{-\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)}\left\{\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\left(\sum_{k=1}^{2^m-1}\sum_{l=1}^{2^n-1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=2^m}^{\mu}\sum_{l=1}^{2^n-1}+\sum_{k=1}^{2^m-1}\sum_{l=2^n}^{\nu}+\sum_{k=2^m}^{\mu}\sum_{\nu=2^n}^{\nu}\frac{k^2l^2A_{k,l}^2}{(\mu-k+1)^{2-2\alpha_1}(\nu-l+1)^{2-2\alpha_2}}\right.\right..$$

Последнее неравенство запишем в следующем виде:

$$\sigma_{\alpha_1,\alpha_2} \ll \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)}\,2^{-\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)}\,.$$

$$\cdot\left\{\left(\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\sum_{k=1}^{2^m-1}\sum_{l=1}^{2^n-1}\frac{k^2l^2A_{k,l}^2}{(\mu-k+1)^{2-2\alpha_1}(\nu-l+1)^{2-2\alpha_2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$+\left(\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\sum_{k=2^m}^{\mu}\sum_{l=1}^{2^n-1}\frac{k^2l^2A_{k,l}^2}{(\mu-k+1)^{2-2\alpha_1}(\nu-l+1)^{2-2\alpha_2}}\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\left.+\left(\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\sum_{k=2^m}^{\mu}\sum_{l=2^n}^{\nu}\frac{k^2l^2A_{k,l}^2}{(\mu-k+1)^{2-2\alpha_1}(\nu-l+1)^{2-2\alpha_2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)}\,2^{-\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)}\left\{\sigma_{\alpha_1,\alpha_1}^{(1)}+\sigma_{\alpha_1,\alpha_1}^{(2)}+\sigma_{\alpha_1,\alpha_1}^{(3)}+\sigma_{\alpha_1,\alpha_1}^{(4)}\right\}. \tag{3.3.12}$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (3.3.12)

$$\sigma_{\alpha_1,\alpha_1}^{(1)}\le\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)}\,2^{-\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)}\cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\sum_{k=1}^{2^m-1}\sum_{l=1}^{2^n-1}\frac{k^2l^2A_{k,l}^2}{(\mu-k+1)^{2-2\alpha_1}(\nu-l+1)^{2-2\alpha_2}}\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)}\,2^{-\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)}\cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1}\sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1}\frac{k^2l^2A_{k,l}^2}{(\mu-k+1)^{2-2\alpha_1}(\nu-l+1)^{2-2\alpha_2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Переставляя порядок суммирования, получим:

$$\sigma^{(1)}_{\alpha_1,\alpha_1} \le \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)}\, 2^{-\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)} \cdot \left(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot \sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1}\sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1} k^2 l^2 A_{k,l}^2 \sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{(\mu-k+1)^{2-2\alpha_1}(\nu-l+1)^{2-2\alpha_2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, учитывая, что при $\alpha_1 < \frac{1}{2},\ \alpha_2 < \frac{1}{2}$

$$\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{(\mu-k+1)^{2-2\alpha_1}(\nu-l+1)^{2-2\alpha_2}} = O(1), \qquad (3.3.13)$$

Получим:

$$\sigma^{(1)}_{\alpha_1,\alpha_1} \ll \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)}\, 2^{-\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)} \left(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1}\sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1} 2^{2i}2^{2j}A_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)}\, 2^{-\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)} \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} 2^{i+1}2^{j+1}\left(\sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1}\sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1} A_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Еще раз, меняя порядок суммирования, будем иметь:

$$\sigma^{(1)}_{\alpha_1,\alpha_2} \ll \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^i\, 2^j \left(\sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1}\sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1} A_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=i}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)} 2^{-\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)} \ll$$

$$\ll \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} 2^i\, 2^j \left(\sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1}\sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1} A_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{i}{2}(1+2\alpha_1)} 2^{-\frac{j}{2}(1+2\alpha_2)}.$$

Таким образом, окончательно для первого слагаемого получим:

$$\sigma^{(1)}_{\alpha_1,\alpha_2} \ll \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha_1)}\, 2^{\frac{n}{2}(1-2\alpha_2)} \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} A_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3.14}$$

Оценим второе слагаемое

$$\sigma^{(2)}_{\alpha_1,\alpha_2} \leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)}\, 2^{-\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)} \times$$

$$\times \left(\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\sum_{k=2^m}^{\mu}\sum_{l=1}^{2^n-1} \frac{k^2 l^2 A_{k,l}^2}{(\mu-k+1)^{2-2\alpha_1}(\nu-l+1)^{2-2\alpha_2}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)}\, 2^{-\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{l=1}^{2^n-1} k^2 l^2 A_{k,l}^2 \sum_{\mu=k}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{(\mu-k+1)^{2-2\alpha_1}(\nu-l+1)^{2-2\alpha_2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Учитывая при $\alpha_1 < \frac{1}{2},\ \alpha_2 < \frac{1}{2}$ соотношение (3.3.13), имеем:

$$\sigma^{(2)}_{\alpha_1,\alpha_2} \ll \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)}\, 2^{-\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)} \times$$

$$\times \left(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1}\sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1} 2^{2i+2} 2^{2j+2} A_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Также как и в случае $\sigma^{(1)}_{\alpha_1,\alpha_2}$ находим, что

$$\sigma^{(2)}_{\alpha_1,\alpha_2} \ll \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha_1)}\, 2^{\frac{n}{2}(1-2\alpha_2)} \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} A_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3.15}$$

Аналогично можно получить оценку и для $\sigma^{(3)}_{\alpha_1,\alpha_2}$

$$\sigma^{(3)}_{\alpha_1,\alpha_2} \ll \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha_1)}\, 2^{\frac{n}{2}(1-2\alpha_2)} \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} A^2_{k,l}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.3.16)$$

Теперь оценим четвёртое слагаемое

$$\sigma^{(4)}_{\alpha_1,\alpha_2} \ll \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)}\, 2^{-\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)} \times$$

$$\times\left(\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{v=2^n}^{2^{n+1}-1}\sum_{k=2^m}^{\mu}\sum_{l=2^n}^{v} \frac{k^2 l^2 A^2_{k,l}}{(\mu-k+1)^{2-2\alpha_1}(v-l+1)^{2-2\alpha_2}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)}\, 2^{-\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)} \times$$

$$\times\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{l=1}^{2^n-1} k^2 l^2 A^2_{k,l} \sum_{\mu=k}^{2^{m+1}-1}\sum_{v=l}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{(\mu-k+1)^{2-2\alpha_1}(v-l+1)^{2-2\alpha_2}}\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha_1)}\, 2^{\frac{n}{2}(1-2\alpha_2)} \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} A^2_{k,l}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.3.17)$$

В силу оценок (3.3.14) – (3.3.17), получаем:

$$\sigma^{(1)}_{\alpha_1,\alpha_2} + \sigma^{(2)}_{\alpha_1,\alpha_2} + \sigma^{(3)}_{\alpha_1,\alpha_2} + \sigma^{(4)}_{\alpha_1,\alpha_2} \ll$$

$$\ll \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha_1)}\, 2^{\frac{n}{2}(1-2\alpha_2)} \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} A^2_{k,l}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, из сходимости ряда (3.3.1) следует $|C;\, \alpha_1,\, \alpha_2|$ – суммируемость почти всюду ряда (3.3.8). Соответственно, из сходимости рядов (3.3.2) и (3.3.3) следует $|C;\,\alpha_1|-$ суммируемость почти всюду ряда (3.3.9) и $|C;\alpha_2|-$ суммируемость почти всюду ряда (3.3.10). Теорема 3.3.1 полностью доказана.

Теорема 3.3.2. *Пусть* $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$. *Если выполнены условия:*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{(m+1)(n+1)}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}A_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty, \qquad (3.3.18)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{m+1}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}A_{k,0}^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty, \qquad (3.3.19)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}\left(\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}A_{0,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty. \qquad (3.3.20)$$

где $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2}$, *то ряд Фурье функции* $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$ *почти всюду суммируется методом* $\left|C;\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right|$.

Доказательство. При $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2}$, неравенство (3.3.12) принимает следующий вид:

$$\sigma_{\alpha_1,\alpha_2}\ll\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-m}\,2^{-n}\left\{\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{v=2^n}^{2^{n+1}-1}\left(\sum_{k=1}^{2^m-1}\sum_{l=1}^{2^n-1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=2^m}^{\mu}\sum_{l=1}^{2^n-1}+\sum_{k=1}^{2^m-1}\sum_{l=2^n}^{v}+\sum_{k=2^m}^{\mu}\sum_{l=2^n}^{v}\right)\frac{k^2l^2A_{k,l}^2}{(\mu-k+1)(v-l+1)}\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.3.21)$$

Оценим каждую сумму в правой части (3.3.21).

$\sigma_{\alpha_1,\alpha_2}^{(1)}\ll$

$$\ll \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-m}\, 2^{-n}\left(\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\sum_{k=1}^{2^m-1}\sum_{l=1}^{2^n-1}\frac{k^2 l^2 A_{k,l}^2}{(\mu-k+1)(\nu-l+1)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Переставляя порядок суммирования, имеем:

$\sigma_{\alpha_1,\alpha_2}^{(1)} =$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-m}\, 2^{-n}\left(\sum_{k=1}^{2^m-1}\sum_{l=1}^{2^n-1} k^2 l^2 A_{k,l}^2 \sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{(\mu-k+1)(\nu-l+1)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Принимая во внимание оценку

$$\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{(\mu-k+1)(\nu-l+1)} \approx ln2^m \cdot ln2^n, \tag{3.3.22}$$

получим:

$$\sigma_{\alpha_1,\alpha_2}^{(1)} \ll \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{(m+1)(n+1)}}{2^{m+n}}\left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\sum_{\mu=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{\nu=2^l}^{2^{l+1}-1}\mu^2\nu^2 A_{\mu,\nu}^2\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{(m+1)(n+1)}}{2^{m+n}}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} 2^k\, 2^l\left(\sum_{\mu=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{\nu=2^l}^{2^{l+1}-1} A_{\mu,\nu}^2\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} 2^k\, 2^l\left(\sum_{\mu=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{\nu=2^l}^{2^{l+1}-1} A_{\mu,\nu}^2\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{n=l}^{\infty}\frac{\sqrt{(m+1)(n+1)}}{2^{m+n}}.$$

Благодаря оценке

$$\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{n=l}^{\infty}\frac{\sqrt{(m+1)(n+1)}}{2^{m+n}} = \frac{\sqrt{(m+1)(n+1)}}{2^{m+n}}\cdot O(1),$$

получаем:

$$\sigma^{(1)}_{\alpha_1,\alpha_2} \ll \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{(k+1)(l+1)}\left(\sum_{\mu=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{\nu=2^l}^{2^{l+1}-1}A^2_{\mu,\nu}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.3.23)$$

Далее, аналогично рассуждая, находим:

$$\sigma^{(2)}_{\alpha_1,\alpha_2} \ll \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{(k+1)(l+1)}\left(\sum_{\mu=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{\nu=2^l}^{2^{l+1}-1}A^2_{\mu,\nu}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.3.24)$$

$$\sigma^{(3)}_{\alpha_1,\alpha_2} \ll \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{(k+1)(l+1)}\left(\sum_{\mu=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{\nu=2^l}^{2^{l+1}-1}A^2_{\mu,\nu}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.3.25)$$

$$\sigma^{(4)}_{\alpha_1,\alpha_2} \ll \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{(k+1)(l+1)}\left(\sum_{\mu=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{\nu=2^l}^{2^{l+1}-1}A^2_{\mu,\nu}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.3.26)$$

Благодаря оценкам (3.3.23) – (3.3.26), будем иметь:

$$\sigma_{\alpha_1,\alpha_2} \ll \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{(m+1)(n+1)}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}A^2_{k,l}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, выполнение условий (3.3.18)-(3.3.20) влекут за собой суммируемость исходного ряда методом $\left|C;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right|$ почти всюду, что и требовалось доказать. Теорема 3.3.2 доказана.

Теорема 3.3.3. *Пусть* $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$ *и, если выполнены условия:*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}A^2_{k,l}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \qquad (3.3.27)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} A_{k,0}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} A_{0,l}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{3.3.28}$$

где $\alpha_1, \alpha_2 > \frac{1}{2}$, *то ряд Фурье функции* $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ *почти всюду*

$|C;\ \alpha_1,\ \alpha_2|$ – *суммируемый.*

Доказательство. Для $\alpha_1 > \frac{1}{2}$, $\alpha_2 > \frac{1}{2}$, как и при доказательстве теоремы 3.3.1 оценим правую часть (3.3.12).

$$\sigma_{\alpha_1,\alpha_2}^{(1)} \leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)}\, 2^{-\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)} \times$$

$$\times\left(\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\sum_{k=1}^{2^m-1}\sum_{l=1}^{2^n-1}\frac{k^2 l^2 A_{k,l}^2}{(\mu-k+1)^{2-2\alpha_1}(\nu-l+1)^{2-2\alpha_2}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)}\, 2^{-\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)} \times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{2^m-1}\sum_{l=1}^{2^n-1} k^2 l^2 A_{k,l}^2 \sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{(\mu-k+1)^{2-2\alpha_1}(\nu-l+1)^{2-2\alpha_2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как при $\alpha_1 > \frac{1}{2},\ \alpha_2 > \frac{1}{2}$

$$\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{(\mu-k+1)^{2-2\alpha_1}(\nu-l+1)^{2-2\alpha_2}} \ll$$

$$\ll 2^{m(2\alpha_1-1)} \cdot 2^{n(2\alpha_2-1)}\ , \tag{3.3.29}$$

то

$$\sigma^{(1)}_{\alpha_1,\alpha_2} \ll \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)}\, 2^{-\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)} 2^{\frac{m}{2}(1+2\alpha_1)} 2^{\frac{n}{2}(1+2\alpha_2)} \times$$

$$\times\left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\sum_{\mu=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{v=2^l}^{2^{l+1}-1}\mu^2 v^2 A^2_{\mu,v}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-m}2^{-n}\left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} 2^{2k+2}2^{2l+2}\sum_{\mu=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{v=2^l}^{2^{l+1}-1} A^2_{\mu,v}\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-m}2^{-n}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} 2^{k+1}2^{l+1}\left(\sum_{\mu=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{v=2^l}^{2^{l+1}-1} A^2_{\mu,v}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

После перемены порядка суммирования, имеем:

$$\sigma^{(1)}_{\alpha_1,\alpha_2} \ll \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} 2^k 2^l \left(\sum_{\mu=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{v=2^l}^{2^{l+1}-1} A^2_{\mu,v}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=k}^{\infty}\sum_{n=l}^{\infty} 2^{-m}2^{-n} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} 2^k 2^l\, 2^{-k}2^{-l}\left(\sum_{\mu=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{v=2^l}^{2^{l+1}-1} A^2_{\mu,v}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{v=2^l}^{2^{l+1}-1} A^2_{\mu,v}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично, оценивая $\sigma^{(2)}_{\alpha_1,\alpha_2}$, $\sigma^{(3)}_{\alpha_1,\alpha_2}$, $\sigma^{(4)}_{\alpha_1,\alpha_2}$, как и при доказательстве теоремы 3.3.1, получаем, что

$$\sigma_{\alpha_1,\alpha_2} \ll \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{v=2^l}^{2^{l+1}-1} A^2_{\mu,v}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, в силу выполнения условий (3.3.27) и (3.3.28) вытекает $|C;\ \alpha_1, \alpha_2|$ - суммируемость ряда Фурье, при $\alpha_1 > \frac{1}{2}, \alpha_2 > \frac{1}{2}$,что и требовалось доказать.

Проводя вышеприведенные рассуждения, можно рассматривать следующие случаи:

$$\text{I.}\alpha_1 > \frac{1}{2},\ \alpha_2 = \frac{1}{2};\quad \text{II.}\ \alpha_1 < \frac{1}{2},\ \alpha_2 = \frac{1}{2};\quad \text{III.}\ \alpha_1 < \frac{1}{2},\ \alpha_2 > \frac{1}{2}.$$

Теорема 3.3.4. *Пусть функция $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ и выполнены условия:*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}\rho_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\rho_{k,0}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}\left(\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}\rho_{0,l}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

то ряд Фурье функции $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ почти всюду $\left|C;\ \alpha_1, \frac{1}{2}\right|$ - суммируемый при $\alpha_1 > \frac{1}{2},\ \alpha_2 = \frac{1}{2}$.

Теорема 3.3.5. *Пусть функция $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ и выполнены условия:*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha_1)}\sqrt{n+1}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}A_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha_1)}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}A_{k,0}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}\left(\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}A_{0,l}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

то ряд Фурье функции $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ почти всюду $\left|C;\ \alpha_1, \frac{1}{2}\right|$ - суммируемый при $\alpha_1 < \frac{1}{2},\ \alpha_2 = \frac{1}{2}$.

Теорема 3.3.6. *Пусть функция $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ и выполнены условия:*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha_1)}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}A_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha_1)}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}A_{k,0}^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty\,,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}A_{0,l}^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty\,,$$

то ряд Фурье функции $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$*почти всюду* $|C;\ \alpha_1,\alpha_2|$ *- суммируемый при* $-1<\alpha_1<\frac{1}{2},\ \alpha_2>\frac{1}{2}$.

Обсуждение полученных результатов

Теоремы 2.1.2, 2.1.3, 2.2.2, 2.2.3, 3.1.5, 3.1.6, 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1, 3.3.2 и 3.3.3 являются основными результатами диссертационной работы.

Следствием второй главы являются обобщения теорем 1, 3, 5, 6 работы Хасанова Ю.Х. [112], где проводится исследования по выявлению необходимых и достаточных условий для абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье почти-периодических функций в смысле Безиковича (B_2). Следует заметить, что в утверждениях 1,3,5,6 работы [112] автором получены ряд необходимых и достаточных условий по абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье. Отличие полученных автором результатов диссертационной работы от результатов Хасанова Ю.Х. [112] заключается в том, что теоремы 2.1.2, 2.1.3, 2.2.2 и 2.2.3 приведены для функции двух переменных и доказаны соответствующие утверждения.

В теореме 2.1.2 утверждается, что если функция $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ и её спектр $\Lambda_j \left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}_{j=1}^{2}$ удовлетворяет условиям:

$$\lambda_0^{(j)} = 0;\ \lambda_{-n_j}^{(j)} = -\lambda_{n_j}^{(j)};\ \lim_{n_j \to \infty} \lambda_{n_j}^{(j)} = \infty\ ;\ \lambda_{n_j}^{(j)} < \lambda_{n_{j+1}}^{(j+1)}(\ \ j = 1,2)$$

и при $0 < \beta < 2, r > \frac{2}{\beta} - 1$ и каждом $\mathrm{j} = 1,2$ если сходится ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} 2^{2v\left(1-\frac{\beta}{2}\right)} \left(\frac{\lambda_{2^v}^{(j)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}}\right)^r \omega_{r,(j)}^{\beta}\left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(j)}}\right)_{B_2^{(2)}},$$

то сходится и ряд

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \left|A\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right|^{\beta}.$$

Здесь также получены необходимые условия сходимости заданного ряда, т.е. из сходимости ряда

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left|A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right|^{\beta}.$$

следует сходимость

$$\sum_{v=1}^{\infty} 2^{2v\left(1-\frac{\beta}{2}\right)}\left(\frac{\lambda_{2^v}^{(j)}}{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}}\right)^{r}\omega_{r,(j)}^{\beta}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^v}^{(j)}}\right)_{B_2^{(2)}},$$

Утверждение этой теоремы является достаточным условием по факту выявлений признаков абсолютной сходимости рядов вида

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left|A\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\lambda_{n_2}^{(2)}\right)\right|^{\beta}.$$

В данном случае, характер гладкости функции $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$ определяется с помощью математического аппарата аппроксимации, который принято называть модулем непрерывности порядка r функции $f(x,y)\in B_2^{(2)}$, или модулем гладкости функции $f(x,y)\in B_2^{(2)}$

$$\omega_{r,(j)}(f;h)_{B_2^{(2)}}=\sup_{|t|\le h}\left\|\Delta_{h_j}^{r} f(x_1,x_2)\right\|_{B_2^{(2)}}\ (h>0),$$

где

$$\Delta_{h_j}^{r} f(x_1,x_2)=\sum_{m=0}^{r}(-1)^{r-m}\binom{r}{m} f(\,x_1+mh_1,x_2+mh_2)\ \ (j=1,2)$$

-разность r $-$го порядка функции $f(x_1,x_2)$ с шагом h_j $(j=1,2)$.

Утверждение теоремы 2.1.2 обеспечивает наличие достаточных условий для абсолютной сходимости двойных тригонометрических рядов Фурье функции $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$.

В теореме 2.1.3 нам удалось найти необходимых условий, которые обеспечивают абсолютную сходимость двойных тригонометрических рядов Фурье функции двух переменных $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$.

В предположениях и утверждений теоремы 2.2.2 нами получены обратные теоремы, т.е. удалось выявить необходимые условия для абсолютной сходимости двойных тригонометрических рядов Фурье функции $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ вида

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \left| A\left(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}\right) \right|^{\beta} < \infty \qquad (*)$$

т.е. в случае, когда спектр $\Lambda_j \left\{ \lambda_{n_j}^{(j)} \right\}$ $(j = 1,2)$ функции $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ удовлетворяет условиям:

$$\lambda_{-n_j}^{(j)} = -\lambda_{n_j}^{(j)}; \ \left| \lambda_{n_j}^{(j)} \right| > \left| \lambda_{n_{j+1}}^{(j+1)} \right|; \ \lim_{n_j \to \infty} \lambda_{n_j}^{(j)} = 0 \ \ (j = 1,2).$$

Если при $0 < \beta < 2, r > \frac{2}{\beta} - 1$ и каждом $j = 1,2$ сходится ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} 2^{2v(1-\beta/2)} W_{r,(j)}^{\beta} \left(f; \frac{1}{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}} \right)_{B_2^{(2)}},$$

то и ряд вида $(*)$ также сходится. Кроме того, здесь также устанавливается результат, показывающий в какой мере поставленные условия теоремы 2.2.2 являются необходимыми, т.е. в предположениях теоремы 2.2.2 из сходимости ряда (*) следует сходимость ряда

$$\sum_{v=1}^{\infty} 2^{2v(1-\beta/2)} W_{r,(j)}^{\beta} \left(f; \frac{1}{\lambda_{2^{v-1}}^{(j)}} \right)_{B_2^{(2)}}.$$

При исследовании сходимости рядов вида $(*)$ использована модуль усреднения порядка r $(r \in N)$ этой функции $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ на $(-\infty, \infty)$

$$W_r(f; H)_{B_2^{(2)}} = \sup_{|T| \geq H} \| f_{T^r}(x_1, x_2) \|_{B_2^{(2)}} \quad (H > 0),$$

где

$$f_{T^r}^{(j)}(x_1,x_2)=\frac{1}{(2T)^r}\int\limits_{x_j-T}^{x_j+T}dt_1\int\limits_{t_1-T}^{t_1+T}dt_2\ldots\int\limits_{t_{r-2}-T}^{t_{r-2}+T}dt_{r-1}\int\limits_{t_{r-1}-T}^{t_{r-1}+T}f(t_r)dt_r.$$

В третьей главе диссертации исследуются вопросы абсолютной суммируемости двойных рядов Фурье почти-периодических функций Безиковича.

В теоремах 3.1.5, 3.1.6, 3.2.1, 3.2.2 первого и второго параграфов третьей главы исследуется абсолютная суммируемость двойных рядов Фурье функции $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$ с предельными точками в бесконечности и с предельными точками в нуле.

Суммируемость рядов вида:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left|A_{n_1,n_2}\right| \qquad (**)$$

функции $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$, при использования условий:

$$\lambda_{-n_j}^{(j)}=-\lambda_{n_j}^{(j)};\ \left|\lambda_{n_{j-1}}^{(j-1)}\right|>\left|\lambda_{n_j}^{(j)}\right|;\ \lim_{n_j\to\infty}\lambda_{n_j}^{(j)}=\infty\ \ (j=1,2)$$

для спектра $\left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}$ $(j=1,2)$ функции $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$ исследуется в теоремах 3.1.5 и 3.1.6, то есть в упомянутых теоремах, соответственно доказаны $|C;\,\alpha_1,\alpha_2|$- суммируемость при $0<\alpha_i\le\frac{1}{2}$, $i=1,2$ и $|C;\,\alpha_1,\alpha_2|$-суммируемость при $\alpha_i>\frac{1}{2}$, $i=1,2$.

В теоремах 3.2.1. и 3.2.2 исследуется ряд вида $(**)$ функции $f(x_1,x_2)\in B_2^{(2)}$, при использования условий:

$$\lambda_{-n_j}^{(j)}=-\lambda_{n_j}^{(j)};\ \left|\lambda_{n_j}^{(j)}\right|>\left|\lambda_{n_{j+1}}^{(j+1)}\right|;\ \lim_{n_j\to\infty}\lambda_{n_j}^{(j)}=0\ \ (j=1,2).$$

Пусть функция $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ и для совокупности чисел $\left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}$ $(j = 1,2)$ предельная точка находится в нуле. Если при значений $0 < \beta < 2,\ r > k$ и каждом $j = 1,2$ сходится ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} 2^{v\left(\frac{k}{2} - \alpha_v - 1\right)} W_{r,(j)} \left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(j)}} \right)_{B_2^{(2)}} < \infty ,$$

то ряд

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \left| A_{n_1,n_2} \right|,$$

$|C;\ \alpha_1, \alpha_2,|$- суммируемый при $0 < \alpha_i \leq \frac{1}{2},\ \ i = 1,2.$

Также показано, что в какой мере условие теоремы является необходимым, т.е. из сходимости ряда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \left| A_{n_1,n_2} \right|$$

Следует сходимость ряда

$$\sum_{v=1}^{\infty} 2^{v\left(\frac{k}{2} - \alpha_v - 1\right)} W_{r,(j)} \left(f; \frac{1}{\lambda_{2^v}^{(j)}} \right)_{B_2^{(2)}} .$$

Заметим, что при доказательстве теорем используются модуль непрерывности и модуль усреднения порядка r.

Абсолютная суммируемость рядов Фурье кратных рядов Фурье периодических функций изучены в работах И.Е.Жака [56], [57], В.Г.Челидзе [121], М.Ф.Тимана [97] и других.

Впервые суммируемость кратных рядов Фурье почти-периодических в смысле Безиковича функций изучены в работах Ю.Х.Хасанов [117], [119].

Далее, в третьем параграфе третьей главы изучены критерии абсолютной суммируемости двойного ряда Фурье функции $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ в терминах поведения коэффициентов Фурье, т.е. обобщены теоремы Лейндлера [67], которые получены в случае $f(x) \in L_2$.

Точнее, в теоремах 3.3.1,3.3.2 и 3.3.3 исследуется почти всюду $|C;\ \alpha_1, \alpha_2|$- суммируемость рядов Фурье функции $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ в случае, когда:

1) $-\frac{1}{2} < \alpha_1, \alpha_2 < \frac{1}{2}$,
2) $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$,
3) $\alpha_1, \alpha_2 > \frac{1}{2}$.

В частности, в теореме 3.3.1 утверждается, что если $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ и сходятся ряды:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(\frac{1}{2}-\alpha_1)}\, 2^{\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\alpha_2)} \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\ \sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} A_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(\frac{1}{2}-\alpha_1)} \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} A_{k,0}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\alpha_1)} \left(\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} A_{0,l}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

то ряд Фурье функции $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ почти всюду $|C; \alpha_1, \alpha_2|$ – суммируемый, при $-1 < \alpha_1, \alpha_2 < \frac{1}{2}$, А в теореме 3.3.2 доказывается, что для функции $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$, выполнения условий:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{(m+1)(n+1)}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}A_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{m+1}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}A_{k,0}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}\left(\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}A_{0,l}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

где $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, обеспечивают, что то ряд Фурье функции $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ почти всюду суммируется методом $\left|C; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right|$.

В последнем результате третье главы диссертации устанавливается, что для функции $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$, если выполнены условия:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}A_{k,l}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}A_{k,0}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}A_{0,l}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

где $\alpha_1, \alpha_2 > \frac{1}{2}$, то ряд Фурье функции $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ почти всюду $|C; \alpha_1, \alpha_2|$ – суммируемый.

Выводы

Основными научными результатами диссертационной работы являются следующие:

1. выявлены необходимые и достаточные признаки абсолютной сходимости двойных тригонометрических рядов Фурье почти-периодических функций в смысле Безиковича двух переменных, в случае, когда: а) спектр рассматриваемой функции имеет единственную предельную точку в бесконечности; б) спектр рассматриваемой функции имеет единственную предельную точку в нуле [5-А, 6-А];
2. установлены достаточные условия абсолютной суммируемости двойных рядов Фурье почти-периодических функций по Безиковичу, когда: а) их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности; б) их спектр имеет единственную предельную точку в нуле [12-А];
3. исследованы проблемы абсолютной чезаровской суммируемости двойных рядов Фурье в терминах поведения коэффициентов Фурье.

Рекомендации по практическому использованию результатов:

Результаты, полученные в дисертационной работе, носят теоретический и практический характеры, они могут быть использованы в теории рядов Фурье различных классов почти-периодических функций, теории приближения, в задачах автоколебания и распределения информации по системе Хаара. Материалы диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов по теории рядов Фурье для студентов, магистрантов и докторантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Математика».

Список литературы

А) Список использованных источников

Монографии и учебные пособия

[1]. Антонов А.П., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И. Некоторые вопросы теории кратных тригонометрических рядов. [текст] / А.П.Антонов, А.Н.Бахвалов, М.И.Дьяченко //М.: МАКС Пресс.,2014,-92с.

[2]. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. [текст] /Н.И.Ахиезер// М.: 1965,- 323 с.

[3]. Барон С.А. Введение в теорию суммируемости рядов. [текст] /С.А.Барон// Таллинн: Валгус, 1977, -280 с.

[4]. Бари Н.К. Тригонометрические ряды [текст] / Н.К.Бари// М.:Физматгиз.,1961, - 936 с.

[5]. Бернштейн С.Н. Собрание сочинений [текст] / С.Н.Бернштейн // М.: Изд. АН СССР. , 1952, Т.1 ,- 581 с.

[6]. Бернштейн С.Н. Собрание сочинений [текст] / С.Н.Бернштейн // М.: Изд. АН СССР, 1954,Т.2, 627 с.

[7]. Besicovitch A.S. Almost periodic functions [текст] / A.S.Besicovitch//–Cambridge, 1932, - 180 p.

[8]. Бор Г. Почти-периодические функции [текст] / Г.Бор// М.: ЛИБРОКОМ, -2009,- 128 с.

[9]. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости [текст] / Б.П. Демидович// М:. Наука, 1967, -472 с.

[10]. Зигмунд А. Тригонометрические ряды [текст] / А. Зигмунд// М.: Мир, 1965, Т. I, - 615 с.

[11]. Зигмунд А. Тригонометрические ряды [текст] / А. Зигмунд// М.: Мир,1965, том II, -537 с.

[12]. Кахан Ж.П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье [текст] / Ж.П. Кахан// М.: Мир, 1976,- 204 с.

[13]. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа [текст] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин// М.: Наука, 1989, -623 с.

[14]. Левитан Б.М., Жиков В.В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения [текст] / Б.М. Левитан, В.В. Жиков// М.: изд. МГУ, 1978, -205 с.

[15]. Левитан Б.М. Почти-периодические функции [текст] / Б.М. Левитан//М.: ГИТТЛ., 1953, - 396 с.

[16]. Натансон И.П. Конструктивная теория функций [текст] / И.П. Натансон// М.:Гостехиздат, 1949, -688 с.

[17]. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теорем вложения [текст] / С.М. Никольский// М.: Наука, 1969,-480с.

[18]. Привалов И.И. Ряды Фурье [текст] / И.И.Привалов// М-Л.: ГТТИ, 1934,-164 с.

[19]. Сендов Б., Попов В. Усредненые модули гладкости [текст] / Б. Сендов, В. Попов// М.: Мир, 1988,-328 с.

[20]. Толстов Г. П. Ряды Фурье [текст] /Г.П. Толстов// М.: «Наука», 1980,- 382 с.

[21]. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного [текст] / А.Ф. Тиман// М.: Физматгиз., 1960, - 624 с.

[22]. Тиман М.Ф. Аппроксимация и свойства периодических функций [текст] / М.Ф. Тиман// Днепропетровск, Полиграфист, 2000,- 320 с.

[23]. Титчмарш Е. Теория функций [текст] / Е.Титчмарш// М.: Наука, 1980,-464 с.

[24]. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления [текст] / Г.М. Фихтенгольц// М.: Наука, 1970, Том 3,- 656 с.

[25]. Харди Г. Расходящиеся ряды. Перевод с англ. [текст] / Г. Харди// М.: ИЛ, 1951,-504 с.

[26]. Харди Г.Х., Рогозинский В.В. Ряды Фурье [текст] /Г.Х. Харди, В.В. Рогозинский// М.: Физматгиз, 1962,- 156 с.

[27]. Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г. Неравенства [текст] / Г. Харди, Д. Литтлвуд, Г. Полиа// М.: Гос. изд. иностр. лит.,1948, - 456 с.

[28]. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении [текст] / Р.Эдвардс// М.: Мир, 1985, т. 1, -260 с.

[29]. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении [текст] / Р.Эдвардс// М.: Мир, 1985, т. 2, -399 с.

[30]. Янушаускас А.И. Кратные тригонометрические ряды / А.И. Янушаускас //Новосибирск. Наука,1986,- 272с.

Статьи

[31]. Антонов А.П. Гладкость сумм двойных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами [текст] / А.П. Антонов // Вестник МУ.- серия1: матем., мех.,№5,-с.26-33.

[32]. Бахвалов А.Н. Сходимость кратных рядов и интегралов Фурье некоторых классов ограниченных функций [текст] / А.Н. Бахвалов // Мат.сб.,2002.,т.193,№12,-с.3-20.

[33]. Bochner S. Review of «On absolute convergence of multiple Fourier series» by Szasz and Minakshisundaram [текст] / S. Bochner //Math. Review., 1947,№8,- p.376.

[34]. Бредихина Е.А. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций [текст] / Е.А. Бредихина // Доклады АН СССР, 1956, т. 111, № 6,- с. 1163-1166.

[35]. Бредихина Е.А. Некоторые оценки отклонений частных сумм рядов Фурье от почти-периодических функций [текст] / Е.А. Бредихина // Матем. сборник, 1960, 50 (92), № 3, -с. 369-382.

[36]. Бредихина Е.А. Некоторые вопросы суммирования рядов Фурье почти-периодических функций [текст] / Е.А. Бредихина // Успехи матем. наук, т. 15, вып. 5 (95), 1960, -с. 143-150.

[37]. Вуколова Т.М., Дьяченко М.И. Оценки смешанных норм сумм двойных тригонометрических рядов с кратно монотонными коэффициентами [текст] / Т.М. Вуколова, М.И. Дьяченко // Известия высших учебных заведений,1997, №7(422), -с.3-11.

[38]. Вуколова Т.М., Дьяченко М.И. О свойствах сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами [текст] /Т.М. Вуколова, М.И.

Дьяченко //Вестник Московского университета, 1995, Серия1: матем., мех., №3,-с.22-32.

[39]. Гоголадзе Л.Д. О суммируемости двойных сопряженных тригонометрических рядов [текст] / Л.Д. Гоголадзе // Сообщ. АН ГССР, 1969, т.54, №1,-с.2-24.

[40]. Голубов Б.И. Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье [текст] / Б.И. Голубов // Матем. заметки, т. 37, № 1, 1985, -с. 13-24.

[41]. Голубов Б.И. Кратные интегралы и ряды Фурье [текст] / Б.И.Голубов // Итоги науки и тех. Сер. Мат. анал., 1982, т.19,-с.3-54.

[42]. Голубов Б.И. О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной обобщенной вариации [текст] / Б.И. Голубов // Сиб. матем. журн., 1974, Т.15, №2, - с. 262-291.

[43]. Грепачевская Л.В. Абсолютная суммируемость ортогональных рядов [текст] / Л.В. Грепачевская // Матем. сбор., 1964, 65 (107), № 3, -с. 370-389.

[44]. Грепачевская Л.В. Об абсолютной суммируемости методами Чезаро, Рисса и Зигмунда [текст] / Л.В. Грепачевская // Доклады АН СССР, 1964, 155, № 3.

[45]. Джафаров А.С., Мамедов Г.А. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций Безиковича [текст]/ А.С. Джафаров, Г.А. Мамедов // Известия АН Азерб. ССР, серия физ-тех и мат., 1983, № 5, -с. 8-13.

[46]. Джумабаева Д.Г., Дьяченко М.И., Нурсултанов Е.Д. О сходимости кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами [текст] / Д.Г. Джумабаева, М.И. Дьяченко,Е.Д. Нурсултанов // Сиб.матем.журн., 58:2(2017), с. 270-280.

[47]. Дьяченко М.И. О сходимости кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами [текст] / М.И. Дьяченко // Сиб. матем. журн., 2017, Т. 58, №2, с. 270-280.

[48]. Дьяченко М.И., Нурсултанов Е.Д. Теорема Харди-Литтлвуда кратных рядов Фурье с монотонными коэффициентами [текст] / М.И. Дьяченко, Е.Д. Нурсултанов //Мат. заметки, 2016, т. 99, №4,-с.502-510.

[49]. Дьяченко М.И. Об одном классе методов суммирования краных рядов Фурье [текст] / М.И. Дьяченко // Мат. сбор.,2013, т.204, №3-4.-с.3-18.

[50]. Дьяченко М.И. Об одном примере последовательности коэффитциентов двойного тригонометрического ряда [текст] / М.И. Дьяченко //Мат.заметки, 2011, т.90, №1, -с.45-52.

[51]. Дьяченко М.И. Некоторые проблемы теории кратных тригонометрических рядов [текст] / М.И. Дьяченко // Успехи математических наук, 1992, т.47, №5,-с.97-162.

[52]. Дьяченко М.И. О сходимости двойных рядов и рядов Фурье с монотонными коэффициентами [текст] /М.И. Дьяченко //Матем.сб., 1986, 129 (172),-с.97-162.

[53]. Dyachenko M.I. Uniform convergence of double Fourier series for classes of functions with anisotropic smoothness [текст] / M.I. Dyachenko// Mat.zametki, 1996, v.59, No.6, -p.937-943.

[54]. Dyachenko M.I., Tikhonov S. Trigonometric series with lacunarymonotone coefficients [текст] / M.I. Dyachenko, S. Tikhonov// Eurasian Mathematical Journal, 2012, v.3, No.2, -p.31-52.

[55]. Dyachenko M.I., Nursultanov E.D., Kankenova A. On summability of Fourier coefficients of functions from Lebesgue space [текст] / M.I. Dyachenko, E.D.Nursultanov, A. Kankenova // Journal of Math.Anal. and App., 2014, v.419, No.2, -p.959-971.

[56]. Жак И.Е. Об одной теореме В.Г.Челидзе [текст] / И.Е. Жак// Сообщение АН Груз. ССР, 1955, т.16, № 2,- с. 185.

[57]. Жак И.Е., Тиман М.Ф. О суммировании двойных рядов Фурье [текст] / И.Е. Жак, М.Ф. Тиман// Матем. сборник, 1954, 35 (77), № 1,- с. 21-56.

[58]. Жак И.Е. О сопряженных двойных тригонометрических рядах [текст] / И.Е. Жак // Мат.сб.,1952, т.31, №3,-с.469-484.

[59]. Жижиашвили Л.В. О суммировании двойных рядов Фурье [текст] / Л.В. Жижиашливи// Сиб. Мат. журнал, Т. VIII, № 3, 1967,- С. 548-564.

[60]. Жижиашвили Л.В. О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов [текст] / Л.В. Жижиашливи// Сообщ. АН ГССР.,1975, т.80, №1, -с. 17-19.

[61]. Жижиашвили Л.В. О сходимости кратных тригонометрических рядов Фурье [текст] / Л.В. Жижиашливи// Сиб. Мат. журнал, Т. VIII, № 3, 1967, - с. 548-564.

[62]. Коновалов С.П. Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье [текст] / С.П. Коновалов // Мат. заметки, 25(1979),-р.211-216.

[63]. Коновалов С.П. Об абсолютной сходимости почти всюду кратных рядов Фурье [текст] / С.П. Коновалов // Вестник МГУ. Матем.,мех., 3(1979),- с.65-119.

[64]. Конюшков А.А. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье [текст] / А.А. Конюшков // Матем. сбор., 1958, 44(86), №1, - с. 53-84.

[65]. Kogbetliantz E. Sur les series absolument sommables par la methode des moyennes arithmetiques [текст] / E. Kogbetliantz // Bull. sci. math., (2), 1925, 49,- p. 234-251.

[66]. Купцов Н.П. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций [текст] / Н.П. Купцов// Матем. сборник, 1956, 40 (82), № 2, -с. 157-178.

[67]. Leindler L. Uber die absolute summierbarkeit der orthogonalreihen [текст] / L. Leindler // Acta sci. math., (Szeged), 1961, 22, -s. 243-268.

[68]. Marcinkewisz I. Sur une metode remarquable de sommation des series doubles de Fourier [текст] / I. Marcinkewisz // Collecfed papers, Warszawa, 1964, -s. 527-538.

[69]. Musielak J. O bezwzglednej zbieznosci czeregow Fouriera pewnych funkcji prawie okresowych [текст] / J. Musielak // Bull. Acad. Polon. sci. ci., 1957, 3, № 5,- p. 9-17.

[70]. Musielak J. On the absolute convergence of multiple Fourier series [текст] / J. Musielak // Ann. Polon. Math. , 1958, 5, №2, -p.107-120.

[71]. Нурсултанов Е.Д. О коэффитциентах кратных рядов Фурье из L_p −пространств [текст] / Е.Д. Нурсултанов // Изв.РАН. сер.матем.,2000, т.64, вып.1, -с.95-122.

[72]. Пономаренко Ю.А. О линейных методах суммирования двойных рядов Фурье и наилучших приближениях непрерывных функций двух переменных [текст] /Ю.А. Пономаренко// Доповіді АН Украінскоі РСР, 1964, № 1,- с. 38-41.

[73]. Пономаренко Ю.А. Некоторые критерии абсолютной чезаровской суммируемости кратных рядов Фурье [текст] / Ю.А.Пономаренко // Докл.АН ССР,1963, Т. 152, № 6, -с. 1305-1307.

[74]. Пономаренко В.Г. Интегралы Фурье и наилучшее приближение целыми функциями [текст] /В.Г. Понораменко// Изв. высш. учебн. Заведений, Математика, № 3, 1966, -с. 109-123.

[75]. Пономаренко Ю.А., Тиман М.Ф. Про абсолютну сумацію кратних рядів Фур'е [текст] /Ю.А. Пономаренко, М.Ф. Тиман// Украинский матем. журнал, 1971, 23, № 3, -с. 346-363.

[76]. Притула Я.Г. Про абсолютну збіжні сть рядів Фурье майже периодичних функций [текст] /Я.Г. Притула// Віснік Львів. ун-ту, сер. Мех-мат, 1971, 137, № 5, -с. 72-80.

[77]. Саакян А.А. О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации [текст] / А.А.Саакян // Изв. АН Арм.ССР, 1986, т.21, №6,-с.517-529.

[78]. Sonouchi G. On the absolute summability of Fourier series [текст] / G. Sonouchi // Journ. of the Math. Soc. of Japan, 1949, v. 1, № 2.- p. 57-65.

[79]. Стечкин С.Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов [текст] /С.Б. Стечкин// Матем. сборник, 1951, 29 (71), № 1, -с. 225-232.
[80]. Стечкин С.Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье [текст] / С.Б. Стечкин // Известия АН СССР, серия Математика, 1953, 17, № 2, -с. 87-98.
[81]. Стечкин С.Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье [текст] / С.Б. Стечкин // Известия Ан СССР, серия Математика, 1955, 19, № 2,- с. 221-246.
[82]. Стечкин С.Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов [текст] /С.Б. Стечкин // Доклады АН СССР, 1955, 102, № 2,- с. 37-40.
[83]. Szasz O. Fourier series and mean moduli of continuity [текст] / O. Szasz // Trans. Amer. math. soc. , 1934, 42, № 2, - pp. 366-395.
[84]. Szasz O., Minakshisundaram S. On absolute convergence of multiple Fourier seriers [текст] / O. Szasz, S. Minakshisundaram // Trans. Amer. Math. Soc., 1974, v.61, №1, -p.36-53.
[85]. Taberski R. Abel summability of double Fourier series [текст] / R. Taberski // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Msth. Astron. Et phys., t. 18, № 6, 1970, - pp. 307-314.
[86]. Tandori K. Ïber die orthogonalen Гunktionen [текст] / K. Tandori // IX (Absolute Summation), Act. Sci. Math., 21 (1960), p. 292-299.
[87]. Тиман А.Ф., Тиман М.Ф. Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем [текст] / А.Ф. Тиман, М.Ф. Тиман // Доклады АН СССР, 1950, 71, -с. 17-20.
[88]. Тиман М.Ф. Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье [текст] / М.Ф. Тиман //Доклады АН СССР, 1961, т.137, № 5, -с. 1074-1077.
[89]. Тиман М.Ф. Об абелевой суммируемости двойных рядов [текст] / М.Ф.Тиман // Доклады Ан СССР, 1948, 60, №7,- с. 1129-1132.
[90]. Тиман М.Ф., Пономаренко Ю.А. Некоторые критерии абсолютной суммируемости рядов Фурье [текст] / М.Ф. Тиман, Ю.А. Пономаренко// Исследования по современным проблемам конструктивной теории функции, Баку, 1965.

[91]. Тиман М.Ф. Замечание к вопросу об абсолютной суммируемости ортогональных рядов [текст] /М.Ф. Тиман // Доповіді АН Украінскоі РСР, 1966, № 12, с. 1533-1536.
[92]. Тиман М.Ф., Хасанов Ю.Х. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций [текст] / М.Ф. Тиман, Ю.Х. Хасанов// Ряды Фурье: теория и приложения. Киев, ИМ АН Украины, 1992,- с. 142-146.
[93]. Тиман М.Ф. Об абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье [текст] / М.Ф. Тиман // Сообщение АН Груз. ССР, 1961, 26, №6, - с. 641-646.
[94]. Тиман М.Ф. Частные наилучшие приближения функций, абсолютная сходимость рядов Фурье и ядреность интегральных операторов Гилберта-Шмидта [текст] / М.Ф. Тиман // Матем. сбор., 1968, 75 (117) , №3, -с. 361-373.
[95]. Тиман М.Ф., Гаймназаров Г. Уклонение периодических функций двух переменных от некоторых полиномов [текст] / М.Ф. Тиман, Г. Гаймназаров // Доклады АН Тадж. ССР, 1972, 15, № 5, с. 6-8.
[96]. Тиман М.Ф., Пономаренко В.Г. О приближении функций двух переменных суммами типа Марцинкевича [текст] / М.Ф. Тиман // Известия вузов. Математика, 1975, № 9, - с. 59–67.
[97]. Тиман М.Ф. Об абелевой суммируемости двойных рядов [текст] / М.Ф. Тиман// Доклады Ан СССР, 1948, 60, №7, с. 1129-1132.
[98].Тиман М.Ф. Частные наилучшие приближения функций, абсолютная сходимость рядов Фурье и ядерность интегральных операторов Гильберта-Шмидта [текст] / М.Ф. Тиман // Матеем. сборник, 1968, 75 (117), № 3, -с. 361-373.
[99].Тригуб Р.М. Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость рядов Фурье [текст] / Р.М. Трибуг// ИАН СССР. Сер. матем., т. 32, № 1, 1968, -с. 24-49.

[100]. Fekete M. Untersuchungen uber absolute summable Reihen mit Anwendung auf Dirichletsche und Fouriersche Reihen [текст] / M. Fekete // Math. es termesz. ert., 1914, 32, -s. 389-425.

[101]. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций [текст] / Ю.Х. Хасанов// Конструктивная теория функций, Санкт-Петербург, 1992, -с. 66-68.

[102]. Хасанов Ю.Х. О приближении функций двух переменных [текст] /Ю.Х. Хасанов// Депонирование ВИНИТИ 1992 , № 1, 938-В92, 17 с.

[103]. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье [текст] / Ю.Х. Хасанов// Доклады АН РТ, том 37, № 1, 1994,- с. 12-15.

[104]. Хасанов Ю.Х. О приближении почти-периодических функций двух переменных / Ю.Х. Хасанов // Доклады АН РТ, том 37, № 3-4, 1994, с. 7-11.

[105]. Хасанов Ю.Х. Теорема Пэли для коэффициентов Фурье почти-периодических в смысле Безиковича функций [текст] / Ю.Х.Хасанов // Доклады АН РТ, том 43, № 3, 2000, с. 27-32.

[106]. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье почти-периодических функций [текст] / Ю.Х. Хасанов // Математические заметки ЯГУ, том 8, выпуск 2, Якутск, 2001, с. 84-92.

[107]. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье почти – периодический функций [текст] / Ю.Х. Хасанов //Известия вузов. Северокавказский регион. Естественные науки, 2011, Спецвыпуск, с.71-73.

[108]. Хасанов Ю.Х. О приближении функций двух переменных некоторыми интегралами Фурье [текст] / Ю.Х. Хасанов // Доклады АН РТ,1993, Т.36, № 3, - с. 174-176.

[109]. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной чезаровской суммируемости рядов Фурье почти-периодических функций с предельными точками в нуле [текст] / Ю.Х. Хасанов // Уфимский матем. журнал, 2016, Т.8., № 4,- с. 147-155.

[110]. Хасанов Ю.Х. О приближении почти-периодических функций двух переменных суммами типа Марцинкевича-Зигмунда [текст] / Ю.Х. Хасанов // Математические заметки ЯГУ, том 9, выпуск 2, Якутск, 2001, с. 117-127.

[111]. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной суммируемости рядов Фурье некоторых классов почти-периодических функций [текст] / Ю.Х. Хасанов // Доклады АН РТ, том XLVIII, № 3-4, 2005, -с. 28-37.

[112]. Хасанов Ю.Х. Абсолютная сходимость рядов Фурье почти-периодических функций [текст] / Ю.Х. Хасанов // Матем. заметки, 2013, Т.94, № 5, -с. 745-756.

[113]. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти-периодических функций [текст] / Ю.Х. Хасанов // Anal. Math., 2013, v.39, pp. 259-270.

[114]. Хасанов Ю.Х. О приближении почти-периодических функций двух переменных [текст] / Ю.Х. Хасанов // Известия вузов. Математика, 2010, №12, -с. 82-86.

[115]. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических в смысле Безиковича функций [текст] / Ю.Х. Хасанов // Украинский матем. журнал, 2013, т.65, №12, с. 1716-1722.

[116]. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти-периодических функций [текст] / Ю.Х. Хасанов // Доклады АН РТ, 2009, т. 52, № 12,-с. 913-920.

[117]. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье почти – периодический функций [текст] / Ю.Х. Хасанов // Мат. заметки ЯГУ, 2001, т.8, выпуск 2, -с.84-92.

[118]. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье [текст] / Ю.Х. Хасанов // Теорія наближення та задачі обчислювальної математики, Днепропетровск, 1993, с. 196.

[119]. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье [текст] / Ю.Х. Хасанов// Доклады АН РТ, том 37, № 1, 1994, с. 12-15.

[120]. Челидзе В. Г. Об абсолютной сходимости рядов Фурье [текст] / В.Г. Челидзе// Ухань дасюэ цзыжань кэсюэ сюэбао (Wuhan daxue ziran kexue xuebao), 1959, №4, с. 8-20.

[121]. Челидзе В. Г. Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье [текст] / В.Г. Челидзе //Доклады АН СССР, 1946, т.54, №2, с. 117-120.

Диссертации и авторефераты

[122]. Тиман М.Ф. Исследование свойств функции с заданными наилучшими приближениями [текст] / М.Ф. Тиман// Автореферат докторский диссертации. Ленинград. – 1973. - 43 с.

[123]. Тиман М.Ф. Исследование свойств функций с заданными наилучшими приближениями [текст] / М.Ф. Тиман// Дисс. на соискание ученой степени доктора физ-мат наук, Днепропетровск, 1971, 306 с.

[124]. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций [текст] / Ю.Х. Хасанов// Дисс. на соискание ученой степени кандидата физ-мат наук, Днепропетровск, 1994, 82 с.

[125]. Хасанов Ю.Х. Абсолютная сходимость и суммирумость рядов Фурье почти-периодических функций [текст] / Ю.Х. Хасанов// Автореферат докторский диссертации. Казань. – 2014. - 35 с.

Б) Список публикаций соискателя ученой степени:

1. В журналах, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан

[1-А]. Сафарзода Э.Х. О приближении почти-периодических функций Степанова средними Марцинкевича [текст] / Ю.Х. Хасанов, Э.Х. Сафарзода // Вестник Волгоградского госуниверситета, Серия 1: Математика. Физика. – Волгоград, 2016.-№ 6 (37).-с. 61-69.

[2-А]. Сафарзода Э.Х. О приближении почти-периодических функций Степанова средними Марцинкевича [текст] / Ю.Х. Хасанов, Э.Х.

Сафарзода // Доклады АН РТ, –Душанбе, 2016. – Т.59. – № 11-12.-с. 463-470.

[3-А]. Сафарзода Э.Х. Обобщение теоремы Пэли для различных классов почти-периодических функций [текст] / Ю.Х.Хасанов, Э.Х.Сафарзода, Ф.М.Талбаков // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. –Душанбе, 2017. – №1/5.-С. 21-25.

[4-А]. Сафарзода Э.Х. Об условиях зависимости степени суммируемости функций Степанова и коэффициентов Фурье [текст] / Э.Х.Сафарзода // Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, – Душанбе, 2018. – № 4 (173).-С. 54-62.

[5-А]. Сафарзода Э.Х. О необходимых условиях сходимости двойных рядов Фурье почти-периодических функций [текст] / Э.Х.Сафарзода // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. –Душанбе, 2021. № 4.-С. 109-118.

[6-А]. Сафарзода Э.Х. Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти- периодических функций [текст] / Э.Х.Сафарзода // Известия НАН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, – Душанбе, 2022.– № 1 (186).-С. 23-32.

2. В других изданиях:

[7-А]. Сафарзода Э.Х. Об отклонении почти-периодических функций Степанова от сумм типа Марцинкевича [текст] / Ю.Х.Хасанов, Э.Х.Сафарзода // Материалы III-й международной школы-конференции «Геометрический анализ и его приложения» - Волгоград: Издательство ВГУ, 2016.-С. 210-214.

[8-А]. Сафарзода Э.Х. Приближение почти–периодических функций Степанова средними Марцинкевича [текст] / Ю.Х.Хасанов, Э.Х.Сафарзода // Материалы международной конференции «Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел». Душанбе, 2017.-С. 154-156.

[9-А]. Сафарзода Э.Х. Аналог теоремы Пэли для различных классов почти-периодических функций [текст] / Ю.Х.Хасанов, Э.Х.Сафарзода // Материалы республиканской научно-практической конференции «Низоми босамари омодакунии кадрҳои муҳандисӣ-техникӣ − асоси рушди устувори Ҷумҳурии Тоҷикистон». Худжанд, 2017.-С. 195-198.
[10-А]. Сафарзода Э.Х. О приближении почти-периодических функций Степанова средними Марцинкевича [тезис] / Ю.Х.Хасанов, Э.Х.Сафарзода // «Комплексный анализ и теория аппроксимаций» Сборник тезисов Международной конференции г.Уфа, 29-31мая 2019 г.-С. 47-49.
[11-А]. Сафарзода Э.Х. О необходимых условиях сходимости двойных рядов Фурье почти-периодических функций [текст] / Э.Х. Сафарзода // Актуальные проблемы современной математики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.) Душанбе-2021.-С. 219-222.
[12-А]. Сафарзода Э.Х. Абсолютная суммируемость двойных рядов Фурье с предельными точками в бесконечности [текст] / Э.Х. Сафарзода // Современные проблемы теории чисел и математического анализа. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Дододжона Исмоилова (Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.) Душанбе-2022.-С. 206-209.