

«Утверждаю»

Ректор Таджикского государственного  
финансово-экономического университета  
кандидат экономических наук, доцент

Х.А. Абдуалимзода

03 » 2023г.



## ОТЗЫВ

оппонирующей организации на диссертацию Сафарзода Эшмати Хотам  
« Абсолютная сходимость и суммируемость двойных рядов Фурье почти-  
периодических функций » по специальности 01.01.01 – Вещественный,  
комплексный и функциональный анализ, представленной на соискание  
учёной степени кандидата физико-математических наук

**Актуальность темы диссертации.** В теории почти-периодических функций Бора, Безиковича, Степанова и Вейля изучения и исследования критерий равномерной и абсолютной сходимостей и суммируемости рядов Фурье как в одномерном, так и в многомерном случаях, играют особую роль.

Исследованию абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье периодических функций посвящены работы С.Н.Бернштейна, О.Саса, А.Зигмунда, С.Б.Стечкина, М.Ф.Тимана, Б.И.Голубова, Ю.Муселиака, М.И.Дьяченко, В.Г.Челидзе, И.Е.Жака, Ю.А.Пономаренко, Л.В.Жижиашвили и других.

Что же касается теории почти-периодических функций, то аналогичные вопросы исследованы слабо, чем периодических функций. В работах Б.М.Левитана, Е.А.Бредихиной, Н.П.Купцова, Я.Г.Притулы, М.Ф.Тимана, Ю.Муселиака, А.С.Джафарова и Мамедова, Ю.Х.Хасанова получены ряд необходимых и достаточных условий абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье почти - периодических функций. В случае кратных тригонометрических рядов Фурье почти-периодических функций известны лишь результаты Ю.Х.Хасанова. Поэтому продолжения исследования сходимость и суммируемость таких рядов почти-периодических функций остается актуальной и требует огромных усилий.

В работе Сафарзода Э.Х. впервые получены новые признаки абсолютной сходимости и суммируемости двойных рядов Фурье почти-периодических функций двух переменных по Безиковичу.

**Структура и основные результаты диссертации.** Диссертация Сафарзода Э.Х. состоит из списка обозначений, введения, общей характеристики работы, трёх глав, обсуждения полученных результатов, выводов,

рекомендаций по практическому использованию результатов и списка литературы, насчитывающего 125 наименований.

Во введении изложена краткая история исследуемых задач, обосновываются актуальность темы и её степень научной разработанности, а также приведены методы исследования, научная новизна и основные положения, выносимые на защиту.

**В первой главе**, состоящей из четырёх параграфов, даётся обзор изученной литературы по теме диссертационной работы и приведены основные методы исследования, а также обосновывается актуальность исследуемой проблемы.

**Вторая глава** состоит из двух параграфов. Здесь установлены необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодических функций, со спектром, имеющие единственную предельную точку в бесконечности и в нуле, т.е. исследуется ряд Фурье функции  $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$  вида

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} A(\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)}) \exp \left\{ i \left\{ \lambda_{n_1}^{(1)} x_1 + \lambda_{n_2}^{(2)} x_2 \right\} \right\},$$

где показатели Фурье  $\{\lambda_{n_j}^{(j)}\}$  удовлетворяют условиям

$$\lambda_0^{(j)} = 0; \lambda_{-n_j}^{(j)} = -\lambda_{n_j}^{(j)}; \lambda_{n_j}^{(j)} < \lambda_{n_{j+1}}^{(j+1)}; \lim_{n_j \rightarrow \infty} \lambda_{n_j}^{(j)} = \infty \quad (j = 1, 2)$$

и

$$\lambda_{-n_j}^{(j)} = -\lambda_{n_j}^{(j)}; \left| \lambda_{n_j}^{(j)} \right| > \left| \lambda_{n_{j+1}}^{(j+1)} \right|; \lim_{n_j \rightarrow \infty} \lambda_{n_j}^{(j)} = 0 \quad (j = 1, 2),$$

т.е. соответственно, когда показатели Фурье имеют единственную предельную точку в бесконечности или в нуле. Основными результатами являются теоремы 2.1.2 и 2.2.2. А теоремы 2.1.3 и 2.2.3 обеспечивают необходимые условия для сходимости рядов Фурье функций  $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ .

**Третья глава** состоит из трёх параграфов. В первом параграфе третьей главы доказаны теоремы об условиях абсолютной чезаровской суммируемости двойных рядов Фурье, со спектром, имеющий предельную точку в бесконечности, т.е. исследуется  $|C; \alpha_1, \alpha_2|$ - суммируемость при  $0 < \alpha_i \leq \frac{1}{2}$  и  $\alpha_i > \frac{1}{2}$ ,  $i = 1, 2$ . Заметим, что в качестве характеристики их структурных свойств, рассмотрим модуль непрерывности порядка  $r$  функции  $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ ,

$$\omega_{r,(j)}(f; h)_{B_2^{(2)}} = \sup_{|t| \leq h} \left\| \Delta_{h_j}^r f(x_1, x_2) \right\|_{B_2^{(2)}} \quad (h > 0),$$

где

$$\Delta_{h_j}^r f(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^r (-1)^{r-m} \binom{r}{m} f(x_1 + mh_1, x_2 + mh_2) \quad (j = 1, 2)$$

— разность  $r$ -го порядка функции  $f(x_1, x_2)$  с шагом  $h_j$  ( $j = 1, 2$ ).

**Во втором параграфе** изучены вопросы абсолютной суммируемости двойных рядов Фурье, со спектром, имеющий предельную точку в нуле. Установлены достаточные условия абсолютной суммируемости двойных рядов Фурье, когда спектр функции  $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$  имеет предельную точку в нуле, т.е., когда выполнены условия:

$$\lambda_{-n_j}^{(j)} = -\lambda_{n_j}^{(j)}; \quad \left| \lambda_{n_{j-1}}^{(j-1)} \right| > \left| \lambda_{n_j}^{(j)} \right|; \quad \lim_{n_j \rightarrow \infty} \lambda_{n_j}^{(j)} = 0 \quad (j = 1, 2),$$

$$\overline{M_{x_j}} \{f(x_1, x_2)\} = 0 \quad (j = 1, 2).$$

В этом случае в качестве структурных характеристик свойств рассматриваемой функции использован модуль усреднения  $W_r(f; H)_{B_2^{(2)}}$ .

**В третьем параграфе** доказаны теоремы об абсолютной чезаровской суммируемости двойных рядов Фурье в терминах поведения коэффициентов Фурье, которые обобщают результаты Л.Лейндлера для указанных рядов, в одномерном случае. Здесь приведены результаты для различных значений  $-1 < \alpha_1, \alpha_2 \leq \frac{1}{2}$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 > \frac{1}{2}$ . Также утверждается, что такие результаты имеют места и для  $\alpha_1 > \frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{2}$ ;  $\alpha_1 < \frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{2}$ ;  $\alpha_1 < \frac{1}{2}, \alpha_2 > \frac{1}{2}$ .

**Научная новизна исследований.** Полученные в диссертации результаты считаются новыми и заключаются в следующем:

- выявлены необходимые и достаточные признаки абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодических функций двух переменных в смысле Безиковича, когда: а) их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности; б) их спектр имеет единственную предельную точку в нуле;
- установлены достаточные условия абсолютной суммируемости двойных рядов Фурье почти-периодических функций по Безиковичу, когда: а) их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности; б) их спектр имеет единственную предельную точку в нуле;

- найдены достаточные признаки абсолютной чезаровской суммируемости двойных рядов Фурье в терминах поведения коэффициентов Фурье.

**Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов.** Полученные результаты в диссертации, в основном носят теоретический характер. Они могут быть применены в теории рядов Фурье и специальных разделах теории функций, а также эти результаты могут быть использованы в научных учреждениях и ВУЗах, где ведутся научные исследования по теории рядов Фурье и теории аппроксимации. Например, в Казанском (Приволжском) Федеральном университете, в Московском физико-техническом институте, в Таджикском государственном педагогическом университете имени С.Айни, в Башкирском государственном университете, в Таджикском национальном университете.

**Степень достоверности и апробация результатов исследования.** Все утверждения, теоремы и научные положения, сформулированные в диссертации, а также, полученные автором оценки полностью обоснованы строгими математическими доказательствами, с применением современных методов теории рядов и математического анализа. Достоверность и новизна полученных автором результатов не вызывает сомнений. Результаты диссертационной работы были доложены и получили положительные отзывы на различных международных конференциях и семинарах. Они опубликованы в научной печати, в том числе, в 6 публикациях в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан, в которых материалы диссертации отражены достаточно полно.

**Достоверность результатов диссертационной работы** обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений и вспомогательных предложений, приведенных в диссертации и подтверждается исследованиями других авторов.

**Соответствие автореферата основному содержанию диссертации.** Диссертация и автореферат оформлены в соответствии с существующими требованиями, имеют ясный и понятный научный язык. Содержание диссертации достаточно полно и подробно раскрывает постановку, методы и результаты решения рассмотренных задач. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

**Замечания по содержанию и оформлению диссертации.** В тексте диссертации иногда встречаются грамматические ошибки. На стр.15 для сравнения не приведена теорема Ю.Муселиака. В некоторых случаях, хотя пишется  $f(x_1, x_2) \in B_2^{(2)}$ , но еще указывается, что «почти-периодическая

функция». На стр.56 вместо верхнего предела ( $\bar{M}$ ), следует писать обычный предел ( $M$ ).

Указанные нами замечания легко исправимы и не влияют на общую положительную оценку результатов диссертации.

**Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным «Положением о присуждении учёных степеней».** На основании вышеизложенного считаем, что диссертационная работа «Абсолютная сходимости и суммируемость двойных рядов Фурье почти-периодических функций», представленная на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, является научно-квалификационной работой, в которой изучены проблемы абсолютной сходимости и суммируемости двойных рядов Фурье почти-периодических функций в смысле Безиковича, когда показатели Фурье имеют единственную предельную точку в бесконечности или в нуле, соответствует всем требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, а ее автор Сафарзода Эшмати Хотам заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Сафарзода Э.Х. выступил с докладом по материалам диссертации на расширенном заседании кафедры «Высшей математике» 24 февраля 2023 года, протокол № 7 .

Председатель заседания, кандидат  
физико-математических наук по специальности  
01.01.01– Вещественный, комплексный и  
функциональный анализ, доцент

Рахимов Р.

Эксперт, доктор  
физико-математических наук по специальности  
01.01.01– Вещественный, комплексный и  
функциональный анализ, профессор

Усмонов Н.

Секретарь заседания, кандидат  
физико-математических наук

Шадманов М.

Сведения об оппонировавшей организации  
Таджикский государственный  
финансово-экономический университет  
734067, г. Душанбе, ул. Нахимова, 64/14

Тел.: (99237) 231-02-01; E-mail: [tgfeu@tgfeu.tj](mailto:tgfeu@tgfeu.tj); сайт: [www.tgfeu.tj](http://www.tgfeu.tj)

Подписи Рахимова Р., Усмонова Н. и Шадманова М. заверяю

Начальник УК и СЧ ТГФЭУ



Шарипов У.А.