Институт математики им. А.Джураева
Национальная академия наук Таджикистана

УДК 511.32

На правах рукописи

Собиров Абдушукур Абдурасулович

Асимптотическая формула в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Душанбе – 2023

Работа выполнена в Институте математики им. А.Джураева
Национальной академии наук Таджикистана

Научный руководитель:	Рахмонов Зарулло Хусенович доктор физико-математических наук, академик НАН Таджикистана, профессор, директор Института математики им. А. Джураева НАНТ
Официальные оппоненты:	Пачев Урусби Мухамедович доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова Чариев Умидилла, кандидат физико–математических наук, доцент кафедры алгебры и теории чисел Таджикского государственного педагогического университета имени Садриддина Айни
Ведущее учреждение:	Таджикский национальный университет

Защита состоится 15 марта 2023 г. в 11:00 часов на заседании диссертационного совета 6D.KOA-009 при Институте математики им. А.Джураева НАН Таджикистана по адресу: 734063, г. Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Института математики имени А.Джураева НАН Таджикистана, а также на сайте http://www.mintas.tj

Автореферат разослан “___” _______ 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 6D.KOA-009,
доктор физико-математических наук Каримов О.Х.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Диссертационная работа посвящена исследованию в аддитивной теории чисел. Одной из главных задач аддитивной теории чисел является вопрос о представлении некоторой последовательности натуральных чисел суммой ограниченного количества слагаемых заданного вида. Исторически первыми примерами подобных задач стали:

- тернарная проблема Гольдбаха (1742 г.) о представлении нечётных чисел суммой трёх простых чисел, то есть, как

  $$N = p_1 + p_2 + p_3, \tag{1}$$

  и задача Эйлера (1742 г.) или бинарная проблема Гольдбаха о представлении чётных чисел в виде суммы двух простых[1];

- теорема Лагранжа о представлении натуральных чисел суммой не более четырёх квадратов натуральных чисел и её обобщение, предложенное Варингом[2] в 1770 г., которое утверждает, что последовательность, образованная фиксированной степенью n чисел натурального ряда, образует в нём базис конечного порядка $G(n)$, то есть, каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде

  $$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = N, \tag{2}$$

  где $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — натуральные числа и количество слагаемых r не превосходит фиксированной величины $G(n)$, называемой порядком базиса последовательности $\{x^n\}$, или функцией Харди;

- поставленная в начале 19-го века проблема о том, что фиксированная степень n простых чисел p при любом натуральном n образует базис конечного порядка $V(n)$ в натуральном ряде, далее постановка этой задачи появилась в работе П.Эрдёша[3]. предполагалось, что каждое достаточно большое натуральное N может быть представлено в виде

  $$p_1^n + p_2^n + \cdots + p_k^n = N, \tag{3}$$

  где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа и $k \leq V(n)$. Данная задача называется проблемой Гольдбаха – Варинга, поскольку обобщает, с одной

---

[1] Виноградов И.М., Карацуба А.А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды МИАН СССР. —1984 г. —Т. 77. —С. 4–30.

[2] Waring E. Meditationes algebraicae // —Cambridge. —1770.

[3] Erdösh P. On the easier Waring problem for powers of primes. I // Proc. of the Cambridge Phil. Soc. January —1937. —V. XXXIII. —Part I. —P. 6—12.

стороны, проблему Гольдбаха о представлении числа суммой простых чисел, а с другой стороны — проблему Варинга о представлении числа суммой степеней натуральных чисел.

- утверждение Эстермана[4] о представлении натурального числа $N > N_0$ при $k = 2$ виде
$$p_1 + p_2 + m^k = N, \tag{4}$$
где p_1 и p_2 — простые числа, m — целое число.

И.М.Виноградов[1] в 1937 году создал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, основной базой которого составляют решето Виноградова и метод сглаживания двойных сумм. Пользуясь этим методом, он впервые получил оценку линейной тригонометрической суммы, то есть, при $k = 1$ нетривиальную оценку сумму следующего вида

$$S_k(\alpha, N) = \sum_{m \leq N} \Lambda(m) e(\alpha m^k).$$

Полученная оценка в соединении с законами о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях дала возможность вывести асимптотическую формулу для числа представлений нечётного N в виде (1), что является решением *тернарной проблемы Гольдбаха о представлении нечётного натурального числа как суммы трёх простых чисел.*

Бинарная задача Гольдбаха до сих пор не решена. Лучший новейший результат, наиболее близко подходящий к доказательству этой задачы, принадлежит китайскому ученому Дж.Р.Чену[5]. В этой знаменитой работе Чен доказал, что каждое чётное число N представимо в следующем виде

$$p + P_2 = N,$$

где P_2 – простое число или произведение двух простых чисел.

Проблема Варинга в XIX веке была доказана для отдельных значений n, но реального продвижения на пути к решению этой проблемы удалось добиться только в XX-ом веке. В 1909 г. эту задачу решил Д.Гильберт[6], тем самым он установил существование функции $G(n)$.

---

[4] Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square // Proc. London math. Soc. —11(1937). —P. 501—516.

[5] Chen J.R. On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes // Kexue Tongbao. —1966. —V.17. —P. 385—386.

[6] Гильберт Д. Избранные труды // Т.1. Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики. —М.: Изд-во «Факториал» —1998 г. —С. 575.

В 1920 г. Харди и Литтлвуд[7] доказали проблему Варинга новым методом. Сначала они ввели функцию $G(n)$ и доказали, что

$$n < G(N) \leq n2^{n-1}h; \ \lim_{n\to\infty} h = 1$$

Самым же основным было то, что Харди и Литтлвуд при

$$r > (n-2)2^{n-1} + 5$$

для числа $J(N)$ представлений числа N в виде (2) находили асимптотическую формулу следующего вида

$$J(N) = \frac{(\Gamma(1+1/n))^r}{\Gamma(r/n)} N^{\frac{r}{n}-1}\mathfrak{S} + O(N^{\frac{r}{n}-1-c(n,r)}) \qquad (5)$$

где $\mathfrak{S}$– некоторый специальный (особый) ряд, сумма которого, как они показали, превосходит некоторое число $c_1(n,r)$ и $c_1(n,r) > 0$.

В 1924 г. И.М.Виноградов[1], применяя к задаче Варинга свой метод, в частности для исследования поведения тригсумм Г. Вейля вида

$$T_n(\alpha, N) = \sum_{x\leq N} e(\alpha x^n),$$

и нашёл асимптотическую формулу Харди и Литтлвуда при

$$r \geq 2[n^2(2\ln n + \ln\ln n + 3)].$$

В 1934 г. И.М.Виноградову[8] удаётся доказать, что

$$G(n) < n(6\ln n + 10),$$

далее в работах[9], ему удалось уточнить эту оценку несколько раз, и наконец, в 1959 г. доказывает следующую оценку

$$G(n) < n(2\ln n + 4\ln\ln n + 2\ln\ln\ln n + 13).$$

А.А.Карацуба[1], применяя к оценке $G(n)$ p–адический метод, нашёл более точную оценку

$$G(n) < n(2\ln n + 2\ln\ln n + 12).$$

---

[7] Hardy G.H., Littlwood J.E. Nachr. Acad. Wiss. Gettingen // Math. Phys. Kl. —1920. —P. 33—54. —IV: Math. Z. —1922. —Bd. —V.12. —P. 161—168.

[8] Виноградов И.М. Новое решение проблемы Варинга // Доклады Академии наук СССР. —1934 г. —№ 2. —С. 337—341.

[9] Виноградов И.М. К вопросу о верхней границе для $G(n)$ // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. —1959 г. —Т.23. —№ 5. —С. 637—642.

Вули[10]показал, что

$$G(n) < n \ln n + n \ln\ln n + O(1).$$

Значение $G(n)$ известно всего лишь для $k=2$ и $k=4$, то есть $G(2)=4$, $G(4)=16$, что в свою очередь доказали Лагранж и Давенпорт. Ю.В. Линник показал, что имеет место $G(3) \leq 7$, простое доказательство этой оценки дал Ватсон. Вон[11] получил асимптотическую формулу Г.Харди и Дж.Литтлвуда (5) при $r=8$ и $n=3$.

В 1938 г. Хуа Ло Ген[12], воспользовавшись методом оценки тригсумм с простыми числами И.М.Виноградова для суммы вида $S_2(\alpha, N)$, нашёл асимптотическую формулу для количества представлений натурального числа N как суммы пяти квадратов простых чисел и ему удалось доказать, что особый ряд этой формулы больше положительной константы при $N \equiv 5 \pmod{24}$. Таким образом Хуа Ло Ген показал, что любое большое натуральное число $N \equiv 5 \pmod{24}$ представимо в следующем виде

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = N. \tag{6}$$

И.М.Виноградов[1] с помощью своего метода тригонометрических сумм нашёл асимптотическую формулу в проблеме Гольдбаха-Варинга. В асимптотической формуле И.М.Виноградова вопрос положительности особого ряда $\sigma = \sigma(k; N)$, то есть вопрос о существовании функции $V(n)$ и её верхней оценки в зависимости только от значения параметра n до 2009 г. оставался открытим и, следовательно, проблема Гольдбаха – Варинга в полном объёме до самого последнего времени оставалась нерешённой.

В.Н.Чубариков[13], используя свою теорию кратных тригонометрических сумм с простыми числами[14], являющейся дальнейшим развитием метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградова, полностью решил проблему Гольдбаха-Варинга.

По теореме Дирихле, каждое α из отрезка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ можно представить в следующем виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q)=1, \qquad 1 \leq q \leq \tau, \qquad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

---

[10] Wooley T.D. Large improvements in Waring's problem // Ann of Math. —1992. —(2)135. —№ 1. — P. 131—164.

[11] Vaughan R.C. Sur le probleme de Waring pour les cubes // C.R. Acad. Sci. Paris. S'erie I —301(1985). — P. 253—255.

[12] Hua L.K. Some results in the additive prime number theory // Quart. J. Math. —1938. —V.9. —№ 1. — P. 68–80.

[13] Чубариков В.Н. К проблеме Варинга-Гольдбаха // Доклады Академии наук. —2009 г. —Т.427. — № 1. —С. 24—27.

[14] Чубариков В.Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. мат. —1985 г. —Т.49. —№ 5. —С. 1031—1067.

С помощью $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых выполняется условие $q \leq P$, $P < Q$, а с помощью $\mathfrak{m}(P)$ обозначим остальные α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно будем называть большими и малыми дугами.

После создания метода тригсумм и метода оценок тригсумм с простыми числами И.М.Виноградова решения классических аддитивных проблем (1), (2), (3), (4) и (6), а также другие аддитивные задачи сводятся к двум следующим задачам:

- исследованию поведения тригсумм Г. Вейля $S_k(\alpha, N)$ и $T_n(\alpha, N)$ в больших дугах $\mathfrak{M}(P)$;
- получение нетривиальных оценок этих сумм в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$.

Решение вышеназванных классических проблем (1), (2), (3), (4) и (6) становится гораздо труднее, если требовать, что все слагаемые почти равны, так как вместо обычных тригсумм Г. Вейля $S_k(\alpha, N)$ и $T_n(\alpha, N)$ возникают короткие тригсуммы Г. Вейля следующего вида

$$\begin{aligned} S_k(\alpha; x, y) &= \sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n) e(\alpha n^k), \\ T_n(\alpha; x, y) &= \sum_{x-y<m\leq x} e(\alpha m^n). \end{aligned}$$

Более конкретно решения классических аддитивных проблем (1), (2), (3), (4) и (6) с почти равными слагаемыми сводятся к трём следующим задачам:

- исследования поведения коротких тригсумм $S_k(\alpha; x, y)$ и $T_n(\alpha; x, y)$ в малых окрестностях центра больших дуг $\mathfrak{M}(P)$;
- нахождение нетривиальных оценок этих коротких сумм в больших дугах $\mathfrak{M}(P)$ кроме малых окрестностей их центров;
- получение нетривиальных оценок этих сумм в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$.

В диссертационной работе изучено поведение коротких линейных и кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг, найдена оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах кроме малых окрестностей их центров, прилагая эти результаты, доказана асимптотическая формула для числа представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы трёх почти равных слагаемых, два из которых — простые числа, а третье является кубом простого числа. Именно эти результаты определяют актуальность и целесообразность диссертационной работы.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Существенный вклад в исследованиях аддитивных задач, к которым относится бинарная и тернарная проблемы Гольдбаха, проблема Эстермана, проблема Варинга, проблема Гильберта-Камке и изучение тригонометрических сумм Г. Вейля, возникающие при решении этих проблем, внесли такие всемирно известные математики Д.Гилберт[6], Г.Харди и Дж.Литтлвуд[7], И.М.Виноградов[15], Хуа Ло-Кен[12], Ю.В.Линник[16], Дж.Р.Чен[5], А.А.Карацуба[17,18], Г.И.Архипов[18,19], В.Н.Чубариков[18,20], Р.Вон[21], и многие другие.

Короткие тригсуммы с простыми числами впервые изучил И.М.Виноградов[15] Для сумм следующего вида

$$S_k(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)e(\alpha n^k),$$

при $k=1$, воспользовавшись своим методом оценки тригонометрических сумм с простыми числами, показал нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$, $\tau=x^{\frac{1}{3}}$ при $y>x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$. Следует заметить, что основу этого метода наряду с «решетом Виноградова», при $k=1$ составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$J_k(\alpha;x,y,M,N)=\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{\substack{U<n\le 2N\\ x-y<mn\le x}}b_ne(\alpha(mn)^k),$$

где a_m и b_n – произвольные вещественные функции, $|a_m|\le\tau^c(m)$, $|b_n|\le\tau^c(n)$, M, N, $U\ge N$ – натуральные, $x>x_0$, y – вещественные числа, c – абсолютная постоянная, которая меняется.

Далее Хейзелгроув С.Б., В.Статулявычус, Цзя Чаохуа, Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо, Т.Жан для суммы $S_1(\alpha;x,y)$, $y\ge x^\theta$, получив нетривиальную оценку в малых дугах, и исследовав её поведение в больших дугах, получили асимптотическую формулу для тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми, т.е. для количества решений диофантова

---

[15] Виноградов И.М. Избранные труды // —М:Изд-во АН СССР. —1952 г.

[16] Линник Ю.В. О разложении больших чисел на семь кубов // Доклады Академии наук СССР. —1942 г. —№ 35. —С. 179—180.

[17] Карацуба А.А. Проблема Варинга для сравнения по модулю, равному степени простого числа // Вестник МГУ. —1962 г. —Сер.1. —№ 1. —С. 28—38.

[18] Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Теория кратных тригонометрических сумм —М.: Наука. —1987 г. —С. 368.

[19] Архипов Г.И., Чубариков В.Н. О кратных тригонометрических суммах // ДАН СССР. —1975 г. —Т.222. —№ 5. —С. 1017—1019.

[20] Чубариков В.Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. мат. —1985 г. —Т.49. —№ 5. —С. 1031—1067.

[21] Vaughan R.C. Sur le probleme de Waring pour les cubes // C.R. Acad. Sci. Paris. S'erie I —301(1985). —P. 253—255.

уравнения вида

$$N = p_1 + p_2 + p_3, \qquad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \le H, \qquad H = N^{\theta+\varepsilon}, \tag{7}$$

соответственно при

$$\frac{279}{308} + \varepsilon, \quad \frac{91}{96} + \varepsilon, \quad \frac{13}{17} + \varepsilon, \quad \frac{2}{3} + \varepsilon, \quad \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Важный результат в этой проблеме получил Цзя Чаохуа[22]. Ему удалось показать разрешимость диофантова уравнения (7) с показателем

$$\theta = \frac{7}{12} + \varepsilon.$$

Дж.Лю и Ж.Тао[23] в малых и в больших дугах получили нетривиальную оценку суммы для $S_2(\alpha; x, y)$ при условии $y \ge x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$. Далее они доказали теорему Хуа Ло Гена[12]о представлении большого натурального числа как суммы пяти квадратов простых чисел, при условии, что эти слагаемые почти равны. Им удалось показать, что большое натуральное число вида $N \equiv 5 \pmod{24}$, представимо а следующем в виде

$$N = p_1^2 + \ldots + p_5^2, \quad \left| p_j - \sqrt{\frac{N}{5}} \right| \le H, \quad H \ge N^{\frac{11}{23}+\varepsilon}.$$

Т.Жан и Дж.Лю, учитывая оценку суммы вида $S_2(\alpha, x, y)$, доказали, что большое натуральное число N при

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \le H, \quad i = 1, 2, \quad \left| p_3^2 - \frac{N}{3} \right| \le H, \quad H \ge N^{\frac{27}{32}+\varepsilon},$$

представимо в следующем виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3^2.$$

В 1938 г. Хуа[12], при исследовании задачи Варинга – Гольдбаха, показали, что все большие нечётные натуральные числа можно представить в виде суммы 9 кубов простых чисел.

Кумчев А.В.[24] получил нетривиальную оценку для суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$, $\tau = x^{k-\frac{2}{2k+3}}P^{-1}$ при условии $y \ge x^{1-\frac{1}{2k+3}+\varepsilon}$. Я.Яо[25],

---

[22] Jia Chao-hua. Three primes theorem in a short interval (VII) // Acta Mathematica Sinica. New Series — 1994. —V.10. —№ 4. —P. 369 —387.

[23] Liu J.Y., Zhan T. On sums of five almost equal prime squares // Acta Arithmetica. —1996. —V.77. — P. 369—383.

[24] Kumchev A.V. On Weyl sums over primes in short intervals // «Arithmetic in Shangrila» Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. — 2012. —V.9. Singapore: World ScientifiC. —P. 116—131.

[25] Yao Y. Sums of nine almost equal prime cubes // Frontiers of Mathematics in China. October —2014. — V.9. —Is.5. —P. 1131–1140.

используя эти оценки, обобщая теорему Хуа в задаче Варинга – Гольдбаха для кубов, показал, что любое большое нечётное натуральное число N представимо в следующем виде

$$p_1^3+p_2^3+\ldots+p_9^3=N, \qquad \left|p_i-\sqrt[3]{\frac{N}{9}}\right|\le N^{\frac{1}{3}-\frac{1}{51}+\varepsilon}.$$

В 2016 г. З.Х.Рахмонов и Ф.З.Рахмонов в своих работах[26], используя метод оценки тригсумм с простыми числами И.М.Виноградова в сочетании с методом работы[27] и результатами работ[28], нашли нетривиальную оценку следующего вида

$$S_3(\alpha;x,y)\ll\frac{y}{\mathscr{L}^B},$$

на малых дугах $\mathfrak{m}\left(\mathscr{L}^{32(B+20)}\right)$, $\tau=y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+20)}$ при условии $y\ge x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+151}$, в котором B — абсолютная постоянная. Этим же методом они получили в работе[29] нетривиальную оценку короткой кубической тригонометрической суммы с функцией Мёбиуса вида

$$\sum_{x-y<n\le x}\mu(n)e(\alpha n^3),$$

в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(B+18)})$ при $y\ge x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+944}$ и $\tau=y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}$.

Короткие тригсуммы Г. Вейля следующего вида

$$T(\alpha,x,y)=\sum_{x-y<m\le x}e(\alpha m^n),$$

для произвольного фиксированного n в больших дугах полностью исследованы в работах[30,31]. Эти результаты с соединением оценок коротких тригонометрических сумм Г. Вейля в малых дугах были использованы при получении асимптотических формул в следующих аддитивных задачах с почти равными слагаемыми:

---

[26] Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Короткие кубические суммы с простыми числами // Труды МИРАН. —2016 г. —Т.296. —С. 220—242.

[27] Рахмонов Ф.З. Оценка квадратичных тригонометрических сумм с простыми числами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. —2011 г. —№ 3. —С. 56—60.

[28] Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З., Замонов Б.М. Оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм с «длинным» сплошным суммированием // Чебышевский сборник. —2016 г. —Т.17. —вып.1. —С. 217—231.

[29] Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса // Чебышевский сборник. —2019 г. —Т.17. —№ 4(72). —С. 246—270.

[30] Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. — 2014 г. — Т.95. — вып.3. — С. 445—456.

[31] Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н., Рахимов А.О., Короткие суммы Г.Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. — 2015 г. — Т.16. — В.1(53). — С. 232—247.

- в тернарной проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми[32,31,33] о представлении натурального числа N, $N > N_0$ в виде (4), при $n = 2, 3, 4$, в простых числах p_1, p_2 и натурального m, с условиями
$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2, \qquad \left|m^n - \frac{N}{3}\right| \le H, \qquad H \ge N^{1-\theta(n)}\mathscr{L}^{c_n},$$
соответственно при
$$\theta(2) = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 2; \qquad \theta(3) = \frac{1}{6}, \quad c_3 = 3; \qquad \theta(4) = \frac{1}{12}, \quad c_4 = \frac{40}{3}.$$

- проблема Варинга с почти равными слагаемыми в случаях $n = 3, 4, 5$, точнее были найдены[31,34] асимптотические формулы для количества решений диофантова уравнения (5), с условиями
$$\left|x_i - \left(\frac{N}{2^n + 1}\right)^{\frac{1}{n}}\right| \le H, \qquad i = 1, \dots, 2^n + 1, \qquad H \ge N^{\frac{1}{n} - \theta(n) + \varepsilon};$$
где
$$\theta(3) = \frac{1}{30}, \qquad \theta(4) = \frac{1}{108}, \qquad \theta(5) = \frac{1}{340}.$$

С.Ю.Фаткина[35] доказала асимптотическую формулу для числа решений диофантова уравнения $N = p_1 + p_2 + [\sqrt{2}p_3]$ в простых числах p_1, p_2, p_3, с условиями
$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2, \quad \left|[\sqrt{2}p_3] - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad H \ge N^{\frac{5}{8}} \ln^c N.$$

П.З.Рахмонов[36,37] при $y \gg \sqrt{x}$ получил равномерную оценку по параметру c для коротких тригонометрических сумм с нецелой степенью натурального числа вида
$$S_c(\alpha; x, y) = \sum_{x - y < n \le x} e(\alpha[n^c]),$$

---

[32] Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми// Математические заметки. — 2003 г. — Т.74. — вып.4. — С. 564—572.

[33] Рахимов А.О. Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми // ДАН РТ. — 2015 г. — Т.58. — № 9. — С. 769—771.

[34] Азамов А.З., Рахмонов З.Х. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // ДАН РТ. — 2011 г. — Т.54. — № 3. — С. 165—172..

[35] Фаткина С.Ю. Об одном обобщении тернарной проблемы Гольдбаха для почти равных слагаемых // Вестник Московского Университета. серия 1. математика. механика. —2001 г. —№ 2

[36] Рахмонов П.З. Короткие суммы с нецелой степенью натурального числа [Текст] / П.З. Рахмонов // Математические заметки. —2014 г. —Т.95. —№ 5. —С. 763—774.

[37] Рахмонов П.З. Обобщенная тернарная проблема Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми [Текст] / П.З. Рахмонов // Математические заметки. —2016 г. —Т.100. —№ 3. — С. 410—420.

и доказал асимптотическую формулу в обобщении тернарной проблемы Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми о представлении достаточно большого натурального числа в виде $p_1+p_2+[n^c]=N$ в простых числах p_1, p_2 и натурального n, с условиями при

$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\le H,\quad i=1,2,\qquad \left|[n^c]-\frac{N}{3}\right|\le H,\quad H\ge N^{1-\frac{1}{2c}}\ln^2 N.$$

Цель исследования. Целью данного исследование является изучение поведения коротких тригонометрических сумм с простыми числами и использование этих сумм к задаче Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми

Задачи исследования. В соответствие с поставленной целью можно выделить следующие задачи:

1. изучение поведения коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг;
2. изучение поведения коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг;
3. исследование коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах кроме малых окрестностей их центров;
4. изучение задачи Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми, т.е. анализ проблемы о представимости большого натурального N в виде $N=p_1+p_2+p_3^3$, где p_1, p_2 и p_3 простые числа.

Объект исследования. Объектами исследования являются короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числами, короткие кубические тригонометрические суммы с простыми числами, тернарное диофантово уравнение Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми, малая окрестность центра больших дуг, большие дуги за исключением малых окрестностей их центров, малые дуги.

Предмет исследования. Предметом исследования является получение асимптотической формулы для коротких линейных и кубических тригонометрических сумм Г. Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг, нетривиальной оценки коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах за исключением малых окрестностей их центров и асимптотической формулы в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми.

Научная новизна исследования. Основные результаты полученные в работе являются новыми, и состоят в следующем:

- получена асимптотическая формула с остаточным членом для коротких линейных тригонометрических сумм Германа Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг;
- получена асимптотическая формула с остаточным членом для коротких кубических тригонометрических сумм Германа Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг;
- найдена нетривиальная оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах кроме малых окрестностей их центров;
- получена асимптотическая формула для числа представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы двух простых чисел и куба простого числа, при условии, что они почти равны.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применение в аналитической теории чисел при исследованиях проблем теории коротких тригонометрических сумм с простыми числами и аддитивных задач с простыми числами. Материалы диссертации также могут использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

Положения, выносимые на защиту.

1. теорема для коротких линейных тригонометрических сумм Германа Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг;
2. теорема для коротких кубических тригонометрических сумм Германа Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг;
3. теорема о нетривиальной оценке коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах кроме малых окрестностях их центров;
4. теорема об асимптотической формуле для числа представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы двух простых чисел и куба простого числа, при условии, что они почти равны.

Степень достоверности проведённых исследований. Обоснованность научных результатов работы обеспечивается правильными математическими доказательствами всех теорем, приведённых в работе, согласуется с трудами других авторов.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Диссертационная работа выполнена по специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел и является разделом аналитической теории чисел, указанной в пункте III параграф 3 паспорта научной специальности.

Личный вклад соискателя учёной степени. Задачи исследования были сформулированы научным руководителем работы, который оказывал консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, отражённые в разделе «Научная новизна», кроме пунктов 2 и 3 получены лично автором. Результаты пунктов 2 (параграф 1.4) и 3 (параграф 1.5) получены совместно с П.М.Фозиловой и опубликованы в [1–А, 2–А].

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- международная научная конференция «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции», посвещённая 90-летию академика АН РТ, лауреата Государственной премии имени Абуали Ибн Сино Михайлова Л.Г., Душанбе, 27-28 февраля 2018 года;
- республиканская научно-теоретическая конференция «Современные проблемы алгебры и теории чисел», посвящённая 90-летию со дня рождения профессора Гафура Бабаевича Бабаева, Душанбе, 27 ноября 2018 года;
- международная конференция «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа», посвящённая 60-летию академика Рахмонова З.Х. и члена-корреспондента Исхокова С.А., г.Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.;
- международная научная конференция «Современные проблемы математики, проблемы и их пути решения», г. Термез. Узбекистан. 21—23 октября 2020 года;
- международная конференция «Актуальные проблемы современной математики», посвящённая 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова., Душанбе, 25-26 июня 2021 года;
- семинар отдела алгебры, теории чисел и топологии (2013 – 2016 гг.) и на общеинститутский семинар (2014 – 2016 гг.) в Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан;
- семинар кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета.

Публикации по теме диссертации Основные результаты диссертации опубликованы в девяти научных работах. Работы [1–A, 2–A, 3–A, 4–A] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан. Четыре работы написаны автором лично. Четыре работы написаны в соавторстве с П.М.Фозиловой, а также с научным руководителем, которому принадлежат постановка задач. Одна работа написана совместно с П.М.Фозиловой.

Структура диссертации и объём. Диссертация состоит из списка обозначений, введения, общей характеристики работы, трёх глав, обсуждения полученных результатов, выводов, рекомендаций по практическому использования результатов, списка цитированной литературы из 138 наименований, занимает 128 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Главы разбиты на параграфы. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют двойную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер теорем, лемм или формул в данной главе.

Основная часть исследования

Материал и методы исследования. В основе исследований лежат современные методы аналитической теории чисел, а именно:

- методы L-рядов Дирихле, методы Ю.В.Линника и Н.Г.Чудакова, основанные на плотности нулей L-рядов Дирихле в критической полосе;
- метод оценки специальных тригонометрических сумм и интегралов Ван дер Корпута.
- круговой метод Г.Харди, Д.Литтлвуда и С.Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова.

Результаты исследования. Приводим краткое изложение результатов диссертационной работы.

Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы. Во введении даётся краткий исторический обзор результатов по затрагиваемым проблемам, обосновывается актуальность темы.

Первая глава состоит из двух параграфов и посвящена обзору изученной литературы по теме диссертационной работы. Приведены основные методы исследования.

Вторая глава состоит из пяти параграфов и посвящена выводу асимптотической формулы с остаточным членом для коротких линейных и кубических тригонометрических сумм Г.Вейля с простыми числами в малой окрестности центров больших дуг, а также нетривиальной оценки кубических тригонометрических сумм Г.Вейля с простыми числами в больших дугах за исключением малой окрестности их центров.

Первый параграф посвящен постановке проблем и известным результатам исследуемых в этой главе.

В втором параграфе приведены известные леммы, которые применяются в последующих параграфах.

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \qquad 1 \le q \le \tau, \qquad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \le P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

В третьем и четвёртом параграфах первой главы с использованием плотностьной теоремой для нулей L-функций Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы, являющиеся следствием теоремы о втором моменте L-функций Дирихле в критической прямой в малой окрестности

$$|\lambda| = \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{18\pi x y^2},$$

центра больших дуг $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$, для коротких линейных и кубических тригонометрических сумм Г.Вейля с простыми числами, то есть для сумм вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n) e(\alpha n^k),$$

при $k = 1$ и $k = 3$ доказаны асимптотические формулы с остаточными членами.

Теорема 2.1. *Пусть $x \ge x_0$, A и b — любые фиксированные неотрицательные числа, $1 \le q \le \mathscr{L}^b$,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1.$$

Тогда при условии $|\lambda| \le \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$ и $y \ge x^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}^{1{,}5A+0{,}25b+18}$ имеет место формула

$$S_1(\alpha; x, y) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \frac{\sin \pi\lambda y}{\pi\lambda} e\left(\lambda\left(x - \frac{y}{2}\right)\right) + O\left(y\mathscr{L}^{-A}\right).$$

Теорема 2.2. *Если $x \ge x_0$, A, b — произвольные фиксированные положительные числа, $1 \le q \le \mathscr{L}^b$, тогда при выполнении условий $\lambda \le \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$ и $y \ge x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1.5A+0.25b+18}$ имеет место асимптотическая формула:*

$$S_3(\alpha; x, y) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e\left(\frac{an^3}{q}\right) \int\limits_{x-y}^{x} e(\lambda u^k) du + O\left(y\mathscr{L}^{-A}\right).$$

В пятом параграфе, воспользовавшись плотностной теоремой для нулей L-функций Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы, как мы уже выше отметили, являющиеся следствием теоремы о втором моменте L-функций Дирихле в критической прямой, получена нетривиальная оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами $S_3(\alpha; x, y)$ в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ за исключением малой окрестности их центров при $\tau = y^5 x^{-2}\mathscr{L}_x^{-b_1}$.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия $x \ge x_0$, A, b_1, b — любые фиксированные положительные числа, $1 \le q \le \mathscr{L}^b$, $\tau = y^5 x^{-2}\mathscr{L}^{-b_1}$,*

$$\eta_3 = \frac{2}{7+4\sqrt{3}} \approx 0.1435935394, \qquad c_3 = \frac{2A + 24 + \left(\sqrt{3}-1\right) b_1}{4\sqrt{3}-3}.$$

Тогда при выполнении условий $y \ge x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}^{c_3}$ и $\lambda > \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$ справедлива следующая оценка

$$S_3(\alpha; x, y) \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Доказательство теорем 2.1, 2.2 и 2.3 основывается на дальнейшем развитии методов работы Ю.В.Линника[38] и Н.Г.Чудакова[39], в которых, соответственно, исследуются тригонометрические суммы с простыми числами и задача о попадании простых чисел в короткие интервалы, а также работ китайских математиков Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо и их учеников[40,22,23,25].

---

[38] Линник Ю.В. Новое доказательство теоремы Гольдбаха-Виноградова // Математический сборник, 1946, т. 19, вып.1, с. 3-8.

[39] Chudakov N.G. On the difference between two neighboring prime numbers // Mat. Sb., 1, 1936, 799 – 814.

[40] Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) // Chinese Ann. of Math. —1990. —V.2. —P. 138—147.

Третья глава состоит из трёх параграфов. В первом параграфе приводится постановка исследуемой задачи и формулировка основного результата. В втором параграфе доказаны оригинальные леммы, а также приведены вспомогательные известные леммы, которые применяются в при доказательстве основной теоремы 3.1.

Т.Эстерман[4] доказал асимптотическую формулу для числа решений диофантова уравнения

$$p_1 + p_2 + m^2 = N, \tag{8}$$

где p_1, p_2 — простые числа, m — натуральное число.

В работе[32] эта задача исследована с более жёсткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны, и выведена асимптотическая формула для числа решений (3.1) с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2; \quad \left|m^2 - \frac{N}{3}\right| \le H; \quad , H \ge N^{\frac{3}{4}}\mathscr{L}^3.$$

Далее в работе[30] асимптотическая формула выведена для более редкой последовательности с почти равными слагаемыми, то есть, когда в уравнении (8) квадрат натурального m заменяется на его куб при $H \ge N^{\frac{5}{6}}\mathscr{L}^{10}$. А в работе[33] асимптотическая формула выведена для ещё более редкой последовательности с почти равными слагаемыми, то есть, когда в уравнении (8) квадрат натурального m заменяется на его четвёртую степень при $H \ge N^{\frac{11}{12}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}$, .

В работе[23] Т.Жан и Дж.Лю при $H \ge N^{\frac{27}{32}+\varepsilon}$ доказана асимптотическая формула для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + p_3^2 = N, \qquad \left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2, \qquad \left|p_3^2 - \frac{N}{3}\right| \le H,$$

где p_1, p_2 и p_3 — простые числа.

Основным результатом третей главы является теорема 3.1 об асимптотической формуле для редкой, притом сложной последовательности с почти равными слагаемыми, когда в уравнении (8) квадрат натурального m заменяется на куб простого числа.

Теорема 3.1. *Допустим N — достаточно большое натуральное число, $I(N, H)$ — количество представлений N суммою двух простых чисел p_1, p_2 и куба простого числа p_3 со следующими условиями*

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \qquad i = 1, 2, \qquad \left|p^3 - \frac{N}{3}\right| \le H$$

$\rho(N,p)$–количество решений сравнения $k^3 \equiv N(\mathrm{mod} p)$, $\mathscr{L}_3 = \ln\left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$,

$$\eta_3 = \frac{2}{7+4\sqrt{3}} \approx 0.1435935394, \qquad c_3 = \frac{10476-4816\sqrt{3}}{39} \approx 54.7,$$

$$\mathfrak{S}(N) = \prod_{(p,N)=1}\left(1+\frac{\rho(N,p)-1}{(p-1)^2}+\frac{\rho(N,p)}{(p-1)^3}\right)\prod_{(p,N)=p}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Тогда при выполнении условия $H \geq N^{1-\frac{1}{15+3\eta_3}}\mathscr{L}_3^{c_3}$, имеет место асимптотическая формула:

$$I(N,H) = \frac{\mathfrak{S}(N)H^2}{3^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^3} + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^4}\right).$$

Теорема 3.1 доказывается круговым методом Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова, используя результаты предыдущих глав, а именно

- теорему 2.1 об асимптотической формуле для коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами $S_1(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг;
- теорему 2.2 об асимптотической формуле для коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами $S_3(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг;
- теорему 2.3 о нетривиальной оценке коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами $S_3(\alpha; x, y)$ в больших дугах за исключением малой окрестности их центров.

Выводы

Выводы.

Все полученные результаты диссертационной работы новые, представляют научный интерес и состоят в нижеследующем:

- получена асимптотическая формула с остаточным членом для коротких линейных тригонометрических сумм Германа Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг [3-А, 5-А, 9-А];
- получена асимптотическая формула с остаточным членом для коротких кубических тригонометрических сумм Германа Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг [6-А, 7-А, 9-А];

- найдена нетривиальная оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах кроме малых окрестностей их центров [2-А, 8-А, 9-А];
- получена асимптотическая формула для числа представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы двух простых чисел и куба простого числа, при условии, что они почти равны [4-А, 9-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Все результаты, полученные в диссертационной работе, имеют теоретический характер. Эти результаты можно применять в исследованиях по аналитической теории чисел, а именно при изучении задач по теории коротких тригсумм с простыми числами и в аддитивных задачах.

Материалы диссертационной работы могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

Публикации автора по теме диссертации

В рецензируемых изданиях из списка ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1–А]. Собиров А.А. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Доклады НАН Таджикистана. —2020 г. —т.63. —№ 5-6. —С. 279—288.

[2–А]. Собиров А.А. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Доклады НАН Таджикистана. —2020 г. —т.63. —№ 7-8. —С. 405—415.

[3–А]. Собиров А.А. Короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числами в окрестности центра больших дуг [Текст] / А.А. Собиров // Доклады НАН Таджикистана. —2021 г. —т.64. —№ 11-12. —С. 611–620.

[4–А]. Собиров А.А. Проблема Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми [Текст] / А.А. Собиров // Доклады НАН Таджикистана. —2022 г. —т.65. —№ 1-2. —С. 5–13.

В других изданиях

[5–А]. Собиров А.А. Оценка тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах [Текст] / А.А. Собиров // Современные проблемы алгебры и теории чисел, материалы научно-теоретической конференции, посвящённой 90 – летию со дня рождения профессора Бабаева Г.Б. Душанбе. 14—15 декабря —2018 г. —С. 123—131.

[6–А]. Собиров А.А. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Современные проблемы математики, проблемы и их пути решения, Материалы международной научной онлайн конференции г. Термез. Узбекистан. 21—23 октября 2020 г. —С. 18—19.

[7–А]. Собиров А.А. О поведении коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений, материалы международной конференции, посвящённой 70 —летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича. Душанбе.25—26 декабря —2020 г. —С. 254—255.

[8–А]. Собиров А.А. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах за исключением малой окрестности их центров [Текст] / А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Актуальные проблемы современной математики, материалы международной конфренции, посвящённой 80 —летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова. Душанбе. 25—26 июня —2021 г. —С. 224—226.

[9–А]. Собиров А.А. О проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми [Текст] / А.А. Собиров // Современные проблемы теории чисел и математического анализа, материалы международной конференции, посвящённой 80–летию с дня рождения доктора физика–математических наук, профессора Дододжона Исмоилова. Душанбе. 29—30 апреля —2022 г. —С. 213—220.

Институти математика ба номи А.Ҷӯраев
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

УДК 511.32

Бо ҳуқуқи дастхат

Собиров Абдушукур Абдурасулович

Формулаи асимптотӣ дар муаммои Эстерман барои кубҳои ададҳои содда бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар

Автореферати

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои
физика-математика аз рӯи ихтисоси
01.01.06 – Мантиқи математикӣ, алгебра ва назарияи ададҳо

Душанбе – 2023

Кор дар Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон таълиф шудааст

Роҳбари илмӣ:	Раҳмонов Зарулло Ҳусенович доктори илмҳои физикаю математика, узви пайвастаи АМИ Тоҷикистон, профессор, директори Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви АМИТ
Муқарризони расмӣ:	Пачев Урусби Мухамедович, доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи алгебра ва муодилаҳои дифферeсиалии МТФДА ТО-и Донишгоҳи давлатии Кабардино-Балкари ба номи Х.М.Бербеков
	Чариев Умидилла, номзади илмҳои физикаю математика, дотсенти кафедраи алгебра ва назарияи ададҳои Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи Садриддин Айнӣ
Муассисаи пешбар:	Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Ҳимояи диссертатсия санаи 15–марти соли 2023 соати 11:00 дар маҷлиси Шӯрои диссертатсионии 6D.КОА-009 дар назди Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон аз рӯи нишонаи: 734063, ш. Душанбе, к. Айнӣ 299/4. баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, ва сомонаи http://www.mintas.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат санаи “___” ________ соли 2023 тавзеъ шудааст.

Котиби илмии Шӯрои диссертатсионии 6D.КОА-009
доктори илмҳои физикаю-математика Каримов О.Х.

Тавсифномаи умумии диссертатсия

Мубрамии мавзӯи таҳқиқот. Рисолаи илмӣ ба таҳқиқот дар назарияи аддитивии ададҳо бахшида шудааст. Яке аз вазифаҳои асосии назарияи аддитивии ададҳо омӯхтани масъалаҳо оиди ифода намудани пайдарпайи ададҳои натуралӣ бо суммаи миқдорашон маҳдуди ҷамъшавандаҳои намудашон пешакӣ додашуда, мебошад. Таърихан аввалин намунаҳои онҳо, масъалаҳои зерин мебошанд:

- муамои тернарии Голдбах (1742 с.) оиди тасвири ададҳои тоқ бо воситаи суммаи се адади содда дар намуди
$$N = p_1 + p_2 + p_3, \tag{1}$$
ва масъалаи Эйлер (1742 с.) ё муамои бинарии Голдбах оиди тасвири ададҳои ҷуфт чун суммаи ду адади содда[1];
- теоремаи Лагранж дар бораи тасвири ададҳои натуралӣ чун суммаи на зиёда аз чор квадратҳои ададҳои натуралӣ ва дар соли 1770 аз тарафи Варинг[2], пешниҳод шудани ҳолати умумии он, оиди базиси охирноки тартиби $G(n)$ қатори ададҳои натуралӣ будани пайдарпайии дараҷаҳои фиксиронидашудаи n-и ададҳои натуралӣ, яъне тасвири дилхоҳ адади натуралии кифоя калони N дар намуди
$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = N, \tag{2}$$
$x_1, x_2, \ldots, x_r$-ададҳои натуралӣ ва калон набудани $r \le G(n)$, ки $G(n)$ тартиби базисии пайдарпайии $\{x^n\}$, ё функсияи Харди номида мешавад.
- муаммои дар аввали асри 19 гузошташуда, оиди барои дилхоҳ адади натуралии n базиси охирноки тартиби $V(n)$-и қатори ададҳои натуралӣ будани дараҷаҳои фиксиронидашудаи n-и ададҳои содаи p, дертар гузориши ин масъала дар кори П. Эрдёш[3] омадаст, ки ҳар як адади кифоя калони натуралии N-ро дар намуди
$$p_1^n + p_2^n + \cdots + p_k^n = N, \tag{3}$$
тасвир кардан мумкин аст, ки дар инҷо $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — ададҳои содда ва $k \le V(n)$ мебошад. Ин масъаларо муаммои Голдбах-Варинг меноманд, чунки он аз як тараф муаммои Голдбахро оиди тасвири ададҳо

---

[1] Виноградов И.М., Карацуба А.А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды МИАН СССР. —1984 г. —Т. 77. —С. 4–30.

[2] Waring E. Meditationes algebraicae // —Cambridge. —1770.

[3] Erdösh P. On the easier Waring problem for powers of primes. I // Proc. of the Cambridge Phil. Soc. January —1937. —V. XXXIII. —Part I. —P. 6—12.

чун суммаи ададҳои содда умумӣ кунад, аз тарафи дигар бошад он муаммои Варингро оиди тасвири ададҳо чун суммаи дараҷаҳои ададҳои натуралӣ умумӣ мекунад;

- тасдиқоти Эстерман[4] оиди ҳангоми $k = 2$ тасвири ададӣ натуралии $N > N_0$ дар намуди
$$p_1 + p_2 + m^k = N, \tag{4}$$
p_1 и p_2 — ададҳои натурали, m — ададӣ бутун.

Соли 1937 И.М. Виноградов[1] методи баҳодиҳии суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои соддаро сохт, кии асосаш ғалбери Виноградов ва усули суфтакунии суммаи дукарата мебошад. Бо ёрии ин метод ӯ бори аввал барои суммаҳои тригонометрии хаттӣ, яъне барои суммаи намуди

$$S_k(\alpha, N) = \sum_{m \le N} \Lambda(m) e(\alpha m^k)$$

ҳангоми $k = 1$, баҳои ғайритривалӣ гирифт. Ин баҳо дар якҷоягӣ бо теоремаҳои оиди тақсимшавии ададҳои содда дар прогресияҳои арифметикӣ, имкон доданд, ки барои миқдори тасвирҳои ададӣ тоқи N дар намуди (1) формулаи асимптотикӣ ҳосил шавад, ки ҳалли муаммои тернарии Голдбах оиди тасвири ададӣ натуралии тоқ ҳамчун суммаи се ададҳои содда мебошад.

Муамои бинарии Голдбах то ҳол ҳал нашудааст. Натиҷаи нави беҳтарини ба исботи ин муаммо наздик аст, ба Ҷ.Р.Чен[5] тааллуқ дорад. Дар ин кори машҳур Чен исбот намуд, ки ҳар як ададӣ N-и ҷуфтро дар намуди

$$p + P_2 = N,$$

тасвир намудан мумкинаст, ки дар инҷо P_2 – ададӣ содда ё ҳосили зарби ду ададҳои содда мебошад.

Дар асри XIX *муамои Варинг* барои қиматҳои алоҳидаи n исбот шуда буд, вале пешравии ҳақиқӣ дар роҳи ҳалли ин муаммо танҳо дар асри XX ба даст омад. Соли 1909 ин муаморо Гилберт[6] ҳал намуд, яъне ӯ мавҷудияти функсияи $G(n)$-ро нишон дод.

---

[4] Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square // Proc. London math. Soc. —11(1937). —P. 501—516.

[5] Chen J.R. On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes // Kexue Tongbao. —1966. —V.17. —P. 385—386.

[6] Гильберт Д. Избранные труды // Т.1. Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики. —М.: Изд-во «Факториал» —1998 г. —С. 575.

Харди ва Литтлвуд[7] дар соли 1920 исботи нави муамои Варингро доданд. Онҳо аввал функсияи $G(n)$-ро дохил намуда исбот намуданд, ки

$$n < G(N) \leq n2^{n-1}h; \ \lim_{n\to\infty} h = 1$$

Аз ҳама муҳимтарин ин буд, ки Харди ва Литтилвуд ҳангоми

$$r > (n-2)2^{n-1} + 5$$

барои $J(N)$ — миқдори тасвирҳои ададӣ N дар намуди (2), формулаи асимптотикии зеринро ёфтанд:

$$J(N) = \frac{(\Gamma(1+1/n))^r}{\Gamma(r/n)} N^{\frac{r}{n}-1}\mathfrak{S} + O(N^{\frac{r}{n}-1-c(n,r)}) \qquad (5)$$

дар инҷо $\mathfrak{S}$ – *қатори махсуси* суммааш аз ягон бузургии мусбати $c_1(n,r)$ калон мебошад.

Соли 1924 И.М. Виноградов[1] методи худро ба муаммои Варинг аз он ҷумла барои тадқиқи рафтори суммаҳои тригонометрии Г.Вейли намуди

$$T_n(\alpha, N) = \sum_{x\leq N} e(\alpha x^n),$$

татбиқ намуда исбот намуд, ки формулаи асимптотикии Харди ва Литтилвуд ҳангоми

$$r \geq 2[n^2(2\ln n + \ln\ln n + 3)]$$

ҷой дорад.

Дар соли 1934 ба ӯ[8] ба исботи муносибати

$$G(n) < n(6\ln n + 10)$$

муяссар мешавад, ки ӯ онро баъдтар якчанд маротиба беҳтар намуда, ва дар охир соли 1959 баҳои зеринро исбот намуд:[9]

$$G(n) < n(2\ln n + 4\ln\ln n + 2\ln\ln\ln n + 13).$$

А.А. Карацуба[1] барои баҳои $G(n)$ усули p–адикии худро татбиқ намуда, баҳои аниқтари зеринро бадаст овард:

$$G(n) < n(2\ln n + 2\ln\ln n + 12).$$

---

[7] Hardy G.H., Littlwood J.E. Nachr. Acad. Wiss. Gettingen // Math. Phys. Kl. —1920. —P. 33—54. —IV: Math. Z. —1922. —Bd. —V.12. —P. 161—168.

[8] Виноградов И.М. Новое решение проблемы Варинга // Доклады Академии наук СССР. —1934 г. — № 2. —С. 337—341.

[9] Виноградов И.М. К вопросу о верхней границе для $G(n)$ // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. —1959 г. —Т.23. —№ 5. —С. 637—642.

Вули[10] нишон дод, ки

$$G(n) < n \ln n + n \ln \ln \ln n + O(1).$$

Қимати $G(n)$ танҳо барои $k = 2$ ва $k = 4$ маълум мебощад, яъне $G(2) = 4$, $G(4) = 16$, ки онҳоро мувофиқан Лагранж ва Давенпорт исбот намудаанд. Ю.В. Линник нишон дод, ки $G(3) \leq 7$, ва исботи оддии ин баҳоро Ватсон додааст. Вон[11] формулаи асимптотикии Г.Харди ва Дж.Литтлвиуд (5)-ро ҳангоми $r = 8$ ва $n = 3$ гирифт.

Соли 1938 Хуа Ло Ген[12] барои суммаҳои намуди $S_2(\alpha, N)$ методи баҳодии суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои соддаи И.М.Виноградов истифода бурда, барои миқдори тасвирҳои адади кифоя калони натуралии N чун суммаи панҷ квадратҳои ададҳои содда формулаи асимптотикиро ёфт ва исбот намуд, ки ҳангоми $N \equiv 5 \pmod{24}$ қатори махсуси ин формула аз доимии мутлақи мусбат калонтар аст. Ҳамин тариқ Хуа Логен исбот намиуд, ки дилхоҳ адади калони натуралии $N \equiv 5 \pmod{24}$-ро дар намуди зерин тасвир намудан мумкин аст.

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = N. \tag{6}$$

И.М.Виноградов[1] бо ёрии методи сумаҳои тригонометрии худ дар муамоҳои Голдбах-Варинг формулаи асимптотиро ҳосил намуд. Дар формулаи асимптотикии И.М.Виноградов масъалаи мусбат будани қатори махсуси $\sigma = \sigma(k; N)$, яъне масъалаи мавҷудияти функсияи $V(n)$ ва баҳои болоии он вобаста аз қимати параметри n то соли 2009 кушода буд, яъне муаммои Голдбах-Варинг то ин вақт ба пуррагӣ ҳал нашуда буд.

В.Н.Чубариков[13] бо истифода аз назарияи сумаҳои тригонометрии каратӣ бо ададҳои соддаи худ[14], ки рушди минбаъдаи методи баҳодиҳии сумаҳои тригонометри бо ададҳои содаи И.М. Виноградов мебошад, муамои Голдбах Варингро ба пураги ҳал намуд.

Мувофиқи теоремаи Дирихле оиди наздиккунии ададҳои ҳақиқи бо ададҳои ратсионалӣ, ки ҳар як α аз порчаи $[-æ, 1 - æ]$, $æ\tau = 1$-ро дар намуди зерин тасвир кардан мумкин аст:

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \qquad 1 \leq q \leq \tau, \qquad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

---

[10] Wooley T.D. Large improvements in Waring's problem // Ann of Math. —1992. —(2)135. —№ 1. — P. 131—164.

[11] Vaughan R.C. Sur le probleme de Waring pour les cubes // C.R. Acad. Sci. Paris. S'erie I —301(1985). — P. 253—255.

[12] Hua L.K. Some results in the additive prime number theory // Quart. J. Math. —1938. —V.9. —№ 1. — P. 68–80.

[13] Чубариков В.Н. К проблеме Варинга-Гольдбаха // Доклады Академии наук. —2009 г. —Т.427. — № 1. —С. 24—27.

[14] Чубариков В.Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. мат. —1985 г. —Т.49. —№ 5. —С. 1031—1067.

Бо воситаи $\mathfrak{M}(P)$ ҳамон ададҳои α ишора мекунем, ки барои онҳо $q \leq P$, $P < Q$ ва бо воситаи $\mathfrak{m}(P)$ α -ҳои боқимондаро ишора мекунем. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ мувофиқан камонҳои калон ва хурд номида мешаванд.

Пас аз сохтани методи суммаҳои тригонометрӣ ва методи баҳодиҳии сумаҳои тригонометрӣ бо ададҳои соддаи И.М. Виноградов ҳалли муамоҳои адитивии классикии (1), (2), (3), (4) ва (6), инчунин дигар масъалаҳои аддитиви ба ду масъалаи зерин оварда мешаванд:

- тадқиқи рафтори суммаҳои тригонометрии Г. Вейли $S_k(\alpha, N)$ и $T_n(\alpha, N)$ дар камонҳои калони $\mathfrak{M}(P)$;
- гирифтани баҳои ғайритривиалии ин суммаҳо дар камонҳои хурди $\mathfrak{m}(P)$.

Ҳалли муамоҳои класикии дар боло гуфташудаи (1), (2), (3), (4) ва (6) дар ҳолати қариб баробар будани ҳамаи ҷамъ шавандаҳо хеле мушкил мешаванд, чунки баҷои суммаҳои тригонометрии Г.Вейли оддии $S_k(\alpha, N)$ ва $T_n(\alpha, N)$ сумаҳои кӯтоҳи тригонометрии Г. Вейли намудҳои зерин пайдо мешаванд:

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n)e(\alpha n^k),$$
$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e(\alpha m^n).$$

Аниқтар ҳалли муамоҳои аддитивии классикии (1), (2), (3), (4) ва (6) бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар ба се масъалаи зерин оварда мешавад:

- тадқиқи рафтори сумаҳои кӯтоҳи тригонометрии $S_k(\alpha; x, y)$ ва $T_n(\alpha; x, y)$ дар атрофи хурди марказҳои камонҳои калони $\mathfrak{M}(P)$;
- гирифтани баҳои ғайритривиалии ин суммаҳои кӯтоҳ дар камонҳои дар камонҳои калони $\mathfrak{M}(P)$ ба ғайр аз атрофҳои хурди марказҳои онҳо;
- гирифтани баҳои ғайритривиалии ин суммаҳо дар камонҳои хурди $\mathfrak{m}(P)$.

Дар рисолаи илмӣ рафтори суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи хаттӣ ва кубӣ бо ададҳои содда дар атрофи хурди марказҳои камонҳои калон омӯхта шуда, баҳои суммаҳои кӯтоҳи кубии тригонометрӣ бо ададҳои содда дар камонҳои калон ба ғайр аз атрофҳои хурди марказҳои онҳо гирифта шуда, формулаи асимптотӣ барои миқдори тасвирҳои адади кифоя калони натуралӣ чун се ҷамъшавандаи қариб баробари дутоашон ададҳои содда ва сеюмаш куби адади содда буда, исбот карда шудааст. Маҳс ин натиҷаҳои оварда шуда муҳимият ва мақсаднокии рисолаи диссертатсиониро муайян мекунад.

Дараҷаи илмии муамоҳои омӯхташаванда. Саҳми асосиро дар тадқиқотҳои масъалаҳои аддитивӣ ба монанди муаммоҳои бинарию тернарии Голдбах, муаммои Эстерман, муаммои Варинг, муаммои Гилберт-Камке ва омӯзиши сумаҳои тригонометрии Г.Вейл, ки ҳангоми ҳалли ин муаммоҳо пайдо мешаванд, математикони дар ҷаҳон машҳур Д.Гилберт[6], Г.Харди и Дж.Литллвуд[7], И.М.Виноградов[15], Хуа Ло-Кен[12], Ю.В.Линник[16], Дж.Р.Чен[5], А.А.Карацуба[17,18], Г.И.Архипов[18,19], В.Н.Чубариков[18,20], Р.Вон[21] ва дигарон гузоштанд.

Суммаҳои кӯтоҳи тригонометрӣ бо ададҳои соддаро бори аввал И.М.Виноградов[15] омӯхт. Барои суммаи намуди

$$S_k(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)e(\alpha n^k),$$

ҳангоми $k=1$, методи баҳодиҳии суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои соддаи худро истифода бурда, дар камонҳои хурди $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$, $\tau=x^{\frac{1}{3}}$ ҳангоми $y>x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$ баҳои ғайритривиалӣ гирифт. Қайд кардан ҷоиз аст, ки асоси ин методро дар қатори «ғалбери Виноградов» ҳангоми $k=1$ будан, баҳои суммаҳои дукаратаи кӯтоҳи тригонометрии намуди

$$J_k(\alpha;x,y,M,N)=\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{\substack{U<n\le 2N\\ x-y<mn\le x}}b_ne(\alpha(mn)^k),$$

a_m и b_n – дилхоҳ функсиҳои ҳақиқӣ, $|a_m|\le\tau^c(m)$, $|b_n|\le\tau^c(n)$, M, N, $U\ge N$ – ададҳои натуралӣ, $x>x_0$, y – ададҳои ҳақиқӣ, c – доимии мутлақи ивазшаванда.

Баъдтар Хейзелгроув С.Б., В.Статулявычус , Цзя Чаохуа , Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо, Т.Жан барои суммаи $S_1(\alpha;x,y)$, $y\ge x^\theta$ дар камонҳои хурд баҳои ғайритривиалӣ гирифта, рафтори онҳоро дар камонҳои калон тадқиқ намуда, дар муаммои тернарии Голдбах бо ҷамшавандаҳои қариб баробар, яъне барои миқдори ҳалҳои муодилаи диофантии

$$N=p_1+p_2+p_3,\qquad \left|p_i-\frac{N}{3}\right|\le H,\qquad H=N^{\theta+\varepsilon},\tag{7}$$

---

[15] Виноградов И.М. Избранные труды // —М:Изд-во АН СССР. —1952 г.

[16] Линник Ю.В. О разложении больших чисел на семь кубов // Доклады Академии наук СССР. —1942 г. —№ 35. —С. 179—180.

[17] Карацуба А.А. Проблема Варинга для сравнения по модулю, равному степени простого числа // Вестник МГУ. —1962 г. —Сер.1. —№ 1. —С. 28—38.

[18] Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Теория кратных тригонометрических сумм —М.: Наука. —1987 г. —С. 368.

[19] Архипов Г.И., Чубариков В.Н. О кратных тригонометрических суммах // ДАН СССР. —1975 г. —Т.222. —№ 5. —С. 1017—1019.

[20] Чубариков В.Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. мат. —1985 г. —Т.49. —№ 5. —С. 1031—1067.

[21] Vaughan R.C. Sur le probleme de Waring pour les cubes // C.R. Acad. Sci. Paris. S'erie I —301(1985). —P. 253—255.

мувофиқан ҳангоми

$$\frac{279}{308}+\varepsilon, \quad \frac{91}{96}+\varepsilon, \quad \frac{13}{17}+\varepsilon, \quad \frac{2}{3}+\varepsilon, \quad \frac{5}{8}+\varepsilon.$$

формулаи асимптотиро исбот намуданд.

Дар ин муаммо натиҷаи муҳимро Цзя Чаохуа[22] ба даст овард. Ба ӯ нишон додани ҳалшаванда будани муодилаи диофантии (7) бо нишондиҳандаи

$$\theta=\frac{7}{12}+\varepsilon$$

муяссар гардид.

Дж.Лю ва Ж.Тао[23] дар камонҳои хурд ва калон барои суммаи $S_2(\alpha; x, y)$ ҳангоми $y \geq x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$ баҳои ғайритривиалӣ ҳосил намуданд. Баъдтар онҳо теоремаи Хуа Ло Генро[12] оиди тасвири адади натуралии кифоя калон ҳамчун суммаи квадратҳои панҷ аддадҳои содда, бо шарте, ки ин ҷамъшавандаҳо қариб баробар мебошанд, исбот намуданд. Онҳо нишон доданд, ки адади кифоя калони натуралии намуди $N \equiv 5 \pmod{24}$-ро дар намуди

$$N=p_1^2+\ldots+p_5^2, \quad \left|p_j-\sqrt{\frac{N}{5}}\right| \leq H, \quad H \geq N^{\frac{11}{23}+\varepsilon}.$$

тасвир кардан мумкин аст.

Т.Жан ва Дж.Лю, бо назардошти баҳои суммаи $S_2(\alpha, x, y)$ исбот намуданд, ки адади калони натуралии N-ро ҳангоми иҷрошавии шарти

$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right| \leq H, \quad i=1,2, \quad \left|p_3^2-\frac{N}{3}\right| \leq H, \quad H \geq N^{\frac{27}{32}+\varepsilon}.$$

дар намуди

$$N=p_1+p_2+p_3^2$$

ифода намудан мумкин аст.

Соли 1938 Хуа[12], ҳангоми тадқиқи муаммои Варинг – Гольдбах нишон доданд, ки ҳамаи ададҳои натуралии тоқи калонро дар намуди суммаи нӯҳ кубҳои ададҳои содда тасвир намудан мумкин аст.

А.В.Кумчев[24] барои суммаи $S_k(\alpha; x, y)$ дар камонҳои хурди $\mathfrak{m}(P)$, $\tau = x^{k-\frac{2}{2k+3}}P^{-1}$ ҳангоми $y \geq x^{1-\frac{1}{2k+3}+\varepsilon}$ баҳои ғайритривиалӣ гирифт. Я.Яо[25] бо

---

[22] Jia Chao-hua. Three primes theorem in a short interval (VII) // Acta Mathematica Sinica. New Series — 1994. —V.10. —№ 4. —P. 369 —387.

[23] Liu J.Y., Zhan T. On sums of five almost equal prime squares // Acta Arithmetica. —1996. —V.77. — P. 369—383.

[24] Kumchev A.V. On Weyl sums over primes in short intervals // «Arithmetic in Shangrila» Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. — 2012. —V.9. Singapore: World ScientifiC. —P. 116—131.

[25] Yao Y. Sums of nine almost equal prime cubes // Frontiers of Mathematics in China. October —2014. — V.9. —Is.5. —P. 1131–1140.

истифода аз ин баҳо теоремаи Хуаро дар муаммои Варинг – Голдбах барои кубҳо умумӣ намуда, нишон дод, ки дилхоҳ адади калони натуралии тоқи N-ро дар намуди

$$p_1^3 + p_2^3 + \ldots + p_9^3 = N, \qquad \left| p_i - \sqrt[3]{\frac{N}{9}} \right| \le N^{\frac13 - \frac{1}{51} + \varepsilon}$$

тасвир намудан мумкин аст.

Соли 2016 З.Х.Раҳмонов ва Ф.З.Раҳмонов[26] бо истифода аз методи баҳодиҳии суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои соддаи И.М.Виноградов бо якҷоягии усули кори Ф.З.Рахмонов[27] ва натиҷаҳои кори[28] баҳои ғайритривиалии

$$S_3(\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}^B},$$

-ро дар камонҳои хурди $\mathfrak{m}\left(\mathscr{L}^{32(B+20)}\right)$, $\tau = y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+20)}$ ҳангоми $y \ge x^{\frac45}\mathscr{L}^{8B+151}$, будан, ки дар инҷо B — доимии мутлақ мебошад, ба даст овcovered. Боҳамин усул онҳо дар кори[29] баҳои ғайритривиалии суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии кубиро бо функсияи Мёбиуси намуди

$$\sum_{x-y<n\le x} \mu(n)e(\alpha n^3)$$

дар камонҳои хурди $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(B+18)})$ ҳангоми $y \ge x^{\frac45}\mathscr{L}^{8B+944}$ ва $\tau = y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}$ ба даст оварданд.

Суммаи кӯтоҳи тригонометрии Г.Вейли намуди

$$T(\alpha, x, y) = \sum_{x-y<m\le x} e(\alpha m^n),$$

барои ихтиёрӣ n-ҳои фиксиронидашуда дар камонҳои калон дар корҳои[30,31] ба пуррагӣ тадқиқ шудаанд. Ин натиҷаҳо бо якҷоягии баҳоҳои суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии Г.Вейл дар камонҳои хурд ҳангоми ба даст овардани формулаҳои асимптотӣ дар масъалаҳои аддитивӣ бо ҷамшавандаҳои қариб баробари зерин татбиқ шуда буданд:

---

[26] Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Короткие кубические суммы с простыми числами // Труды МИРАН. —2016 г. —Т.296. —С. 220—242.

[27] Рахмонов Ф.З. Оценка квадратичных тригонометрических сумм с простыми числами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. —2011 г. —№ 3. —С. 56—60.

[28] Рахмонов З.Х.,Рахмонов Ф.З., Замонов Б.М. Оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм с «длинным» сплошным суммированием // Чебышевский сборник. —2016 г. —Т.17. —вып.1. —С. 217—231.

[29] Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса // Чебышевский сборник. —2019 г. —Т.17. —№ 4(72). —С. 246—270.

[30] Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. — 2014 г. — Т.95. — вып.3. — С. 445—456.

[31] Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н., Рахимов А.О., Короткие суммы Г.Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. — 2015 г. — Т.16. — В.1(53). — С. 232—247.

- дар муаммои тернарии Эстерман бо ҷамшавандаҳои қариб баробар[32,31,33] оиди тасвири адади натуралии N, $N > N_0$ дар намуди (4), ҳангоми $n = 2, 3, 4$, p_1, p_2-ададҳои содда ва адади натуралии m бо шартҳои

  $$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H, \quad i = 1, 2, \qquad \left|m^n - \frac{N}{3}\right| \leq H, \qquad H \geq N^{1-\theta(n)}\mathscr{L}^{c_n},$$

  мувофиқан ҳангоми

  $$\theta(2) = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 2; \qquad \theta(3) = \frac{1}{6}, \quad c_3 = 3; \qquad \theta(4) = \frac{1}{12}, \quad c_4 = \frac{40}{3}.$$

- муаммои Варинг бо ҷамшавандаҳои қариб баробар ҳангоми $n = 3, 4, 5$, аниқтараш дар корҳои[31,34] формулаҳои асимптотӣ барои миқдори ҳалҳои муодилаи диофантии (5), бо шартҳои

  $$\left|x_i - \left(\frac{N}{2^n + 1}\right)^{\frac{1}{n}}\right| \leq H, \qquad i = 1, \ldots, 2^n + 1, \qquad H \geq N^{\frac{1}{n} - \theta(n) + \varepsilon};$$

  ки дар инҷо

  $$\theta(3) = \frac{1}{30}, \qquad \theta(4) = \frac{1}{108}, \qquad \theta(5) = \frac{1}{340}.$$

С.Ю.Фаткина[35] формулаи асимптотиро барои миқдори ҳалҳои муодилаи диофантии $N = p_1 + p_2 + [\sqrt{2}p_3]$ бо ададҳои соддаи p_1, p_2, p_3, бо шартҳои

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left|[\sqrt{2}p_3] - \frac{N}{3}\right| \leq H, \quad H \geq N^{\frac{5}{8}} \ln^c N.$$

исбот намуд.

П.З.Рахмонов[36,37] ҳангоми $y \gg \sqrt{x}$ баҳои мунтазамро аз рӯи параметри c барои суммаҳои кӯтоҳи тригонометрӣ бо дараҷаҳои ғайрибутуни адади

---

[32] Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми// Матаматические заметки. — 2003 г. — Т.74. — вып.4. — С. 564—572.

[33] Рахимов А.О. Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми // ДАН РТ. — 2015 г. — Т.58. — № 9. — С. 769—771.

[34] Азамов А.З., Рахмонов З.Х. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // ДАН РТ. — 2011 г. — Т.54. — № 3. — С. 165—172..

[35] Фаткина С.Ю. Об одном обобщении тернарной проблемы Гольдбаха для почти равных слагаемых // Вестник Московского Университета. серия 1. математика. механика. —2001 г. —№ 2

[36] Рахмонов П.З. Короткие суммы с нецелой степенью натурального числа [Текст] / П.З. Рахмонов // Математические заметки. —2014 г. —Т.95. —№ 5. —С. 763—774.

[37] Рахмонов П.З. Обобщенная тернарная проблема Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми [Текст] / П.З. Рахмонов // Математические заметки. —2016 г. —Т.100. —№ 3. — С. 410—420.

натуралии намуди

$$S_c(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} e(\alpha[n^c]),$$

ҳосил намуда формулаи асимптотиро бо умумикунии муаммои тернарии Эстерман барои дараҷаҳои ғайрибутун бо ҷамшавандаҳои қариб баробар оиди тасвири адади натуралии кифоя калони намуди $p_1 + p_2 + [n^c] = N$ бо ададҳои соддаи p_1, p_2 ва аддади натуралии n, бо шартҳои

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2, \quad \left|[n^c] - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad H \ge N^{1-\frac{1}{2c}} \ln^2 N$$

исбот намуд.

Мақсади таҳқиқот. Мақсади таҳқиқот омӯзиши рафтори суммаҳои кӯтоҳи тригонометрӣ бо ададҳои содда ва татбиқи онҳо ба муаммои Эстерман барои кубҳои ададҳои содда бо ҷамшавандаҳои қариб баробар мебошад.

Вазифаҳои таҳқиқот. Дар асоси мақсади гузошташуда масъалаҳои зерин ҷудо карда шудаанд:

1. омӯзиши рафтори сумаҳои кӯтоҳи тригонометрии хаттӣ бо ададҳои содда дар атрофи хурди марказҳои камонҳои калон;
2. омӯзиши рафтори сумаҳои кӯтоҳи тригонометрии кубӣ бо ададҳои содда дар атрофи хурди марказҳои камонҳои калон;
3. тадқиқи суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии кубӣ бо ададҳои содда дар камонҳои калон ба ғайр аз атрофи хурди марказҳои онҳо;
4. омӯзиши муаммои Эстерман барои кубҳои ададҳои содда бо ҷамшавандаҳои қариб баробар, яъне таҳлили муаммо оиди тасвиршавандагии адади калони натуралии N дар намуди $N = p_1 + p_2 + p_3^3$, ки дар ин ҷо p_1, p_2 ва p_3 ададҳои содда мебошанд.

Объект таҳқиқот. Сумаҳои кӯтоҳи тригонометрии хаттӣ бо ададҳои содда, сумаҳои кӯтоҳи тригонометрии кубӣ бо ададҳои содда, муодилаи диофантии тернарии Эстерман барои кубҳои ададҳои содда бо ҷамшавандаҳои қариб баробар, атрофи хурди марказҳои камонҳои калон, камонҳои калон ба ғайр аз атрофи хурди марказҳои онҳо, камонҳои хурд.

Предмет таҳқиқот. Ҳосил намудани формулаи асимптотӣ барои сумаҳои кӯтоҳи тригонометрии хаттӣ ва кубӣ бо ададҳои содда дар атрофҳои хурди марказҳои камонҳои калон, баҳои ғайритривиалии суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии кубӣ бо ададҳои содда дар камонҳои калон ба ғайр аз атрофи марказҳои онҳо ва формулаи асимптотӣ дар муаммои Эстерман барои кубҳои ададҳои содда бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар

Навгонии илмии таҳқиқот. Ҳамаи натиҷаҳои асосии гирифташуда, нав буда, аз инҳо иборатанд:

- формулаи асимптотӣ бо аъзои боқимонда барои суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии хаттии Г.Вейл бо ададҳои содда дар атрофи хурди марказҳои камонҳои калон гирифта шудааст;
- формулаи асимптотӣ бо аъзоҳои боқимонда барои суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии кубии Г.Вейл бо ададҳои содда дар атрофи хурди марказҳои камонҳои калон ба даст оварда шудааст;
- баҳои ғайритривиалии суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии кубӣ бо ададҳои содда дар камонҳои калон ба ғайр аз атрофи марказҳои онҳо ёфта шуда аст;
- формулаи асимптотӣ барои миқдори тасвири ададҳои натуралии кифоя калон дар намуди суммаи ду адади содда ва куби адади содда бо шарти қариб баробар будани онҳо ба даст оварда шудааст.

Аҳамияти назариявӣ ва илмию амалии таҳқиқот. Натиҷаҳои дар диссертатсия ба даст омада характери назариявӣ доранд. Онҳоро дар назарияи аналитикии ададҳо ҳангоми тадқиқи муаммоҳои назарияи суммаҳои кӯтоҳи тригонометрӣ бо ададҳои содда ва масъалаҳои аддитивӣ бо ададҳои содда татбиқ намудан мумкин аст. Маводи диссертатсияро инчунин ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯён ва магистрони ихтисоси математикаи муассисаҳои олии касбӣ истифода бурдан мумкин аст.

Нуқтаҳои ба ҳимоя пешниҳодшаванда.

1. теорема барои суммаиҳои кӯтоҳи тригонометрии хаттии Г.Вейл бо ададҳои содда дар атрофҳои хурди марказҳои камонҳои калон;
2. теорема барои суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии кубии Г.Вейл бо ададҳои содда дар атрофҳои хурди марказҳои камонҳои калон;
3. теорема оиди баҳои ғайритривиалии суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии кубӣ бо ададҳои содда дар камонҳои калон ба ғайр аз атрофҳои хурди марказҳои онҳо;
4. теорема оиди формулаи асимптотики барои миқдори тасвири ададҳои натуралии кифоя калон дар намуди суммаи ду адади содда ва куби адади содда бо шарти қариб баробар будани онҳо.

Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳо. Эътимоднокии натиҷаҳои корӣ диссертатсионӣ бо исботҳои дурусти математикии ҳамаи теоремаҳо, ки дар диссертатсия оварда шудааст, таъмин карда шуда, бо таҳқиқотҳои муаллифони дигар асоснок карда мешаванд.

Мутобиқати диссертатсия бо шиносномаи ихтисоси илмӣ. Кори диссертатсионӣ аз рӯи ихтисоси 01.01.06- мантиқи математикӣ, алгебра ва назарияи ададҳо навишта шуда ва қисми назарияи аналитикии ададҳо, ки дар банди III-и параграфи 3 дар шиносномаи илмии ихтисос нишон дода шудааст, мебошад.

Саҳми шахсии довталаби дарёфти дараҷаи илмӣ дар таҳқиқот. Масъалаҳои таҳқиқот аз ҷониби роҳбари илмӣ, ки кӯмаки машваратӣ расонидааст, гузошта шудаанд. Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ, ки дар қисмати "Навгонии илмӣ"дарҷ гардидаанд ба ғайр аз қисмҳои 2 ва 3 ба муаллиф тааллуқ дорад. Натиҷаҳои қисмҳои 2(параграфи 1.4) ва 3(параграфи 1.5) якҷоя бо Фозилова П.М. ба даст омадаанд ва дар [1—А, 2—А] чоп шудаанд.

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар конфренсияҳо ва семинарҳои зерин маърӯза карда шудаанд:

- Конфренсияи илмии байналмилалии «Муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегралӣ бо коэффисентҳои сингулярӣ ва масъалаҳои канории назарияи функсияҳо» бахшида ба 90—солагии академики Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон, барандаи ҷоизаи давлатии ба номи Абӯали Ибни Сино Михайлов Л.Г., Душанбе, 27—28 феврали соли 2018;
- Конфренсияи илмии назариявии ҷумҳуриявии «Муаммоҳои муосири алгебра ва назарияи ададҳо» бахшида ба 90—солагии профессор Бобоев Г.Б., Душанбе, 27 ноябри соли 2018;
- Конфренсияи байналмилалии «Муаммоҳои муосир ва татбиқҳои алгебра, назарияи ададҳо ва таҳлили математикӣ» бахшида ба 60— солагии академик Раҳмонов З.Ҳ. ва узви вобастаи АИ ҶТ Исҳоқов С.А., Душанбе, 13—14 декабри соли 2019;
- Конфренсияи илмии байналмилалии «Муаммоҳои муосири математика: муаммоҳо ва роҳҳои ҳалли онҳо» ш. Термез. Ӯзбекистон. 21—23 октябри соли 2020;
- Конфренсияи байналмилалии «Муаммоҳои мубрами математикаи муосир» бахшида ба 80—солагии доктори илмҳои физикаю математика, профессор Собиров Т., Душанбе, 25—26 июни соли 2021;
- Семинари шӯбаи алгебра, назарияи ададҳо ва топология (2017—2022) ва семинари умумиинститутӣ (2017—2022) дар Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви АМИ Тоҷикистон;
- Семинари кафедраи «Алгебра ва назарияи ададҳо» дар Донишгоҳи миллии Тоҷикистон.

Интишорот аз рӯи мавзӯи диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар 9 мақолаҳои илмӣ чоп шудаанд. Мақолаҳои [1—А, 2—А, 3—А, 4—А] дар маҷалаҳои тақризшаванда аз рӯихатти КОА-и назди президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон нашр шудааст. Чор мақоларо худи муалиф шахсан навишта аст. Чор мақолаи илмӣ бо ҳаммуаллифии Фозилова П.М. ва инчунин бо роҳбари илмӣ, ки гузориши масъала тааллуқ дорад, навишта шудааст. Як мақолаи илмии дигар бо ҳаммуаллифии Фозилова П.М. навишта шудааст.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз рӯйхати ишораҳо, муқаддима, тавсифи умумии кор, се боб, муҳокимаи натиҷаҳои бадаст овардашуда, хулосаҳо, тавсияҳо оиди истифодабарии натиҷаҳо, феҳристи адабиёти истифодашуда, ки аз 138 номгӯ иборат аст, ҳаҷми умумии он 128 саҳифаи чопиро ташкил карда, дар барномаи LaTeX ҳуруфчинӣ шудааст. Бобҳо ба параграфҳо тақсим шудаанд. Барои осонии кор дар рисолаи диссертатсионӣ теоремаҳо, леммаҳо ва формулаҳо рақамгузорӣ шудаанд. Онҳо рақамгузории дукарата доранд, ки рақами аввал бо рақами боб мувофиқ буда, рақами дуюм рақами теоремаҳо, леммаҳо ё формулаҳоро дар боби мазкур нишон медиҳад.

Қисми асосии таҳқиқот

Мавод ва методҳои тахқиқот. Дар асоси тахқиқот методҳои муосири назарияи аналитикии ададҳо ҷой дорад, яъне:

- методҳои L-қаторҳои Дирихле, методҳои Ю.В.Линник ва Н.Г.Чудаков ки ба зиччии нулҳои L-қаторҳои Дирихле дар тасмаи критикӣ;
- методи баҳодиҳии суммаҳои тригонометрии махсус ва интегралҳои Вандер Корпут;
- методи доиравии Г.Харди, Д.Литтлвуд ва С.Рамануҷуан дар шакли суммаҳои тригонометрии И.М.Виноградов.

Натиҷаҳои тадқиқот. Натиҷаҳои мухтасари кори диссертатсиониро баён мекунем.

Рисолаи диссертатсионӣ аз муқаддима, се боб ва рӯйхати адабиёт иборат мебошад. Дар муқадима таърихи мухтасари натиҷаҳо оид ба муаммоҳои муҳокимашуда оварда шуда, мубрамияти мавзӯъ асоснок карда шудааст.

Боби якум аз 2 парграф иборат буда, ба баррасии адабиёти омӯхташуда оид ба мавзӯъи кори диссертатсионӣ бахшида шудааст. Методҳои асосии таҳқиқот оварда шудаанд.

Боби дуюм аз 5 параграф иборат буда, барои ҳосил намудани формулаи асимптотӣ бо аъзои боқимонда барои сумаҳои кӯтоҳи тригонометрии хаттӣ ва кубии Г.Вейл бо ададҳои содда дар атрофи хурди марказҳои камонҳои калон, инчунин баҳои ғайритривиалии суммаҳои тригонометрии кубии Г.Вейл бо ададҳои содда дар камонҳои калон ба ғайр аз атрофи хурди марказҳои онҳо бахшида шудааст.

Параграфи якум ба гузориши муаммо ва натиҷаҳои маълуми дар ин боб таҳқиқшаванда бахшида шудааст.

Дар параграфи дуюм леммаҳои маълум, ки дар параграфҳои оянда истифода мешаванд, оварда шудаанд.

Мувофиқи теоремаи Дирихле оиди наздиккунии ададҳои ҳақиқӣ бо касрҳои ратсионалӣ, ҳар як α аз порчаи $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ дар намуди

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \qquad 1 \leq q \leq \tau, \qquad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

тасвиршаванда аст. Бо воситаи $\mathfrak{M}(P)$ ҳамон ададҳои α, ки барои онҳо $q \leq P$ ва бо воситаи $\mathfrak{m}(P)$ қисми боқимондаи α-ҳоро ишора мекунем. $\mathfrak{M}(P)$ ва $\mathfrak{m}(P)$ мувофиқан камонҳои калон ва хурд номида мешаванд.

Дар параграфҳои 3-юм ва 4-уми боби якум бо истифода аз теоремаи зичӣ барои нулҳои L- функсияи Дирихле дар росткунҷаҳои танги тасмаи критикӣ, ки натиҷаи теорема оиди ҳолати дуюми L- функсияи Дирихле дар хати критикии атрофи хурди

$$|\lambda| = \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{18\pi x y^2}$$

-и марказҳои камонҳои калони $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$ мебошад, барои суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии хаттӣ ва кубии Г.Вейл бо ададҳои содда, яъне барои суммаи намуди

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n) e(\alpha n^k),$$

ҳангоми $k = 1$ ва $k = 3$ будан, формулаи асимптотӣ бо аъзоҳои боқимонда исбот карда шудааст.

Теоремаи 2.1. *Бигзор* $x \geq x_0$, A *и* b *— адади ғайриманфии фиксиронидашудаи ихтиёрӣ,* $1 \leq q \leq \mathscr{L}^b$,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1$$

бошад. Пас ҳангоми $|\lambda| \leq \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$ *ва* $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}$ *формулаи зерин ҷой дорад*

$$S_1(\alpha; x, y) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \frac{\sin \pi\lambda y}{\pi\lambda} e\left(\lambda\left(x - \frac{y}{2}\right)\right) + O\left(y\mathscr{L}^{-A}\right).$$

Теоремаи 2.2. *Агар $x \ge x_0$, A, b — ададҳои мусбати фиксиронидашудаи ихтиёрӣ, $1 \le q \le \mathscr{L}^b$ бошад, он гоҳ ҳангоми иҷрошавии шартҳои $\lambda \le \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$ ва $y \ge x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1.5A+0.25b+18}$ формулаи асимптотии зерин ҷой дорад:*

$$S_3(\alpha; x, y) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e\left(\frac{an^3}{q}\right) \int\limits_{x-y}^{x} e(\lambda u^k)du + O\left(y\mathscr{L}^{-A}\right).$$

Дар параграфи 5 бо истифода аз теоремаи зичӣ барои нулҳои L- функсияҳои Дирихле дар росткунҷаҳои танги бо тасмаи критикӣ, чихеле, ки мо дар боло қайд кардем, натиҷаи теорема оиди ҳолати дуюми L- функсияҳои Дирихле дар хати критикӣ мебошад, баҳои ғайритривиалии суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии кубӣ бо ададҳои соддаи $S_3(\alpha; x, y)$ дар камонҳои калони $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ ба ғайр аз атрофи хурди марказҳои онҳо ҳангоми $\tau = y^5x^{-2}\mathscr{L}_x^{-b_1}$ будан, гирифта шудааст.

Теоремаи 2.3. *Бигзор шартҳои $x \ge x_0$, A, b_1, b — дилхоҳ адади мусбати фиксиронидашуда, $1 \le q \le \mathscr{L}_x^b$, $\tau = y^5x^{-2}\mathscr{L}_x^{-b_1}$,*

$$\eta_3 = \frac{2}{7+4\sqrt{3}} \approx 0.1435935394, \qquad c_3 = \frac{2A + 24 + \left(\sqrt{3}-1\right)b_1}{4\sqrt{3}-3}$$

бошад. Пас ҳангоми иҷрошавии шартҳои $y \ge x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}_x^{c_3}$ ва $\lambda > \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$ баҳои зерин

$$S_3(\alpha; x, y) \ll y\mathscr{L}_x^{-A}$$

дуруст аст.

Исботи теоремаҳои 2.1, 2.2 ва 2.3 ба ташаккули минбаъдаи усулҳои Ю.В.Линник[38] ва Н.Г.Чудаков[39], ки дар онҳо мувофиқан суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои содда ва масъала оиди дохилшавии ададҳои содда дар интервалҳои кӯтоҳ таҳқиқ мешаванд, инчунин корҳои математикони чинӣ Пан Чен-дон ва Пан Чен-бьяо ва шогирдони онҳо[40,22,23,25] асос меёбад.

Боби сеюм аз се параграф иборат аст. Дар параграфи якум гузориши масъалаҳои таҳқиқшаванда ва тартибдиҳии натиҷаҳои асосӣ оварда шудааст. Дар параграфи 2 леммаҳои аслӣ исбот шуда, инчунин леммаҳои

---

[38] Линник Ю.В. Новое доказательство теоремы Гольдбаха-Виноградова // Математический сборник, 1946, т. 19, вып.1, с. 3-8.

[39] Chudakov N.G. On the difference between two neighboring prime numbers // Mat. Sb., 1, 1936, 799 – 814.

[40] Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) // Chinese Ann. of Math. —1990. —V.2. —P. 138—147.

ёрирасон, ки барои исботи теоремаи асосии 3.1 истифода мешаванд, оварда шудаанд.

Т.Эстерман[4] формулаи асимптотиро барои миқдори ҳалҳои муодилаи диофантии намуди

$$p_1 + p_2 + m^2 = N, \tag{8}$$

ки дар инҷо p_1, p_2 — ададҳои содда, m — адади натуралӣ мебошанд, исбот намуд.

Дар кори [32] ин масъала бо шартҳои қавитар, яъне ҳангоме, ки ҷамъшаванндаҳо қариб баробаранд, таҳқиқ гардида формулаи асимптотӣ барои миқдори ҳалҳои (3.1) бо шартҳои

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2; \quad \left|m^2 - \frac{N}{3}\right| \le H; \quad , H \ge N^{\frac{3}{4}}\mathscr{L}^3.$$

ҳосил карда шудааст.

Баъдан дар кори[30] формулаи асимптотӣ барои пайдарпаиҳои нодиртар бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар, яъне ҳангоми дар муодилаи (8) квадрати адади натурали m ба куби он, ҳангоми $H \ge N^{\frac{5}{6}}\mathscr{L}^{10}$ иваз карда мешавад, ҳосил карда шудааст. Дар корҳои[33] барои пайдарпаиҳои боз ҳам нодиртар бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар, яъне ҳангоми дар муодилаи (8) квадрати адади натуралии m ба дараҷаи 4-уми он, ҳангоми $H \ge N^{\frac{11}{12}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}$ будан, иваз карда мешавад, формулаи асимптотӣ гирифта шудааст.

Дар кори[23] Т.Жан ва Ҷ.Лю ҳангоми $H \ge N^{\frac{27}{32}+\varepsilon}$ барои миқдори ҳалҳои муодилаи

$$p_1 + p_2 + p_3^2 = N, \qquad \left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2, \qquad \left|p_3^2 - \frac{N}{3}\right| \le H,$$

ки дар инҷо p_1, p_2 ва p_3 — ададҳои содда мебошанд, формулаи асимптотӣ исбот шудааст.

Натиҷаи асосии боби 3 теоремаи 3.1 оиди формулаи асимптотӣ барои пайдарпайии мураккаби нодир бо ҷамъшамандаҳои қариб баробар, ҳангоми дар муодилаи (8) квадрати адади натуралии m ба куби адади содда иваз мешавад, мебошад.

ТЕОРЕМАИ 3.1. *Бигзор N — адади натуралии кифоя калон, $I(N, H)$ — миқдори тасвири адади N дар намуди суммаи ду адади соддаи p_1, p_2 ва куби адади соддаи p_3 бо шарти*

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \qquad i = 1, 2, \qquad \left|p^3 - \frac{N}{3}\right| \le H$$

$\rho(N,p)$ *— миқдори ҳалли муқоисаи* $k^3 \equiv N \pmod p$, $\mathscr{L}_3 = \ln\left(\dfrac{N}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$,

$$\eta_3 = \frac{2}{7+4\sqrt{3}} \approx 0.1435935394, \qquad c_3 = \frac{10476-4816\sqrt{3}}{39} \approx 54.7,$$
$$\mathfrak{S}(N) = \prod_{(p,N)=1}\left(1+\frac{\rho(N,p)-1}{(p-1)^2}+\frac{\rho(N,p)}{(p-1)^3}\right)\prod_{(p,N)=p}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

бошад, пас ҳангоми $H = N^{1-\frac{1}{15+3\eta_3}}\mathscr{L}_3^{c_3}$, *формулаи асимптотии зерин*

$$I(N,H) = \frac{\mathfrak{S}(N)H^2}{3^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^3} + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^4}\right).$$

ҷой дорад.

Теоремаи 3.1 бо усули доиравии Харди, Литтлвуд ва Рамануҷан дар намуди суммаи тригонометрии И.М.Виноградов бо истифодаи натиҷаҳои бобҳои пештара, махсусан

- Теоремаи 2.1 оиди формулаи асимптотӣ барои суммаҳои кӯтоҳи тригонометии хаттӣ бо ададҳои соддаи $S_1(\alpha;x,y)$ дар атрофи хурди марказҳои камонҳои калон;
- Теоремаи 2.2 оиди формулаи асимптотӣ барои суммаҳои кӯтоҳи тригонометии кубӣ бо ададҳои соддаи $S_3(\alpha;x,y)$ дар атрофи хурди марказҳои камонҳои калон;
- Теоремаи 2.3 оиди баҳои ғайритривиалии суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии кубӣ бо ададҳои соддаи $S_3(\alpha;x,y)$ дар камонҳои калон ба ғайр аз атрофи хурди марказҳои онҳо

исбот карда мешавад.

Хулоса

Натиҷаҳои асосии илмии таҳқиқот.

Ҳамаи натиҷаҳои асосии кори диссертатсия нав буда, характери назариявӣ дорад ва аз инҳо иборатанд:

- Формулаи асимптотӣ бо аъзои боқимонда барои суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии хаттии Г.Вейл бо ададҳои содда дар атрофи хурди марказҳои камонҳои калон гирифта шудааст [3-А, 5-А, 9-А].

- Формулаи асимптотӣ бо аъзои боқимонда барои суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии кубии Г.Вейл бо ададҳои содда дар атрофи хурди марказҳои камонҳои калон гирифта шудааст [6-А, 7-А, 9-А].
- Баҳои ғайритривиалӣ барои суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии кубӣ бо ададҳои содда дар камонҳои калон ба ғайр аз атрофи хурди марказҳои онҳо ёфт шудааст [2-А, 8-А, 9-А].
- Формулаи асимптотӣ барои миқдори тасвири адади натуралии кифоя калон дар намуди суммаи ду адади содда ва куби адади содда бо шарти қариб баробар будани онҳо ҳосил карда шудааст [4-А, 9-А].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Ҳамаи натиҷаҳои дар диссертатсия ба даст овардашуда хусусияти назариявӣ доранд. Ин натиҷаҳоро дар назарияи аналитикии ададҳо ҳангоми таҳқиқоти муаммоҳои назарияи суммаҳои кӯтоҳи тригонометрӣ бо ададҳои содда ва масъалаҳои аддитивӣ татбиқ намудан мумкин аст. Маводҳои диссертатсияро инчунин метавон ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯён ва магистрони ихтисоси «Математика»-и муассисаҳои таҳсилоти олии касбӣ истифода бурдан мумкин аст.

Интишороти муаллиф аз рӯи мавзӯи диссертатсия

Дар маҷалаҳои тақризшаванда аз рӯйхати КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон:

[1–М]. Собиров А.А. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Доклады НАН Таджикистана. —2020 г. —т.63. —№ 5-6. —С. 279—288.

[2–М]. Собиров А.А. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Доклады НАН Таджикистана. —2020 г. —т.63. —№ 7-8. —С. 405—415.

[3–М]. Собиров А.А. Короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числами в окрестности центра больших дуг [Текст] / А.А. Собиров // Доклады НАН Таджикистана. —2021 г. —т.64. —№ 11-12. —С. 611–620.

[4–М]. Собиров А.А. Проблема Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми [Текст] / А.А. Собиров // Доклады НАН Таджикистана. —2022 г. —т.65. —№ 1-2. —С. 5–13.

Дар маҷалаҳои дигар

[5–М]. Собиров А.А. Оценка тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах [Текст] / А.А. Собиров // Современные проблемы алгебры и теории чисел, материалы научно-теоретической конференции, посвящённой 90 – летию со дня рождения профессора Бабаева Г.Б. Душанбе. 14—15 декабря —2018 г. —С. 123—131.

[6–М]. Собиров А.А. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Современные проблемы математики, проблемы и их пути решения, Материалы международной научной онлайн конференции г. Термез. Узбекистан. 21—23 октября 2020 г. —С. 18—19.

[7–М]. Собиров А.А. О поведении коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений, материалы международной конференции, посвящённой 70 —летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича. Душанбе.25—26 декабря —2020 г. —С. 254—255.

[8–М]. Собиров А.А. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах за исключением малой окрестности их центров [Текст] / А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Актуальные проблемы современной математики, материалы международной конфренции, посвящённой 80 —летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова. Душанбе. 25—26 июня —2021 г. —С. 224—226.

[9–М]. Собиров А.А. О проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми [Текст] / А.А. Собиров // Современные проблемы теории чисел и математического анализа, материалы международной конференции, посвящённой 80–летию с дня рождения доктора физика–математических наук, профессора Дододжона Исмоилова. Душанбе. 29—30 апреля —2022 г. —С. 213—220.

Аннотация диссертации Собирова Абдушукура Абдурасуловича на тему «Асимптотическая формула в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми» на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Ключевые слова: аддитивные задачи, почти равные слагаемые, короткая тригонометрическая сумма Г.Вейля с простыми числами, большие дуги, L-функция Дирихле

Объекты исследования: Короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числами, короткие кубические тригонометрические суммы с простыми числами, тернарное диофантово уравнение Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми, малая окрестность центра больших дуг, большие дуги за исключением малых окрестностей их центров, малые дуги.

Цель исследования. Целью данного исследование является изучение поведения коротких тригонометрических сумм с простыми числами и использование этих сумм к задаче Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют теоретический интерес и состоят в следующем: получена асимптотическая формула с остаточным членом для коротких линейных тригонометрических сумм Германа Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг; получена асимптотическая формула с остаточным членом для коротких кубических тригонометрических сумм Германа Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг; найдена нетривиальная оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах кроме малых окрестностей их центров; получена асимптотическая формула для числа представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы двух простых чисел и куба простого числа, при условии, что они почти равны.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применение в аналитической теории чисел при исследованиях проблем теории коротких тригонометрических сумм с простыми числами и аддитивных задач с простыми числами. Материалы диссертации также могут использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

Шарҳи мухтасар ба рисолаи диссертатсионии Собиров Абдушукур Абдурасулович дар мавзӯи «Формулаи асимптотӣ дар муаммои Эстерман барои кубҳои ададҳои содда бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯйи ихтисоси 01.01.06 – Мантиқи математикӣ, алгебра ва назарияи ададҳо

Вожаҳои калидӣ: масъалаҳои аддитивӣ, ҷамъшавандаҳои қариб баробар, суммаи кӯтоҳи тригонометрии Г.Вейля бо ададҳои содда, камонҳои калон, L-функсияи Дирихле.

Объектҳои тадқиқот. Суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии хаттӣ бо ададҳои содда, суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии кубиил бо ададҳои содда, муодилаи диофантии тернарии Эстерман бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар, атрофи хурди марказҳои камонҳои калон, камонҳои калон ба ғайр аз атрофи марказҳои онҳо, камрнҳои хурд.

Мақсади таҳқиқот. Мақсади таҳқиқот омӯзиши рафтори суммаҳои кӯтоҳи тригонометрӣ бо ададҳои содда ва татбиқи онҳо ба муаммои Эстерман барои кубҳои ададҳои содда бо ҷамшавандаҳои қариб баробар мебошад.

Навгонии илмии таҳқиқот. Ҳамаи натиҷаҳои асосии гирифташуда, нав буда, аз инҳо иборатанд: формулаи асимптотӣ бо аъзои боқимонда барои суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии хаттии Г.Вейл бо ададҳои содда дар атрофи хурди марказҳои камонҳои калон гирифта шудааст; формулаи асимптотӣ бо аъзоҳои боқимонда барои суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии кубии Г.Вейл бо ададҳои содда дар атрофи хурди марказҳои камонҳои калон ба даст оварда шудааст; баҳои ғайритривиалии суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии кубӣ бо ададҳои содда дар камонҳои калон ба ғайр аз атрофи марказҳои онҳо ёфта шуда аст; формулаи асимптотӣ барои миқдори тасвири ададҳои натуралии кифоя калон дар намуди суммаи ду адади содда ва куби адади содда бо шарти қариб баробар будани онҳо ба даст оварда шудааст.

Аҳамияти назариявӣ ва илмию амалии таҳқиқот. Натиҷаҳои дар диссертатсия ба даст омада характери назариявӣ доранд. Онҳоро дар назарияи аналитикии ададҳо ҳангоми тадқиқи муаммоҳои назарияи суммаҳои кӯтоҳи тригонометрӣ бо ададҳои содда ва масъалаҳои аддитивӣ бо ададҳои содда татбиқ намудан мумкин аст. Маводи диссертатсияро инчунин ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯён ва магистрони ихтисоси математикаи муассисаҳои олии касбӣ истифода бурдан мумкин аст.

SUMMARY

of the dissertation of Sobirov Abdushukur Abdurasulovich on the topic «Asymptotic formula in Estermann's problem for cubes of primes with almost equal summ ands», submitted for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences in the specialty 01.01.06 — Mathematical Logic, Algebra and Theory numbers

Keywords: additive problems, Almost equal summands, Short exponential sum of H.Weyl with primes, major arcs, Dirichlet L-function.

Research objects: Short linear exponential sums with primes, Short cubic exponential sums with primes, Esterman's ternary diophantine equation for cubes of primes with almost equal summands, Small neighborhood of the center of major arcs, Major arcs except for small neighborhoods of their centers, Minor arcs.

Purpose of the study: The purpose of this study is to study the behavior of short exponential sums with primes and the use of these sums to the Esterman problem for cubes of primes with almost equal summands.

Scientific novelty. All the main results of the dissertation are new, of theoretical interest and are as follows: an asymptotic formula with a remainder term for short linear exponential Hermann Weyl sums with prime numbers in small neighborhoods of the center of major arcs is obtained; an asymptotic formula with a remainder term for short cubic exponential sums of Hermann Weyl with primes in small neighborhoods of the center of major arcs is obtained; a non-trivial bound for short cubic exponential sums with prime numbers in major arcs, except for small neighborhoods of their centers, is found; an asymptotic formula is obtained for the number of representations of a sufficiently large natural number as the sum of two primes and the cube of a prime, provided that they are almost equal.

Theoretical and practical value. The results obtained in the dissertation are theoretical in nature. They can find application in analytic number theory in the study of problems in the theory of short exponential sums with primes and additive problems with primes. The dissertation materials can also be used when reading special courses for students and masters in higher educational institutions studying in the specialty «Mathematics».