Институт математики им. А.Джураева
Национальной Академии наук Таджикистана

На правах рукописи

УДК 511.325

Собиров Абдушукур Абдурасулович

Асимптотическая формула в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Специальность 01.01.06 - Математическая логика, алгебра, и теория чисел

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
академик НАН Таджикистан, профессор
Рахмонов Зарулло Хусенович

Душанбе — 2022

Содержание

Обозначения

$$e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha} = \cos 2\pi\alpha + i\sin 2\pi\alpha\,.$$

Теоремы, леммы и формулы нумеруются двумя индексами: номер главы, номер утверждения.

ε–положительные сколь угодно малые постоянные.

p, p_1, p_2 и p_3 — простые числа

n, m, l, r, k, d–целые либо натуральные числа в зависимости от контекста.

$\varphi(q)$ – функция Эйлера.

$\mu(n)$ – функция Мёбиуса.

$\Lambda(n)$ — функция Мангольдта.

$\tau(n)$ — число делителей числа n.

При положительном A запись $B = O(A)$ или $B \ll A$ означает, что существует $c > 0$ такое, что $|B| \le cA$.

(a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b.

$\mathscr{L} = \ln x$, x — достаточно большое положительное вещественное число;

$\mathscr{L}_3 = \ln\left(\dfrac{N}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, N — достаточно большое натуральное число.

Введение

Актуальность темы исследования. Диссертационная работа посвящена исследованию в аддитивной теории чисел. Одной из главных задач аддитивной теории чисел является вопрос о представлении некоторой последовательности натуральных чисел суммой ограниченного количества слагаемых заданного вида. Исторически первыми примерами подобных задач стали:

- тернарная проблема Гольдбаха (1742 г.) о представлении нечётных чисел суммой трёх простых чисел, то есть, как

$$N = p_1 + p_2 + p_3, \tag{1}$$

  и задача Эйлера (1742 г.) или бинарная проблема Гольдбаха о представлении чётных чисел в виде суммы двух простых [1];

- теорема Лагранжа о представлении натуральных чисел суммой не более четырёх квадратов натуральных чисел и её обобщение, предложенное Варингом [2] в 1770 г., которое утверждает, что последовательность, образованная фиксированной степенью n чисел натурального ряда, образует в нём базис конечного порядка $G(n)$, то есть, каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = N, \tag{2}$$

  где $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — натуральные числа и количество слагаемых r не превосходит фиксированной величины $G(n)$, называемой порядком базиса последовательности $\{x^n\}$, или функцией Харди;

- поставленная в начале 19-го века проблема о том, что фиксированная степень n простых чисел p при любом натуральном n образует базис конечного порядка $V(n)$ в натуральном ряде, далее постановка этой задачи появилась в работе П.Эрдёша [3], предполагалось, что каждое достаточно большое натуральное N может быть представлено в виде

$$p_1^n + p_2^n + \cdots + p_k^n = N, \tag{3}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа и $k \leq V(n)$. Данная задача называется проблемой Гольдбаха – Варинга, поскольку обобщает, с одной стороны, проблему Гольдбаха о представлении числа суммой простых чисел, а с другой стороны — проблему Варинга о представлении числа суммой степеней натуральных чисел.

- утверждение Эстермана [4] о представлении натурального числа $N > N_0$ при $k = 2$ виде

$$p_1 + p_2 + m^k = N, \tag{4}$$

где p_1 и p_2 — простые числа, m — целое число.

И.М.Виноградов [1, 5–8] в 1937 году создал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, основной базой которого составляют решето Виноградова и метод сглаживания двойных сумм. Пользуясь этим методом, он впервые получил оценку линейной тригонометрической суммы, то есть, при $k = 1$ нетривиальную оценку сумму следующего вида

$$S_k(\alpha, N) = \sum_{m \leq N} \Lambda(m) e(\alpha m^k).$$

Полученная оценка в соединении с законами о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях дала возможность вывести асимптотическую формулу для числа представлений нечётного N в виде (1), что является решением *тернарной проблемы Гольдбаха о представлении нечётного натурального числа как суммы трёх простых чисел.*

Бинарная задача Гольдбаха до сих пор не решена. Лучший новейший результат, наиболее близко подходящий к доказательству этой задачи, принадлежит китайскому ученому Дж.Р.Чену [9]. В этой знаменитой работе Чен доказал, что каждое чётное число N представимо в следующем виде

$$p + P_2 = N,$$

где P_2 – простое число или произведение двух простых чисел. Более простое доказательство утверждение Чена принадлежит Россу [10].

Проблема Варинга в XIX веке была доказана для отдельных значений n, но реального продвижения на пути к решению этой проблемы удалось добиться только в XX-ом веке. В 1909 г. эту задачу решил Д.Гильберт [11, 12], тем самым он установил существование функции $G(n)$.

В 1920 г. Харди и Литтлвуд [13] доказали проблему Варинга новым методом. Сначала они ввели функцию $G(n)$ и доказали, что

$$n < G(N) \leq n2^{n-1}h; \ \lim_{n\to\infty} h = 1$$

Самым же основным было то, что Харди и Литтлвуд при

$$r > (n-2)2^{n-1} + 5$$

для числа $J(N)$ представлений числа N в виде (2) находили асимптотическую формулу следующего вида

$$J(N) = \frac{(\Gamma(1+1/n))^r}{\Gamma(r/n)} N^{\frac{r}{n}-1}\mathfrak{S} + O(N^{\frac{r}{n}-1-c(n,r)}) \qquad (5)$$

где $\mathfrak{S}$– некоторый специальный (особый) ряд, сумма которого, как они показали, превосходит некоторое число $c_1(n,r)$ и $c_1(n,r)>0$.

В 1924 г. И.М.Виноградов [1, 6, 14, 15], применяя к задаче Варинга свой метод, в частности для исследования поведения тригсумм Г. Вейля вида

$$T_n(\alpha,N)=\sum_{x\le N} e(\alpha x^n),$$

и нашёл асимптотическую формулу Харди и Литтлвуда при

$$r\ge 2[n^2(2\ln n+\ln\ln n+3)].$$

В 1934 г. И.М.Виноградову [16] удаётся доказать, что

$$G(n)<n(6\ln n+10),$$

далее в работах [17–20] ему удалось уточнить эту оценку несколько раз, и наконец, в 1959 г. доказывает [21] следующую оценку

$$G(n)<n(2\ln n+4\ln\ln n+2\ln\ln\ln n+13).$$

А.А.Карацуба [1, 22], применяя к оценке $G(n)$ p–адический метод, нашёл более точную оценку

$$G(n)<n(2\ln n+2\ln\ln n+12).$$

Вули [23] показал, что

$$G(n)<n\ln n+n\ln\ln n+O(1).$$

Значение $G(n)$ известно всего лишь для $k=2$ и $k=4$, то есть $G(2)=4$, $G(4)=16$, что в свою очередь доказали Лагранж и Давенпорт [24]. Ю.В. Линник [25–27] показал, что имеет место $G(3)\le 7$, простое доказательство этой оценки дал Ватсон [28]. Вон [29, 30] получил асимптотическую формулу Г.Харди и Дж.Литтлвуда (5) при $r = 8$ и $n = 3$.

В 1938 г. Хуа Ло Ген [31–33], воспользовавшись методом оценки тригсумм с простыми числами И.М.Виноградова для суммы вида $S_2(\alpha, N)$, нашёл асимптотическую формулу для количества представлений натурального числа N как суммы пяти квадратов простых чисел и ему удалось доказать, что особый ряд этой формулы больше положительной константы при $N \equiv 5 \pmod{24}$. Таким образом Хуа Ло Ген показал, что любое большое натуральное число $N \equiv 5 \pmod{24}$ представимо в следующем виде

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = N. \tag{6}$$

И.М.Виноградов [1, 34] с помощью своего метода тригонометрических сумм нашёл асимптотическую формулу в проблеме Гольдбаха-Варинга. В асимптотической формуле И.М.Виноградова вопрос положительности особого ряда $\sigma = \sigma(k; N)$, то есть вопрос о существовании функции $V(n)$ и её верхней оценки в зависимости только от значения параметра n до 2009 г. оставался открытим и, следовательно, проблема Гольдбаха – Варинга в полном объёме до самого последнего времени оставалась нерешённой.

В.Н.Чубариков [35, 36], используя свою теорию кратных тригонометрических сумм с простыми числами [37, 38], являющейся дальнейшим развитием метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградова, полностью решил проблему Гольдбаха – Варинга.

По теореме Дирихле, каждое α из отрезка $[-æ, 1 - æ]$, $æ\tau = 1$ можно представить в следующем виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \qquad 1 \le q \le \tau, \qquad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}.$$

С помощью $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых выполняется условие $q \le P,\ P < Q$, а с помощью $\mathfrak{m}(P)$ обозначим остальные α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно будем называть большими и малыми дугами.

После создания метода тригсумм и метода оценок тригсумм с простыми числами И.М.Виноградова решения классических аддитивных проблем (1), (2), (3), (4) и (6), а также другие аддитивные задачи сводятся к двум следующим задачам:

- исследованию поведения тригсумм Г.Вейля $S_k(\alpha, N)$ и $T_n(\alpha, N)$ в больших дугах $\mathfrak{M}(P)$;
- получение нетривиальных оценок этих сумм в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$.

Решение вышеназванных классических проблем (1), (2), (3), (4) и (6) становится гораздо труднее, если требовать, что все слагаемые почти равны, так как вместо обычных тригсумм Г.Вейля $S_k(\alpha, N)$ и $T_n(\alpha, N)$ возникают короткие тригсуммы Г. Вейля следующего вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n) e(\alpha n^k),$$
$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\le x} e(\alpha m^n).$$

Более конкретно решения классических аддитивных проблем (1), (2), (3), (4) и (6) с почти равными слагаемыми сводятся к трём следующим задачам:

- исследования поведения коротких тригсумм $S_k(\alpha; x, y)$ и $T_n(\alpha; x, y)$ в малых окрестностях центра больших дуг $\mathfrak{M}(P)$;
- нахождение нетривиальных оценок этих коротких сумм в больших дугах $\mathfrak{M}(P)$ кроме малых окрестностей их центров;

- получение нетривиальных оценок этих сумм в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$.

В диссертационной работе изучено поведение коротких линейных и кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг, найдена оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах кроме малых окрестностей их центров, прилагая эти результаты, доказана асимптотическая формула для числа представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы трёх почти равных слагаемых, два из которых — простые числа, а третье является кубом простого числа. Именно эти результаты определяют актуальность и целесообразность диссертационной работы.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Существенный вклад в исследованиях аддитивных задач, к которым относится бинарная и тернарная проблемы Гольдбаха, проблема Эстермана, проблема Варинга, проблема Гильберта-Камке и изучения тригонометрических сумм Г.Вейля, возникающие при решении этих проблем, внесли такие всемирно известные математики Д.Гилберт [11, 12], Г.Харди и Дж.Литлвуд [13], И.М.Виноградов [6–8], Хуа Ло-Кен [31–33], Ю.В.Линник [25–27], Дж.Р.Чен [9], А.А.Карацуба [22, 39–44], Г.И.Архипов [41–48], В.Н.Чубариков [35–38, 42–46, 49–51], Р.Вон [29, 30], и многие другие.

Короткие тригсуммы с простыми числами впервые изучил И.М.Виноградов [6, 52]. Для сумм следующего вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n) e(\alpha n^k),$$

при $k = 1$, воспользовавшись своим методом оценки тригонометрических сумм с простыми числами, показал нетривиальную оценку в малых дугах

$\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$, $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ при $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$. Следует заметить, что основу этого метода наряду с «решетом Виноградова», при $k = 1$ составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$J_k(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{\substack{U<n\leq 2N \\ x-y<mn\leq x}} b_n e(\alpha(mn)^k),$$

где a_m и b_n – произвольные вещественные функции, $|a_m| \leq \tau^c(m)$, $|b_n| \leq \tau^c(n)$, M, N, $U \geq N$ – натуральные, $x > x_0$, y – вещественные числа, c – абсолютная постоянная, которая меняется.

Далее Хейзелгроув С.Б. [53], В.Статулявычус [54], Цзя Чаохуа [55–58], Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо [59], Т.Жан [60] для суммы $S_1(\alpha; x, y)$, $y \geq x^{\theta}$, получив нетривиальную оценку в малых дугах, и исследовав её поведение в больших дугах, получили асимптотическую формулу для тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми, т.е. для количества решений диофантова уравнения вида

$$N = p_1 + p_2 + p_3, \qquad \left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H, \qquad H = N^{\theta+\varepsilon}, \tag{7}$$

соответственно при

$$\frac{279}{308} + \varepsilon, \quad \frac{91}{96} + \varepsilon, \quad \frac{13}{17} + \varepsilon, \quad \frac{2}{3} + \varepsilon, \quad \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Важный результат в этой проблеме получил Цзя Чаохуа [61]. Ему удалось показать разрешимость диофантова уравнения (7) с показателем

$$\theta = \frac{7}{12} + \varepsilon.$$

Лю Дж. и Тао Ж. [62–66] в малых и в больших дугах получили нетривиальную оценку суммы для $S_2(\alpha; x, y)$ при условии $y \geq x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$. Далее они доказали теорему Хуа Ло Гена [31] о представлении большого натурального числа как суммы пяти квадратов простых чисел, при условии, что эти слагаемые почти равны. Им удалось показать, что большое натуральное число вида $N \equiv 5 \pmod{24}$, представимо а следующем в виде

$$N = p_1^2 + \ldots + p_5^2, \quad \left| p_j - \sqrt{\frac{N}{5}} \right| \leq H, \quad H \geq N^{\frac{11}{23}+\varepsilon}.$$

Т.Жан и Дж.Лю [64], учитывая оценку суммы вида $S_2(\alpha, x, y)$, доказали, что большое натуральное число N при

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left| p_3^2 - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H \geq N^{\frac{27}{32}+\varepsilon},$$

представимо в следующем виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3^2.$$

В 1938 г. Хуа [31], при исследовании задачи Варинга – Гольдбаха, показали, что все большие нечётные натуральные числа можно представить в виде суммы 9 кубов простых чисел.

Кумчев А.В. [67] получил нетривиальную оценку для суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$, $\tau = x^{k-\frac{2}{2k+3}} P^{-1}$ при условии $y \geq x^{1-\frac{1}{2k+3}+\varepsilon}$. Я.Яо [68], используя эти оценки, обобщая теорему Хуа в задаче Варинга – Гольдбаха для кубов, показал, что любое большое нечётное натуральное число N представимо в следующем виде

$$p_1^3 + p_2^3 + \ldots + p_9^3 = N, \qquad \left| p_i - \sqrt[3]{\frac{N}{9}} \right| \leq N^{\frac{1}{3}-\frac{1}{51}+\varepsilon}.$$

В работах [69–71] при выполнении условий $H \gg N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}^{4A+16}$, $\mathscr{L}^{4A+20} \leq q \leq KH^2 N^{-1} \mathscr{L}^{-4A-20}$ и $K \leq H$ для сумм коротких тригонометрических сумм с простыми числами найдена нетривиальная оценка следующего вида

$$\sum_{k=1}^{K} |S_3(\alpha k; N, H)| \ll \frac{KH}{\mathscr{L}^A}, \quad \mathscr{L} = \ln Nq,$$

где $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a,q) = 1$, A – абсолютная постоянная, являющиеся обобщением соответствующей оценки И.М.Виноградова на случай коротких тригонометрических сумм с простыми числами.

В 2016 г. З.Х.Рахмонов и Ф.З.Рахмонов в своих работах [72–74], используя метод оценки тригсумм с простыми числами И.М.Виноградова в сочетании с методом работы [75] и результатами работ [76–78] , нашли нетривиальную оценку следующего вида

$$S_3(\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}^B},$$

на малых дугах $\mathfrak{m}\left(\mathscr{L}^{32(B+20)}\right)$, $\tau = y^5 x^{-2} \mathscr{L}^{-32(B+20)}$ при условии $y \geq x^{\frac{4}{5}} \mathscr{L}^{8B+151}$, в котором B — абсолютная постоянная. Этим же методом они получили в работе [79] нетривиальную оценку для коротких кубических тригсумм с функцией Мёбиуса следующего вида

$$\sum_{x-y<n\leq x} \mu(n) e(\alpha n^3),$$

в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(B+18)})$ при $y \geq x^{\frac{4}{5}} \mathscr{L}^{8B+944}$ и $\tau = y^5 x^{-2} \mathscr{L}^{-32(B+18)}$.

Короткие тригсуммы Г. Вейля следующего вида

$$T(\alpha, x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e(\alpha m^n),$$

при $n = 2, 3, 4$ в длинных дугах, были рассмотрены в следующих работах [80–88]. Для произвольного фиксированного n эти суммы полностью исследованы в работах [89–99]. Эти результаты с соединением оценок коротких тригонометрических сумм Г. Вейля в малых дугах [100, 101] были использованы при получении асимптотических формул в следующих аддитивных задачах с почти равными слагаемыми:

- в задаче Эстермана [4, 80, 102, 103]: любое натуральное число $N > N_0$ можно представить в следующем виде $p_1+p_2+m^2 = N$, где p_1 и p_2 – простые числа, m – целое неотрицательное число, при условии

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H; \qquad i = 1,2, \qquad \left|m^2 - \frac{N}{3}\right| \le H, \qquad H \ge N^{\frac{3}{4}} \ln^2 N;$$

- в кубической задаче Эстермана [82, 83, 104]: любое натуральное число $N > N_0$ можно представить в следующем виде $p_1+p_2+m^3 = N$, где p_1 и p_2 – простые числа, m – целое неотрицательное число, при условии

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H; \qquad i = 1,2, \qquad \left|m^3 - \frac{N}{3}\right| \le H, \qquad H \ge N^{\frac{5}{6}} \ln^3 N;$$

- в задаче Эстермана четвёртой степени [105, 106]: любое натуральное число $N > N_0$ можно представить в следующем виде $p_1+p_2+m^4 = N$, где p_1 и p_2 – простые числа, m – целое неотрицательное число, при условии

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H; \qquad i = 1,2, \qquad \left|m^3 - \frac{N}{3}\right| \le H, \qquad H \ge N^{\frac{11}{12}} (\ln N)^{\frac{40}{3}};$$

- в проблеме Варинга для кубов [107, 108]: любое натуральное число $N > N_0$ можно представить в виде суммы девяти кубов натуральных чисел x_i, $i = \overline{1,9}$ при условии

$$\left|x_i - \left(\frac{N}{9}\right)^{\frac{1}{3}}\right| \le H, \qquad H \ge N^{\frac{1}{3} - \frac{1}{30} + \varepsilon};$$

- в проблеме Варинга для четвёртых степеней [109]: любое натуральное числа $N > N_0$ можно представить в виде суммы семнадцати четвёртых степеней натуральных чисел x_i, $i = \overline{1,17}$ при условии

$$\left|x_i - \left(\frac{N}{17}\right)^{\frac{1}{4}}\right| \le H, \qquad H \ge N^{\frac{1}{4} - \frac{1}{108} + \varepsilon};$$

- в проблеме Варинга для пятых степеней [94, 110]: любое натуральное числа $N > N_0$ можно представить в виде суммы 33 пятых степеней натуральных чисел x_i, $i = \overline{1,33}$ при условии
$$\left|x_i - \left(\frac{N}{33}\right)^{\frac{1}{5}}\right| \le H, \qquad H \ge N^{\frac{1}{5}-\frac{1}{340}+\varepsilon}.$$

Упомянутые выше результаты о поведении коротких тригонометрических сумм Г.Вейля также были приложены к задаче о распределении дробных частей значений многочлена, аргумент которого принимает значения из коротких интервалов [111]. В частности, было доказано, что если α — иррациональное число, то последовательность $\{\alpha m^2\}$, $x-y < m \le x$ при $y \ge \ln^3 x$, $y \to \infty$ является равномерно распределённой по модулю единица.

С.Ю.Фаткиной[112] найдена асимптотическая формула для числа решений диофантова уравнения $N = p_1 + p_2 + [\sqrt{2}p_3]$ в простых числах p_1, p_2, p_3, со следующими условиями
$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2, \quad \left|[\sqrt{2}p_3] - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad H \ge N^{\frac{5}{8}} \ln^c N.$$

П.З.Рахмонов [113, 114] при условии $y \gg \sqrt{x}$ получил по параметру c равномерную оценку для коротких тригсумм с нецелыми степеньями натуральных чисел следующего вида
$$S_c(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} e(\alpha[n^c]),$$
и получил асимптотическую формулу в обобщении тернарной проблемы Эстермана для нецелых показателей с почти равными слагаемыми о представлении большого натурального числа в виде $p_1 + p_2 + [n^c] = N$, где числа p_1, p_2 простые и n натуральное, со следующими условиями
$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2, \quad \left|[n^c] - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad H \ge N^{1-\frac{1}{2c}} \ln^2 N.$$

Связь работы с научными программами (проектами), темами Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации следующих проектов научно-исследовательской работ института математики им. А. Джураева Национальной Академии наук Таджикистана:

- «Поведение тригонометрических сумм, их приложения в аддитивных проблемах теории чисел, избранные задачи теории приближении функций», ГР 0116TJ00532, с 2016 года по 2020 год;

- «Оценка коротких смешанных тригонометрических сумм и их приложения к теории нулей специальных рядов Дирихле», ГР 0121TJ1178, с 2021 года по 2025 год.

Общая характеристика работы

Цель исследования. Целью данного исследование является изучение поведения коротких тригонометрических сумм с простыми числами и использование этих сумм к задаче Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми.

Задачи исследования. В соответствие с поставленной целью можно выделить следующие задачи:

1. изучение поведения коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг;

2. изучение поведения коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг;

3. исследование коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах кроме малых окрестностей их центров;

4. изучение задачи Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми, т.е. анализ проблемы о представимости большого натурального N в виде $N = p_1 + p_2 + p_3^3$, где p_1, p_2 и p_3 простые числа.

Объект исследования. Объектами исследования являются короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числами, короткие кубические тригонометрические суммы с простыми числами, тернарное диофантово уравнение Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми, малая окрестность центра больших дуг, большие дуги за исключением малых окрестностей их центров, малые дуги.

Предмет исследования. Предметом исследования является получение асимптотической формулы для коротких линейных и кубических тригонометрических сумм Г. Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг, нетривиальной оценки коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах за исключением малых окрестностей их центров и асимптотической формулы в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми.

Научная новизна исследования. Основные результаты полученные в работе являются новыми, и состоят в следующем:

- получена асимптотическая формула с остаточным членом для коротких линейных тригонометрических сумм Германа Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг;
- получена асимптотическая формула с остаточным членом для коротких кубических тригонометрических сумм Германа Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг;
- найдена нетривиальная оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах кроме малых окрестностей их центров;
- получена асимптотическая формула для числа представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы двух простых чисел и куба простого числа, при условии, что они почти равны.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применение в аналитической теории чисел при исследованиях проблем теории коротких тригонометрических сумм с простыми числами и аддитивных задач с простыми числами. Материалы диссертации также могут использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

Положения, выносимые на защиту.

1. теорема для коротких линейных тригонометрических сумм Германа Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг;
2. теорема для коротких кубических тригонометрических сумм Германа Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг;
3. теорема о нетривиальной оценке коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах кроме малых окрестностях их центров;
4. теорема об асимптотической формуле для числа представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы двух простых чисел и куба простого числа, при условии, что они почти равны.

Степень достоверности проведённых исследований. Обоснованность научных результатов работы обеспечивается правильными математическими доказательствами всех теорем, приведённых в работе, согласуется с трудами других авторов.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Диссертационная работа выполнена по специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел и является разделом аналитической теории чисел, указанной в пункте III параграф 3 паспорта научной специальности.

Личный вклад соискателя учёной степени. Задачи исследования были сформулированы научным руководителем работы, который оказывал консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, отражённые в разделе «Научная новизна», кроме пунктов 2 и 3 получены лично автором. Результаты пунктов 2 (параграф 2.4) и 3 (параграф 2.5) получены совместно с П.М.Фозиловой и опубликованы в [1-А, 2-А].

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- международная научная конференция «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции», посвещённая 90-летию академика АН РТ, лауреата Государственной премии имени Абуали Ибн Сино Михайлова Л.Г., Душанбе, 27-28 февраля 2018 года;
- республиканская научно-теоретическая конференция «Современные проблемы алгебры и теории чисел», посвящённая 90-летию со дня рождения профессора Гафура Бабаевича Бабаева, Душанбе, 27 ноября 2018 года;
- международная конференция «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа», посвящённая 60-летию академика Рахмонова З.Х. и члена-корреспондента Исхокова С.А., г.Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.;
- международная научная конференция «Современные проблемы математики, проблемы и их пути решения», г. Термез. Узбекистан. 21—23 октября 2020 года;
- международная конференция «Актуальные проблемы современной математики», посвящённая 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова., Душанбе, 25-26 июня 2021 года;

- международная конференция «Современные проблемы теории чисел и математического анализа», посвящённой 80–летию с дня рождения доктора физика–математических наук, профессора Дододжона Исмоилова, Душанбе, 29–30 апреля 2022 года.
- семинар отдела алгебры, теории чисел и топологии (2013 – 2016 гг.) и на общеинститутский семинар (2014 – 2016 гг.) в Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан;
- семинар кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в девяти научных работах. Работы [1-А, 2-А, 3-А, 4-А] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан. Четыре работы написаны автором лично. Четыре работы написаны в соавторстве с П.М.Фозиловой, а также с научным руководителем, которому принадлежат постановка задач. Одна работа написана совместно с П.М.Фозиловой.

Структура диссертации и объём. Диссертация состоит из списка обозначений, введения, общей характеристики работы, двух глав, обсуждения полученных результатов, выводов, рекомендаций по практическому использования результатов, списка цитированной литературы из 138 наименований, занимает 128 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Главы разбиты на параграфы. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют двойную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер номер теорем, лемм или формул в данной главе.

Глава 1

Обзор литературы по коротким тригонометрическим суммам Г. Вейля и аддитивным задачам с почты равными слагаемыми

В главе даётся обзор изученной литературы по теме диссертационной работе, сводящееся к основе теоретико-методологического изучения, оценке существующих задач и полученных результатов, в том, числе нерешённых проблем по теме работы.

1.1. Анализ литературы по коротким тригонометрическим суммам Г. Вейля

По теореме Дирихле, каждое α из отрезка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ можно представить в следующем виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \qquad 1 \le q \le \tau, \qquad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}.$$

С помощью $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых выполняется условие $q \le P$, $P < Q$, а с помощью $\mathfrak{m}(P)$ обозначим остальные α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно будем называть большими и малыми дугами.

И.М. Виноградов [1, 5–8] в 1937 году построил метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, базой которого составляют решето Виноградова и метод сглаживания двойных сумм. Воспользовавшись этим методом, он впервые получил оценку линейной тригонометрической суммы, то есть при $k = 1$ нетривиальную оценку сумму следующего вида

$$S_k(\alpha, N) = \sum_{m \le N} \Lambda(m) e(\alpha m^k),$$

в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^b)$ и ему удалось вывести асимптотическую формулу для числа представлений нечётного N в виде суммы трёх простых чисел, что является решением тернарной проблемы Гольдбаха.

Линейным тригсуммамм с простыми числами в малых дугах аналитическим методом впервые дал оценку Ю.В. Линник [115, 116]. Он используя функцию плотности нулей L-рядов Дирихле, получил новую версию нетривиальной оценки суммы $S_1(\alpha, N)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^b)$.

Короткую линейную тригсумму Германа Вейля с простыми числами вида $S_1(\alpha; x, y)$ впервые начал исследовать И.М. Виноградов [6]. Он, воспользовавшись своим методом оценки тригсумм с простыми числами, получил нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$, $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ при условии $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$.

Затем К.В. Хазелгров [53], используя метод оценки тригсумм с простыми числами И.М. Виноградова в соединении с методом работы Ю.В. Линника, получил для суммы $S_1(\alpha; x, y)$ при условии

$$y \geq x^{\theta}, \qquad \theta = \frac{63}{64} + \varepsilon,$$

нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^b)$ и формулу с остаточным членом в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$. Пользуясь этими результатами ему удалось решить тернарную задачу Гольдбаха с почти равными слагаемыми, конкретно для количества решений диофантова уравнения вида

$$p_1 + p_2 + p_3 = N, \qquad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \qquad H \geq N^{\theta},$$

нашёл асимптотическую формулу.

В. Статулявычус [54], Цзя Чаохуа [55–58], аналитическим методом примененному в работе К.В. Хазелгрова, в соединении с методом оценки тригсумм и интегралов Корпута, поменяли показатель θ таким образом на

$$\frac{279}{308}+\varepsilon, \qquad \frac{91}{96}+\varepsilon, \qquad \frac{13}{17}+\varepsilon.$$

А. Балог, А. Перелли [117] при условиях $1 \le a < q$, $(a,q)=1$ и $y \le x$ нашли оценку

$$S_1\left(\frac{a}{q};x,y\right) \ll \left(x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}+\frac{y}{q^{\frac{1}{2}}}+x^{\frac{3}{10}}y^{\frac{1}{2}}\right)\mathscr{L}^{100}$$

которая при $y \ge x^{\frac{3}{5}}\mathscr{L}^{200}$ является нетривиальной.

Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо [59] на базе метода оценок тригсумм с простыми числами И.М. Виноградова и новых теорем о плотности нулей L-рядов Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы, нашли новый метод, с помощью которого доказали для суммы вида $S(\alpha;x,y)$ нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^b)$ и формулу с остаточным членом в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$ при условии

$$y \ge x^{\theta}, \qquad \theta=\frac{2}{3}+\varepsilon.$$

В 1991 г. Т. Жан [60], используя новый метод Пан Чен-дона и Пан Чен-бьяо и оценку М. Ютилы [118] о четвёртом моменте L-функций Дирихле, заменил показатель θ на

$$\frac{5}{8}+\varepsilon.$$

И.М. Виноградов [6] впервые в 1939 г. исследовал короткие нелинейные тригсуммы с простыми числами для суммы следующего вида

$$S_k(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)e(\alpha n^k),$$

$$\alpha=\frac{a}{q}+\lambda, \qquad (a,q)=1, \qquad 1\le q\le\tau, \qquad |\lambda|\le\frac{1}{q\tau},$$

при условии, что α является рациональным числом вида $\frac{a}{q}$, $(a,q)=1$. При выполнении условий $x^{\frac{2}{3}+\varepsilon_1}q \le y \le x$ и $q \ge \mathscr{L}^{\varepsilon_2}$, он показал, что

$$S_k\left(\frac{a}{q};x,y\right) \ll yq^{-\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

где ε, ε_1, ε_2 — любые малые положительные константы.

Короткие квадратичные тригонометрические суммы с простыми числами как в больших дугах, так и в малых дугах изучили Лю Дж. и Тао Ж. [62]. Они в предположении выполнения расширенной гипотезы Римана при условии

$$y \ge x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}, \tag{i}$$

показали, для любого $A>0$ существуют константы $c_i>0$, $i=1,2,3$, что справедливо соотношение

$$S_2(\alpha;x,y) = \begin{cases} M(\alpha;x,y) + O\left(\dfrac{y}{\mathscr{L}^A}\right), & q \le \mathscr{L}^{c_1}, \quad |\lambda| \le \dfrac{1}{xy\mathscr{L}^{c_2}}; \\ O\left(\dfrac{y}{\mathscr{L}^A}\right), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$M(\alpha;x,y) = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{h=1\\(h,q)=1}}^{q} e\left(-\frac{ah^k}{q}\right)\int\limits_{x-y}^{x} e(\lambda u^k)du, \qquad \tau = \frac{y^3}{x\mathscr{L}^{c_3}}.$$

Затем они получили эти результаты безусловно при

$$y \ge x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}. \tag{ii}$$

При этом использовали метод оценки тригсумм с простыми числами И.М. Виноградова, теоремы о плотности нулей L-рядов Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы и оценку Ютилы [118] о четвёртом моменте L-функций Дирихле.

Нетривиальную оценку суммы вида $S_k(\alpha;x,y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$, $\tau = x^{k-\frac{2}{2k+3}}P^{-1}$ при условии $y \ge x^{1-\frac{1}{2k+3}+\varepsilon}$ доказал А.В. Кумчев [67].

В 2016 г. З.Х. Рахмонов и Ф.З. Рахмонов [73, 74], используя метод оценки тригсумм с простыми числами И.М. Виноградова с использованием метода работы [75] и результатами работ [76, 78], показали, что, если A — абсолютная константа, то при условии

$$y \geq x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8A+151},$$

на малых дугах $\mathfrak{m}\left(\mathscr{L}^{32(A+20)}\right)$, $\tau = y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(A+20)}$, имеет место оценка

$$S_3(\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}^A}.$$

Используя этот же метод они в работе [79] для коротких кубических тригсумм с функцией Мёбиуса доказали оценку вида

$$\sum_{x-y<n\leq x} \mu(n)e(\alpha n^3) \ll \frac{y}{\mathscr{L}^B},$$

в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(B+18)})$ при условии $y \geq x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+944}$ и $\tau = y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}$.

Короткие тригсуммы Германа Вейля следующего вида

$$T(\alpha, x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e(\alpha m^n),$$

при $n = 2, 3, 4$ в больших дугах были рассмотрены в работах [80–88]. Для произвольного фиксированного n эти суммы полностью исследованы в работах [89–99]. Эти результаты совместно с оценками коротких тригсумм Германа Вейля в малых дугах [100, 101] были использованы при нахождении асимптотических формул в в задачах Варинга и Эстермана с почти равными слагаемыми, в том числи были применены к проблеме о распределении дробных частей значений полинома, аргумент которого берёт значения из коротких отрезков [111]. В частности, было доказано, что если α — иррациональное, тогда последовательность $\{\alpha m^2\}$, $x - y < m \leq x$ при условии $y \geq \ln^3 x$, $y \to \infty$ будет равномерно распределена по модулю единица.

1.2. Краткий исторический обзор по аддитивным задачам с почти равными слагаемыми

Как уже была отмечена задача о представлении какой-то последовательности натуральных чисел в виде суммы ограниченного числа слагаемых указанного вида называется аддитивной теории чисел. Классическим аддитивным проблемам принадлежат следующие задачи:

- тернарная проблема Гольдбаха о представимости нечётных чисел суммой трёх простых чисел;
- задача Эйлера или бинарная проблема Гольдбаха о представимости чётных чисел как суммы двух простых чисел;
- теорема Лагранжа о представимости натуральных чисел в виде суммы не более четырёх квадратов натуральных чисел и её обобщение, предложенное Варингом о представимости всех достаточно больших натуральных чисел как суммы ограниченного число степеней натуральных чисел;
- проблема Варинга-Гольдбаха о представимости любого достаточно большого натурального числа как суммы ограниченного количество степеней простых чисел;
- утверждение Эстермана о представимости натуральных чисел $N > N_0$ в виде

$$p_1 + p_2 + m^k = N.$$

Решение этих классических аддитивных проблем становится гораздо труднее, если их рассматривать когда все слагаемые почти равны.

Э.М. Райт [119] впервые рассмотрел аддитивную проблему с почти равными слагаемыми относящейся к проблеме Варинга, точнее к теореме Лагранжа о представлении любого натурального числа как суммы четырёх квадратов. Он показал, что почты все большие натуральные числа N можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} &N = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2, \\ &\left| n_j - \left(\frac{N}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \right| \le N^{\frac{3}{10}}, \qquad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Тернарную проблему Гольдбаха с почти равными слагаемыми впервые решил К.В. Хазелгров [53]. Воспользовавшись для суммы $S_1(\alpha; x, y)$ своей нетривиальной оценкой в $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^b)$ и асимптотической формулой $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$, он доказал асимптотическую формулу для количества решений диофантова уравнения вида:

$$p_1 + p_2 + p_3 = N, \qquad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \le H, \qquad H \ge N^{\theta}, \qquad \theta = \frac{63}{64} + \varepsilon.$$

Такую тернарную задачу рассмотрела С.Ю. Фаткина [112]. Она получила асимптотическую формулу для количества решений диофантова уравнения вида $N = p_1 + p_2 + [\sqrt{2}p_3]$ в простых числах p_1, p_2, p_3, при

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \le H, \quad i = 1, 2, \qquad \left| [\sqrt{2}p_3] - \frac{N}{3} \right| \le H, \qquad H \ge N^{\frac{5}{8}} \ln^c N.$$

З.Х. Рахмонов с учениками в статьях [94, 107, 109, 110] решили задачу Варинга с почти равными слагаемыми при $n = 3, 4, 5$, вернее были найдены для числа решений представлений натурального числа $N > N_0$ в виде суммы степеней натуральных чисел x_i, $i=1,\ldots,2^n+1$ асимптотические формулы при условии

$$\left|x_i-\left(\frac{N}{2^n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\right|\le H,\qquad H\ge N^{\frac{1}{n}-\theta(n)+\varepsilon};$$

в котором

$$\theta(3)=\frac{1}{30},\qquad \theta(4)=\frac{1}{108},\qquad \theta(5)=\frac{1}{340}.$$

Кроме того была получена асимптотическая формула [80, 82, 83, 105, 106] в общем тернарной задаче Эстермана с почти равными слагаемыми о представимости большого натурального числа в следующем виде

$$p_1+p_2+m^n=N,$$

где p_1, p_2 — простые числа и m — натуральное число, удовлетворяющих условиям

$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\le H,\quad i=1,2,\qquad \left|m^n-\frac{N}{3}\right|\le H,\qquad H\ge N^{1-\theta(n)}\ln^{c_n}N,$$

соответственно при

$$\begin{aligned}\theta(2)&=\frac{1}{4},\qquad c_2=2;\\ \theta(3)&=\frac{1}{6},\qquad c_3=3;\\ \theta(4)&=\frac{1}{12},\qquad c_4=\frac{40}{3}.\end{aligned}$$

П.З. Рахмонов [113, 114] обобщил тернарную задачу Эстермана для нецелых показателей с почти равными слагаемыми, и при любом фиксированном c, нашёл асимптотическую формулу для количества решений диофантова уравнения вида

$$p_1+p_2+[n^c]=N,$$

где p_1, p_2 — простые числа и n — натуральное число с условиями

$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\le H,\quad i=1,2,\qquad \left|[n^c]-\frac{N}{3}\right|\le H,\qquad H\ge N^{1-\frac{1}{2c}}\ln^2 N.$$

Дж. Лю и Ж. Тао [62–66] нашли решения задачи Гольдбаха-Варинга с почти равными слагаемыми для квадратов, и доказали теорему Х.Л Гена [31] о представлении натурального N, $N\equiv 5 \pmod{24}$ в следующем виде

$$N=p_1^2+\ldots+p_5^2,\qquad \left|p_j-\sqrt{\frac{N}{5}}\right|\le H,\quad H\ge N^{\frac{11}{23}+\varepsilon}.$$

Они [64] также используя для суммы вида $S_2(\alpha,x,y)$, условной (в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана) оценкой (i) доказали задачу Эстермана для квадратов простых чисел с почти равными слагаемыми, конкретнее показали, что число N представимо в следующем виде

$$N=p_1+p_2+p_3^2,$$

где

$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\le H,\quad i=1,2,\qquad \left|p_3^2-\frac{N}{3}\right|\le H,\qquad H\ge N^{\theta},$$

при

$$\theta=\frac{5}{6}+\varepsilon.$$

Потом они [64], используя для суммы вида $S_2(\alpha,x,y)$ безусловной оценкой (ii), получили эти результаты при

$$\theta=\frac{27}{32}+\varepsilon.$$

Глава 2

Короткие линейные и короткие кубические тригонометрические суммы с простыми числами

2.1. Постановка проблемы и известные результаты

Согласно утверждению Дирихле о приближении вещественных чисел рациональными числами, любое из α из отрезка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ можно представить в следующем виде:

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1. \qquad 1 \le q \le \tau, \qquad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}.$$

С помощью $\mathfrak{M}(P)$ будем обозначать те числа α, для которых $q \le P$, через $\mathfrak{m}(P)$ оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

Виноградов И.М. [6, 52] впервые изучал короткие тригсуммы с простыми числами. Для сумм следующего вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n) e(\alpha n^k),$$

при $k = 1$, воспользовавшись своим методом оценки сумм с простыми числами, он получил оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$, $\tau = x^{\frac{1}{3}}$, являющиеся нетривиальным при условии $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$.

Потом Хейзелгроув С.Б. [53], Статулявычус В. [54], Пан Ч.Д и Пан Ч.Б. [59], Тао Ж. [60] для сумм вида $S_1(\alpha; x, y)$, при условии $y \ge x^{\theta}$, нашли нетривиальную оценку в малых дугах и изучия её поведения в больших дугах, находили асимптотическую формулу в тернарной проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми со следующими условиями $|p_i - N/3| \le H$,

$H = N^{\theta}$, соответственно при

$$\theta = \frac{63}{64} + \varepsilon, \qquad \frac{279}{308} + \varepsilon, \qquad \frac{2}{3} + \varepsilon, \qquad \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Дж. Лю и Ж Тао [64] в малых дугах и больших дугах, найдя нетривиальную оценку суммы вида $S_2(\alpha; x, y)$ при условии $y \geq x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$ показали, что большое натуральное число N представимо в виде:

$$N = p_1 + p_2 + p_3^2, \qquad \left| p_j - \frac{N}{3} \right| \leq H, \qquad \left| p_3^2 - \frac{N}{3} \right| \leq H, \qquad H \geq N^{\frac{27}{32}+\varepsilon}.$$

Далее в работе [65, 66] доказали проблему Хуа о представимости большого натурального числа как суммы 5-ти квадратов почти равных простых чисел и показали, что всякое натуральное число N, $N \equiv 5 \pmod{24}$ представляется в виде

$$N = p_1^2 + \ldots + p_5^2, \quad \left| p_j - \sqrt{\frac{N}{5}} \right| \leq H, \quad H \geq N^{\frac{9}{20}+\varepsilon}.$$

Нетривиальную оценку для $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$, $\tau = x^{k-\frac{2}{2k+3}} P^{-1}$ при условии $y \geq x^{1-\frac{1}{2k+3}+\varepsilon}$ нашёл А.В.Кумчев [67].

В 2016 году З.Х. Рахмонов и Ф.З. Рахмонов [72–74], пользуясь методом оценки тригсумм с простыми числами И.М. Виноградова, нашли нетривиальную оценку следующего вида

$$S_3(\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}^B},$$

на малых дугах $\mathfrak{m}\left(\mathscr{L}^{32(B+20)}\right)$, $\tau = y^5 x^{-2} \mathscr{L}^{-32(B+20)}$ при условии $y \geq x^{\frac{4}{5}} \mathscr{L}^{8B+151}$, где B — абсолютная константа ([70, 75, 103]).

В данной главе воспользовавшись оценкой второго момента L-функций Дирихле в критической прямой ([120, 121]), получены следующие результаты:

- найдена асимптотическая формула для суммы вида $S_1(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг (см. теорему 2.1);

- найдена асимптотическая формула для суммы $S_3(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг (см. теорему 2.2);

- найдена нетривиальная оценка суммы для $S_3(\alpha; x, y)$ в больших дугах кроме малой окрестности их центров (см. теорему 2.3).

2.2. Вспомогательные леммы

Лемма 2.1. *Допустим, что* χ_q *— примитивный характер по модулю* q. *Тогда справедливо равенство*

$$\tau(\overline{\chi}_q)\chi_q(n) = \sum_{m=1}^{q} \overline{\chi}_q(m) \exp\frac{2\pi imn}{q},$$

в котором

$$\tau(\chi_q) = \sum_{m=1}^{q} \chi_q(n) \exp\frac{2\pi im}{q}; \qquad |\tau(\chi_q)| = \sqrt{q}.$$

Доказательство см. [122].

Лемма 2.2. *Допустим* $f(u)$ *— действительная функция, и* $g(u)$ *— монотонная функция и выполняются условия:* $f'(u)$ *— монотонная функция,* $|f'(u)| \geq m_1 > 0$ *и* $|g(u)| \leq M$. *Тогда имеет оценка:*

$$\int_a^b g(u)e(f(u))du \ll \frac{M}{m_1}.$$

Доказательство см. [123]

Лемма 2.3. *Допустим* $f(u)$ *— действительная функция, и* $g(u)$ *— монотонная функция, и удовлетворяют условиям:* $f'(u)$ *— монотонная функция,* $|f''(u)| \geq m_2 > 0$ *и* $|g(u)| \leq M$. *Тогда имеет оценка:*

$$\int_a^b g(u)e(f(u))du \ll \frac{M}{\sqrt{m_2}}.$$

Доказательство см. [123]

Лемма 2.4. *Допустим* $2 \le T_0 \le x$, $\rho = \beta + i\gamma$ — *нетривиальные нули функции* $L(s,\chi)$. *Тогда имеет место следующая формула*

$$\psi(x,\chi) = E_0 x - \sum_{|\gamma|\le T_0} \frac{x^\rho}{\rho} + R_1(x,T_0,\chi), \quad R_1(x,T_0,\chi) \ll \frac{x\mathscr{L}^2}{T_0},$$

где $E_0 = 1$, *если* $\chi = \chi_0$; $E_0 = 0$, *если* $\chi \ne \chi_0$.

Доказательство см. [124]

Лемма 2.5. *При подходящем* $c > 0$ *функция* $L(s,\chi)$, $s = \sigma + it$ *не имеет нулей в области*

$$\sigma \ge 1 - \delta(q,t), \quad \delta(q,t) = \frac{c}{\max(\ln q, \ln^{3/4}(|t|+3)\ln^{3/4}\ln(|t|+3))},$$

для всех характеров χ *по* $\bmod q$, *за исключением, быть может простого действительного нуля* β_1 *у* L*–функции, определенной исключительным характером* χ_1.

Доказательство см. [125]

Лемма 2.6. *Количество нулей* ρ *функции* $L(s,\chi)$, $\chi \pmod q$, *для которых* $T \le |\gamma| \le T+1$, *не превышает* $\ln qT$.

Доказательство см. [122].

Лемма 2.7. *Для каждого* $\varepsilon > 0$ *имеется* $c = c(\varepsilon)$ *такое, что, если* χ_1 — *вещественный характер по модулю* q *и* β_1 — *вещественный нуль* $L(s,\chi_1)$, *тогда*

$$\beta_1 \le 1 - \frac{c(\varepsilon)}{q^\varepsilon}.$$

Доказательство см. [122].

Лемма 2.8. *Допустим ε сколь угодна малая положительная константа, и пусть $T^{\frac{35}{108}+\varepsilon}\le H\le T$, тогда имеют место оценки*

$$\sum_{\chi \bmod q}(N(u,T+H,\chi)-N(u,T,\chi))\ll\begin{cases}(qH)^{\frac{4}{3-2u}(1-u)}(\ln qH)^9, & \textit{для } \dfrac{1}{2}\le u\le\dfrac{3}{4},\\ (qH)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}, & \textit{для } \dfrac{3}{4}\le u\le 1,\end{cases}$$

$$\sum_{\chi \bmod q}(N(u,T+H,\chi)-N(u,T,\chi))\ll(qH)^{\frac{8}{3}(1-u)}(\ln qH)^{216}.$$

Доказательство см. [121].

Лемма 2.9. *Допустим a, k и q — натуральные числа, $(a,q)=1$,*

$$\tau(\chi,a,k)=\sum_{h=1}^{q}\chi(h)e\left(\frac{ah^k}{q}\right),$$

Тогда имеет место неравенство

$$|\tau(\chi,a,k)|\le 2(\tau(q))^{\frac{\ln k}{\ln 2}}\sqrt{q}.$$

Доказательство Утверждение леммы следует из задач $8.\alpha$) и $8.\beta$), стр. 103 учебника [126].

2.3. Поведение коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг

Как мы уже отметили в начале этой главы согласно теореме Дирихле о приближении вещественных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-\text{æ},1-\text{æ}]$, $\text{æ}\tau=1$ можно представить в виде:

$$\alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\quad (a,q)=1,\qquad 1\le q\le\tau,\qquad |\lambda|\le\frac{1}{q\tau}.$$

С помощью $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \leq P$, с помощью $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

В этом параграфе используя оценку о втором моменте L-функций Дирихле в критической прямой в малой окрестности

$$|\lambda| = \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{18\pi x y^2},$$

центра больших дуг $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$, доказана асимптотическая формула для суммы

$$S_1(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n) e(\alpha n).$$

Теорема 2.1. *Пусть $x \geq x_0$, A и b — любые фиксированные неотрицательные числа, $1 \leq q \leq \mathscr{L}^b$,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1.$$

Тогда при условии $|\lambda| \leq \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$ и $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}^{1{,}5A+0{,}25b+18}$ имеет место формула

$$S_1(\alpha; x, y) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \frac{\sin \pi\lambda y}{\pi\lambda} e\left(\lambda\left(x - \frac{y}{2}\right)\right) + O\left(y\mathscr{L}^{-A}\right).$$

Доказательство теоремы. Не ограничивая общности предполагаем, что для параметра y справедливо условие

$$y \leq x\mathscr{L}^{-A-0{,}5b-3}. \tag{2.3.1}$$

Имеем

$$S_3(\alpha;x,y)=\sum_{\substack{x-y<n\le x\\(n,q)=1}}\Lambda(n)e(\alpha n)+O(\mathscr{L}^2)=$$

$$=\sum_{\substack{x-y<n\le x\\(n,q)=1}}\Lambda(n)e\left(\left(\frac{a}{q}+\lambda\right)n\right)\sum_{\substack{h=1\\h\equiv n\,(\mathrm{mod}\ q)}}^{q}1+O(\mathscr{L}^2)=$$

$$=\sum_{h=1}^{q}e\left(\frac{ah}{q}\right)\sum_{\substack{x-y<n\le x\\(n,q)=1,\ h\equiv n\,(\mathrm{mod}\ q)}}\Lambda(n)e\left(\lambda n\right)+O(\mathscr{L}^2).$$

Пользуясь свойством ортогональности характеров, затем леммой 2.1, находим

$$S_1(\alpha;x,y)=\sum_{h=1}^{q}e\left(\frac{ah}{q}\right)\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)e\left(\lambda n\right)\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\ \mathrm{mod}\ q}\overline{\chi}(h)\chi(n)+O(\mathscr{L}^2)=$$

$$=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\ \mathrm{mod}\ q}\sum_{h=1}^{q}\overline{\chi}(h)e\left(\frac{ah}{q}\right)\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n)+O(\mathscr{L}^2)=$$

$$=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\ \mathrm{mod}\ q}\chi(a)\tau(\overline{\chi})\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n)+O(\mathscr{L}^2)\qquad(2.3.2)$$

Далее будем применять формулу суммирования Абеля в интегральной виде, имеем:

$$\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n)=-\int\limits_{x-y}^{x}\left(\psi(u,\chi)-\psi(x-y,\chi)\right)de(\lambda u)+$$

$$+e(\lambda x)\left(\psi(x,\chi)-\psi(x-y,\chi)\right)=$$

$$=-\int\limits_{x-y}^{x}\psi(u,\chi)de(\lambda u)+e(\lambda x)\psi(x,\chi)-e(\lambda(x-y))\psi(x-y,\chi).$$

Используя лемму 2.4 когда выполняется условие $T_0=\left(xy^{-1}+|\lambda|x\right)q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{A+3}$,

находим

$$\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n)=-\int\limits_{x-y}^{x}\left(E_0u-\sum_{|\gamma|\le T_0}\frac{u^\rho}{\rho}\right)de(\lambda u)+$$

$$+\,e(\lambda x)\left(E_0x-\sum_{|\gamma|\le T_0}\frac{x^\rho}{\rho}\right)-e(\lambda(x-y))\left(E_0(x-y)-\sum_{|\gamma|\le T_0}\frac{(x-y)^\rho}{\rho}\right)$$

$$-\int\limits_{x-y}^{x}R(u,T_0)2\pi i\lambda e(\lambda u)du+e(\lambda x)R(x,T_0)-e(\lambda(x-y))R(x-y,T_0).$$

Для первого интеграла применяем формулу интегрирования по частям и, используя оценку $R(u,T_0)$ из леммы 2.4, а также, имея в виду значения параметра T_0, находим

$$\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n)=E_0\int\limits_{x-y}^{x}e(\lambda u)du-\sum_{|\gamma|\le T_0}\int\limits_{x-y}^{x}\frac{u^{\rho-1}}{\rho}e(\lambda u)du+O\left(\frac{y}{q^{\frac12}\mathscr{L}^{A+1}}\right)=$$

$$=E_0\frac{\sin\pi\lambda y}{\pi\lambda}e\left(\lambda\left(x-\frac{y}{2}\right)\right)-\sum_{|\gamma|\le T_0}I(\rho,\lambda)+O\left(\frac{y}{q^{\frac12}\mathscr{L}^{A+1}}\right),$$

$$I(\rho,\lambda)=\int\limits_{x-y}^{x}u^{\beta-1}e\left(\lambda u+\frac{\gamma}{2\pi}\ln u\right)du.$$

Полученную формулу подставим в (2.3.2), найдем

$$S_1(\alpha;x,y)=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin\pi\lambda y}{\pi\lambda}e\left(\lambda\left(x-\frac{y}{2}\right)\right)-W(\alpha;x,y)-E_1W_1(\alpha;x,y)+$$
$$+\,O(y\mathscr{L}^{-A}),\qquad(2.3.3)$$

$$W(\alpha;x,y)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\bmod q}\chi(a)\tau(\overline{\chi})\sum_{\substack{|\gamma|\le T_0\\ \rho\ne\beta_1}}I(\rho,\lambda),$$

$$W_1(\alpha;x,y)=\frac{\chi_1(a)\tau(\chi_1)}{\varphi(q)}I(\beta_1,\lambda),$$

где $E_1 = 1$, если по модулю q имеет место вещественный характер χ_1 такой, что $L(s,\chi_1)$ имеет вещественный нуль β_1, $\beta_1 \geq 1 - c/\ln q$ и $E_1 = 0$ в противном случае.

Оценка $|W_1(\alpha;x,y)|$. Используя тривиальные оценки суммы $\tau(\chi_1)$ и интеграла $I(\beta_1,\lambda)$, находим

$$|W_1(\alpha;x,y)| = \left|\frac{\tau(\chi_1)}{\varphi(q)}\int\limits_{x-y}^{x}\frac{u^{\beta_1-1}}{\beta_1}e(\lambda u)du\right| \ll yx^{\beta_1-1}.$$

Применяя лемму 2.7, учитывая,что $q \leq \mathscr{L}^b$, при условии $\varepsilon = (2b)^{-1}$ находим

$$x^{\beta_1-1} = \exp\left((\beta_1-1)\mathscr{L})\right) \leq \exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\mathscr{L}}{q^{\varepsilon}}\right) \leq \exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\mathscr{L}}{\mathscr{L}^{b\varepsilon}}\right) = \exp(-c(\varepsilon)\sqrt{\mathscr{L}}).$$

Таким образом

$$|W_1(\alpha;x,y)| \ll y\exp(-c(\varepsilon)\sqrt{\mathscr{L}}) \ll y\mathscr{L}^{-A}. \tag{2.3.4}$$

Оценка $|W(\alpha;x,y)|$. Переходим к оценкам, найдем

$$|W(\alpha;x,y)| \leq \frac{\sqrt{q}}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}|\mathcal{W}(\lambda,\chi)|, \qquad \mathcal{W}(\lambda,\chi) = \sum_{\substack{|\gamma|\leq T_0\\ \rho\neq\beta_1}}|I(\rho,\lambda)|, \tag{2.3.5}$$

где β_1 — вещественный нуль, если по модулю q существует вещественный характер χ_1 такой, что $L(s,\chi_1)$ имеет вещественный нуль $\beta_1 \geq 1 - c/\ln q$. Сумму $|W(\alpha;x,y)|$ оценим в случае $\lambda \geq 0$. Отметим, что случай $\lambda \leq 0$, сводится к случаю $\lambda \geq 0$ с помощью равенства

$$\mathcal{W}(\lambda,\chi) = \sum_{\substack{|\gamma|\leq T_0\\ \rho\neq\beta_1}}\left|\overline{I(\rho,\lambda)}\right| = \sum_{\substack{|\gamma|\leq T_0\\ \rho\neq\beta_1}}\left|\int\limits_{x-y}^{x}u^{\beta-1}e\left(-\lambda u - \frac{1}{2\pi}\gamma\ln u\right)du\right| =$$

$$= \sum_{\substack{|\gamma|\leq T_0\\ \rho\neq\beta_1}}|I(\bar\rho,-\lambda)| = \sum_{\substack{|\gamma|\leq T_0\\ \rho\neq\beta_1}}|I(\rho,-\lambda)| = \mathcal{W}(\chi,-\lambda),$$

Оценим интеграл вида $I(\rho,\lambda)$, используя лемму 2.2, при условии $M = x^{\beta-1}$, $f(u) = \lambda u + \frac{\gamma}{2\pi}\ln u$ и $m_1 = \min f'(u)$, находим

$$|I(\rho,\lambda)| \le \frac{x^{\beta-1}}{\min|f'(u)|} = \frac{x^{\beta}}{\min|xf'(u)|}, \qquad f'(u) = \lambda + \frac{\gamma}{2\pi u} = \frac{\gamma + 2\pi\lambda u}{2\pi u}.$$

Таким образом, используя тривиальную оценку интеграла

$$|I(\rho,\lambda)| \le \int\limits_{x-y}^{x} u^{\beta-1}du \le yx^{\beta-1},$$

найдём

$$|I(\rho,\lambda)| \le x^{\beta}\min\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min|xf'(u)|}\right).$$

Используя неравенства

$$|xf'(u)| = |\gamma + 2\pi\lambda u|\frac{x}{2\pi u} \ge \frac{1}{2\pi}|\gamma + 2\pi k\lambda u|,$$

эту оценку представляем в следующем виде

$$|I(\rho,\lambda)| \ll x^{\beta}\min\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min|\gamma + 2\pi\lambda u|}\right). \tag{2.3.6}$$

Множество нулей вида $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L(s,\chi)$ в случае $|\gamma| \le T_0$ разобьём на множества D_1, D_2 и D_3 следующим образом:

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{\rho:\ -T_0 \le \gamma < -2\pi\lambda x - \frac{x}{y}\right\}, \\ D_2 &= \left\{\rho:\ -2\pi\lambda x - \frac{x}{y} \le \gamma \le -2\pi\lambda(x-y) + \frac{x}{y}\right\}, \\ D_3 &= \left\{\rho:\ -2\pi\lambda(x-y) + \frac{x}{y} < \gamma \le T_0\right\}. \end{aligned}$$

Вводим обозначение $\mathcal{W}_j(\lambda,\chi)$, $j = 1,\ 2,\ 3$. $\mathcal{W}_j(\lambda,\chi)$ — это сумма модулей интеграла вида $I(\rho,\lambda)$ по нулям ρ, которые принадлежат множеству D_j и представляем сумму $\mathcal{W}(\lambda,\chi)$ в формуле (2.3.5) в следующем виде:

$$\mathcal{W}(\lambda,\chi) = \mathcal{W}_1(\lambda,\chi) + \mathcal{W}_2(\lambda,\chi) + \mathcal{W}_3(\chi,\lambda). \tag{2.3.7}$$

Оценка $\mathcal{W}_1(\lambda,\chi)$**.** Прибавляем слагаемое $2\pi\lambda u$, $x-y\le u\le x$ ко всем членам неравенства, с помощью которых определяется множество D_1. Находим

$$D_1=\left\{\rho:\ -T_0+2\pi\lambda u\le\gamma+2\pi\lambda u<-2\pi\lambda x+2\pi\lambda u-\frac{x}{y}\right\}.$$

В интервале $x-y\le u\le x$ функция $2\pi\lambda u$ возрастает монотонно, из-за этого для правой границы множества D_1, находим

$$-2\pi\lambda x+2\pi\lambda u-\frac{x}{y}\le-\frac{x}{y}.$$

Таким образом, если ρ относится множеству D_1, тогда имеет место соотношение $\gamma+2\pi\lambda u<-\frac{x}{y}$, из-за этого для функции $\gamma+2\pi\lambda u$ в промежутке $x-y\le u\le x$ имеет место неравенство

$$\min|\gamma+2\pi\lambda u|=-\max(\gamma+2\pi\lambda u)=-\gamma-2\pi\lambda x\ge\frac{x}{y},\quad \text{если}\quad \rho\in D_1.$$

Из данного неравенства с учётом второй оценки (2.3.6), найдем

$$\mathcal{W}_1(\lambda,\chi)\ll\sum_{\rho\in D_1}\frac{x^\beta}{-\gamma-2\pi\lambda x}.$$

Нули в

$$D_1=\left\{\rho:\ -T_0\le\gamma<-2\pi\lambda x-\frac{x}{y}\right\}=\left\{\rho:\ \frac{x}{y}\le-\gamma-2\pi\lambda x<T_0-2\pi\lambda x\right\},$$

разбиваем на классы $D_{11},\ \ldots,\ D_{1r}$, $r\ll T_0x^{-1}y$ в таком порядке образом: в класс D_{1n} приписиваем те нули ρ, для которых имеют место условия:

$$\frac{nx}{y}<-\gamma-2\pi\lambda x\le\frac{(n+1)x}{y}.$$

Из -за этого

$$\mathcal{W}_1(\lambda,\chi)\ll\sum_{n=1}^{r}\sum_{\rho\in D_{1n}}\frac{x^\beta}{-\gamma-2\pi\lambda x}\le\frac{y}{x}\sum_{n=1}^{r}\sum_{\rho\in D_{1n}}\frac{x^\beta}{n}\le$$
$$\le\frac{y\mathscr{L}}{x}\max_{1\le n\le r}\sum_{\rho\in D_{1n}}x^\beta\le\frac{y\mathscr{L}}{x}\max_{|T|\le T_0}\sum_{T-\frac{x}{y}<\gamma\le T}x^\beta.$$

Оценка $\mathcal{W}_3(\chi,\lambda)$. Добавляя выражение $2\pi\lambda u$, $x-y\le u\le x$ ко всем трём членам неравенства, которые определяют множество D_3, найдем

$$D_3=\left\{\rho:\ 2\pi\lambda u-2\pi\lambda(x-y)+\frac{x}{y}<\gamma+2\pi\lambda u\le T_0+2\pi\lambda u\right\}.$$

В промежутке $x-y\le u\le x$ функция $2\pi\lambda u$ монотонно возрастает, и для левой границы множества D_3, находим

$$2\pi\lambda u-2\pi\lambda(x-y)+\frac{x}{y}\ge\frac{x}{y}.$$

Поэтому, если ρ из множества D_3, тогда имеет место неравенство $\gamma+2\pi\lambda u>\frac{x}{y}$, следовательно для функции $\gamma+2\pi\lambda u$ в промежутке $x-y\le u\le x$ справедливо неравенство

$$\min|\gamma+2\pi\lambda u|=\min(\gamma+2\pi\lambda u)=\gamma+2\pi\lambda(x-y)\ge\frac{x}{y},\qquad \text{при}\qquad \rho\in D_3.$$

Применяя это неравенство и оценки (2.3.6), находим

$$\mathcal{W}_3(\chi,\lambda)\ll\sum_{\rho\in D_3}\frac{x^\beta}{\gamma+2\pi\lambda(x-y)}.$$

А теперь нули в

$$D_3=\left\{\rho:\ \frac{x}{y}\le\gamma+2\pi\lambda(x-y)<T_0+2\pi\lambda(x-y)\right\},$$

разбиваем на следующие классы $D_{31},\ \ldots,\ D_{3r}$, $r\ll T_0x^{-1}y$ таким образом: в класс D_{3n} приписываем те нули ρ, для которых:

$$\frac{nx}{y}<\gamma+2\pi\lambda(x-y)\le\frac{(n+1)x}{y},\qquad \text{если}\qquad 1\le n\le r.$$

Из-за этого

$$\mathcal{W}_3(\chi,\lambda)\ll\sum_{n=1}^{r}\sum_{\rho\in D_{3n}}\frac{x^\beta}{\gamma+2\pi\lambda(x-y)}\le\frac{y}{x}\sum_{n=1}^{r}\sum_{\rho\in D_{3n}}\frac{x^\beta}{n}\le$$
$$\le\frac{y\mathscr{L}}{x}\max_{1\le n\le r}\sum_{\rho\in D_{1n}}x^\beta\le\frac{y\mathscr{L}}{x}\max_{|T|\le T_0}\sum_{T-\frac{x}{y}<\gamma\le T}x^\beta.$$

Оценка $\mathcal{W}_2(\lambda,\chi)$. Множество D_2 представим в следующем виде

$$D_2=\left\{\rho:\ -2\pi\lambda x-\frac{x}{y}\le\gamma\le-2\pi\lambda(x-y)+\frac{x}{y}\right\}=$$
$$=\left\{\rho:\ T_1-2\pi\lambda y-\frac{2x}{y}\le-\gamma\le T_1\right\},\qquad T_1=2\pi\lambda x+\frac{x}{y}\le T_0,$$

учитывая, что при условии $\lambda\le x\left(2\pi y^2\right)^{-1}$ для длины множества D_2 имеет место неравенство

$$2\pi\lambda y+\frac{2x}{y}\le 2\pi\frac{x}{2\pi y^2}y+\frac{2x}{y}=\frac{3x}{y},$$

и используя тривиальную оценку интеграла $I(\rho,\lambda)$, т.е первую оценку (2.3.6), находим

$$\mathcal{W}_2(\lambda,\chi)\le\sum_{\rho\in D_2}|I(\rho,\lambda)|\ll\frac{y}{x}\sum_{\rho\in D_2}x^\beta\le$$
$$\le\frac{3y}{x}\max_{|T|\le T_0}\sum_{T-\frac{x}{y}\le-\gamma\le T}x^\beta\ll\frac{y}{x}\max_{|T|\le T_0}\sum_{T-\frac{x}{y}\le\gamma\le T}x^\beta.$$

Полученные оценки $\mathcal{W}_1(\lambda,\chi)$, $\mathcal{W}_3(\chi,\lambda)$ и $\mathcal{W}_3(\chi,\lambda)$ подставляем в в (2.3.7), а потом в (2.3.5). Находим

$$|W(\alpha;x,y)|\ll\frac{y\mathscr{L}^2}{\sqrt{q}\,x}\max_{|T|\le T_0}\mathcal{V}_q\left(T,\frac{x}{y}\right),\tag{2.3.8}$$
$$\mathcal{V}_q(T,U)=\sum_{\chi\bmod q}\ \sum_{T-U<\gamma\le T}x^\beta,\qquad U\le T.$$

При оценке двойной суммы $\mathcal{V}_q=\mathcal{V}_q(T,U)$ используем плотностные теоремы в узких прямоугольниках критической полосы для нулей L-рядов Дирихле. Находим

$$\mathcal{V}_q=\sum_{\chi\bmod q}\ \sum_{T-U<\gamma\le T}\left(\mathscr{L}\int_0^\beta x^u du+1\right)=\mathscr{L}\int_0^1 x^u\sum_{\chi\bmod q}\ \sum_{\substack{T-U<\gamma\le T\\ \beta\ge u}}du+\sum_{\chi\bmod q}\ \sum_{T-U<\gamma\le T}1$$

$$=\mathscr{L}\int_0^1 x^u\sum_{\chi\bmod q}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-U,\chi)\right)du+\sum_{\chi\bmod q}\left(N(T,\chi)-N(T-U,\chi)\right).$$

Из этого, имея в виду, что нетривиальные нули $\rho=\beta+i\gamma$ находятся симметрично относительно прямой $\sigma=0.5$, получим

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_q(T,U)&\le\mathscr{L}\int\limits_{0,5}^{1}x^u\sum_{\chi \bmod q}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-U,\chi)\right)du+\\&+\left(\frac{\sqrt{x}\mathscr{L}}{2}+1\right)\sum_{\chi \bmod q}\left(N(T,\chi)-N(T-U,\chi)\right)\le\\&\le\mathscr{L}\max_{u\ge0,5}x^u\sum_{\chi \bmod q}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-U,\chi)\right)+\\&+\left(\frac{\sqrt{x}\mathscr{L}}{2}+1\right)\sum_{\chi \bmod q}\left(N(T,\chi)-N(T-U,\chi)\right)\le\\&\le 2\mathscr{L}\max_{u\ge0,5}x^u\sum_{\chi \bmod q}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-U,\chi)\right).\end{aligned}$$

По условиям леммы 2.5 функция $L(u+it,\chi)$ при

$$u\ge1-\delta(q,t),\qquad \delta(q,t)=\frac{c_1}{\max\left(\ln q,\ \left(\ln(t+3)\ln\ln(t+3)\right)^{\frac34}\right)},$$

нулей не имеет, для всех характеров $\chi \mod q$, кроме может быть простого действительного нуля β_1 у L-функции, определенной исключительным характером χ_1. Учитывая неравенство $\delta(q,T)\ge\delta(q,T_0)$, найдём

$$\mathcal{V}_q\left(T,U\right)\le 2\mathscr{L}\max_{0,5\le u\le1-\delta}x^u\sum_{\chi \bmod q}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-U,\chi)\right).\qquad(2.3.9)$$

Это неравенство при условии $U=\frac{x}{y}$ подставляя в (2.3.8), имеем

$$|W(\alpha;x,y)|\ll\frac{y\mathscr{L}}{\sqrt{q}\,x}\max_{|T|\le T_0}\max_{0,5\le u\le1-\delta}x^u\sum_{\chi \bmod q}\left(N(u,T,\chi)-N\left(u,T-\frac{x}{y},\chi\right)\right).$$

Из неравенств $|T|\le T_0=\left(xy^{-1}+|\lambda|x\right)q^{\frac12}\mathscr{L}^{A+3}$, $0\le\lambda\le x\left(2\pi y^2\right)^{-1}$ и условия (2.4.19), находим

$$\frac{T}{(xy^{-1})^3}\le\left(\frac{y^2}{x^2}+\lambda\frac{y^3}{x^2}\right)q^{\frac12}\mathscr{L}^{A+3}\le\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{2\pi x}\right)q^{\frac12}\mathscr{L}^{A+3}\le1.$$

Поэтому, в последней сумме по $\chi \bmod q$ имеет место условие $\frac{x}{y} \geq T^{\frac{1}{3}}$, т.е. к этой сумме применима плотностная теорема Ж.Тао (лемма 2.8), и полагая $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$, найдём

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2, \tag{2.3.10}$$

где

$$\mathscr{A}_1 = \frac{y\mathscr{L}^{12}}{\sqrt{q}\,x} \max_{0,5\leq u\leq 0,75} x^u \left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{4-4u}{3-2u}},$$
$$\mathscr{A}_2 = \frac{y\mathscr{L}}{\sqrt{q}\,x} \max_{0,75\leq u\leq 1-\delta} x^u \left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}.$$

Оценка $\mathscr{A}_1$. Находим

$$\mathscr{A}_1 = \frac{q^{1,5}x\mathscr{L}^{12}}{y} \max_{0,5\leq u\leq 0,75} f_1(u), \qquad f_1(u) = x^u \left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{1}{u-1,5}} > 0,$$
$$f_1'(u) = f_1(u)\left(\ln x + \frac{\ln\left(\frac{y}{qx}\right)}{(u-1,5)^2}\right) = \frac{f_1(u)}{(u-1,5)^2}\ln\frac{y}{qx^{-u^2+3u-1,25}}.$$

Учитывая условия $y \geq x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}$ и $q \leq \mathscr{L}^b$, а также равенство

$$\max_{0,5\leq u\leq 0,75}\left(-u^2+3u-1,25\right) = \left(-u^2+3u-1,25\right)\Big|_{u=0,75} = \frac{7}{16},$$

получаем неравенство

$$\ln\frac{y}{qx^{-u^2+3u-1,25}} \geq \ln\frac{yx^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}}{\mathscr{L}^b x^{\frac{7}{16}}} \geq \ln x^{\frac{3}{16}}\mathscr{L}^{1,5A+18-0,75b} > \ln x^{\frac{1}{8}} > 0.$$

Из этого неравенства находим, что в интервале $0,5 \leq u \leq 0,75$ имеет место неравенство

$$f_1'(u) \geq \frac{f(u)}{(u-1,5)^2}\ln x^{\frac{1}{8}} > 0,$$

т.е. $f_1(u)$ возрастающая функция на отрезке $0,5 \le u \le 0,75$. Используя эти свойства и неравенство $y \ge x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}$, найдем

$$\mathscr{A}_1 = \frac{xq^{1,5}\mathscr{L}^{12}}{y}x^{\frac{3}{4}}\left(\frac{qx}{y}\right)^{-\frac{4}{3}} = y \cdot \frac{x^{\frac{5}{12}}q^{\frac{1}{6}}\mathscr{L}^{12}}{y^{\frac{2}{3}}} = y \cdot \left(\frac{x^{\frac{5}{8}}q^{\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{18}}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \le$$
$$\le y \cdot \left(\frac{x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{0,25b+18}}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Оценка $\mathscr{A}_2$. Далее найдём

$$\mathscr{A}_2 = \frac{y^{3-\varepsilon}\mathscr{L}^3}{q^{2,5-\varepsilon}x^{3-\varepsilon}} \max_{0,75 \le u \le 1-\delta} f_2(u), \qquad f_2(u) = x^u\left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{2}{u}} > 0, \qquad \delta = \delta(q, T_0).$$
$$f_2'(u) = f_2(u)\left(\ln x + \frac{\ln\left(\frac{y}{qx}\right)}{u^2}\right) = \frac{f_2(u)}{u^2}\ln\frac{y}{qx^{1-u^2}}.$$

Из неравенств $y \ge x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+025b+18}$ и $q \le \mathscr{L}^b$, а также из

$$\max_{0,75 \le u \le 1-\delta}\left(-u^2+1\right) = \left(-u^2+1\right)\Big|_{u=0,75} = \frac{7}{16},$$

вытекает, что

$$\frac{y}{qx^{1-u^2}} \ge \frac{x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}}{\mathscr{L}^b x^{\frac{7}{16}}} \ge x^{\frac{3}{16}}\mathscr{L}^{1,5A+18-0,75b}.$$

Из этого неравенство находим, что на промежутке $0,75 \le u \le 1-\delta$ имеет место неравенство

$$f_2'(u) \ge \frac{f_2(u)}{u^2}\ln x^{\frac{3}{16}} > 0,$$

т.е. $f_2'(u)$ неотрицательна и поэтому функция $f_2(u)$ возрастающая в отрезке

$0,75 \le u \le 1-\delta$. Далее, находим

$$\mathscr{A}_2 = \frac{y^{3-\varepsilon}\mathscr{L}^3}{q^{2,5-\varepsilon}x^{3-\varepsilon}}x^{1-\delta}\left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{2}{1-\delta}} = y\cdot\frac{x^{\frac{2\delta}{1-\delta}-\delta+\varepsilon}\mathscr{L}^3}{q^{0,5+\frac{2\delta}{1-\delta}-\varepsilon}y^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}} \le y\cdot\frac{x^{\frac{2\delta}{1-\delta}-\delta+\varepsilon}\mathscr{L}^3}{y^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}} =$$

$$= y\mathscr{L}^3\left(\frac{x^{\frac{\delta+\delta^2+(1-\delta)\varepsilon}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}}}{y}\right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon} = y\mathscr{L}^3\left(\frac{x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}}{y}x^{f(\delta,\varepsilon)}\mathscr{L}^{-1,5A-0,25b-18}\right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon},$$

$$f(\delta,\varepsilon) = \frac{\delta+\delta^2+(1-\delta)\varepsilon}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon} - \frac{5}{8}.$$

Отсюда, и из неравенства $y \ge x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}$, имеем

$$\mathscr{A}_2 \ll y\cdot x^{f(\delta,\varepsilon)\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta}}\mathscr{L}^3.$$

Далее при $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$, используя соотношение

$$f(\delta,\varepsilon)\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta} = -\frac{\delta}{8} + \frac{3}{8}\left(\varepsilon - \frac{\delta}{3} - \frac{\delta^2}{3(1-\delta)}\right) \le -\frac{\delta}{8},$$

находим

$$\mathscr{A}_2 \ll yx^{-0,125\delta}\mathscr{L}^3 \ll y\mathscr{L}^3\exp\left(-0,125\delta\mathscr{L}\right).$$

Используя $\lambda \le x\left(2\pi y^2\right)^{-1}$ и $y \ge x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}$, находим

$$T_0 = \left(\frac{x}{y}+\lambda x\right)q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{A+3} \le \left(\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2\pi y^2}\right)\mathscr{L}^{A+0,5b+3} \le \frac{x^2}{y^2}\mathscr{L}^{A+0,5b+3} < x,$$

используя это неравенство, параметр $\delta = \delta(q,T_0)$ снизу оценим

$$\delta(q,T_0) = \frac{c_1}{\max\left(\ln q,\ \left(\ln(T_0+3)\ln\ln(T_0+3)\right)^{\frac{3}{4}}\right)} \ge$$

$$\ge \frac{c_1}{\max\left(b\ln\mathscr{L},\ \left(\mathscr{L}\ln\mathscr{L}\right)^{\frac{3}{4}}\right)} \ge c_1\mathscr{L}^{-0,76}.$$

Поэтому

$$\mathscr{A}_2 \ll y\mathscr{L}\exp\left(-0,125c_1\mathscr{L}^{0,24}\right) \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Найденную оценку и полученную оценку для суммы $\mathscr{A}_1$ подставляем в (2.3.10), находим

$$|W(\alpha;x,y)| \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Из полученной оценки и оценки (2.3.4) имея в виду (2.3.3) получим утверждение теоремы.

2.4. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг

В данном параграфе, используя теорему о втором моменте L-функций Дирихле на критической прямой в малой окрестности

$$|\lambda| = \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{18\pi xy^2},$$

центра больших дуг $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$, доказана асимптотическая формула для суммы следующего вида

$$S_3(\alpha;x,y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n)e(\alpha n).$$

Теорема 2.2. *Если $x \ge x_0$, A, b — произвольные фиксированные положительные числа, $1 \le q \le \mathscr{L}^b$, тогда при выполнении условий $\lambda \le \left(18\pi xy^2\right)^{-1}$ и $y \ge x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1.5A+0.25b+18}$ имеет место асимптотическая формула:*

$$S_3(\alpha;x,y) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n=1\\(a,q)=1}}^{q} e\left(\frac{an^3}{q}\right) \int\limits_{x-y}^{x} e(\lambda u^k)du + O\left(y\mathscr{L}^{-A}\right).$$

Доказательство. Находим

$$
\begin{aligned}
S_3(\alpha; x, y) &= \sum_{\substack{x-y<n\le x\\(n,q)=1}} \Lambda(n)e(\alpha n^3) + O(\mathscr{L}^2) = \\
&= \sum_{\substack{x-y<n\le x\\(n,q)=1}} \Lambda(n)e\left(\left(\frac{a}{q}+\lambda\right)n^3\right) \sum_{\substack{h=1\\h\equiv n\,(\mathrm{mod}\ q)}}^{q} 1 + O(\mathscr{L}^2) = \\
&= \sum_{h=1}^{q} e\left(\frac{ah^3}{q}\right) \sum_{\substack{x-y<n\le x\\(n,q)=1,\ h\equiv n\,(\mathrm{mod}\ q)}} \Lambda(n)e\left(\lambda n^3\right) + O(\mathscr{L}^2).
\end{aligned}
$$

Пользуясь свойством ортогональности характеров, имеем:

$$
\begin{aligned}
S_3(\alpha; x, y) &= \sum_{h=1}^{q} e\left(\frac{ah^3}{q}\right) \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n)e\left(\lambda n^3\right) \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(h)\chi(n) + O(\mathscr{L}^2) = \\
&= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \tau(\bar{\chi}, a, 3) \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n^3) + O(\mathscr{L}^2). \quad (2.4.11)
\end{aligned}
$$

Далее, применяя формулу частного суммирования в интегральной форме, найдём:

$$
\begin{aligned}
\sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n^3) &= -\int\limits_{x-y}^{x} \left(\psi(u,\chi) - \psi(x-y,\chi)\right) de(\lambda u^3) + \\
&\quad + e(\lambda x^3)\left(\psi(x,\chi) - \psi(x-y,\chi)\right) = \\
&= -\int\limits_{x-y}^{x} \psi(u,\chi) de(\lambda u^3) + e(\lambda x^3)\psi(x,\chi) - e(\lambda(x-y)^3)\psi(x-y,\chi).
\end{aligned}
$$

Используя леммы 2.4, когда 2.4, находим:

$$\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n^3)=-\int\limits_{x-y}^{x}\left(E_0u-\sum_{|\gamma|\le T_0}\frac{u^\rho}{\rho}\right)de(\lambda u^3)+$$

$$+\,e(\lambda x^3)\left(E_0x-\sum_{|\gamma|\le T_0}\frac{x^\rho}{\rho}\right)-e(\lambda(x-y)^3)\left(E_0(x-y)-\sum_{|\gamma|\le T_0}\frac{(x-y)^\rho}{\rho}\right)$$

$$-\int\limits_{x-y}^{x}R_1(u;T_0,\chi)d(e(\lambda u^3))+e(\lambda x^3)R_1(x;T_0,\chi)-e(\lambda(x-y)^3)R_1(x-y;T_0,\chi).$$

Применяем интегрирование по частям к первому интегралу, имеем:

$$\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n^3)=E_0\int\limits_{x-y}^{x}e(\lambda u^3)du-\sum_{|\gamma|\le T_0}I(\rho,\lambda)+O((1+|\lambda|yx^2)|R_1(x;T_0,\chi)|),$$

$$I(\rho,\lambda)=\int\limits_{x-y}^{x}\frac{u^{\rho-1}}{\rho}e(\lambda u^3)du=\int\limits_{x-y}^{x}u^{\beta-1}e\left(\lambda u^3+\frac{\gamma}{2\pi}\ln u\right)du.$$

Подставляя найденное соотношение в (2.4.11), имеем:

$$S_3(\alpha;x,y)=\frac{\tau(\chi_0,a,3)}{\varphi(q)}\int\limits_{x-y}^{x}e(\lambda u^3)du-W(\alpha;x,y)-E_1W_1(\alpha;x,y)+R_2(\alpha;x,y),\tag{2.4.12}$$

$$W(\alpha;x,y)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\tau(\bar\chi,a,3)\sum_{\substack{|\gamma|\le T_0\\ \rho\ne\beta_1}}I(\rho,\lambda),$$

$$W_1(\alpha;x,y)=\frac{\tau(\chi_1,a,3)}{\varphi(q)}I(\beta_1,\lambda),$$

$$R_2(\alpha;x,y)\ll(1+|\lambda|yx^2)\max_{\chi \bmod q}\left|\tau(\chi,a,3)R_1(x;T_0,\chi)\right|,$$

где $E_1=1$, если по модулю q имеется вещественный характер χ_1 такой, что $L(s,\chi_1)$ имеет действительный нуль β_1, $\beta_1\ge 1-c/\ln q$ и $E_1=0$ в противоположном случае.

Оценка $|W_1(\alpha;x,y)|$. Используя тривиальную оценку суммы $\tau(\chi_1,a,3)$ и тригонометрического интеграла $I(\beta_1,\lambda)$, находим

$$|W_1(\alpha;x,y)| = \left|\frac{\tau(\chi_1,a,3)}{\varphi(q)}\int\limits_{x-y}^{x}\frac{u^{\beta_1-1}}{\beta_1}e(\lambda u^3)du\right| \ll yx^{\beta_1-1}.$$

В соответствие с леммой 2.7 и с учетом $q\le\mathscr{L}^b$, при $\varepsilon=(2b)^{-1}$, найдем:

$$x^{\beta_1-1}=\exp\left((\beta_1-1)\mathscr{L}\right)\le\exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\mathscr{L}}{q^{\varepsilon}}\right)\le\exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\mathscr{L}}{\mathscr{L}^{b\varepsilon}}\right)=\exp(-c(\varepsilon)\sqrt{\mathscr{L}}).$$

Таким образом

$$|W_1(\alpha;x,y)|\ll y\exp(-c(\varepsilon)\sqrt{\mathscr{L}})\ll y\mathscr{L}^{-A}. \tag{2.4.13}$$

Оценка $R_2(\alpha;x,y)$. Из неравенства $1\le q\le\mathscr{L}^b$ вытекает, что

$$\frac{q\left(\tau(q)\right)^{\frac{\ln 3}{\ln 2}}}{\varphi(q)}\ll\mathscr{L}.$$

Для $\tau(\chi,a,3)$ применяем лемму 2.9 и найденную оценку. Имеем

$$|\tau(\chi,a,3)|\le 2\sqrt{q}\left(\tau(q)\right)^{\frac{\ln 3}{\ln 2}}\ll\frac{\varphi(q)\mathscr{L}}{\sqrt{q}}. \tag{2.4.14}$$

С учётом этой оценки и, имея в виду, что $T_0=\left(xy^{-1}+|\lambda|x^3\right)q^{\frac12}\mathscr{L}^{A+3}$, находим

$$R_2(\alpha;x,y)\ll\left(x+|\lambda|yx^3\right)\frac{\varphi(q)\mathscr{L}^3}{\sqrt{q}\,T_0}\ll\frac{\varphi(q)}{q}\frac{(x+|\lambda|yx^3)q^{\frac12}\mathscr{L}^3}{T_0}\ll y\mathscr{L}^{-A}. \tag{2.4.15}$$

Преобразование $|W(\alpha;x,y)|$. Переходим к оценкам. Имеем

$$|W(\alpha;x,y)|\le\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}|\tau(\bar\chi,a,3)|\mathcal{W}(\lambda,\chi), \tag{2.4.16}$$

$$\mathcal{W}(\lambda,\chi)=\sum_{\substack{|\gamma|\le T_0\\ \rho\ne\beta_1}}\left|I(\rho,\lambda)\right|,$$

где β_1 — действительный нуль, если по модулю q имеется вещественный характер χ_1 такой, что у $L(s,\chi_1)$ вещественный нуль $\beta_1 \geq 1-c/\ln q$. Сумму $|W(\alpha;x,y)|$ оцениним для случае $\lambda \geq 0$. А когда $\lambda \leq 0$, сведём к случаю $\lambda \geq 0$ используя равенство

$$\mathcal{W}(\lambda,\chi) = \sum_{\substack{|\gamma|\leq T_0\\ \rho\neq\beta_1}} \left|\overline{I(\rho,\lambda)}\right| = \sum_{\substack{|\gamma|\leq T_0\\ \rho\neq\beta_1}} \left|\int\limits_{x-y}^{x} u^{\beta-1} e\left(-\lambda u^3 - \frac{1}{2\pi}\gamma\ln u\right) du\right| =$$
$$= \sum_{\substack{|\gamma|\leq T_0\\ \rho\neq\beta_1}} |I(\bar\rho,-\lambda)| = \sum_{\substack{|\gamma|\leq T_0\\ \rho\neq\beta_1}} |I(\rho,-\lambda)| = \mathcal{W}(\chi,-\lambda),$$

Далее будем оценивать интеграл $I(\rho,\lambda)$, применяя лемму 2.2, при условиях $M = x^{\beta-1}$, $f(u) = \lambda u^3 + \frac{\gamma}{2\pi}\ln u$ и $m_1 = \min f'(u)$. Найдём

$$|I(\rho,\lambda)| \leq \frac{x^{\beta-1}}{\min|f'(u)|} = \frac{x^{\beta}}{\min|xf'(u)|}, \quad f'(u) = 3\lambda u^2 + \frac{\gamma}{2\pi u} = \frac{\gamma+6\pi\lambda u^3}{2\pi u}.$$

Также оценим интеграл $I(\rho,\lambda)$ используя лемму 2.3, при условиях $M = x^{\beta-1}$, $m_2 = \min f''(u)$. Находим

$$|I(\rho,\lambda)| \leq \frac{x^{\beta-1}}{\sqrt{\min|f''(u)|}} = \frac{x^{\beta}}{\sqrt{\min|x^2f''(u)|}}, \qquad f''(u) = \frac{12\pi\lambda u^3-\gamma}{2\pi u^2}.$$

Таким образом, имея в виду тривиальную оценку интеграла

$$|I(\rho,\lambda)| \leq \int\limits_{x-y}^{x} u^{\beta-1} du \leq yx^{\beta-1},$$

найдём

$$|I(\rho,\lambda)| \leq x^{\beta}\min\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min|xf'(u)|}, \frac{1}{\sqrt{\min|x^2f''(u)|}}\right).$$

Используя неравенства

$$|xf'(u)| = |\gamma+6\pi\lambda u^3|\frac{x}{2\pi u} \geq \frac{1}{2\pi}|\gamma+6\pi\lambda u^3|,$$
$$|x^2f''(u)| = \frac{|12\pi\lambda u^3-\gamma|x^2}{2\pi u^2} \geq \frac{|12\pi\lambda u^3-\gamma|}{2\pi},$$

эту оценку, представляем в следующем виде

$$|I(\rho,\lambda)| \ll x^{\beta}\min\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min|\gamma+6\pi\lambda u^3|}, \frac{1}{\sqrt{|12\pi\lambda u^3-\gamma|}}\right). \qquad (2.4.17)$$

Полученную оценку и (2.4.14) подставляя в (2.4.16), находим

$$|W(\alpha;x,y)| \ll \frac{\mathscr{L}}{\sqrt{q}}\sum_{\chi \bmod q}\mathcal{W}(\lambda,\chi). \qquad (2.4.18)$$

Далее до конца параграфа будем считать, что параметр y изменяется таким образом:

$$x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18} \le y \le x\mathscr{L}^{-A-0,5b+3}. \qquad (2.4.19)$$

Нули $\rho=\beta+i\gamma$ функции $L(s,\chi)$ когда $|\gamma|\le T_0$ разбиваем на следующие множества D_1, D_2 и D_3:

$$D_1=\left\{\rho:\ -T_0\le\gamma<-6\pi\lambda x^3-\frac{x}{y}\right\},$$
$$D_2=\left\{\rho:\ -6\pi\lambda x^3-\frac{x}{y}\le\gamma\le-6\pi\lambda(x-y)^3+\frac{x}{y}\right\},$$
$$D_3=\left\{\rho:\ -6\pi\lambda(x-y)^3+\frac{x}{y}<\gamma\le T_0\right\}.$$

Вводим обозначение $\mathcal{W}_j(\lambda,\chi)$, $j=1,\ 2,\ 3$. $\mathcal{W}_j(\lambda,\chi)$ — это сумма модулей интеграла вида $I(\rho,\lambda)$ по нулям ρ, которые принадлежат множеству D_j и представляем сумму $\mathcal{W}(\lambda,\chi)$ в формуле (2.4.16) в следующем виде:

$$\mathcal{W}(\lambda,\chi)=\mathcal{W}_1(\lambda,\chi)+\mathcal{W}_2(\lambda,\chi)+\mathcal{W}_3(\chi,\lambda). \qquad (2.4.20)$$

Оценка суммы $\mathcal{W}_1(\lambda,\chi)$. Прибавляя слагаемое $6\pi\lambda u^3$, $x-y\le u\le x$ ко всем членам неравенства, определяющих множество D_1, находим

$$D_1=\left\{\rho:\ -T_0+6\pi\lambda u^3\le\gamma+6\pi\lambda u^3<-6\pi\lambda x^3+6\pi\lambda u^3-\frac{x}{y}\right\},$$

В промежутке $x-y\le u\le x$ функция $6\pi\lambda u^3$ возрастает монотонно, поэтому для множества D_1, имеем

$$-6\pi\lambda x^3+6\pi\lambda u^3-\frac{x}{y}\le-\frac{x}{y}.$$

Если ρ из D_1, то имеет место $\gamma+6\pi\lambda u^3<-\frac{x}{y}$, следовательно для возрастающей функции $\gamma+6\pi\lambda u^3$ в отрезке $x-y\le u\le x$ в промежутке справедливо неравенство

$$\min|\gamma+6\pi\lambda u^3|=-\max(\gamma+6\pi\lambda u^3)=-\gamma-6\pi\lambda x^3\ge\frac{x}{y},\quad \text{если}\quad \rho\in D_1,$$

Из этого неравенства и оценки (2.5.26), найдём

$$\mathcal{W}_1(\lambda,\chi)\ll\sum_{\rho\in D_1}\frac{x^\beta}{-\gamma-6\pi\lambda x^3}.$$

Нули в области

$$D_1=\left\{\rho:\ -T_0\le\gamma<-6\pi\lambda x^3-\frac{x}{y}\right\}=\left\{\rho:\ \frac{x}{y}\le-\gamma-6\pi\lambda x^3<T_0-6\pi\lambda x^3\right\},$$

разбиваем на следующие классы $D_{11},\ \dots,\ D_{1r}$, $r\ll T_0x^{-1}y$ таким образом: в класс D_{1n} приписываем те нули ρ, для которых справедливо неравенство:

$$\frac{nx}{y}<-\gamma-6\pi\lambda x^3\le\frac{(n+1)x}{y}.$$

Следовательно

$$\mathcal{W}_1(\lambda,\chi)\ll\sum_{\rho\in D_1}\frac{x^\beta}{-\gamma-6\pi\lambda x^3}=\sum_{n=1}^{r}\sum_{\rho\in D_{1n}}\frac{x^\beta}{-\gamma-6\pi\lambda x^3}\le\frac{y}{x}\sum_{n=1}^{r}\sum_{\rho\in D_{1n}}\frac{x^\beta}{n}\le$$
$$\le\frac{y\mathscr{L}}{x}\max_{1\le n\le r}\sum_{\rho\in D_{1n}}x^\beta\le\frac{y\mathscr{L}}{x}\max_{|T|\le T_0}\sum_{T-\frac{x}{y}<\gamma\le T}x^\beta.$$

Оценка суммы $\mathcal{W}_3(\chi,\lambda)$. Опять повторяя рассуждение, как при оценке $\mathcal{W}_1(\chi,\lambda)$ для D_1, находим

$$D_3=\left\{\rho:\ 6\pi\lambda u^3-6\pi\lambda(x-y)^3+\frac{x}{y}<\gamma+6\pi\lambda u^3\le T_0+6\pi\lambda u^3\right\}.$$

В интервале $x - y \le u \le x$ функция $6\pi\lambda u^3$ возрастает монотонно, следовательно для левой границы множества D_3 находим

$$6\pi\lambda u^3 - 6\pi\lambda(x-y)^3 + \frac{x}{y} \ge \frac{x}{y}.$$

Поэтому, если ρ из множества D_3, то имеет место неравенство $\gamma + 6\pi\lambda u^3 > \frac{x}{y}$, таким образом, для монотонно возрастающей функции $\gamma + 6\pi\lambda u^3$ в отрезке $x - y \le u \le x$ в интервале $x - y \le u \le x$ справедливо неравенство

$$\min|\gamma + 6\pi\lambda u^3| = \min(\gamma + 6\pi\lambda u^3) = \gamma + 6\pi\lambda(x-y)^3 \ge \frac{x}{y}, \quad \text{если} \quad \rho \in D_3.$$

Отсюда исползуя вторую оценку (2.5.26), найдем

$$\mathcal{W}_3(\chi,\lambda) \ll \sum_{\rho\in D_3} \frac{x^\beta}{\gamma + 6\pi\lambda(x-y)^3}.$$

Нули находящиеся в множестве

$$D_3 = \left\{\rho : \; -6\pi\lambda(x-y)^3 + \frac{x}{y} < \gamma \le T_0\right\} = \\ = \left\{\rho : \; \frac{x}{y} \le \gamma + 6\pi\lambda(x-y)^3 < T_0 + 6\pi\lambda(x-y)^3\right\},$$

разобьём на следующие классы $D_{31}, \ \ldots, \ D_{3r}$, $r \ll T_0 x^{-1} y$ таким образом: в класс D_{3n} приписываем те нули ρ, которые удовлетворяют условию:

$$\frac{nx}{y} < \gamma + 6\pi\lambda(x-y)^3 \le \frac{(n+1)x}{y}, \qquad \text{если} \qquad 1 \le n \le r.$$

Следовательно

$$\mathcal{W}_3(\chi,\lambda) \ll \sum_{n=1}^{r} \sum_{\rho\in D_{3n}} \frac{x^\beta}{\gamma + 6\pi\lambda(x-y)^3} \le \frac{y}{x} \sum_{n=1}^{r} \sum_{\rho\in D_{3n}} \frac{x^\beta}{n} \le \\ \le \frac{y\mathscr{L}}{x} \max_{1\le n\le r} \sum_{\rho\in D_{3n}} x^\beta \le \frac{y\mathscr{L}}{x} \max_{|T|\le T_0} \sum_{T-\frac{x}{y}<\gamma\le T} x^\beta.$$

Оценка $\mathcal{W}_2(\lambda,\chi)$. Множество D_2 представляем в следующем виде

$$D_2=\left\{\rho:\ T_1-6\pi\lambda(x^3-(x-y)^3)+\frac{2x}{y}\le-\gamma\le T_1\right\},\qquad T_1=6\pi\lambda x^3+\frac{x}{y}\le T_0,$$

учитывая, что при $\lambda\le\left(18\pi xy^2\right)^{-1}$ для длины множества D_2 справедливо неравенство вида

$$6\pi\lambda(x^3-(x-y)^3)+\frac{2x}{y}\le 18\pi\lambda x^2y+\frac{2x}{y}\le\frac{3x}{y},$$

и пользуясь тривиальной оценкой интеграла $I(\rho,\lambda)$, т.е. первой оценкой формулы (2.5.26), находим

$$\mathcal{W}_2(\lambda,\chi)\le\sum_{\rho\in D_2}|I(\rho,\lambda)|\le\frac{y}{x}\sum_{T_1-\frac{3x}{y}\le-\gamma\le T_1}x^{\beta}\ll\frac{y}{x}\max_{|T|\le T_0}\sum_{T-\frac{x}{y}\le\gamma\le T}x^{\beta}.$$

Полученные оценки сумм $\mathcal{W}_1(\lambda,\chi)$, $\mathcal{W}_3(\chi,\lambda)$ и $\mathcal{W}_3(\chi,\lambda)$ подставляем в (2.4.20), а потом (2.4.18) и находим:

$$|W(\alpha;x,y)|\ll\frac{y\mathscr{L}^2}{\sqrt{q}\,x}\max_{|T|\le T_0}\mathcal{V}_q=\mathcal{V}_q(T,\frac{x}{y}),\tag{2.4.21}$$
$$\mathcal{V}_q=\mathcal{V}_q(T,U)=\sum_{\chi\bmod q}\sum_{T-U<\gamma\le T}x^{\beta}.$$

Для оценки суммы $\mathcal{V}_q=\mathcal{V}_q(T,U)$ используем теорему о плотности нулей L-рядов Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы. Находим

$$\mathcal{V}_q=\sum_{\chi\bmod q}\sum_{T-U<\gamma\le T}\left(\mathscr{L}\int_0^{\beta}x^u du+1\right)=\mathscr{L}\int_0^1 x^u\sum_{\chi\bmod q}\sum_{\substack{T-U<\gamma\le T\\ \beta\ge u}}du+\sum_{\chi\bmod q}\sum_{T-U<\gamma\le T}1$$

$$=\mathscr{L}\int_0^1 x^u\sum_{\chi\bmod q}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-U,\chi)\right)du+\sum_{\chi\bmod q}\left(N(T,\chi)-N(T-U,\chi)\right).$$

Из этой формулы, с учётом того, что нетривиальные нули $\rho = \beta + i\gamma$ симметрично расположены относительно прямой $\sigma = 0.5$, имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_q(T,U) &\le \mathscr{L} \int\limits_{0,5}^{1} x^u \sum_{\chi \bmod q} \left(N(u,T,\chi) - N(u,T-U,\chi)\right) du + \\
&+ \left(\frac{\sqrt{x}\mathscr{L}}{2} + 1\right) \sum_{\chi \bmod q} \left(N(T,\chi) - N(T-U,\chi)\right) \le \\
&\le \mathscr{L} \max_{u \ge 0,5} x^u \sum_{\chi \bmod q} \left(N(u,T,\chi) - N(u,T-U,\chi)\right) + \\
&+ \left(\frac{\sqrt{x}\mathscr{L}}{2} + 1\right) \sum_{\chi \bmod q} \left(N(T,\chi) - N(T-U,\chi)\right) \le \\
&\le 2\mathscr{L} \max_{u \ge 0,5} x^u \sum_{\chi \bmod q} \left(N(u,T,\chi) - N(u,T-U,\chi)\right).
\end{aligned}$$

Так как по лемме 2.5 функция $L(u+it,\chi)$ в области

$$u \ge 1 - \delta(q,t), \qquad \delta(q,t) = \frac{c_1}{\max\left(\ln q,\ \left(\ln(t+3)\ln\ln(t+3)\right)^{\frac{3}{4}}\right)},$$

не имеет нулей для любых характеров $\chi \mod q$, кроме быть может простого вещественного нуля β_1 у L-функции, заданной исключительным характером χ_1. Следовательно, имея в виду, что $\delta(q,T) \ge \delta(q,T_0)$, находим

$$\mathcal{V}_q\left(T,U\right) \le 2\mathscr{L} \max_{0,5 \le u \le 1-\delta} x^u \sum_{\chi \bmod q} \left(N(u,T,\chi) - N(u,T-U,\chi)\right). \tag{2.4.22}$$

В неравенстве (2.4.21) при $U = \frac{x}{y}$ подставляя правую часть этого неравенства, имеем

$$|W(\alpha;x,y)| \ll \frac{y\mathscr{L}^3}{\sqrt{q}\,x} \max_{|T| \le T_0} \max_{0,5 \le u \le 1-\delta} x^u \sum_{\chi \bmod q} \left(N(u,T,\chi) - N\left(u, T - \frac{x}{y}, \chi\right)\right).$$

Используя значения T_0, неравенство $\lambda \le \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$ и формулу (2.4.19), найдём

$$\frac{T}{(xy^{-1})^3} \leq \frac{T_0}{(xy^{-1})^3} = \frac{\left(xy^{-1} + |\lambda| x^3\right) q^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{A+3}}{(xy^{-1})^3} = \left(\frac{y^2}{x^2} + \lambda y^3\right) q^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{A+3} \leq$$
$$\leq \left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{18\pi x}\right) q^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{A+3} \leq 1.$$

Таким образом, в полученной последней сумме по $\chi \bmod q$ имеет место неравенство $\frac{x}{y} \geq T^{\frac{1}{3}}$, т.е. для этой суммы применима плотностная теорема Ж.Тао (лемма 2.8), и полагая $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$, находим

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2, \tag{2.4.23}$$

где

$$\mathscr{A}_1 = \frac{y\mathscr{L}^{12}}{\sqrt{q}\, x} \max_{0,5 \leq u \leq 0,75} x^u \left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{4-4u}{3-2u}},$$
$$\mathscr{A}_2 = \frac{y\mathscr{L}^{3}}{\sqrt{q}\, x} \max_{0,75 \leq u \leq 1-\delta} x^u \left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}.$$

Оценка выражения $\mathscr{A}_1$. Пользуясь

$$\mathscr{A}_1 = \frac{q^{1,5} x \mathscr{L}^{12}}{y} \max_{0,5 \leq u \leq 0,75} f_1(u), \qquad f_1(u) = x^u \left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{1}{u-1,5}} > 0,$$
$$f_1'(u) = f_1(u) \left(\ln x + \frac{\ln\left(\frac{y}{qx}\right)}{(u-1,5)^2}\right) = \frac{f_1(u)}{(u-1,5)^2} \ln \frac{y}{qx^{-u^2+3u-1,25}},$$

из условий вида $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}$ и $q \leq \mathscr{L}^b$, а также из равенства

$$\max_{0,5 \leq u \leq 0,75} \left(-u^2 + 3u - 1,25\right) = \left(-u^2 + 3u - 1,25\right)\Big|_{u=0,75} = \frac{7}{16},$$

вытекает, что

$$\frac{y}{qx^{-u^2+3u-1,25}} \geq \frac{x^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}}{\mathscr{L}^b x^{\frac{7}{16}}} \geq x^{\frac{3}{16}} \mathscr{L}^{1,5A+18-0,75b} > x^{\frac{1}{8}}.$$

Далее имеем, что в промежутке $0,5 \le u \le 0,75$ имеет место следующее неравенство

$$f_1'(u) \ge \frac{f(u)}{(u-1,5)^2}\ln x^{\frac{1}{8}} > 0,$$

т. е. $f_1'(u)$ неотрицательна $f_1(u)$ возрастающая функция в отрезке $0,5 \le u \le 0,75$. Используя этим свойством неравенством $y \ge x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}$, находим

$$\mathscr{A}_1 = \frac{xq^{1,5}\mathscr{L}^{12}}{y}x^{\frac{3}{4}}\left(\frac{qx}{y}\right)^{-\frac{4}{3}} = y\cdot\frac{x^{\frac{5}{12}}q^{\frac{1}{6}}\mathscr{L}^{12}}{y^{\frac{2}{3}}} = y\cdot\left(\frac{x^{\frac{5}{8}}q^{\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{18}}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \le$$

$$\le y\cdot\left(\frac{x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{0,25b+18}}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Оценка выражения $\mathscr{A}_2$. Исползуя

$$\mathscr{A}_2 = \frac{y^{3-\varepsilon}\mathscr{L}^3}{q^{2,5-\varepsilon}x^{3-\varepsilon}}\max_{0,75\le u\le 1-\delta} f_2(u), \qquad f_2(u) = x^u\left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{2}{u}} > 0, \qquad \delta = \delta(q,T_0).$$

$$f_2'(u) = f_2(u)\left(\ln x + \frac{\ln\left(\frac{y}{qx}\right)}{u^2}\right) = \frac{f_2(u)}{u^2}\ln\frac{y}{qx^{1-u^2}},$$

из неравенства $y \ge x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+025b+18}$ и $q \le \mathscr{L}^b$, и из равенства

$$\max_{0,75\le u\le 1-\delta}\left(-u^2+1\right) = \left(-u^2+1\right)\big|_{u=0,75} = \frac{7}{16},$$

вытекает, что

$$\frac{y}{qx^{1-u^2}} \ge \frac{x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}}{\mathscr{L}^b x^{\frac{7}{16}}} \ge x^{\frac{3}{16}}\mathscr{L}^{1,5A+18-0,75b}.$$

Из этого находим, что в промежутке $0,75 \le u \le 1-\delta$ имеет место неравенство

$$f_2'(u) \ge \frac{f_2(u)}{u^2}\ln x^{\frac{3}{16}} > 0,$$

т.е. $f_2'(u)$ неотрицательна и $f_2(u)$ возрастающая функция в промежутке $0,75 \le u \le 1-\delta$. Пользуясь этими свойствами, находим

$$\mathscr{A}_2 = \frac{y^{3-\varepsilon}\mathscr{L}^3}{q^{2,5-\varepsilon}x^{3-\varepsilon}} x^{1-\delta}\left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{2}{1-\delta}} = y\cdot\frac{x^{\frac{2\delta}{1-\delta}-\delta+\varepsilon}\mathscr{L}^3}{q^{0,5+\frac{2\delta}{1-\delta}-\varepsilon}y^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}} \le y\cdot\frac{x^{\frac{2\delta}{1-\delta}-\delta+\varepsilon}\mathscr{L}^3}{y^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}} =$$

$$= y\mathscr{L}^3\left(\frac{x^{\frac{\delta+\delta^2+(1-\delta)\varepsilon}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}}}{y}\right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon} = y\mathscr{L}^3\left(\frac{x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}}{y}x^{f(\delta,\varepsilon)}\mathscr{L}^{-1,5A-0,25b-18}\right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon},$$

$$f(\delta,\varepsilon) = \frac{\delta+\delta^2+(1-\delta)\varepsilon}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon} - \frac{5}{8}.$$

Отсюда учитывая $y \ge x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}$, получим

$$\mathscr{A}_2 \ll y\cdot x^{f(\delta,\varepsilon)\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta}}\mathscr{L}^3.$$

Затем при $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$, пользуясь неравенством

$$f(\delta,\varepsilon)\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta} = -\frac{\delta}{8} + \frac{3}{8}\left(\varepsilon - \frac{\delta}{3} - \frac{\delta^2}{3(1-\delta)}\right) \le -\frac{\delta}{8},$$

найдём

$$\mathscr{A}_2 \ll yx^{-0,125\delta}\mathscr{L}^3 \ll y\mathscr{L}^3\exp\left(-0,125\delta\mathscr{L}\right).$$

Имея в виду, что $\lambda \le \left(18\pi xy^2\right)^{-1}$ и $y \ge x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}$, находим

$$T_0 = \left(\frac{x}{y} + \lambda x^3\right) q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{A+3} \le \left(\frac{x}{y} + \frac{x^2}{18\pi y^2}\right)\mathscr{L}^{A+0,5b+3} \le$$
$$\le \frac{x^2}{y^2}\mathscr{L}^{A+0,5b+3} \le \frac{x^2\mathscr{L}^{A+0,5b+3}}{x^{\frac{5}{4}}\mathscr{L}^{3A+0,5b+36}} < x,$$

Применяя эти неравенства, снизу оценим параметр $\delta = \delta(q, T_0)$:

$$\delta(q,T_0) = \frac{c_1}{\max\left(\ln q,\ \left(\ln(T_0+3)\ln\ln(T_0+3)\right)^{\frac{3}{4}}\right)} \ge$$
$$\ge \frac{c_1}{\max\left(b\ln\mathscr{L},\ \left(\mathscr{L}\ln\mathscr{L}\right)^{\frac{3}{4}}\right)} \ge c_1\mathscr{L}^{-0,76}.$$

Поэтому

$$\mathscr{A}_2 \ll y\mathscr{L}^3 \exp\left(-0,125c_1\mathscr{L}^{0,24}\right) \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Применяя эту оценку и оценку для $\mathscr{A}_1$ в формуле (2.4.23), находим

$$|W(\alpha; x, y)| \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Учитывая эту оценку, а также оценки (2.4.13) и (2.4.15) и имея в виду (2.5.24) получим утверждение теоремы.

2.5. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах кроме малой окрестности их центров

В данном параграфе, пользуясь оценкой второго момента L-функций Дирихле» в критической прямой, получим нетривиальную оценку суммы вида

$$S_3(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n)e(\alpha n^3),$$

в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$ кроме малой окрестности

$$|\lambda| = \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{18\pi x y^2},$$

их центров при условии $\tau = y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-b_1}$.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия $x \ge x_0$, A, b_1, b — любые фиксированные положительные числа, $1 \le q \le \mathscr{L}^b$, $\tau = y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-b_1}$,*

$$\eta_3 = \frac{2}{7+4\sqrt{3}} \approx 0.1435935394, \qquad c_3 = \frac{2A + 24 + \left(\sqrt{3}-1\right)b_1}{4\sqrt{3}-3}.$$

Тогда при выполнении условий $y \ge x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}^{c_3}$ и $\lambda > \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$ справедлива следующая оценка

$$S_3(\alpha; x, y) \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Доказательство теоремы. При доказательстве предыдущей теоремы, когда выполняются следующие условия:

- $x \geq x_0,\ 1 \leq q \leq \mathscr{L}^b,\ \tau = y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-b_1},\ A,\ b_1,\ b$ — любые заданные фиксированные положительные числа,

- $T_0 = \left(xy^{-1} + |\lambda|x^k\right) q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{A+3}$

мы находили, что имеют место следующие оценки

$$S_3(\alpha; x, y) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n=1\\(a,q)=1}}^{q} e\left(\frac{an^3}{q}\right) \int\limits_{x-y}^{x} e(\lambda u^k)du \ll |W(\alpha; x, y)| + y\mathscr{L}^{-A}, \tag{2.5.24}$$

$$|W(\alpha; x, y)| \leq \frac{\mathscr{L}}{\sqrt{q}} \sum_{\chi \bmod q} \mathcal{W}(\lambda, \chi), \quad \mathcal{W}(\lambda, \chi) = \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0\\ \rho \neq \beta_1}} |I(\rho, \lambda)|, \tag{2.5.25}$$

$$|I(\rho, \lambda)| \ll x^{\beta} \min\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min|\gamma + 6\pi\lambda u^3|}, \frac{1}{\sqrt{|12\pi\lambda u^3 - \gamma|}}\right). \tag{2.5.26}$$

В этих формулах предполагаем, что $\lambda \geq 0$, так как случай $\lambda \leq 0$ с помощью соотношения $\mathcal{W}(\lambda, \chi) = \mathcal{W}(\chi, -\lambda)$, можно привести к случаю $\lambda \geq 0$.

Рассмотрим новый параметр $H = 18\pi\lambda x^2 y$, который при условии $\lambda > \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$ удовлетворяет неравенству

$$H \geq \frac{x}{y}. \tag{2.5.27}$$

Нули $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L(s, \chi)$ с условием вида $|\gamma| \leq T_0$ разбиваем на три множеств D_1, D_2 и D_3:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \left\{\rho:\ -T_0 \le \gamma < -6\pi\lambda x^3 - H\right\},\\
D_2 &= \left\{\rho:\ -6\pi\lambda x^3 - H \le \gamma \le -6\pi\lambda(x-y)^3 + H\right\},\\
D_3 &= \left\{\rho:\ -6\pi\lambda(x-y)^3 + H < \gamma \le T_0\right\}.
\end{aligned}
$$

Обозначим через $\mathcal{W}_j(\lambda,\chi)$, $j = 1,\ 2,\ 3$ сумму модулей интеграла $I(\rho,\lambda)$ по нулям $\rho \in D_j$, и представляем сумму $\mathcal{W}(\lambda,\chi)$ в следующем виде:

$$
\mathcal{W}(\lambda,\chi) = \mathcal{W}_1(\lambda,\chi) + \mathcal{W}_2(\lambda,\chi) + \mathcal{W}_3(\chi,\lambda). \tag{2.5.28}
$$

Оценка $\mathcal{W}_1(\lambda,\chi)$. Добавляя слагаемое $6\pi\lambda u^3$, $x-y \le u \le x$ всем трём членам неравенства, определяющих множество D_1, находим

$$
D_1 = \left\{\rho:\ -T_0 + 6\pi\lambda u^3 \le \gamma + 6\pi\lambda u^3 < -6\pi\lambda x^3 + 6\pi\lambda u^3 - H\right\},
$$

В промежутке $x-y \le u \le x$ функция $6\pi\lambda u^3$ возрастает монотонно, следовательно для верхней границы D_1, находим

$$
-6\pi\lambda x^3 + 6\pi\lambda u^3 - H \le -H.
$$

Таким образом, если $\rho \in D_1$, тогда справедливо неравенство $\gamma + 6\pi\lambda u^3 < -H$, следовательно для монотонно возрастающей функции $\gamma + 6\pi\lambda u^3$ в промежутке $x-y \le u \le x$ справедливо неравенство вида

$$
\min|\gamma + 6\pi\lambda u^3| = -\max(\gamma + 6\pi\lambda u^3) = -\gamma - 6\pi\lambda x^3 \ge H, \quad \text{если} \quad \rho \in D_1,
$$

Далее с учётом оценки (2.5.26), имеем

$$
\mathcal{W}_1(\lambda,\chi) \ll \sum_{\rho \in D_1} \frac{x^\beta}{-\gamma - 6\pi\lambda x^3}.
$$

Все нули в

$$D_1=\left\{\rho:\ -T_0\le\gamma<-6\pi\lambda x^3-H\right\}=\left\{\rho:\ H\le-\gamma-6\pi\lambda x^3<T_0-6\pi\lambda x^3\right\},$$

разбиваем на t классов $D_{11},\ \dots,\ D_{1t}$, $t\ll T_0H^{-1}$ такиим образом: в класс D_{1n} зачислим те нули ρ, для которых имеет место неравенство:

$$nH<-\gamma-6\pi\lambda x^3\le(n+1)H,\qquad \text{при}\quad 1\le n\le t.$$

Далее находим

$$\mathcal{W}_1(\lambda,\chi)\ll\sum_{n=1}^{t}\sum_{\rho\in D_{1n}}\frac{x^\beta}{-\gamma-6\pi\lambda x^3}\le\sum_{n=1}^{t}\sum_{\rho\in D_{1n}}\frac{x^\beta}{nH}\le\frac{\mathscr{L}}{H}\max_{1\le n\le t}\sum_{\rho\in D_{1n}}x^\beta\le$$
$$\le\frac{\mathscr{L}}{H}\max_{|T|\le T_0}\sum_{T-H<\gamma\le T}x^\beta\ll\frac{\mathscr{L}}{\lambda x^2y}\max_{|T|\le T_0}\sum_{T-\lambda x^2y<\gamma\le T}x^\beta.$$

Оценка суммы $\mathcal{W}_3(\lambda,\chi)$. Добавляем слагаемое $6\pi\lambda u^3$, $x-y\le u\le x$, ко всем членам неравенств, определяемых множество D_3, находим

$$D_3=\left\{\rho:\ 6\pi\lambda u^3-6\pi\lambda(x-y)^3+H<\gamma+6\pi\lambda u^3\le T_0+6\pi\lambda u^3\right\}.$$

В промежутке $x-y\le u\le x$ функция $6\pi\lambda u^3$ возрастает монотонно, следовательно левой границы множества D_3, получим

$$6\pi\lambda u^3-6\pi\lambda(x-y)^3+H\ge H.$$

Таким образом, если ρ из множества D_3, тогда справедливо неравенство $\gamma+6\pi\lambda u^3>H$, и для монотонной неубывающей функции $\gamma+6\pi\lambda u^3$ в промежутке $x-y\le u\le x$ имеет место соотношение

$$\min|\gamma+6\pi\lambda u^3|=\min(\gamma+6\pi\lambda u^3)=\gamma+6\pi\lambda(x-y)^3\ge H,\quad \text{если}\quad \rho\in D_3.$$

Из этой оценки учитывая вторую оценку (2.5.26), получим

$$\mathcal{W}_3(\lambda,\chi)\ll\sum_{\rho\in D_1}\frac{x^\beta}{\gamma+6\pi\lambda(x-y)^3}.$$

На множестве

$$D_3 = \left\{\rho:\ -6\pi\lambda(x-y)^3 + H < \gamma \le T_0\right\} =$$
$$= \left\{\rho:\ H \le \gamma + 6\pi\lambda(x-y)^3 < T_0 + 6\pi\lambda(x-y)^3\right\},$$

разбиваем на следующие классы $D_{31},\ \ldots,\ D_{3t},$, $t \ll T_0 H^{-1}$ таким образом: в класс D_{3n} приписываем те нули ρ, для которых имеет место неравенство:

$$nH < \gamma + 6\pi\lambda(x-y)^3 \le (n+1)H, \qquad \text{если} \quad 1 \le n \le t.$$

Из-за этого находим

$$\mathcal{W}_3(\lambda,\chi) \ll \sum_{n=1}^{t} \sum_{\rho\in D_{3n}} \frac{x^\beta}{\gamma + 6\pi\lambda(x-y)^3} \le \sum_{n=1}^{t} \sum_{\rho\in D_{3n}} \frac{x^\beta}{nH} \le \frac{\mathscr{L}}{H} \max_{1\le n\le t} \sum_{\rho\in D_{3n}} x^\beta \le$$
$$\le \frac{\mathscr{L}}{H} \max_{|T|\le T_0} \sum_{T-H<\gamma\le T} x^\beta \ll \frac{\mathscr{L}}{\lambda x^2 y} \max_{|T|\le T_0} \sum_{T-\lambda x^2 y<\gamma\le T} x^\beta.$$

Оценка суммы $\mathcal{W}_2(\lambda,\chi)$. Применим следующие обозначения

$$T_1 = 6\pi\lambda x^3 + H, \qquad H_1 = 6\pi\lambda(x^3 - (x-y)^3) + 2H, \qquad T_2 = T_1 + 12\pi\lambda u^3,$$

здесь $x - y < u \le x$, представляем множество D_2 в виде

$$D_2 = \left\{\rho:\ -6\pi\lambda x^3 - H \le \gamma \le -6\pi\lambda(x-y)^3 + H\right\} =$$
$$= \{\rho:\ T_1 - H_1 \le -\gamma \le T_1\} = \left\{\rho:\ T_2 - H_1 \le 12\pi\lambda u^3 - \gamma \le T_2\right\}. \tag{2.5.29}$$

Используя неравенство $(x-y)^3 \ge x^3 - 3x^2 y$ и имея в виду значением параметра $H = 18\pi\lambda x^2 y$, имеем

$$T_2 - H_1 = 12\pi\lambda u^3 + 6\pi\lambda(x-y)^3 - H \ge 18\pi\lambda(x-y)^3 - 18\pi\lambda x^2 y \ge$$
$$\ge 18\pi\lambda x^3 - 72\pi\lambda x^2 y = 9\pi\lambda x^3 + 9\pi\lambda x^2(x-4y) > 9\pi\lambda x^3,$$

следовательно, если $\rho \in D_2$, то используя оценку (2.5.26), находим

$$|I(\rho,\lambda)| \ll \frac{x^\beta}{\sqrt{12\pi\lambda u^3 - \gamma}} \le \frac{x^\beta}{\sqrt{T_2 - H_1}} \le \frac{x^\beta}{\sqrt{9\pi\lambda x^3}} \ll \frac{x^\beta}{\sqrt{\lambda x^3}}.$$

Отсюда, и из представления множества D_2 в виде (2.5.29), находим

$$\mathcal{W}_2(\lambda,\chi) = \sum_{\rho\in D_2} |I(\rho,\lambda)| \ll \sum_{T_2-H_1\le 12\pi\lambda u^3-\gamma\le T_2} \frac{x^\beta}{\sqrt{\lambda x^3}} = \sum_{T_1-H_1\le -\gamma\le T_1} \frac{x^\beta}{\sqrt{\lambda x^3}}. \quad (2.5.30)$$

Используя неравенство $x^3-(x-y)^3 \le 3x^2y$ и значения параметра $H = 18\pi\lambda x^2 y$, сверху оценим H_1 т.е. — длину множества D_2 и снизу её нижнюю границу $T_1 - H_1$. Имеем:

$$\begin{aligned} H_1 =& 6\pi\lambda(x^3-(x-y)^3) + 2H \le 54\pi\lambda x^2 y, \\ T_1 - H_1 =& 6\pi\lambda(x-y)^3 - 18\pi\lambda x^2 y = 6\pi\lambda x^3\left(1+\frac{3y^2}{x^2}-\frac{y^3}{x^3}\right) \ge 6\pi\lambda x^3. \end{aligned}$$

Из этого и из равенства $T_1 = 6\pi\lambda x^3\left(1+\frac{3y}{x}\right)$ вытекает,что в (2.5.30) границы суммы по γ, т.е. T_1-H_1 и T_1 имеют порядок λx^3, и порядок её длины H_1 раве $\lambda x^2 y$. Разбиваем интервал суммирования $T_1 - H_1 \le \gamma \le T_1$ на не более 54π полуинтервалов вида

$$æ\lambda x^3 - \lambda x^2 y < \gamma \le æ\lambda x^3,$$

где константа æ принимает значение из полуинтервала

$$6\pi\left(1+\frac{3y^2}{x^2}-\frac{y^3}{x^3}\right) < æ \le 6\pi\left(1+\frac{3y}{x}\right)$$

и формулу (2.5.30) можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{W}_2(\lambda,\chi) \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda x^3}} \sum_{æ\lambda x^3-\lambda x^2 y<\gamma\le æ\lambda x^3} x^\beta.$$

В найденной оценке для удобства, считаем, что $æ = 1$, а также, учитывая $\lambda x^3 < T_0$, находим

$$\mathcal{W}_2(\lambda,\chi) \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda x^3}} \max_{|T|\le T_0} \sum_{T-\lambda x^2 y<\gamma\le T} x^\beta.$$

Полученную оценку и оценки $\mathcal{W}_1(\lambda,\chi)$ и $\mathcal{W}_3(\lambda,\chi)$ подставляем в формулу (2.5.28), а потом,используя неравенство $\lambda > \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$, получим:

$$\mathcal{W}(\lambda,\chi) \ll \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda x^3}} + \frac{\mathscr{L}}{\lambda x^2 y}\right) \max_{|T|\le T_0} \sum_{T-\lambda x^2 y<\gamma\le T} x^\beta =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda q x^3}} \left(1 + \frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\lambda x^{k-2}} y}\right) \max_{|T|\le T_0} \sum_{T-\lambda x^2 y<\gamma\le T} x^\beta \ll$$
$$\ll \frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\lambda q x^3}} \max_{|T|\le T_0} \sum_{T-\lambda x^2 y<\gamma\le T} x^\beta.$$

Подставляя эту оценку в (2.5.25), а затем воспользовавшись введённым нами обозначением в соотношении (2.4.21), находим

$$|W(\alpha;x,y)| \ll \frac{\mathscr{L}^2}{\sqrt{\lambda q x^3}} \max_{|T|\le T_0} \sum_{\chi \bmod q} \sum_{T-\lambda x^2 y<\gamma\le T} x^\beta = \frac{\mathscr{L}^2}{\sqrt{\lambda q x^3}} \max_{|T|\le T_0} \mathcal{V}_q(T, \lambda x^2 y).$$

Для суммы $\mathcal{V}_q(T,U)$, пользуясь формулой (2.4.22) при $U = \lambda x^2 y$, найдём

$$|W(\alpha;x,y)| \ll \frac{\mathscr{L}^3}{\sqrt{\lambda q x^3}} \max_{|T|\le T_0} \max_{0{,}5\le u\le 1-\delta} x^u \sum_{\chi \bmod q} \left(N(u,T,\chi) - N(u, T-\lambda x^2 y, \chi)\right), \tag{2.5.31}$$

$$\delta = \delta(q,T_0) = \frac{c_1}{\max\left(\ln q,\ \left(\ln(T_0+3)\ln\ln(T_0+3)\right)^{\frac{3}{4}}\right)}.$$

Далее будем считать, что параметр y принимает значения из

$$x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}} \mathscr{L}^{c_3} \le y \le x \mathscr{L}^{-A-0{,}5b-10}. \tag{2.5.32}$$

Используя значение параметра T_0, неравенства $\lambda > \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$ и (2.5.32), получим

$$\frac{T}{(\lambda x^2 y)^3} \le \frac{T_0}{(\lambda x^2 y)^3} = \frac{\left(x y^{-1} + |\lambda| x^3\right) q^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{A+3}}{(\lambda x^2 y)^3} = \frac{\sqrt{q}\mathscr{L}^{A+3}}{\lambda^3 x^5 y^4} + \frac{\sqrt{q}\mathscr{L}^{A+3}}{\lambda^2 x^3 y^3} \le$$
$$\le \frac{(18\pi)^3 y^2 \mathscr{L}^{A+0{,}5b+3}}{x^2} + \frac{(18\pi)^2 y \mathscr{L}^{A+0{,}5b+3}}{x} \ll \mathscr{L}^{-7},$$

Отсюда следует, что в сумме по $\chi \mod q$ в (2.5.31) неравенство $\lambda x^2 y \ge T^{\frac{1}{3}}$ выполняется, т.е. к этой можно применить лемму 2.8, полагая в ней

$$\varepsilon = \min\left(\frac{\eta_3}{16},\ \frac{1+\eta_3}{2}\delta\right), \tag{2.5.33}$$

имеем

$$\begin{aligned}
&|W(\alpha;x,y)| \ll \mathscr{B}_1 + \mathscr{B}_2, \\
&\mathscr{B}_1 = \frac{\mathscr{L}^{12}}{\sqrt{\lambda q x^3}} \max_{0,5\le u\le 0,75} x^u \left(q\lambda x^2 y\right)^{\frac{4-4u}{3-2u}}, \\
&\mathscr{B}_2 = \frac{\mathscr{L}^{3}}{\sqrt{q\lambda x^3}} \max_{0,75\le u\le 1-\delta(q,T_0)} x^u \left(q\lambda x^2 y\right)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{2.5.34}$$

Оценка соотношения $\mathscr{B}_1$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\mathscr{B}_1 = \frac{y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}} \max_{0,5\le u\le 0,75} \exp\left(f_1(u)\right), \\
&f_1(u) = u\ln x + \left(\frac{1}{u-1,5} + \frac{3}{2}\right)\ln\left(q\lambda x^2 y\right), \\
&f_1'(u) = \ln x - \frac{\ln\left(q\lambda x^2 y\right)}{(u-1,5)^2}, \qquad f_1''(u) = \frac{2\ln\left(q\lambda x^2 y\right)}{(u-1,5)^3} < 0.
\end{aligned}$$

Находим, что $f_1'(0,5) > 0$. Используя условия $0 \le \lambda \le \frac{1}{q\tau}$, $\tau = \frac{y^5}{x^2\mathscr{L}^{b_1}}$ и $y \ge x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}^{c_3}$, находим

$$\begin{aligned}
-f_1'(0,5) &= \ln\left(q\lambda xy\right) \le \ln\left(\frac{xy}{\tau}\right) = \ln\left(\frac{x^3\mathscr{L}^{b_1}}{y^4}\right) \le \ln\left(\frac{x^3\mathscr{L}^{b_1}}{x^{4-\frac{4}{5+\eta_3}}\mathscr{L}^{4c_3}}\right) = \\
&= \ln\left(x^{-\frac{1+\eta_3}{5+\eta_3}}\mathscr{L}^{b_1-4c_3}\right) = -\frac{1+\eta_3}{5+\eta_3}\mathscr{L} + (b_1 - 4c_3)\ln\mathscr{L} < 0.
\end{aligned}$$

Случай $q\lambda x^2 y < x^{\frac{9}{16}}$. Имеем

$$f_1'(u) \ge f_1'(0,75) = \ln x - \frac{16}{9}\ln(q\lambda x^2 y) > \ln x - \frac{16}{9}\ln x^{\frac{9}{16}} = 0,$$

т.е. $f_1'(u)$ неотрицательная и $f_1(u)$ неубывающая функция в отрезке $0,5 \le u \le 0,75$. Используя вышеуказанные свойства , а потом (2.5.32), находим

$$\mathscr{B}_1 = \frac{y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}}\exp\left(f_1(0,75)\right) = \frac{y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}}\exp\left(\frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{6}\ln(q\lambda x^2y)\right) =$$

$$= \left(q\lambda x^2y\right)^{\frac{1}{6}} x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{12} < x^{\frac{11}{32}}y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{12} = y\left(\frac{x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}^{c_3}}{y}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{9+5\eta_3}{32(5+\eta_3)}}\mathscr{L}^{12-0,5c_3} \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Случай $q\lambda x^2y \ge x^{\frac{9}{16}}$. Для удобства вводим следующие обозначение

$$y = x^{1-\mu^2}\mathscr{L}^{c}. \tag{2.5.35}$$

Далее ещем наибольшее значение величины μ и наименьшее значение величины c, для которых справедлива оценка

$$\mathscr{B}_1 \ll y\mathscr{L}^{-A}. \tag{2.5.36}$$

Применяя условия $0 \le \lambda \le \frac{1}{q\tau}$, $\tau = \frac{y^5}{x^2\mathscr{L}^{b_1}}$ и $y \ge x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}^{c_3}$, получим

$$q\lambda x^2y \le \frac{x^2y}{\tau} = \left(\frac{x}{y}\right)^4\mathscr{L}^{b_1} \le \left(x^{\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}^{-c_3}\right)^4\mathscr{L}^{b_1} = x^{1-\frac{1+\eta_3}{5+\eta_3}}\mathscr{L}^{b_1-4c_3}.$$

Следовательно получим

$$f_1'(0,5) = \ln x - \ln(q\lambda x^2y) > 0, \qquad f_1'(0,75) = \ln x - \frac{16}{9}\ln(q\lambda x^2y) \le 0,$$

и точка $u_0 = \dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{\ln(q\lambda x^2y)}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}}$, где $f_1'(u_0) = 0$ из промежутка интегрирования, также в этом промежутке имеет место $f''(u) < 0$. Таким образом в промежутке $0,5 \le u \le 0,75$ график функции $f(u)$ является выпуклым вверх, из-за этого

$$\mathscr{B}_1 = \frac{y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}}\exp\left(f_1(u_0)\right) = \frac{y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}}\exp\left(u_0\ln x + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{u_0 - 1,5}\right)\ln\left(q\lambda x^2 y\right)\right)$$
$$= \frac{y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}}\exp\left(\left(\frac{3}{2} - \left(\frac{\ln(q\lambda x^2 y)}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\ln x + \left(\frac{3}{2} - \left(\frac{\ln x}{\ln(q\lambda x^2 y)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\ln\left(q\lambda x^2 y\right)\right)$$
$$= xy^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{12}\exp\left(\frac{3}{2}\ln\left(q\lambda x^2 y\right) - 2\left(\ln(q\lambda x^2 y)\ln x\right)^{\frac{1}{2}}\right) = xy^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{12}\exp\left(g\left(q\lambda x^2 y\right)\right), \tag{2.5.37}$$

где $g(t) = \frac{3}{2}\ln t - 2\left(\ln t \ln x\right)^{\frac{1}{2}}$. Из неравенства

$$q\lambda x^2 y \geq x^{\frac{9}{16}}, \qquad \lambda \leq \frac{1}{q\tau}, \qquad \tau = \frac{y^5}{x^2\mathscr{L}^{b_1}},$$

и соотношения (2.5.35) вытекает, что

$$x^{\frac{9}{16}} \leq q\lambda x^2 y \leq \frac{x^2 y}{\tau} = \frac{x^4\mathscr{L}^{b_1}}{y^4} = x^u\mathscr{L}^v, \qquad u = 4\mu^2, \quad v = b_1 - 4c. \tag{2.5.38}$$

Поэтому, учитывая, что $t = q\lambda x^2 y \geq x^{\frac{9}{16}}$, получим

$$g'(t) = \frac{3}{2t} - \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{t(\ln t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{9\ln t - 4\ln x}{2t(\ln t)^{\frac{1}{2}}(3(\ln t)^{\frac{1}{2}} + 2(\ln x)^{\frac{1}{2}})} > 0,$$

т.е. $g(t)$ в интервале изменения является неубывающей функцией, из-за этого

$$g\left(q\lambda x^2 y\right) \leq g\left(x^u\mathscr{L}^v\right).$$

Отсюда учитывая соотношения

$$y^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}+\frac{u}{8}}\mathscr{L}^{-\frac{b_1-v}{8}},$$

в формуле (2.5.37) оценим правую часть

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}_1 &\leq xy^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{12}\exp\left(g\left(x^u\mathscr{L}^v\right)\right) = yx^{\frac{1}{2}+\frac{u}{8}}\mathscr{L}^{12-\frac{b_1-v}{8}}\exp\left(g\left(x^u\mathscr{L}^v\right)\right) = \\
&= yx^{\frac{1}{2}+\frac{u}{8}}\mathscr{L}^{12-\frac{b_1-v}{8}}\exp\left(\frac{3}{2}\ln\left(x^u\mathscr{L}^v\right) - 2\left(\ln\left(x^u\mathscr{L}^v\right)\mathscr{L}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \\
&= y\mathscr{L}^{12-\frac{b_1}{8}+\frac{13v}{8}}\cdot x^{\frac{1}{2}+\frac{13u}{8}}\exp\left(-2\left(u\mathscr{L}^2 + v\mathscr{L}\ln\mathscr{L}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \\
&= y\mathscr{L}^{12-\frac{b_1}{8}+\frac{13v}{8}}x^{\frac{13u}{8}+\frac{1}{2}}\exp\left(-2\sqrt{u}\mathscr{L}\left(1+\frac{v\ln\mathscr{L}}{u\mathscr{L}}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \qquad (2.5.39)
\end{aligned}$$

Используя когда $|t| \leq 0,1$ формулу

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{t}{2} + R_1(t), \qquad R_1(t,\theta) = -\frac{(1-\theta)t^2}{8(1+\theta t)^{\frac{3}{2}}},$$

которая следует из разложения $f(t) = (1+t)^{\frac{1}{2}}$ в ряд Маклорена с остаточным членом в форме Коши вида

$$\begin{aligned}
f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{m}&\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}t^n + R_m(t,\theta), \\
&R_m(t,\theta) = \frac{f^{(m+1)}(\theta t)}{(m+1)!}(1-\theta)^m t^{m+1}, \qquad 0 < \theta < 1, \\
&f'(t) = \frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \qquad f''(t) = -\frac{1}{4}(1+t)^{-\frac{3}{2}},
\end{aligned}$$

при $m = 1$. $R_1(t,\theta)$ рассмотрим как функцию от параметра θ. Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_1(t,\theta)}{\partial\theta} &= \frac{t^2(1+\theta t)^{\frac{3}{2}} + (1-\theta)t^2\cdot\frac{3}{2}(1+\theta t)^{\frac{1}{2}}t}{8(1+\theta t)^3} = \\
&= \frac{t^2(1+\theta t) + (1-\theta)t^2\cdot\frac{3}{2}t}{8(1+\theta t)^{\frac{5}{2}}} = \frac{((3-\theta)t+2)t^2}{16(1+\theta t)^{\frac{5}{2}}} > 0.
\end{aligned}$$

Таким образом

$$\min R_1(t,\theta) = R_1(t,0) = -\frac{t^2}{8}, \qquad (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{t}{2} + R_1(t) \geq 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8}.$$

Следовательно

$$
\begin{aligned}
&-2\sqrt{u}\mathscr{L}\left(1+\frac{v\ln\mathscr{L}}{u\mathscr{L}}\right)^{\frac{1}{2}} \le -2\sqrt{u}\mathscr{L}\left(1+\frac{v\ln\mathscr{L}}{2u\mathscr{L}}-\frac{v^2\ln^2\mathscr{L}}{8u^2\mathscr{L}^2}\right) = \\
&= \ln x^{-2\sqrt{u}} + \ln\mathscr{L}^{-\frac{v}{\sqrt{u}}} + \frac{v^2\ln^2\mathscr{L}}{4u^{\frac{3}{2}}\mathscr{L}} \le \ln x^{-2\sqrt{u}} + \ln\mathscr{L}^{-\frac{v}{\sqrt{u}}} + 1.
\end{aligned}
$$

Подставляя полученную оценку в формулу (2.5.39), находим

$$
\mathscr{B}_1 \ll y\mathscr{L}^{12-\frac{b_1}{8}+\frac{13v}{8}} x^{\frac{13u}{8}+\frac{1}{2}} \cdot x^{-2\sqrt{u}}\mathscr{L}^{-\frac{v}{\sqrt{u}}} = yx^{\frac{13}{8}u-2\sqrt{u}+\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{12-\frac{b_1}{8}+\left(\frac{13}{8}-\frac{1}{\sqrt{u}}\right)v}. \tag{2.5.40}
$$

Используя соотношение (2.5.38), степени x и $\mathscr{L}$ последнего неравенства выражаем μ и c. Эти показатели обозначим через æ(μ) и $\omega(\mu, c)$, получим

$$
\begin{aligned}
\text{æ}(\mu) &= \frac{13}{2}\mu^2 - 4\mu + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(13\mu^2 - 8\mu + 1\right), \\
\omega(\mu, c) &= 12 - \frac{b_1}{8} + \left(\frac{13}{8} - \frac{1}{2\mu}\right)(b_1 - 4c) = \\
&= 12 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\mu}\right)b_1 - \left(\frac{13}{2} - \frac{2}{\mu}\right)c.
\end{aligned}
$$

Параметр æ $=$ æ(μ) будет квадратичным многочленом относительно μ, с двумя неотриположительными корнями, большим из них следующее число вида

$$
\mu_3 = \frac{4+\sqrt{3}}{13} = \frac{1}{4-\sqrt{3}},
$$

находим его квадрат

$$
\mu_3^2 = \frac{1}{19-8\sqrt{3}} = \frac{1}{5+\eta_3}, \qquad \eta_3 = \frac{2}{7+4\sqrt{3}}. \tag{2.5.41}
$$

Следовательно, наибольшим значением параметра μ, для которого æ $=$ æ(μ) в формуле (2.5.40) равен нулю, будет число μ_3, а $\omega(\mu, c)$ — степень $\mathscr{L}$ при

$\mu=\mu_3$ имеет следующий вид

$$\omega(\mu_3,c)=12+\left(\frac{3}{2}-\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)b_1-\left(\frac{13}{2}-2(4-\sqrt{3})\right)c=$$
$$=12+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)b_1-\left(2\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)c,$$

и когда $c=c_3$, где

$$c_3=\frac{A+12+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)b_1}{2\sqrt{3}-\frac{3}{2}}=\frac{2A+24+\left(\sqrt{3}-1\right)b_1}{4\sqrt{3}-3},$$

справедливо соотношение $\omega(\mu_k,c_3)=-A$, т.е. оценка (2.5.40) становиться оценкой (2.5.36). Далее отсюда, из вида параметра y в форме (2.5.35) и параметра μ_3^2 в форме (2.5.41) вытекает, что оценка (2.5.36) справедлива при условии

$$y\geq x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}^{c_3},\qquad \eta_3=\frac{2}{7+4\sqrt{3}}.$$

Оценка $\mathscr{B}_2$. Находим

$$\mathscr{B}_2=\frac{y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^3}{x^{\frac{1}{2}}}\left(q\lambda x^2y\right)^{-\frac{1}{2}}\max_{0{,}75\leq u\leq 1-\delta}f_2(u),$$
$$f_2(u)=x^u\left(q\lambda x^2y\right)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon},\qquad \delta=\delta(q,T_0).$$

В оценке $\mathscr{B}_2$ функция $f_2(u)$ и $f_2''(u)$ неотрицательны:

$$f_2'(u)=f_2(u)\left(\ln x-\frac{2}{u^2}\ln\left(q\lambda x^2y\right)\right),$$
$$f_2''(u)=f_2(u)\left(\left(\ln x-\frac{2}{u^2}\ln\left(q\lambda x^2y\right)\right)^2+\frac{4}{u^3}\ln\left(q\lambda x^2y\right)\right)\geq$$
$$\geq\frac{4f_2(u)}{u^3}\ln\left(q\lambda x^2y\right)\geq\frac{4f_2(u)}{u^3}\ln\left(\frac{qx}{18\pi y}\right)>0,$$

т.е.график функции $f_2(u)$ будет направлен выпуклым вниз, из-за этого

$$\mathscr{B}_2\leq\frac{y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^2}{x^{\frac{1}{2}}}\left(q\lambda x^2y\right)^{-\frac{1}{2}}\left(f_2(0,75)+f_2(1-\delta)\right)=$$
$$=\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\left(x^{\frac{3}{4}}\left(q\lambda x^2y\right)^{\frac{1}{6}+\varepsilon}+x^{1-\delta}\left(q\lambda x^2y\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}\right)\mathscr{L}^2.$$

Используя условие

$$\frac{1}{18\pi xy^2} < \lambda \le \frac{1}{q\tau} = \frac{x^2\mathscr{L}^{b_1}}{qy^5},$$

находим

$$\mathscr{B}_2 \ll \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\left(x^{\frac{3}{4}}\left(\frac{x^4\mathscr{L}^{b_1}}{y^4}\right)^{\frac{1}{6}+\varepsilon} + x^{1-\delta}\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}\right)\mathscr{L}^2 =$$

$$= y\left(\left(\frac{x^{4+\frac{3}{2(1+6\varepsilon)}}\mathscr{L}^{b_1}}{y^{4+\frac{3}{1+6\varepsilon}}}\right)^{\frac{1}{6}+\varepsilon} + \left(\frac{x^{\frac{\delta+\delta^2+(1-\delta)\varepsilon}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}}}{y}\right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}\right)\mathscr{L}^2 =$$

$$= y\left(\left(\frac{x^{1-\frac{3}{14+48\varepsilon}}\mathscr{L}^{\frac{b_1+6\varepsilon}{7+24\varepsilon}}}{y}\right)^{\frac{7}{6}+4\varepsilon} + \left(\frac{x^{\frac{\delta+\delta^2+(1-\delta)\varepsilon}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}}}{y}\right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}\right)\mathscr{L}^2 =$$

$$= y\left(\left(\frac{x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}^{c_3}}{y}x^{g(\varepsilon)}\mathscr{L}^{h(\varepsilon)}\right)^{\frac{7}{6}+4\varepsilon} + \left(\frac{x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}^{c_3}}{y}x^{f(\delta,\varepsilon)}\mathscr{L}^{-c_3}\right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}\right)\mathscr{L}^2,$$

где

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{5+\eta_3} - \frac{3}{14+48\varepsilon} = -\frac{1+3\eta_3-48\varepsilon}{2(5+\eta_3)(7+24\varepsilon)},$$
$$h(\varepsilon) = \frac{b_1+6\varepsilon}{7+24\varepsilon} - c_3,$$
$$f(\delta,\varepsilon) = \frac{\delta+\delta^2+(1-\delta)\varepsilon}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon} - \left(1-\frac{1}{5+\eta_3}\right) = \frac{\delta(1-\delta)}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon} + \frac{1}{5+\eta_3}.$$

$$h(\varepsilon)\left(\frac{7}{6}+12\varepsilon\right) = \left(\frac{b_1+6\varepsilon}{7+24\varepsilon} - c_3\right)\frac{7+24\varepsilon}{6} =$$
$$= \frac{b_1+6\varepsilon-(7+24\varepsilon)c_3}{6} = \frac{b_1-7c_3+(6-24c_3)\varepsilon}{6}$$

Далее, имея в виду, что $y \ge x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}^{c_3}$ и $c_3 > 0$, получим

$$\mathscr{B}_2 \ll y\left(\left(x^{g(\varepsilon)}\mathscr{L}^{h(\varepsilon)}\right)^{\frac{7+24\varepsilon}{6}} + x^{f(\delta,\varepsilon)\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta}}\right)\mathscr{L}^2. \qquad (2.5.42)$$

Используя явное значение параметра ε, т.е. формулу (2.5.43), и условием $\eta_3 > 0$, получим

$$\varepsilon = \min\left(\frac{\eta_3}{16},\ \frac{1+\eta_3}{2}\delta\right), \tag{2.5.43}$$

$$\begin{aligned} g(\varepsilon)\frac{7+24\varepsilon}{6} &= -\frac{1+3\eta_3-48\varepsilon}{2(5+\eta_3)(7+24\varepsilon)}\cdot\frac{7+24\varepsilon}{6} = -\frac{1+3\eta_3-48\varepsilon}{12(5+\eta_3)} = \\ &= -\frac{1}{12(5+\eta_3)} + \left(\varepsilon - \frac{\eta_3}{16}\right)\frac{4}{5+\eta_3} \le -\frac{1}{12(5+\eta_3)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\delta,\varepsilon)\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta} &= \left(\frac{\delta(1-\delta)}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon} + \frac{1}{5+\eta_3}\right)\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta} = \\ &= -\delta + \frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{(1-\delta)(5+\eta_k)} \le -\delta + \frac{2\delta+\varepsilon}{\left(1-\frac{1}{6}\right)(5+\eta_k)} = -\frac{2}{5}\delta + \\ &+ \frac{6}{5}\left(-\frac{1}{2}\delta + \frac{2\delta+\varepsilon}{5+\eta_k}\right) = -\frac{2}{5}\delta + \frac{6}{5(5+\eta_k)}\left(\varepsilon - \frac{1+\eta_k}{2}\delta\right) \le -\frac{2}{5}\delta. \end{aligned}$$

Используя эти неравенства, оценку (2.5.42), представляем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_2 &\ll y\left(x^{-\frac{1}{12(5+\eta_3)}}\mathscr{L}^{\frac{b_1-(2k+1)c_3+(6-2(k-1)c_3)\varepsilon}{6}} + x^{-0,4\delta}\right)\mathscr{L}^2 \ll \\ &\ll y\mathscr{L}^{-A} + y\mathscr{L}^2\exp\left(-0,4\delta\mathscr{L}\right). \end{aligned}$$

Исползуя условие (2.5.32), получим

$$\begin{aligned} T_0 = \left(xy^{-1}+\lambda x^3\right)q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{A+3} &\le \left(\frac{x\sqrt{q}}{y} + \frac{x^3}{\sqrt{q}\tau}\right)\mathscr{L}^{A+3} \le \left(\frac{x\sqrt{q}}{y} + \frac{x^5\mathscr{L}^{b_1}}{y^5}\right)\mathscr{L}^{A+3} \le \\ &\ll \frac{x^5}{y^5}\mathscr{L}^{A+b_1+3} \le x^{\frac{5}{5+\eta_3}}\mathscr{L}^{A+b_1+3-(5)c_3} < 0,1x, \end{aligned}$$

Пользуясь этими неравенствами параметр $\delta = \delta(q, T_0)$ оценим снизу:

$$\begin{aligned} \delta(q,T_0) &= \frac{c_1}{\max\left(\ln q,\ \left(\ln(T_0+3)\ln\ln(T_0+3)\right)^{\frac{3}{4}}\right)} \ge \\ &\ge \frac{c_1}{\max\left(b\ln\mathscr{L},\ \left(\mathscr{L}\ln\mathscr{L}\right)^{\frac{3}{4}}\right)} \ge c_1\mathscr{L}^{-0,76}. \end{aligned}$$

Далее отсюда находим

$$\mathscr{B}_2 \ll y\mathscr{L}^{-A} + y\mathscr{L}^2 \exp\left(-0,4c_1\mathscr{L}^{0,24}\right) \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Учитывая эту оценку и оценку $\mathscr{B}_1$ в (2.5.34), находим

$$|W(\alpha; x, y)| \ll y\mathscr{L}^{-A}. \tag{2.5.44}$$

Используя оценку (2.4.14), лемму 2.2, при $\lambda > \left(18\pi x y^2\right)^{-1}$ и (2.5.32), имеем

$$\left| \frac{\tau(\chi_0, a, 3)}{\varphi(q)} \int\limits_{x-y}^{x} e(\lambda u^3) du \right| \ll \frac{\mathscr{L}}{\sqrt{q}} \cdot \frac{1}{\lambda x^2} \ll \frac{y^2\mathscr{L}}{\sqrt{q}x} \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Используя эту оценку, а также оценки (2.5.44), (2.4.13) и (2.4.15) в (2.5.24), окончательно имеем

$$S_3(\alpha; x, y) \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Теорема доказана.

Глава 3

Асимптотическая формула в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми

3.1. Формулировка основных результатов

Эстерман [4] для количества решений уравнения следующего вида:

$$p_1 + p_2 + m^2 = N, \tag{3.1.1}$$

нашёл асимптотическую формулу, где , p_1, p_2 — простые числа и m — натуральное число.

В работах З.Х.Рахмонова и его учеников – [80, 81, 102] эта задача исследована с более строгими условиями, а точнее, когда все слагаемые в (3.1.1) являются почти равны, и найдена асимптотическая формула для количества решений этого равенства со следующими условиями:

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2; \quad \left|m^2 - \frac{N}{3}\right| \le H; \quad , H \ge N^{\frac{3}{4}}\mathscr{L}^3.$$

Далее, в работах [82, 104] для более редкой последовательности с почти равными слагаемыми, получена асимптотическая формула, т.е., когда в уравнении (3.1.1) квадрат заменяется на его куб при условии $H \ge N^{\frac{5}{6}}\mathscr{L}^{10}$. Затем, в работах — [105, 106] была получена асимптотическая формула для ещё более редкой последовательности, когда в (3.1.1) квадрат заменяется на его четвёртую степень при условии $H \ge N^{\frac{11}{12}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}$, (также см. [112–114]).

В работе [64] в случае выполнения условия $H \ge N^{\frac{27}{32}+\varepsilon}$ получена асимптотическая формула для количества решений уравнения следующего вида:

$$p_1 + p_2 + p_3^2 = N, \qquad \left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2, \qquad \left|p_3^2 - \frac{N}{3}\right| \le H,$$

где p_1, p_2 и p_3 — простые числа.

Основным результатом третей главы является теорема 3.1. Эта теорема посвящена получению асимптотической формулы для редкой, кроме того не простой последовательности с почти равными слагаемыми, если в уравнении (3.1.1) квадрат натурального числа подменяется на куб простого числа. Эта теорема доказана круговым способом Харди - Литтлвуда - Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова, воспользовавшись следующими результатами полученными в второй главы:

- асимптотическая формула для коротких линейных тригсумм с простыми числами вида $S_1(\alpha; x, y)$ в малых окрестностях центра больших дугов (теорема 2.1);

- асимптотическая формула для коротких кубических тригсумм с простыми числами вида $S_3(\alpha; x, y)$ в малых окрестностях центра больших дугов (теорема 2.2);

- нетривиальная оценка коротких кубических тригсумм с простыми числами вида $S_3(\alpha; x, y)$ в больших дугах, кроме малой окрестности их центров (теорема 2.3).

Теорема 3.1. *Допустим N — достаточно большое натуральное число, $I(N, H)$ — количество представлений N суммою двух простых чисел p_1, p_2 и куба простого числа p_3 со следующими условиями*

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \qquad i = 1, 2, \qquad \left|p^3 - \frac{N}{3}\right| \le H$$

$\rho(N,p)$ — *количество решений сравнения* $k^3 \equiv N \pmod p$, $\mathscr{L}_3 = \ln\left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$,

$$\eta_3 = \frac{2}{7+4\sqrt{3}} \approx 0.1435935394, \qquad c_3 = \frac{10476-4816\sqrt{3}}{39} \approx 54.7,$$
$$\mathfrak{S}(N) = \prod_{(p,N)=1}\left(1+\frac{\rho(N,p)-1}{(p-1)^2}+\frac{\rho(N,p)}{(p-1)^3}\right)\prod_{(p,N)=p}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Тогда при выполнении условия $H \geq N^{1-\frac{1}{15+3\eta_3}}\mathscr{L}_3^{c_3}$, *имеет место асимптотическая формула:*

$$I(N,H) = \frac{\mathfrak{S}(N)H^2}{3^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^3} + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^4}\right).$$

3.2. Вспомогательные утверждения

Лемма 3.1. *Пусть* p — *простое число,* $(a,p)=1$, *тогда имеет место оценка*

$$S(a,p) = \sum_{x=1}^{p} e\left(\frac{ax^3}{p}\right) \ll \sqrt{p}.$$

Доказательство см.[127].

Лемма 3.2. *Пусть выполняется условие* $y \geq x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$, *тогда имеет место следующая асимптотическая формула*

$$\pi(x)-\pi(x-y) = \frac{y}{\ln x} + O\left(\frac{y}{\ln^2 x}\right).$$

Доказательство см. [128].

Лемма 3.3. *Пусть* $\mathscr{L} = \ln xq$, $B \geq 2$ — *абсолютная константа,* $\alpha = \frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}$, $(a,q)=1$, *то при выполнении условия* $\mathscr{L}_3^{32(B+20)} \leq q \leq$

$y^5x^{-2}\mathscr{L}_3^{-32(B+20)}$ *и* $y \ge x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}_3^{8B+151}$, *имеет место следующая оценка*

$$S_3(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n)e(\alpha n^3) \ll \frac{y}{\mathscr{L}_3^B}.$$

Доказательство см. [73].

Лемма 3.4. *Пусть* q *— число свободное от квадратов,* $(a,q) = 1$, *тогда справедлива следующая оценка*

$$S(a,q) = \sum_{x=1}^{q} e\left(\frac{ax^3}{q}\right) \ll \sqrt{q}.$$

Доказательство. Пусть $q = p_1p_2\dots p_k$ — каноническое разложение числа q на простые сомножители. Согласно лемме **??** существуют единственные числа $a_1, a_2\dots, a_k$, такие что

$$a = a_1q_1 + a_2q_2 + \ldots + a_kq_k,\ q_i = qp_i^{-1},\ (a_i, p_i) = 1,\ 1 \le a_i \le p_i,\ i = 1, 2, \ldots, k,$$

для которых выполняется соотношение

$$S(a,q) = S(a_1,p_1)S(a_2,p_2)\ldots S(a_k,p_k).$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой А.Вейла (лемма 3.1), получим утверждение леммы.

3.3. Доказательство теоремы 3.1

Считаем, что $H = N^{1-\frac{1}{15+3\eta_3}}\mathscr{L}_3^{c_3}$, и для удобства при ν равным 1 или 3 вводим обозначения

$$N_\nu = \left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \qquad H_\nu = \frac{H}{\nu\,(N/3)^{1-\frac{1}{\nu}}},$$

а также пусть $\text{æ} = \tau^{-1}$, где

$$\tau = (2H_3)^5 (N_3 + H_3)^{-2} \mathscr{L}_3^{-704}.$$

Величина τ относительно параметров N и H выражается следующим образом

$$\tau = \left(\frac{2H}{3^{1/3}N^{\frac{2}{3}}}\right)^5 \left(\left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{H}{3^{1/3}N^{\frac{2}{3}}}\right)^{-2} \mathscr{L}_3^{-704} = \frac{32H^5}{3N^4\mathscr{L}_3^{704}}\left(1 + \frac{H}{N}\right)^{-2}.$$

Имеем

$$\mathcal{I}(N, H) = \int\limits_{-\text{æ}}^{1-\text{æ}} \mathcal{S}_1^2(\alpha; N, H)\mathcal{S}_3(\alpha; N, H) e(-\alpha N)\, d\alpha, \tag{3.3.2}$$

$$\mathcal{S}_\nu(\alpha; N, H) = \sum_{|p^\nu - N/3| \le H} e(\alpha p^\nu).$$

Используя теорему Дирихле о приближении действительных чисел рациональными дробями, любое α из интервала $[-\text{æ}, 1 - \text{æ}]$ представимо в следующем виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \qquad (a, q) = 1, \qquad 1 \le q \le \tau, \qquad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}. \tag{3.3.3}$$

В этом соотношении $0 \le a \le q-1$, причём $a = 0$ только при $q = 1$. Буквой $\mathfrak{M}$ обозначим такие α, для которых в представлении (3.3.3) выполняется условие $q \le \mathscr{L}_3^{704}$, оставшиеся α обозначим буквой $\mathfrak{m}$. Легко можно показать, что $\mathfrak{M}$ образуется объединением непересекающихся промежутков и разобьём его $\mathfrak{M}$ на два множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ вида:

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{\alpha : \quad \alpha \in \mathfrak{M}, \quad \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{\mathscr{L}_3^2}{H}\right\},$$

$$\mathfrak{M}_2 = \left\{\alpha : \quad \alpha \in \mathfrak{M}, \quad \frac{\mathscr{L}_3^2}{H} < \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{q\tau}\right\}.$$

с помощью $I(\mathfrak{M}_1)$, $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ обозначим интегралы по множествам $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{m}$. Находим

$$I(N,H) = I(\mathfrak{M}_1) + I(\mathfrak{M}_2) + I(\mathfrak{m}).$$

В этой формуле $I(\mathfrak{M}_1)$, является главным членом асимптотической формулы для $I(N,H)$, а $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ являются остаточными членами.

Когда ν равным 1 или 3 будем пользоваться соотношениями вида:

$$\begin{gathered}
3\mathscr{L}_3 = \ln\frac{N}{3} = \nu\ln p + O(HN^{-1}), \qquad |p^\nu - N/3| \le H,\\
\left(\frac{N}{3} \pm H\right)^{\frac{1}{\nu}} = N_\nu \pm H_\nu + O\left(\frac{H^2}{N^{2-1/\nu}}\right),\\
N_\nu = \left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \qquad H_\nu = \frac{H}{\nu\,(N/3)^{1-\frac{1}{\nu}}},
\end{gathered}$$

которые соответственно являются следствием формулы Лагранжа о конечных приращениях и формулы $(1+u)^\mu = 1 + \mu u + O(u^2)$, где $|u| < 0,5$. Используя эти формули, отрезок суммирования $|p^\nu - N/3| \le H$ в $\mathcal{S}_\nu(\alpha; N, H)$ заменим на полуинтервал вида $N_\nu - H_\nu < p \le N_\nu + H_\nu$, далее выражая его через сумму вида $S(\alpha; x, y)$, получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_\nu(\alpha; N, H) &= \sum_{N_\nu - H_\nu < p \le N_\nu + H_\nu} e(\alpha p^\nu) + O\left(\frac{H^2}{N^{2-1/\nu}}\right) =\\
&= \sum_{N_\nu - H_\nu < p \le N_\nu + H_\nu} \left(\frac{\nu\ln p}{3\mathscr{L}_3} + O\left(\frac{H}{N\mathscr{L}_3}\right)\right) e(\alpha p^\nu) + O\left(\frac{H^2}{N^{2-1/\nu}}\right) =\\
&= \frac{\nu}{3\mathscr{L}_3}\left(S_\nu(\alpha; N_\nu + H_\nu, 2H_\nu) - \mathcal{S}'_\nu\right) + O\left(\frac{H^2}{N^{2-1/\nu}}\right). \qquad (3.3.4)
\end{aligned}$$

Тривиально оцениваем сумму $\mathcal{S}'_\nu$ количеством слагаемых, для этого используем формулу $(1\pm u)^{\mu}=1\pm \mu u+O(u^2)$, $|u|<0,5$, найдем

$$\mathcal{S}'_{\nu}=\sum_{\substack{N_\nu-H_\nu<p^k\le N_\nu+H_\nu\\ k\ge 2}}\ln p\; e(\alpha p^{k\nu})\ll \mathcal{L}_3^2\left((N_\nu+H_\nu)^{\frac12}-(N_\nu-H_\nu)^{\frac12}+1\right)=$$

$$=N_\nu^{\frac12}\mathcal{L}_3^2\left(\left(1+\frac{H_\nu}{N_\nu}\right)^{\frac12}-\left(1-\frac{H_\nu}{N_\nu}\right)^{\frac12}\right)+\mathcal{L}_3^2\ll$$

$$\ll H_\nu N_\nu^{-\frac12}\mathcal{L}_3^2+\mathcal{L}_3^2\ll \frac{H}{N^{1-\frac{1}{2\nu}}}\mathcal{L}_3^2+\mathcal{L}_3^2\ll \frac{H^2}{N^{2-\frac{1}{\nu}}}.$$

С учетом этой оценки, формула (3.3.4) примет вид:

$$\mathcal{S}_\nu(\alpha;N,H)=\frac{\nu}{3\mathcal{L}_3}S_\nu(\alpha;N_\nu+H_\nu,2H_\nu)+O\left(\frac{H^2}{N^{2-\frac{1}{\nu}}}\right). \tag{3.3.5}$$

Вычисление интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$. Воспользовавшись тем, что множество $\mathfrak{M}_1$ является объединением непересекающихся отрезков, имеем:

$$I(\mathfrak{M}_1)=\int\limits_{\mathfrak{M}_1}\mathcal{S}_1^2(\alpha;N,H)\mathcal{S}_3(\alpha;N,H)e(-\alpha N)d\alpha=\sum_{q\le\mathcal{L}_3^{704}}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}I(a,q), \tag{3.3.6}$$

$$I(a,q)=e\left(-\frac{aN}{q}\right)\int\limits_{|\lambda|\le\mathcal{L}_3^2H^{-1}}F\left(\frac{a}{q}+\lambda;N,H\right)e(-\lambda N)d\lambda, \tag{3.3.7}$$

$$F(\alpha;N,H)=\mathcal{S}_1^2(\alpha;N,H)\mathcal{S}_3(\alpha;N,H),\qquad \alpha=\frac{a}{q}+\lambda.$$

Далее к сумме $S_1\left(\alpha;N_1+H_1,2H_1\right)$ будем применять теорему 2.1, при условии

$$x=N_1+H_1,\qquad y=2H_1,\qquad A=1411,\qquad b=704,$$

и с учетом соотношения $1,5A+0,25b+18=2310,5$, проверяем выполнение следующих неравенств

$$2H_1\ge (N_1+H_1)^{\frac58}\left(\ln(N_1+H_1)\right)^{2311},\qquad \mathcal{L}_3^2H^{-1}\le (N_1+H_1)(2\pi(2H_1)^2)^{-1}.$$

Испльзуя условие $H = N^{1-\frac{1}{15+3\eta_3}}\mathscr{L}_3^{c_3}$, кроме того обозначения $H_1 = H$ и $N_1 = \frac{N}{3}$, находим

$$\frac{2H_1}{(N_1+H_1)^{\frac{5}{8}}\left(\ln(N_1+H_1)\right)^{2310,5}} = \frac{2N^{1-\frac{1}{15+3\eta_3}}\mathscr{L}_3^{c_3}}{\left(\frac{N}{3}+H\right)^{\frac{5}{8}}\left(\ln\left(\frac{N}{3}+H\right)\right)^{2310,5}} =$$

$$= \frac{2\cdot 3^{\frac{5}{8}}}{\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac{5}{8}}\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{3H}{N}\right)}{3\mathscr{L}_3}\right)^{2310,5}}\cdot N^{\frac{3}{8}-\frac{1}{15+3\eta_3}}\mathscr{L}_3^{c_3-2310,5} > 1;$$

$$\frac{(N_1+H_1)(2\pi(2H_1)^2)^{-1}}{\mathscr{L}_3^2H^{-1}} = \frac{N/3+H}{8\pi H\mathscr{L}_3^2} = \frac{N/3+N^{1-\frac{1}{15+3\eta_3}}\mathscr{L}_3^{c_3}}{8\pi N^{1-\frac{1}{15+3\eta_3}}\mathscr{L}_3^{c_3+2}} =$$

$$= \frac{1}{24\pi}\cdot\left(N^{\frac{1}{15+3\eta_3}}\mathscr{L}_3^{-c_3-2}+3\mathscr{L}_3^{-2}\right) > 1,$$

т. е выполняются оба условия, следовательно по теореме 2.1, имеем

$$S(\alpha; N_1+H, 2H_1) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin 2\pi\lambda H_1}{\pi\lambda}e\left(\lambda N_1\right) + O\left(\frac{H_1}{(\ln(N_1+H_1))^{1411}}\right) =$$

$$= \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right) + O\left(\frac{H}{\mathscr{L}_3^{1411}}\right).$$

Из-за этого и согласно формуле (3.3.5) при $\nu = 1$, находим

$$\mathcal{S}_1(\alpha; N, H) = \frac{1}{3\mathscr{L}_3}S_1(\alpha; N_1+H_1, 2H_1) + O\left(\frac{H^2}{N}\right) =$$

$$= \frac{1}{3\mathscr{L}_3}\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right) + R_1, \qquad R_1 \ll \frac{H}{\mathscr{L}_3^{1412}}.$$

Возводя эту формулу в квадрат, и учитывая неравенств

$$\left|\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)\right| \ll \frac{H}{\varphi(q)}, \qquad |\mathcal{S}_1\left(\alpha; N, H\right)| \ll \frac{H}{\mathscr{L}_3},$$

первое из которых при $|\lambda| \le \mathscr{L}_3^2H^{-1}$ следует из $|\sin 2\pi\lambda H| \le \pi\lambda H$, найдём

$$\mathcal{S}_1^2(\alpha; N, H) = \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}\cdot\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{9\pi^2\lambda^2\mathscr{L}_3^2}e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right) + O\left(\frac{HR_1}{\varphi(q)\mathscr{L}_3}\right) + R_1^2 =$$

$$= \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}\cdot\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{9\pi^2\lambda^2\mathscr{L}_3^2}e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right) + O\left(\frac{HR_1}{\mathscr{L}_3}\right).$$

Полученную формулу воспользовавшись оценкой для R_1, представим виде

$$\mathcal{S}_1^2\left(\frac{a}{q}+\lambda; N, H\right)-\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}\cdot\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{9\pi^2\lambda^2\mathscr{L}_3^2}\,e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right)\ll\frac{H^2}{\mathscr{L}_3^{1413}}. \qquad (3.3.8)$$

При помощи формулы (3.3.5) при $\nu = 3$ тривиально оценим сумму $\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)$. Имеем

$$\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)=\frac{1}{\mathscr{L}_3}S_3(\alpha; N_3+H_3, 2H_3)+O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}}\right)\ll\frac{H_3}{\mathscr{L}_3}+\frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}}\ll\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3},$$

Умножая это неравенство почленно на неравенство (3.3.8), получим

$$\begin{aligned}&\left(\mathcal{S}_1^2\left(\alpha; N, H\right)-\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{9\pi^2\lambda^2\mathscr{L}_3^2}e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right)\right)\mathcal{S}_3\left(\alpha; N, H\right)=\\&=F(\alpha; N, H)-\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{9\pi^2\lambda^2\mathscr{L}_3^2}e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right)\mathcal{S}_3\left(\alpha; N, H\right)\ll\frac{H^3}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^{1414}}. \qquad (3.3.9)\end{aligned}$$

К сумме $S_3\left(\alpha; N_3+H_3, 2H_3\right)$ применяем теорему 2.2, положив

$$x=N_3+H_3, \qquad y=2H_3, \qquad A=1411, \qquad b=704,$$

и будем проверять выполнение следующих условий данной теоремы

$$2H_3\geq\left(N_3+H_3\right)^{\frac{5}{8}}\left(\ln(N_3+H_3)\right)^{197}, \qquad \frac{\mathscr{L}_3^2}{H}\leq\frac{1}{18\pi(N_3+H_3)(2H_3)^2}.$$

Воспользовавшись явным выражением параметров N_3 и H_3, и учитывая условия $H = N^{1-\frac{1}{15+3\eta_3}}\mathscr{L}_3^{c_3}$, находим

$$\frac{2H_3}{(N_3+H_3)^{\frac{5}{8}}\left(\ln(N_3+H_3)\right)^{197}} = \frac{\frac{2H}{3^{\frac{1}{3}}N^{\frac{2}{3}}}\left(\ln\left(\left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{H}{3^{\frac{1}{3}}N^{\frac{2}{3}}}\right)\right)^{-197}}{\left(\left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{H}{3^{\frac{1}{3}}N^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{5}{8}}} =$$

$$= \frac{2\cdot\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{H}{N}\right)^3}{\mathscr{L}_3}\right)^{-197}}{3^{\frac{1}{8}}(1+\frac{H}{N})^{\frac{5}{8}}}\cdot\frac{H}{N^{\frac{21}{24}}}\mathscr{L}_3^{-197} =$$

$$= \frac{2\cdot\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{H}{N}\right)^3}{\mathscr{L}_3}\right)^{-197}}{3^{\frac{1}{8}}(1+\frac{H}{N})^{\frac{5}{8}}}\cdot N^{\frac{1}{8}-\frac{1}{15+3\eta_3}}\mathscr{L}_3^{c_3-197} > 1; \tag{3.3.10}$$

$$\frac{\left(18\pi(N_3+H_3)(2H_3)^2\right)^{-1}}{\mathscr{L}_3^2H^{-1}} = \frac{H\mathscr{L}_3^{-2}}{18\pi\left(\left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{H}{3^{\frac{1}{3}}N^{\frac{2}{3}}}\right)\left(\frac{2H}{3^{\frac{1}{3}}N^{\frac{2}{3}}}\right)^2} =$$

$$= \frac{N\mathscr{L}_3^{-2}}{24\pi H\left(1+\frac{H}{N}\right)} = \frac{N^{\frac{1}{15+3\eta_3}}\mathscr{L}_3^{-c_3-2}}{24\pi\left(1+\frac{H}{N}\right)} > 1, \tag{3.3.11}$$

т.е. оба неравенства выполняются, следовательно по теореме 2.2, и пользуясь обозначением

$$S_3'(a,q) = \sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{q} e\left(\frac{an^3}{q}\right),$$

находим

$$S_3(\alpha; N_3+H_3, 2H_3) = \frac{S_3'(a,q)}{\varphi(q)}\int\limits_{N_3-H_3}^{N_3+H_3} e(\lambda u^k)du + O\left(\frac{H_3}{(\ln(N_3+H_3))^{1411}}\right) =$$

$$= \frac{S_3'(a,q)}{\varphi(q)}\int\limits_{N_3-H_3}^{N_3+H_3} e(\lambda u^k)du + O\left(\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^{1411}}\right).$$

Отсюда с учётом формулы (3.3.5) при $\nu = 3$, найдём

$$\mathcal{S}_3(\alpha; N, H) = \frac{1}{\mathscr{L}_3} S_3(\alpha; N_3 + H_3, 2H_3) + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}}\right) =$$

$$= \frac{S_3'(a,q)}{\varphi(q)\mathscr{L}_3} \int\limits_{N_3-H_3}^{N_3+H_3} e(\lambda u^k) du + R_2, \quad R_2 \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}_3^{1412}}.$$

Воспользовавшись подстановкой $u = x - \frac{y}{2} + yt$ в интеграле, а затем явным выражением параметров N_3 и H_3, представим правую часть последней формулы в виде

$$\mathcal{S}_3(\alpha; N, H) = \frac{2S_3'(a,q)H_3}{\varphi(q)\mathscr{L}_3} \int\limits_{-0,5}^{0.5} e(\lambda(N_3 + 2H_3 t)^3) du + R_2 =$$

$$= \frac{2S_3'(a,q)H}{3^{\frac{1}{3}} \varphi(q) N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}_3} \gamma(\lambda) + R_2, \tag{3.3.12}$$

где

$$\gamma(\lambda) = \gamma(\lambda; N_3 + H_3, 2H_3) = \int\limits_{-0,5}^{0.5} e\left(\lambda\left(\left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{2H}{3^{\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}}} t\right)^3\right) dt.$$

Подставляя правую часть формулы (3.3.12) в (3.3.9), получим

$$F(\alpha; N, H) - \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{9(\pi\lambda)^2 \mathscr{L}_3^2} e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right) \left(\frac{2S_3'(a,q)H}{3^{\frac{1}{3}} \varphi(q) N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}_3} \gamma(\lambda) + R_2\right) \ll \frac{H^3}{N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}_3^{1414}}.$$

Отсюда, имея в виду, что

$$\left|\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{9(\pi\lambda)^2 \mathscr{L}_3^2} e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right)\right| \cdot R_2 \ll \frac{H^2 R_2}{\varphi^2(q) \mathscr{L}_3^2} = \frac{H^3}{\varphi^2(q) N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}_3^{1414}},$$

находим

$$F(\alpha; N, H) = \frac{2H}{3^{\frac{7}{3}} N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}_3^3} \cdot \frac{\mu^2(q) S_3'(a,q)}{\varphi^3(q)} \cdot \frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2} e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right) \gamma(\lambda) + R_3,$$

$$R_3 \ll \frac{H^3}{N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}_3^{1414}}.$$

Подставляя значение $F(\alpha; N, H)$ в формулу (3.3.7), найдём

$$
\begin{aligned}
I(a,q) &= e\left(-\frac{aN}{q}\right)\frac{2H}{3^{\frac{7}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^3}\cdot\frac{\mu^2(q)S_3'(a,q)}{\varphi^3(q)}\cdot J(H)+R_4, \qquad (3.3.13)\\
J(H) &= \int\limits_{|\lambda|\le\mathscr{L}_3^2H^{-1}}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2}\gamma(\lambda)e\left(-\frac{\lambda N}{3}\right)d\lambda,\\
R_4 &\ll \frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^{1412}}.
\end{aligned}
$$

Подставив значение интеграла $\gamma(\lambda)$ в правую часть $J(H)$, получим

$$
\begin{aligned}
J(H) &= \int\limits_{|\lambda|\le\mathscr{L}_3^2/H}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2}\gamma(\lambda)e\left(-\frac{\lambda N}{3}\right)d\lambda=\\
&= \int\limits_{|\lambda|\le\mathscr{L}_3^2/H}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2}\int\limits_{-0,5}^{0.5}e\left(\lambda\left(\left(\left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{2H}{3^{\frac{1}{3}}N^{\frac{2}{3}}}t\right)^3\right)\right)e\left(-\frac{\lambda N}{3}\right)dt\,d\lambda=\\
&= \int\limits_{|\lambda|\le\mathscr{L}_3^2/H}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2}\int\limits_{-0,5}^{0,5}e\left(2\lambda Ht\left(1+\frac{2Ht}{N}+\frac{4H^2t^2}{3N^2}\right)\right)dt\,d\lambda=\\
&= \frac{2H}{\pi}\int\limits_{|u|\le2\pi\mathscr{L}_3^2}\frac{\sin^2 u}{u^2}\int\limits_{-0,5}^{0,5}e\left(\frac{ut}{\pi}\left(1+\frac{2Ht}{N}+\frac{4H^2t^2}{3N^2}\right)\right)dt\,du.
\end{aligned}
$$

Используя асимптотику вида:

$$
e\left(\frac{ut}{\pi}\left(\frac{2Ht}{N}+\frac{4H^2t^2}{3N^2}\right)\right)=e\left(\frac{2Hut^2}{\pi N}\left(1+\frac{2Ht}{3N}\right)\right)=1+O\left(\frac{H\mathscr{L}_3^2}{N}\right).
$$

находим

$$J(H) = \frac{2H}{\pi} \int\limits_{|u|\le 2\pi\mathscr{L}_3^2} \frac{\sin^2 u}{u^2} \int\limits_{-0,5}^{0,5} e\left(\frac{ut}{\pi}\right)\left(1 + O\left(\frac{H\mathscr{L}_3^2}{N}\right)\right) du\ dt =$$

$$= \frac{2H}{\pi} \int\limits_{|u|\le 2\pi\mathscr{L}_3^2} \frac{\sin^2 u}{u^2} \int\limits_{-0,5}^{0,5} e\left(\frac{ut}{\pi}\right) dt\ du + O\left(\frac{H^2\mathscr{L}_3^4}{N}\right) =$$

$$= \frac{2H}{\pi} \int\limits_{|u|\le 2\pi\mathscr{L}_3^2} \frac{\sin^3 u}{u^3} du + O\left(\frac{H^2\mathscr{L}_3^4}{N}\right) =$$

$$= \frac{4H}{\pi} \int\limits_{0}^{2\pi\mathscr{L}_3^2} \frac{\sin^3 u}{u^3} du + O\left(\frac{H^2\mathscr{L}_3^4}{N}\right).$$

Заменяя интеграл по u на несобственный интегра, близким к нему,который от $\mathscr{L}_3$ не зависит, и воспользовавшись оценкой

$$\int\limits_{2\pi\mathscr{L}_3^2}^{\infty} \frac{\sin^3 u}{u^3} du \ll \mathscr{L}_3^{-6},$$

находим

$$J(H) = \frac{4H}{\pi}\left(\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^3 u}{u^3} du - \int\limits_{2\pi\mathscr{L}_3^2}^{\infty} \frac{\sin^3 u}{u^3} du\right) + O\left(\frac{H^2\mathscr{L}_3^4}{N}\right) =$$

$$= \frac{4H}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^3 u}{u^3} du + O\left(\frac{H}{\mathscr{L}_3^6}\right).$$

Используя следующую формулу ([129] с. 174)

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^n mu}{u^n} du = \frac{\pi m^{m-1}}{2^n(n-1)1}\left[n^{n-1} - \frac{n}{1!}(n-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}(n-4)^{n-1} + \dots\right].$$

когда $m = 1$ и $n = 3$, имеем

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^3 u}{u^3} du = \frac{3\pi}{8}.$$

Таким образом
$$J(H)=\frac{3H}{2}+O\left(\frac{H}{\mathscr{L}_3^6}\right).$$
Подставляем найденную формулу в (3.3.13),
$$I(a,q)=\frac{2H}{3^{\frac{7}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^3}\cdot\frac{\mu^2(q)S_3'(a,q)}{\varphi^3(q)}e\left(-\frac{aN}{q}\right)\left(\frac{3H}{2}+O\left(\frac{H}{\mathscr{L}_3^6}\right)\right)+R_4=$$
$$=\frac{H^2}{3^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^3}\cdot\frac{\mu^2(q)S_3'(a,q)}{\varphi^3(q)}e\left(-\frac{aN}{q}\right)+R_5(a,q), \tag{3.3.14}$$
$$R_5(a,q)\ll\frac{\mu^2(q)|S_3'(a,q)|}{\varphi^3(q)}\cdot\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^9}+\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^{1412}}.$$
Далее правую часть формулы (3.3.14) подставляем в (3.3.6). Имеем
$$I(\mathfrak{M}_1)=\frac{H^2}{3^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^3}\sum_{q\le\mathscr{L}_3^{704}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}\Phi_N(q)+R(\mathfrak{M}_1), \tag{3.3.15}$$
$$\Phi_N(q)=\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q}S'(a,q)e\left(-\frac{aN}{q}\right).$$

А теперь оценим остаточный член $R(\mathfrak{M}_1)$:
$$R(\mathfrak{M}_1)\ll\sum_{q\le\mathscr{L}_3^{704}}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}R_5(a,q)\ll$$
$$\ll\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^{1412}}\sum_{q\le\mathscr{L}_3^{704}}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}1+\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^5}\sum_{q\le\mathscr{L}_3^{704}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}|S_3'(a,q)|\ll$$
$$\ll\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^{1412}}\sum_{q\le\mathscr{L}_3^{704}}\varphi(q)+\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^5}\sum_{q\le\mathscr{L}_3^{704}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi(q)}\ll$$
$$\ll\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^{1412}}\mathscr{L}_3^{1408}+\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^5}\mathscr{L}_3\ll\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^4}.$$
Следовательно
$$I(\mathfrak{M}_1)=\frac{H^2}{3^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^3}\sum_{q\le\mathscr{L}_3^{704}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}\Phi_N(q)+O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^4}\right). \tag{3.3.16}$$

В формуле (3.3.16), сумму по q, заменяя близким к ней бесконечным рядом, который не зависят от $\mathscr{L}_3^{704}$ имеем:

$$\sum_{q\le\mathscr{L}_3^{704}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}\Phi_N(q)=\mathfrak{S}(N)-R(N), \tag{3.3.17}$$

$$\mathfrak{S}(N)=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}\Phi_N(q),\qquad R(N)=\sum_{q>\mathscr{L}_3^{704}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}\Phi_N(q).$$

Затем представляем особый ряд вида $\mathfrak{S}(N)$ в виде бесконечного произведения по простым числам. Для этого сначала прежде докажем, что сумма $\Phi_N(q)$ есть мультипликативная функция. Положим, что $q=q_1q_2$, $(q_1,q_2)=1$, тогда в сумме

$$\Phi_N(q)=\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q}S'(a,q)e\left(-\frac{aN}{q}\right),$$

заменяя переменную суммирования a в следующем виде

$$a=a_1q_2+a_2q_1,\quad (a_1,q_1)=1,\quad 1\le a_1\le q_1,\quad (a_2,q_2)=1,\quad 1\le a_2\le q_2,$$

находим

$$\Phi_N(q_1q_2)=\sum_{\substack{a_1=1\\(a_1,q_1)=1}}^{q_1}\ \sum_{\substack{a_2=1\\(a_2,q)=1}}^{q_2}S'(a_1q_2+a_2q_1,q_1q_2)e\left(-\frac{(a_1q_2+a_2q_1)N}{q_1q_2}\right). \tag{3.3.18}$$

В $S'(a_1q_2+a_2q_1,q_1q_2)$ переменную суммирования x представляем в следующем виде

$$x=x_1q_2+x_2q_1,\qquad 1\le x_1\le q_1,\quad 1\le x_2\le q_2,$$

и учитывая, что

$$(x_1q_2+x_2q_1,q_1q_2)=(x_1q_2+x_2q_1,q_1)(x_1q_2+x_2q_1,q_2)=$$
$$=(x_1q_2,q_1)(x_2q_1,q_2)=(x_1,q_1)(x_2,q_2),$$

находим

$$S'(a_1q_2+a_2q_1,q_1q_2)=\sum_{\substack{x=1\\(x,q_1q_2)=1}}^{q_1q_2}e\left(\frac{(a_1q_2+a_2q_1)x^3}{q_1q_2}\right)=$$

$$=\sum_{\substack{x_1=1\\(x_1,q_1)=1}}^{q_1}\sum_{\substack{x_2=1\\(x_2,q_2)=1}}^{q_2}e\left(\frac{(a_1q_2+a_2q_1)(x_1q_2+x_2q_1)^3}{q_1q_2}\right)=$$

$$=\sum_{\substack{x_1=1\\(x_1,q_1)=1}}^{q_1}e\left(\frac{a_1(x_1q_2)^3}{q_1}\right)\sum_{\substack{x_2=1\\(x_2,q_2)=1}}^{q_2}e\left(\frac{a_2(x_2q_1)^3}{q_2}\right)=$$

$$=\sum_{\substack{x_1=1\\(x_1,q_1)=1}}^{q_1}e\left(\frac{a_1x_1^3}{q_1}\right)\sum_{\substack{x_2=1\\(x_2,q_2)=1}}^{q_2}e\left(\frac{a_2x_2^3}{q_2}\right)=S'(a_1,q_1)S'(a_2,q_2).$$

Это соотношение подставляем в формулу (3.3.18). Получим

$$\Phi_N(q_1q_2)=\sum_{\substack{a_1=1\\(a_1,q_1)=1}}^{q_1}S'(a_1,q_1)e\left(-\frac{a_1N}{q_1}\right)\sum_{\substack{a_2=1\\(a_2,q)=1}}^{q_2}S'(a_2,q_2)e\left(-\frac{a_2N}{q_2}\right)=\Phi_N(q_1)\Phi_N(q_2).$$

Используя абсолютную сходимость особого ряда $\mathfrak{S}(N)$ и мультипликативность $\Phi_N(q)$, получим, что

$$\mathfrak{S}(N)=\prod_p\left(1+\frac{\Phi_N(p)}{(p-1)^3}\right),$$

Далее соотношение $\Phi_N(p)$ рассмотрим в двух случаях: $(N,p)=1$ и $(N,p)=p$. Сначала будем рассматривать первый случай

$$\Phi_N(p)=\sum_{a=1}^{p-1}S'(a,p)e\left(-\frac{aN}{p}\right)=\sum_{x=1}^{p-1}\sum_{a=1}^{p-1}e\left(\frac{a(x^3-N)}{p}\right)=$$

$$=\sum_{x=1}^{p-1}\left(\sum_{a=1}^{p}e\left(\frac{a(x^3-N)}{p}\right)-1\right)=\sum_{\substack{x=1\\x^3\equiv N\,(\mathrm{mod}\ p)}}^{p-1}p-(p-1)=$$

$$=p\rho(N,p)-(p-1)=(p-1)(\rho(N,p)-1)+\rho(N,p).$$

здесь $\rho(N,p)$ — количество решений следующего сравнения $x^3 \equiv N(\mathrm{mod}\ p)$.

При выполнении условия $(N,p)=p$, находим

$$\Phi_N(p)=\sum_{a=1}^{p-1}S'(a,p)e\left(-\frac{aN}{p}\right)=\sum_{a=1}^{p-1}S'(a,p)=\sum_{a=1}^{p}S'(a,p)-S'(p,p)=$$

$$=\sum_{x=1}^{p-1}\sum_{a=1}^{p}e\left(\frac{ax^3}{p}\right)-(p-1)=-(p-1)=-\varphi(p).$$

Таким образом, имеем

$$\mathfrak{S}(N)=\prod_{(p,N)=1}\left(1+\frac{\rho(N,p)-1}{(p-1)^2}+\frac{\rho(N,p)}{(p-1)^3}\right)\prod_{(p,N)=p}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Далее будем оценивать $R(N)$. Находим

$$R(N)=\sum_{q>\mathscr{L}_3^{704}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}\Phi_N(q),\qquad \Phi_N(q)=\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q}S'(a,q)e\left(-\frac{aN}{q}\right).$$

Поскольку $\Phi_N(q)$ является мультипликативной функцией и число q – бесквадратное, тогда

$$\Phi_N(q)=\prod_{p\backslash q}\Phi_N(p),\qquad \Phi_N(p)=\sum_{a=1}^{p-1}S'(a,p)e\left(-\frac{aN}{p}\right).$$

Так как

$$S'(a,p)=\sum_{x=1}^{p-1}e\left(\frac{ax^3}{p}\right)=\sum_{x=1}^{p}e\left(\frac{ax^3}{p}\right)-1=S(a,p)-1,$$

то пользуясь оценкой $|S(a,p)|\ll p^{1/2}$ (лемма 3.1), последовательно получаем

$$|\Phi_N(q)|=\prod_{p\backslash q}|\Phi_N(p)|\le\prod_{p\backslash q}\sqrt{p}(p-1)<\prod_{p\backslash q}p\sqrt{p}=q\sqrt{q}.$$

Поэтому

$$|R(N)|\le\sum_{q>\mathscr{L}_3^{704}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}|\Phi_N(q)|\le\sum_{q>\mathscr{L}_3^{704}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}q^{\frac{3}{2}}\ll$$

$$\ll\sum_{q>\mathscr{L}_3^{704}}\frac{(\ln\ln q)^3}{q^{\frac{3}{2}}}\ll\int\limits_{\mathscr{L}_3^{704}}^{\infty}\frac{(\ln\ln u)^3}{u^{\frac{3}{2}}}du\ll\mathscr{L}_3^{-8}.$$

Следовательно для формулы (3.3.17), находим

$$\sum_{q\le \mathscr{L}_3^{704}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)}\Phi_N(q) = \mathfrak{S}(N) + O\left(\mathscr{L}_3^{-8}\right),$$

$$\mathfrak{S}(N) = \prod_{(p,N)=1}\left(1+\frac{\rho(N,p)-1}{(p-1)^2}+\frac{\rho(N,p)}{(p-1)^3}\right)\prod_{(p,N)=p}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right),$$

где $\rho(N,p)$ — количество решений сравнения вида $x^3 \equiv N(\mathrm{mod}\ p)$.

Подставляем это соотношение в формулу (3.3.16). Находим

$$I(\mathfrak{M}_1) = -\frac{\mathfrak{S}(N)H^2}{3^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^3} + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_3^4}\right). \tag{3.3.19}$$

Оценка интеграла $I(\mathfrak{M}_2)$. По определению находим:

$$I(\mathfrak{M}_2) = \int\limits_{\mathfrak{M}_2} \mathcal{S}_1^2(\alpha; N, H)\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)e(-\alpha N)d\alpha.$$

Переходя к оценкам, найдём

$$\begin{aligned}
I(\mathfrak{M}_2) &\ll \max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)|\int\limits_0^1 |\mathcal{S}_1(\alpha; N, H)|^2 d\alpha = \\
&= \max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)|\int\limits_0^1 \mathcal{S}_1(\alpha; N, H)\overline{\mathcal{S}_1(\alpha; N, H)}d\alpha = \\
&= \max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)|\sum_{|p-N/3|\le H} 1 = \\
&= \max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)|\left(\pi\left(\frac{N}{3}+H\right)-\pi\left(\frac{N}{3}-H\right)\right).
\end{aligned}$$

Применяем к этой формуле, учитывая неравенство

$$2H = 2 = N^{1-\frac{1}{15+3\eta_3}}\mathscr{L}_3^{c_3} \ge \left(\frac{N}{3}+H\right)^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$$

лемму 3.2. Находим

$$I(\mathfrak{M}_2) \ll \frac{H}{\mathscr{L}_3}\cdot \max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)|. \tag{3.3.20}$$

Когда $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, то получим

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad \frac{\mathscr{L}_3^2}{H} < |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \le q \le \mathscr{L}_3^{704}.$$

$$\tau = (2H_3)^5(N_3 + H_3)^{-2}\mathscr{L}_3^{-704} = \frac{32}{3}H^5N^{-4}\mathscr{L}_3^{-704}\left(1 + \frac{H}{N}\right)^{-2}.$$

Далее оценим $\mathcal{S}_3(\alpha, N, H)$ для α из множества $\mathfrak{M}_2$. Для этого, воспользовавшись формулой (3.3.5) при $\nu = 3$, выражая сумму $\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)$ через сумм вида $S_3(\alpha; x, y)$, имеем

$$\mathcal{S}_3(\alpha; N, H) = \frac{1}{\mathscr{L}_3}S_3(\alpha; N_3 + H_3, 2H_3) + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}}\right), \tag{3.3.21}$$

$$N_3 = \left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad H_3 = \frac{H}{3^{\frac{1}{3}}N^{\frac{2}{3}}},$$

Рассмотрим два возможных случая:

1. $\dfrac{\mathscr{L}_3^2}{H} < |\lambda| \le \dfrac{1}{18\pi(N_3 + H_3)(2H_3)^2}$;
2. $\dfrac{1}{18\pi(N_3 + H_3)(2H_3)^2)^3} < |\lambda| \le \dfrac{1}{q\tau}$.

Случай 1. К сумме $S_3\left(\alpha; N_3 + H_3, 2H_3\right)$ применим теорему 2.2, полагая

$$x = N_3 + H_3, \qquad y = 2H_3, \qquad A = 1411, \qquad b = 704.$$

Ранее при вычислении интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$, воспользовавшись явным выражением параметров N_3 и H_3, и имея в виду, что $1,5A + 0,25b + 18 = 2310,5$, а также условие $H = N^{1-\frac{1}{15+3\eta_3}}\mathscr{L}_3^{c_3}$ в формулах (3.3.10) и (3.3.11) показали, что

$$2H_3 \ge (N_3 + H_3)^{\frac{5}{8}}\left(\ln(N_3 + H_3)\right)^{2310,5}, \qquad \frac{\mathscr{L}_3^2}{H} \le \frac{1}{18\pi(N_3 + H_3)(2H_3)^2},$$

то есть оба условия теоремы 2.2 выполняются, поэтому согласно этой теореме имеет место соотношение (формула (3.3.12))

$$\mathcal{S}_3(\alpha; N, H) = \frac{2S_3'(a,q)H}{3^{\frac{1}{3}}\varphi(q)N^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}_3}\gamma(\lambda) + O\left(\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}_3^{1412}}\right),$$

$$\gamma(\lambda) = \gamma(\lambda; N_3 + H_3, 2H_3) = \int\limits_{-0{,}5}^{0.5} e\left(\lambda\left(\left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{2H}{3^{\frac{1}{3}}N^{\frac{2}{3}}}t\right)^3\right)dt.$$

Переходим к оценке, учитывая , что $|S_3'(a,q)| \le \varphi(q)$, имеем

$$|\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)| \ll \frac{|S_3'(a,q)|H}{\varphi(q)N^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}_3}|\gamma(\lambda)| + \frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}_3^{1412}} \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}_3}|\gamma(\lambda)| + \frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}_3^{3}}. \tag{3.3.22}$$

Применим к оценке интеграла вида $\gamma(\lambda)$ лемму 2.2, положим в нём

$$f(t) = \lambda\left(\left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{2H}{3^{\frac{1}{3}}N^{\frac{2}{3}}}t\right)^3.$$

Пользуясь выражением $H = N^{1-\frac{1}{15+3\eta_3}}\mathcal{L}_3^{c_3}$ и $|t| \le 0,5$ находим, что

$$f''(u) = \frac{12\lambda H^2}{3^{\frac{2}{3}}N^{\frac{4}{3}}}\left(\left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{2H}{3^{\frac{1}{3}}N^{\frac{2}{3}}}u\right) = \frac{4\lambda H^2}{N}\left(1 + \frac{2H}{N}u\right) > 0,$$

т.е. знак $f''(u)$ не меняется, поэтому первая производная этой функции есть монотонная функция и имеет место неравенство

$$f'(u) \ge f'(0,5) = \frac{6\lambda H}{3^{\frac{1}{3}}N^{\frac{2}{3}}}\left(\left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{H}{3^{\frac{1}{3}}N^{\frac{2}{3}}}\right)^2 = 2\lambda H\left(1 - \frac{H}{N}\right)^2 \ge \lambda H \ge \mathcal{L}_3^2.$$

Таким образом, используя лемму 2.2, при $m = \mathcal{L}_3^2$ и $M = 1$ найдем

$$|\gamma(\lambda)| \le \mathcal{L}_3^{-2}.$$

Полученную оценку подставим в формулу (3.3.22), находим

$$|\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)| \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}_3^3}.$$

Случай 2. Сумму $S_3(\alpha; N_3+H_3, 2H_3)$ оценим используя теорему 2.3 полагая в ней

$$x=N_3{+}H_3,\quad y=2H_3,\quad A=2,\quad b=b_1=704,\quad c_3=\frac{10476-4816\sqrt{3}}{39}\approx 54.7.$$

Используем явные значения параметров N_3 и H_3, а такжеравенство $H=N^{1-\frac{1}{15+3\eta_3}}\mathscr{L}_3^{c_3}$, находим

$$\frac{2H_3}{(N_3+H_3)^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\left(\ln(N_3+H_3)\right)^{c_3}}=\frac{\frac{2H}{3^{\frac13}N^{\frac23}}\left(\ln\left(\left(\frac{N}{3}\right)^{\frac13}+\frac{H}{3^{\frac13}N^{\frac23}}\right)\right)^{-c_3}}{\left(\left(\frac{N}{3}\right)^{\frac13}+\frac{H}{3^{\frac13}N^{\frac23}}\right)^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}}=$$

$$=\frac{2\cdot 3^{\frac{1}{15+3\eta_3}}H\left(\mathscr{L}_3+\ln\left(1+\frac{H}{N}\right)\right)^{-c_3}}{N^{1-\frac{1}{15+3\eta_3}}\left(1+\frac{H}{N}\right)^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}}=\frac{2\cdot 3^{\frac{1}{15+3\eta_3}}}{\left(1+\frac{H}{N}\right)^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{H}{N}\right)^3}{\mathscr{L}_3}\right)^{c_3}}\ge 1,$$

т.е. неравенство $2H_3\ge (N_3+H_3)^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\left(\ln(N_3+H_3)\right)^{c_3}$ выполняется, поэтому согласно теореме 2.3, имеем

$$|S_3(\alpha; N_3+H_3, 2H_3)|\ll\frac{H_3}{(\ln(N_3+H_3))^2}\ll\frac{H}{N^{\frac23}\mathscr{L}_3^2}.$$

Переходим к оценкам в формуле (3.3.21), и подставляя найденные оценки суммы $S_3(\alpha; N_3+H_3, 2H_3)$ в двух случаях в (3.3.21), найдем

$$\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)\ll\frac{|S_3(\alpha; N_3+H_3, 2H_3)|}{\mathscr{L}_3}+\frac{H^2}{N^{\frac53}}\ll\frac{H^2}{N^{\frac53}\mathscr{L}_3^3}\left(1+\frac{H\mathscr{L}_3^3}{N}\right)\ll\frac{H^2}{N^{\frac53}\mathscr{L}_3^3}.$$

Подставляя полученную оценку для $|\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)|$, $\alpha\in\mathfrak{M}_2$, в (3.3.20), получим

$$I(\mathfrak{M}_2)\ll\frac{H}{\mathscr{L}_3}\cdot\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)|\ll\frac{H^2}{\sqrt[3]{N^2}\mathscr{L}_3^4}.$$

Оценка интеграла $I(\mathfrak{m})$. По определению находим

$$I(\mathfrak{m})=\int\limits_{\mathfrak{m}}\mathcal{S}_1^2(\alpha; N, H)\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)e(-\alpha N)d\alpha.$$

В этом интеграле переходим к оценкам, имеем

$$I(\mathfrak{m}) \leq \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)| \int\limits_0^1 |\mathcal{S}_1(\alpha; N, H)|^2 d\alpha =$$

$$= \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)| \int\limits_0^1 \mathcal{S}_1(\alpha; N, H)\overline{\mathcal{S}_1(\alpha; N, H)} d\alpha =$$

$$= \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)| \sum_{|p-N/3|\leq H} 1 =$$

$$= \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)| \left(\pi\left(\frac{N}{3}+H\right) - \pi\left(\frac{N}{3}-H\right)\right).$$

Полученную формулу применяем, имея в виду неравенство

$$2H = 2 = N^{1-\frac{1}{15+3\eta_3}}\mathcal{L}_3^{c_3} \geq \left(\frac{N}{3}+H\right)^{\frac{7}{12}+\varepsilon},$$

леммы 3.2, находим

$$I(\mathfrak{m}) \ll \frac{H}{\mathcal{L}_3} \cdot \max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2} |\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)|. \tag{3.3.23}$$

Пусть $\alpha \in \mathfrak{m}$, тогда

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad \mathcal{L}_3^{704} \leq q \leq \tau.$$

$$\tau = (2H_3)^5(N_3+H_3)^{-2}\mathcal{L}_3^{-704} = \frac{32}{3}H^5N^{-4}\mathcal{L}_3^{-704}\left(1+\frac{H}{N}\right)^{-2}.$$

Далее оценим $\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)$ для α принадлежащей множеству $\mathfrak{m}$, для этого применяем формулу (3.3.5) и выражаем её через сумму $S_3(\alpha; x, y)$. Имеет место соотношение

$$\mathcal{S}_3(\alpha; N, H) = \frac{3}{\mathcal{L}_3} S_3(\alpha; N_3+H_3, 2H_3) + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}}\right), \tag{3.3.24}$$

$$N_3 = \left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad H_3 = \frac{H}{3^{\frac{1}{3}}N^{\frac{2}{3}}},$$

Для оценки суммы $S_3(\alpha; N_3+H_3, 2H_3)$ воспользуемся леммой 3.3, полагая

$$x = N_3 + H_3, \quad y = 2H_3, \quad B = 2,$$

и проверим выполнение неравенства

$$2H_3 \geq (N_3+H_3)^{\frac{4}{5}} \left(\ln(N_3+H_3)\right)^{167}, \tag{3.3.25}$$

данной леммы. Используя точные значения параметров N_3 и H_3, а также равенство $H = N^{1-\frac{1}{15+3\eta_3}} \mathscr{L}_3^{c_3}$, находим

$$\frac{2H_3}{(N_3+H_3)^{\frac{4}{5}} \left(\ln(N_3+H_3)\right)^{167}} = \frac{\dfrac{2H}{3^{\frac{1}{3}}N^{\frac{2}{3}}}}{\left(\left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{H}{3^{\frac{1}{3}}N^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{4}{5}} \left(\ln\left(\left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{H}{3^{\frac{1}{3}}N^{\frac{2}{3}}}\right)\right)^{167}}$$
$$= \frac{2\cdot 3^{-\frac{1}{15}} H N^{-\frac{14}{15}}}{\left(1+\frac{H}{N}\right)^{\frac{4}{5}} \left(\mathscr{L}_3 + \ln\left(1+\frac{H}{N}\right)\right)^{167}} = \frac{2\cdot 3^{-\frac{1}{15}}}{\left(1+\frac{H}{N}\right)^{\frac{4}{5}} \left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{H}{N}\right)^3}{\mathscr{L}_3}\right)^{167}} \cdot \frac{HN^{-\frac{14}{15}}}{\mathscr{L}_3^{167}}$$
$$= \frac{2\cdot 3^{-\frac{1}{15}}}{\left(1+\frac{H}{N}\right)^{\frac{4}{5}} \left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{H}{N}\right)^3}{\mathscr{L}_3}\right)^{167}} \cdot N^{\frac{1}{15}-\frac{1}{15+3\eta_3}} \mathscr{L}_3^{c_3+167} \geq 1;$$

т.е. условие (3.3.25) выполняется, следовательно используя формулу (3.3.24) и лемму 3.3, найдем

$$|\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)| \ll \mathscr{L}_3^{-1} |S_3(\alpha; N_3+H_3, 2H_3)| + \frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}} \ll$$
$$\ll \mathscr{L}_3^{-1} \frac{H_3}{(\ln(N_3+H_3))^2} + \frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}} \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}_3^3} + \frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}} =$$
$$= \frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}_3^3} \left(1 + \frac{H}{N}\right) \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}_3^3}.$$

Подставлем найденную оценку для суммы $|\mathcal{S}_3(\alpha; N, H)|$, $\alpha \in \mathfrak{m}$, в формулу(3.3.23), окончательно имеем

$$I(\mathfrak{m}) \ll \frac{H}{\mathscr{L}_3} \cdot \max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |S_3(\alpha; N, H)| \ll \frac{H^2}{\sqrt[3]{N^2} \mathscr{L}_3^4}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Обсуждение полученных результатов

Основными результатами диссертационной работы являются теоремы 2.1, 2.2, 2.3, и 3.1.

Получение асимптотической формулы в проблеме Т.Эстермана для кубов простых чисел в случае, когда слагаемые почти такие же (теорема 3.1), с использованием кругового метода Харди, Литтлвуда, Рамануджана в виде тригсумм И.М.Виноградова, в частности сводится к решению следующих четырёх задач по исследованию коротких тригсумм с простыми числами:

1. изучение поведения коротких тригсуммы вида $S_1\left(\alpha; \dfrac{N}{3}+H, 2H\right)$ в малых окрестностях центров больших дуг $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_3^{704})$;

2. исследование поведения коротких тригсуммы вида $S_3(\alpha; N_3+H_3, 2H_3)$ в малых окрестностях центра больших дугов $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_3^{704})$;

3. нахождение нетривиальной оценки короткой суммы $S_3(\alpha; N_3+H_3, 2H_3)$ в больших дугах вида $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_3^{704})$ кроме малой окрестности их центров;

4. нахождение нетривиальной оценки короткой тригсуммы $S_3(\alpha; N_3 + H_3, 2H_3)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_3^{704})$.

Первая задача решена в теореме 2.1 (глава 1, параграф 1.3), вторая в теореме 2.2 (глава 1, параграф 1.4), третья задача в теореме 2.3 (глава 1, параграфы 1.5). Четвёртая задача решена в работе [73], и пользуемся результатом этой работы.

Приведём наиболее важные результаты по исследованиям, предшествующие теореме 2.1 (пункт **A.**), теореме 2.2 и 2.3 (пункт **B.**), и теореме 3.1 (пункт **C.**).

А. Теорема 2.1 посвящается получению асимптотической формулы с остаточным членом для коротких линейных тригсумм Г. Вейля с простыми числами

$$S_1(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n)e(\alpha n),$$

в малых окрестностях центров больших дуг $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$.

Как мы уже отмечали И.М. Виноградов в 1937 г. создавал новый метод оценок тригсумм с простыми числами, основой которого является решето И.М. Виноградова и метод сглаживания двойных сумм. Используя эти методы, он впервые элементарно нашёл нетривиальную оценку для линейной тригсуммы вида

$$S_1(\alpha, N) = \sum_{m\le N} \Lambda(m)e(\alpha m^k),$$

в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^b)$ и решил тернарную задачу Гольдбаха.

Ю.В. Линник [115, 116] впервые оценил аналитическим методом линейную тригсумму с простыми числами оценил в малых дугах и используя теоремы о густоте нулей L-рядов Дирихле, нашёл новый вариант нетривиальной оценки суммы $S_1(\alpha, N)$ в $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^b)$.

Короткую линейную тригсумму Вейля с простыми числами вида $S_1(\alpha; x, y)$ также впервые изучил И.М. Виноградов [6]. Он, используя свой метод оценок тригсумм с простыми числами, нашёл нетривиальную оценку в малых дугах вида $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$, $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ при выполнении условия $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$.

Потом К.В. Хазелгров [53], используя метод оценки тригсумм с простыми числами И.М. Виноградова в соединении с методом работы Ю.В. Линника, получил для суммы $S_1(\alpha; x, y)$ при

$$y \geq x^\theta, \qquad \theta = \frac{63}{64} + \varepsilon,$$

нетривиальную оценку в $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^b)$ и асимптотическую формулу $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$. Используя эти результаты он решил тернарную проблему Гольдбаха когда слагаемые почти равны, т.е. для количества решений диофантова уравнения

$$p_1 + p_2 + p_3 = N, \qquad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \qquad H \geq N^\theta,$$

нашёл асимптотическую формулу.

В. Статулявычус [54], Цзя Чаохуа [55–58], аналитическим методом применявшимся в работе К.В. Хазелгрова, в сочетании с методом оценки тригонометрических сумм и интегралов Вандер Корпута, заменили показатель θ соответственно на

$$\frac{279}{308} + \varepsilon, \qquad \frac{91}{96} + \varepsilon, \qquad \frac{13}{17} + \varepsilon.$$

А. Балог и А. Перелли [117] при условии $1 \leq a < q$, $(a, q) = 1$ и $y \leq x$ нашли следующую оценку

$$S_1\left(\frac{a}{q}; x, y\right) \ll \left(x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} + \frac{y}{q^{\frac{1}{2}}} + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}} \right) \mathscr{L}^{100},$$

которая является нетривиальной, если $y \geq x^{\frac{3}{5}} \mathscr{L}^{200}$.

Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо [59] на основе метода оценок тригсумм с простыми числами И.М. Виноградова, а также плотностных теорем для нулей L-рядов Дирихле в коротких прямоугольниках критической полосы нашли новый метод, с помощью которого получили нетривиальную оценку для $S_1(\alpha; x, y)$ в $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^b)$ и доказали асимптотическую формулу $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$ при

$$y \geq x^\theta, \qquad \theta = \frac{2}{3} + \varepsilon.$$

В 1991 г. Т. Жан [60], используя метод Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо и теорему М. Ютилы [118] о моментах L-функций Дирихле в критической прямой, изменил θ на

$$\frac{5}{8}+\varepsilon.$$

В доказанной теоремы 2.1 для $S_1(\alpha;x,y)$ доказана асимптотическая формула с остаточным членом в малых окрестностях центров больших дуг $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$ при условии

$$y\geq x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18},$$

здесь A и b — любые фиксированные неотрицательные числа.

B. Теорема 2.2 посвящена выводу асимптотической формулы с остатком для коротких кубических тригсумм Германа Вейля с простыми числами вида $S_3(\alpha;x,y)$ в малых окрестностях центров больших дуг $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$, а в теореме 2.3 найдена нетривиальная оценка этих сумм в больших дугах $\mathfrak{M}(P)$ кроме малой окрестности их центров.

Короткие нелинейные тригсуммы с простыми числами первым исследовал И.М. Виноградов [6]. В 1939 г. для суммы следующего вида

$$S_k(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\leq x}\Lambda(n)e(\alpha n^k),$$

$$\alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\qquad (a,q)=1,\qquad 1\leq q\leq\tau,\qquad |\lambda|\leq\frac{1}{q\tau},$$

когда α есть рациональные числа $\frac{a}{q}$, $(a,q)=1$, он при условии $x^{\frac{2}{3}+\varepsilon_1}q\leq y\leq x$ и $q\geq\mathscr{L}^{\varepsilon_2}$, получил следующую оценку

$$S_k\left(\frac{a}{q};x,y\right)\ll yq^{-\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

где ε, ε_1, ε_2 — любые малые положительные постоянные.

Лю Дж. и Ж. Тао [62] изучили короткие квадратичные тригсуммы с простыми числами в больших дугах, и в малых дугах. Они условно предполагая справедливост расширенной гипотезы Римана при условии

$$y \geq x^{\frac{2}{3}+\varepsilon},$$

показали, что для вского $A > 0$ можнло найти константы вида $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, чтол справедливо соотношение

$$S_2(\alpha; x, y) = \begin{cases} M(\alpha; x, y) + O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^A}\right), & q \leq \mathscr{L}^{c_1}, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{xy\mathscr{L}^{c_2}}; \\ O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^A}\right), & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad (i)$$

$$M(\alpha; x, y) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^{q} e\left(-\frac{ah^k}{q}\right) \int\limits_{x-y}^{x} e(\lambda u^k) du, \qquad \tau = \frac{y^3}{x\mathscr{L}^{c_3}}.$$

Они затем получили эти результаты безусловно при

$$y \geq x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}.$$

При этом использовали метод оценки тригсумм с простыми числами И.М. Виноградова, а также плотностные теоремы для нулей L-рядов Дирихле в критической полосы и теоремы Ютилы [118] о моментах L-функций Дирихле в критической прямой.

Кумчев [67] нашёл нетривиальную оценку для суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$, $\tau = x^{k-\frac{2}{2k+3}}P^{-1}$ при условии $y \geq x^{1-\frac{1}{2k+3}+\varepsilon}$.

В 2016 г. З.Х. Рахмонов и Ф.З. Рахмонов [73, 74], используя метод оценки тригсумм с простыми числами И.М. Виноградова вместе с методом работы [75] и результатами [76, 78], показали, что, если A — абсолютная константа, тогда при выполнении условия

$$y \geq x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8A+151},$$

на малых дугах $\mathfrak{m}\left(\mathscr{L}^{32(A+20)}\right)$, $\tau = y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(A+20)}$, имеет место оценка

$$S_3(\alpha;x,y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}^A}. \tag{ii}$$

Этим же методом они в работе [79] доказали для коротких кубических тригсуммы с функцией Мёбиуса вида

$$\sum_{x-y<n\le x}\mu(n)e(\alpha n^3),$$

нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(B+18)})$ при условии $y \geq x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+944}$ и $\tau = y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}$.

В теореме 2.2 для суммы $S_3(\alpha;x,y)$ найдена асимптотическая формула с остаточным членом в малых окрестностях $|\lambda| \le \left(18\pi xy^2\right)^{-1}$ центров больших дуг $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$ при выполнении неравенства

$$y \ge x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18},$$

здесь A и b — любые неотрицательные числа. А в теореме 2.3 - в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$ кроме малой окрестности их центров при выполнении условий

$$y \ge x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathscr{L}^{c_3}, \qquad \eta_3 = \frac{2}{7+4\sqrt{3}}, \qquad c_3 = \frac{2A+24+\left(\sqrt{3}-1\right)b_1}{4\sqrt{3}-3}$$

получили нетривиальную оценку (ii).

C. Решение классических аддитивных проблем Гольдбаха, Варинга, Гольдбаха-Варинга и Эстермана становится гораздо труднее, если их рассматривать при условии, что все слагаемые почти равны.

Аддитивные задачи с почти равными слагаемыми первым изучал Э.М. Райт [119], которые связаны с задачей Варинга, точнее с теоремой Лагранжа о представимости любого натурального числа как суммы четырёх квадратов. Ему удалось доказать, что почты все достаточно большие натуральные числа N можно представить в следующем виде

$$N = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2,$$
$$\left| n_j - \left(\frac{N}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \right| \le N^{\frac{3}{10}}, \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$

Тернарную задачу Гольдбаха с почти равными слагаемыми впервые решил К.В. Хазелгров [53]. Он, воспользовавшись для суммы $S_1(\alpha; x, y)$ своей нетривиальной оценкой в $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^b)$ и асимптотической формулой $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$, доказал асимптотическую формулу для количества решений диофантова уравнения вида:

$$p_1 + p_2 + p_3 = N, \qquad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \le H, \qquad H \ge N^\theta, \qquad \theta = \frac{63}{64} + \varepsilon.$$

Такую же тернарную задачу рассмотрела С.Ю. Фаткина [112]. Она получила асимптотическую формулу для количества решений диофантова уравнения вида $N = p_1 + p_2 + [\sqrt{2}p_3]$ в простых p_1, p_2, p_3, с следующими условиями:

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \le H, \quad i = 1, 2, \qquad \left| [\sqrt{2}p_3] - \frac{N}{3} \right| \le H, \qquad H \ge N^{\frac{5}{8}} \ln^c N.$$

З.Х. Рахмонов с учениками в работах [80, 82, 83, 85] сначала при $n = 2, 3, 4$, затем [94] для произвольного фиксированного n исследовали коротких тригсумм Г. Вейля следующего вида

$$T(\alpha, x, y) = \sum_{x-y<m\le x} e(\alpha m^n),$$

в больших дугах и решили [94, 107, 109, 110] задачу Варинга с почти равными слагаемыми в следующих случаях: $n = 3, 4, 5$, были найдены асимптотические формулы для числа решений представлений любого $N > N_0$ как суммы степеней натуральных чисел x_i, $i = 1, \ldots, 2^n + 1$ со следующими условиями:

$$\left| x_i - \left(\frac{N}{2^n + 1}\right)^{\frac{1}{n}} \right| \le H, \qquad H \ge N^{\frac{1}{n} - \theta(n) + \varepsilon};$$

где

$$\theta(3)=\frac{1}{30},\qquad \theta(4)=\frac{1}{108},\qquad \theta(5)=\frac{1}{340}.$$

Полученные выше результаты о поведении коротких тригсумм Германа Вейля следующего вида $T_n(\alpha;x,y)$ дали возможность при $n=2,3,4$, найти асимптотические формулы в обобщенной тернарной задаче Эстермана с почти равными слагаемыми следующего вида:

$$p_1+p_2+m^n=N,$$

где p_1, p_2 простые числа и m натуральное число, со следующими условиями:

$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\le H,\quad i=1,2,\qquad \left|m^n-\frac{N}{3}\right|\le H,\qquad H\ge N^{1-\theta(n)}\ln^{c_n}N,$$

при

$$\begin{aligned}\theta(2)&=\frac{1}{4},\qquad c_2=2;\\ \theta(3)&=\frac{1}{6},\qquad c_3=3;\\ \theta(4)&=\frac{1}{12},\qquad c_4=\frac{40}{3}.\end{aligned}$$

П.З. Рахмонов [113, 114] доказал обобщение тернарной задачи Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми. Ему удалось при любом фиксированном c, найти формулу (асимптотическую) для количества решений диофантова уравнения вида:

$$p_1+p_2+[n^c]=N,$$

где p_1, p_2 простые числа и n натуральное со следующими условиями

$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\le H,\quad i=1,2,\qquad \left|[n^c]-\frac{N}{3}\right|\le H,\qquad H\ge N^{1-\frac{1}{2c}}\ln^2 N.$$

Дж. Лю и Ж. Тао [62–66] решили задачу Гольдбаха-Варинга с почти равными слагаемыми для квадратов простых чисел и доказали теорему Х.Л. Гена [31] о представлении достаточно большого натурального N, $N \equiv 5 \pmod{24}$ в следующем виде:

$$N = p_1^2 + \ldots + p_5^2, \quad \left| p_j - \sqrt{\frac{N}{5}} \right| \leq H, \quad H \geq N^{\frac{11}{23}+\varepsilon}.$$

Ж.Тао и Дж. Лю [64], используя для суммы вида $S_2(\alpha, x, y)$, зависящей от справедливости гипотезы Римана оценкой (i), решили задачу Эстермана для квадратов простых чисел с почти равными слагаемыми, конкретнее, доказали, что любое достаточно большое натуральное N представимо в следующем виде:

$$N = p_1 + p_2 + p_3^2,$$

при условии

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \qquad \left| p_3^2 - \frac{N}{3} \right| \leq H, \qquad H \geq N^{\theta},$$

где

$$\theta = \frac{5}{6} + \varepsilon.$$

Далее они [64], используя для суммы $S_2(\alpha, x, y)$ безусловную оценку (i), получили эти результаты при

$$\theta = \frac{27}{32} + \varepsilon.$$

Теорема 3.1 посвящена получению асимптотической формулы в обобщении теоремы Эстермана, о представимости достаточно большого N в виде суммы трёх почти равных слагаемых, два из которых являются простыми, а третье кубом простого числа, то есть для числа решений уравнения вида:

$$N = p_1 + p_2 + p_3^3, \qquad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \qquad \left| p_3^3 - \frac{N}{3} \right| \leq H,$$

при

$$H \geq N^{1-\frac{1}{15+3\eta_3}} \mathscr{L}_3^{c_3},$$

где

$$\eta_3 = \frac{2}{7+4\sqrt{3}} \approx 0.1435935394, \qquad c_3 = \frac{10476 - 4816\sqrt{3}}{39} \approx 54.7.$$

Выводы

Все полученные результаты диссертационной работы новые, представляют научный интерес и состоят в нижеследующем:

- получена асимптотическая формула с остаточным членом для коротких линейных тригонометрических сумм Германа Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг [3-А, 5-А, 9-А];
- получена асимптотическая формула с остаточным членом для коротких кубических тригонометрических сумм Германа Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг [1-А, 6-А, 7-А, 9-А];
- найдена нетривиальная оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах кроме малых окрестностей их центров [2-А, 8-А, 9-А];
- получена асимптотическая формула для числа представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы двух простых чисел и куба простого числа, при условии, что они почти равны [4-А, 9-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Все результаты, полученные в диссертационном работе, имеют теоретический характер. Эти результаты можно применять в исследованиях по аналитической теории чисел, а именно при изучении задач по теории коротких тригсумм с простыми числами и в аддитивных задачах.

Материалы диссертационной работы могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

Литература

[1]. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел [Текст] / И.М. Виноградов, А.А. Карацуба // Труды МИАН СССР. —1984 г. — Т. 77. —С. 4–30.

[2]. Waring E. Meditationes algebraicae [Текст] / E. Waring // —Cambridge. — 1770.

[3]. Erdösh P. On the easier Waring problem for powers of primes. I [Текст] / P. Erdösh // Proc. of the Cambridge Phil. Soc. January —1937. — V. XXXIII. —Part I. —P. 6—12.

[4]. Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square [Текст] / T. Estermann // Proc. London math. Soc. —11(1937). — P. 501—516.

[5]. Виноградов И.М. Представление нечетного числа суммой трех простых чисел [Текст] / И.М. Виноградов // Доклады Академии наук СССР. — 1937 г. —Т.15. —С. 291—294.

[6]. Виноградов И.М. Избранные труды [Текст] / И.М. Виноградов // — М:Изд-во АН СССР. —1952 г.

[7]. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел [Текст] / И.М. Виноградов // —М.: —Наука. —1980 г. —С. 144.

[8]. Виноградов И.М. Особые варианты методов тригонометрических сумм [Текст] / И.М. Виноградов // —М.: —Наука. —1976 г.

[9]. Chen J.R. On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes [Текст] / J.R. Chen // Kexue Tongbao. —1966. —V.17. —P. 385—386.

[10]. Ross P.M. On Chen's theorem that each large even number has the form p_1+p_2 or $p_1+p_2p_3$ [Текст] / P.M. Ross // London Math. Soc. —(2). —1975. — V.10. —P. 500—506.

[11]. Гильберт Д. Избранные труды [Текст] / Д. Гильберт // Т.1. Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики. —М.: Изд-во «Факториал» —1998 г. —С. 575.

[12]. Hilbert D. Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl nter Potenzen (Waringsche Problem) [Текст] / D. Hilbert // Nachrichten von der Königlichen Gesellchaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch- physikalische Klasse aus den Jahren 1909. —s.17—36; Math. Annalen. —67. —P. 281—300.

[13]. Hardy G.H. Nachr. Acad. Wiss. Gettingen [Текст] / G.H. Hardy, J.E. Littlwood // Math. Phys. Kl. —1920. —P. 33—54. —IV: Math. Z. —1922. —Bd. —V.12. —P. 161—168.

[14]. Виноградов И.М. Об одной общей теореме Варинга [Текст] / И.М. Виноградов // Матем. сб. —1924 г. —Т.31. —№ 3–4 —С. 490—507.

[15]. Виноградов И.М. О теореме Варинга [Текст] / И.М. Виноградов // Известия Академии наук СССР. —VII серия. Отделение физико-математических наук. —1928 г. —Вып.–4. —С. 393—400.

[16]. Виноградов И.М. Новое решение проблемы Варинга [Текст] / И.М. Виноградов // Доклады Академии наук СССР. —1934 г. —№ 2. —С. 337—341.

[17]. Виноградов И.М. О верхней границе $G(n)$ в проблеме Варинга [Текст] / И.М. Виноградов // Известия Академии наук СССР. Отделение физико-математических наук. —1934 г. —№ 10. —С. 1455—1469.

[18]. Виноградов И.М. Новый вариант вывода теоремы Варинга [Текст] / И.М. Виноградов // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. —1935 г. —№ 9. —С. 5—16.

[19]. Виноградов И.М. Новый метод в аналитической теории чисел [Текст] / И.М. Виноградов // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. —1937 г. —Т.10. —С. 5—122.

[20]. Виноградов И.М. Общие теоремы о верхней границе модуля тригонометрической суммы [Текст] / И.М. Виноградов // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. —1951 г. —Т.15. —№ 2. —С. 109—130.

[21]. Виноградов И.М. К вопросу о верхней границе для $G(n)$ [Текст] / И.М. Виноградов // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. —1959 г. —Т.23. —№ 5. —С. 637—642.

[22]. Карацуба А.А. О функции $G(n)$ в проблеме Варинга [Текст] / А.А. Карацуба // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. —1985 г. —Т.49 —№ 5. —С. 935—947.

[23]. Wooley T.D. Large improvements in Waring's problem [Текст] / T.D. Wooley // Ann of Math. —1992. —(2)135. —№ 1. —P. 131—164.

[24]. Davenport H. [Текст] / H. Davenport // Ann of Math. —1939. —V.40. —P. 731—747.

[25]. Линник Ю.В. О разложении больших чисел на семь кубов [Текст] / Ю.В. Линник // Доклады Академии наук СССР. —1942 г. —№ 35. —С. 179—180.

[26]. Линник Ю.В. О разложении больших чисел на семь кубов [Текст] / Ю.В. Линник // Матем. сб. —1943 г. —Т.12(54). —№ 2. —С. 218—224.

[27]. Линник Ю.В. Элементарное решение проблемы Варинга по методу Шнирельмана, Математический сборник [Текст] / Ю.В. Линник // Матем. сб. —1943 г. —Т.12(54). —№ 2. —С.225—230.

[28]. Watson G.L. A proof of the seven cube theorem [Текст] / G.L. Watson // J. London math. Soc. —1951. —V.26. —P. 153—156.

[29]. Vaughan R.C. Sur le probleme de Waring pour les cubes [Текст] / R.C. Vaughan // C.R. Acad. Sci. Paris. S'erie I —301(1985). —P. 253—255.

[30]. Vaughan R.C. On Waring's problem for cubes [Текст] / R.C. Vaughan // J. Reine Angew. Math. —1986. —V.365. —P. 122—170.

[31]. Hua L.K. Some results in the additive prime number theory [Текст] / L.K. Hua // Quart. J. Math. —1938. —V.9. —№ 1. —P. 68–80.

[32]. Хуа Ло-Ген Аддитивная теория простых чисел [Текст] / Ло-Ген Хуа // Труды МИАН СССР. —1947 г. —Т.22. —С. 1—179.

[33]. Хуа Ло-Ген Метод тригонометрических сумм и ее применения в теории чисел [Текст] / Ло-Ген Хуа // —М.: Мир. —1964. —С. 190.

[34]. Виноградов И.М. Некоторые общие теоремы, относящиеся к теории простых чисел [Текст] / И.М. Виноградов // Труды Тбиллиского математического института. —1938 г. —Т.3. —С. 1—67.

[35]. Чубариков В.Н. К проблеме Варинга-Гольдбаха [Текст] / В.Н. Чубариков // Доклады Академии наук. —2009 г. —Т.427. —№ 1. —С. 24—27

[36]. Чубариков В.Н. О проблеме Варинга-Гольдбаха [Текст] / В.Н. Чубариков, Г.И. Архипов, Ф.С. Авдеев // Современные проблемы математики. —2009 г. —Т.3. —Выпуск 1. —С. 13—31. МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет.

[37]. Чубариков В.Н. Кратные тригонометрические суммы с простыми числами [Текст] / В.Н. Чубариков // ДАН СССР. —1984 г. —Т.278. —№ 2. —С. 302—304.

[38]. Чубариков В.Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами [Текст] / В.Н. Чубариков // Изв. АН СССР. Сер. мат. —1985 г. —Т.49. —№ 5. —С. 1031—1067.

[39]. Карацуба А.А. Проблема Варинга для сравнения по модулю, равному степени простого числа [Текст] / А.А. Карацуба // Вестник МГУ. —1962 г. —Сер.1. —№ 1. —С. 28—38.

[40]. Карацуба А.А. Средние значения модуля тригонометрической суммы [Текст] / А.А. Карацуба // Изв. АН СССР. Сер.матем. —1973 г. —Т.36. —№ 6. —С. 1203—1227.

[41]. Архипов Г.И. Новая оценка интеграла И.М.Виноградова [Текст] / Г.И. Архипов, А.А. Карацуба // Изв. АН СССР. Сер.матем. —1978 г. —Т.42. —№ 4. —С. 751—762.

[42]. Архипов Г.И. Равномерные оценки кратных тригонометрических суммах [Текст] / Г.И. Архипов, А.А. Карацуба, В.Н. Чубариков // ДАН СССР. —1980 г. —Т.252 —№ 6. —С. 1289—1291.

[43]. Архипов Г.И. Кратные тригонометрические суммы и их приложения [Текст] / Г.И. Архипов, А.А. Карацуба, В.Н. Чубариков // Изв. АН СССР. Сер. мат. —1980 г. —Т.44. —С. 723—781.

[44]. Архипов Г.И. Теория кратных тригонометрических сумм [Текст] / Г.И. Архипов, А.А. Карацуба, В.Н. Чубариков —М.: Наука. —1987 г. —С. 368.

[45]. Архипов Г.И. О кратных тригонометрических суммах [Текст] / Г.И. Архипов, В.Н. Чубариков // ДАН СССР. —1975 г. —Т.222. —№ 5. —С. 1017—1019.

[46]. Архипов Г.И. Кратные тригонометрические суммы [Текст] / Г.И. Архипов, В.Н. Чубариков // Изв. АН СССР. Сер. мат. —1976 г. —Т.40. —С. 209—220.

[47]. Архипов Г.И. Оценки двойных тригонометрических сумм [Текст] / Г.И. Архипов // Труды МИАН им. В.А. Стеклова АН СССР. —1976 г. —Т.142. —С. 46—66.

[48]. Архипов Г.И. О среднем значении сумм Г. Вейля [Текст] / Г.И. Архипов // Математические заметки —1978 г. —Т.23. —№ 6. —С. 785—788.

[49]. Чубариков В.Н. О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах [Текст] / В.Н. Чубариков // Мат.заметки —1976 г. —Т.20. —№ 1. —С. 61—68

[50]. Чубариков В.Н. Об одном кратном тригонометрическом интеграле [Текст] / В.Н. Чубариков // ДАН СССР. —1976 г. —Т.227. —С. 1308—1310.

[51]. Чубариков В.Н. Асимптотическая формула среднего значения кратной тригонометрической суммы [Текст] / В.Н. Чубариков // Мат. заметки —1978 г. —Т.23. —№ 6. —С. 799—816.

[52]. Виноградов И.М. Оценки некоторых простейших сумм с простыми числами [Текст] / И.М. Виноградов // Известия АН СССР. Сер. мат. — 1939 г. –Т.3. –С. 371—398.

[53]. Haselgrove C. B. Some theorems in the analitic theory of number [Текст] / C. B. Haselgrove // J. London Math. SoC. —1951. —V.26. —P.273—277.

[54]. Статулявичус В. О представлении нечетных чисел суммою трех почти равных простых чисел [Текст] / В. Статулявичус // ВильнюС. Ученые труды университета. Сер. мат. физ. и хим. н. —1955 г. —№ 2. —С. 5—23.

[55]. Jia Chaohua. Three primes theorem in a short interval (II) [Текст] / Chaohua Jia // International symposium in memory of Hua Loo Keng, Science Press and Springer-Verlag. Berlin. —1991. —P. 103—115.

[56]. Jia Chaohua. Three primes theorem in a short interval (V) [Текст] / Chaohua Jia // Acta Math. Sin. New Series. —2(1991). —P. 135—170.

[57]. Jia Chaohua. Three primes theorem in a short interval (VII) [Текст] / Chaohua Jia // Acta Math. Sin. New Series. —10(1994). —P. 369—387.

[58]. Jia Chaohua. Three primes theorem in a short interval (VII) [Текст] / Chaohua Jia // Acta Math. Sinica —4(1994). —P. 464—473. Chinese.

[59]. Pan Cheng-dong. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) [Текст] / Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao // Chinese Ann. of Math. —1990. —V.2. —P. 138—147.

[60]. Zhan Tao. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes [Текст] / T. Zhan // Acta Math Sinica. New ser. —1991. —V.7. —№ 3. —P. 135—170.

[61]. Jia Chao-hua. Three primes theorem in a short interval (VII) [Текст] / Chao-hua Jia // Acta Mathematica Sinica. New Series —1994. —V.10. —№ 4. —P. 369 —387.

[62]. Liu J.Y. On sums of five almost equal prime squares [Текст] / J.Y. Liu, T. Zhan // Acta Arithmetica. —1996. —V.77. —P. 369—383.

[63]. Liu J.Y. On sums of five almost equal prime squares (II) [Текст] / J.Y. Liu, T. Zhan // Sci China. —1998. —V.41. —P. 710—722.

[64]. Liu J. Estimation of exponential sums over primes in short intervals [Текст] / J. Liu, T. Zhan // I. Mh Math. —1999. —V.127. —P. 27—41.

[65]. Liu J. Hua's Theorem on Prime Squares in Short Intervals [Текст] / J. Liu, T. Zhan // Acta Mathematica Sinica. English Series. Oct. —2000. —V.16. —№ 4. —P. 669—690.

[66]. Liu J. Exponential sums over primes in short intervals [Текст] / J. Liu, G. Lu. & T. Zhan // Science in China: Series A Mathematics. —2006. —V.49. —№ 5. —P. 611—619.

[67]. Kumchev A.V. On Weyl sums over primes in short intervals [Текст] / A.V. Kumchev // «Arithmetic in Shangrila» Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. —2012. —V.9. Singapore: World ScientifiC. —P. 116—131.

[68] Yao Y. Sums of nine almost equal prime cubes [Текст] / Y. Yao // Frontiers of Mathematics in China. October —2014. —V.9. —Is.5. —P. 1131–1140.

[69]. Исматов С.Н. Оценка коротких тригонометрических сумм с простыми числами [Текст] / С.Н. Исматов, З.Х. Рахмонов, Ф.З. Рахмонов // ДАН РТ. —2013 г. —Т.56. —№ 12. —С. 937—945.

[70]. Рахмонов З.Х. Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами [Текст] / З.Х. Рахмонов, Ф.З. Рахмонов // Доклады Академии наук. —2014 г. —Т.459. —№ 2. —С. 156—157.

[71]. Rakhmonov F.Z. Sum of Short Exponential Sums over Prime Numbers [Текст] / F.Z. Rakhmonov, Z.Kh. Rakhmonov, // Doklady Mathematics. —2014. —Vol.90. —№ 3. —P. 1—2. —doi.org/10.1134/S1064562414070138.

[72]. Рахмонов З.Х. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малых дугах [Текст] / З.Х. Рахмонов, Ф.З. Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. —2016 г. —Т.59. —№ 7-8. —С. 273—277.

[73]. Рахмонов З.Х. Короткие кубические суммы с простыми числами [Текст] / З.Х. Рахмонов, Ф.З. Рахмонов // Труды МИАН. —2016 г. —Т.296. — С. 220—242.

[74]. Rakhmonov F.Z. Short Cubic Exponential Sums over Primes [Текст] / F.Z. Rakhmonov, Z.Kh. Rakhmonov // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. —2017. —V.296. —P. 211—233.

[75]. Рахмонов Ф.З. Оценка квадратичных тригонометрических сумм с простыми числами [Текст] / Ф.З. Рахмонов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. —2011 г. —№ 3. —С. 56—60.

[76]. Рахмонов З.Х. Сумма коротких двойных тригонометрических сумм [Текст] / З.Х. Рахмонов, Ф.З. Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. —2013 г. —Т.56. —№ 11. —С. 853—860.

[77]. Рахмонов З.Х. Короткие кубические двойные тригонометрические суммы, с «длинным» сплошным суммированием [Текст] / Б.М. Замонов, З.Х. Рахмонов // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. —2014 г. —№ 4(157). —С. 7—23.

[78]. Рахмонов З.Х. Оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм с «длинным» сплошным суммированием [Текст] / Б.М. Замонов, З.Х. Рахмонов, Ф.З. Рахмонов // Чебышевский сборник. —2016 г. — Т.17. —вып.1. —С. 217—231.

[79]. Рахмонов З.Х. Тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса [Текст] / З.Х. Рахмонов, Ф.З. Рахмонов // Чебышевский сборник. —2019 г. — Т.17. —№ 4(72). —С. 246—270. —doi: 10.22405/2226-8383-2019-20-4-246-270

[80].Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми [Текст] / З.Х. Рахмонов // Математические заметки. —2003 г. —Т.74. — вып.4. —С. 564—572.

[81]. Рахмонов З.Х. Короткие квадратичные тригонометрические суммы Вейля [Текст] / З.Х. Рахмонов, Дж.А. Шокамолова // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. —2009 г. —№ 2(135). —С. 7—18.

[82]. Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми [Текст] / З.Х. Рахмонов // Мат.заметки. —2014 г. —Т.95. —вып.3. —С. 445—456.

[83]. Rakhmonov Z.Kh. The Estermann cubic problem with almost equal summand [Текст] / Z.Kh. Rakhmonov // Mathematical Notes. —2014. —V.95. —Issue 3—4. —P. 407—417. —doi.org/10.1134/S0001434614030122

[84]. Рахмонов З.Х. Об оценках коротких кубических сумм Г.Вейля [Текст] / К.И. Мирзоабдугафуров, З.Х. Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. —2008 г. —Т.51. —№ 1. —С. 5—15.

[85]. Азамов А.З. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля четвертой степени [Текст] / А.З. Азамов, К.И. Мирзоабдугафуров, З.Х. Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. —2010 г. —Т.53. —№ 10. —С. 737—744.

[86]. Мирзоабдугафуров К.И. Проблема Варинга для девяти кубов с почти равными слагаемыми [Текст] / К.И. Мирзоабдугафуров // Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Душанбе —2009 г. —ст.63.

[87]. Шокамолова Дж.А. Проблема Эстермана с почти равными слагаемыми [Текст] / Дж.А. Шокамолова // Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Душанбе —2010 г. —ст.63.

[88]. Азамов А.З. Проблема Варинга с почти равными слагаемыми для четвертых степеней [Текст] / А.З. Азамов // Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Душанбе —2011 г. —ст.62.

[89]. Озодбекова Н.Б. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля [Текст] / Н.Б. Озодбекова, З.Х. Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. —2011 г. —Т.54. —№ 4. —С. 257—264.

[90]. Фозилова Д.М. Об оценке коротких тригонометрических сумм Г.Вейля [Текст] / З.Х. Рахмонов, Д.М. Фозилова // Доклады АН РТ. —2011 г. —Т.54. —№8. —С. 605—609.

[91]. Фозилова Д.М. Короткая кубическая тригонометрическия сумма Г.Вейля [Текст] / З.Х. Рахмонов, Д.М. Фозилова // Доклады АН РТ. —2011 г. —Т.54. —№ 11. —С. 880—886.

[92]. Рахмонов З.Х. Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля [Текст] / З.Х. Рахмонов // Ученые записки Орловского университета, серия естественные, технические и медицинские науки. —2012 г. —№ 6. Часть —2. —С. 194—203.

[93]. Рахимов А.О. Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля в множестве точек первого класса [Текст] / А.О. Рахимов, Н.Н. Назрублоев // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. —2014 г. —Т.57. —№ 8. —С. 621—628.

[94]. Рахимов А.О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения [Текст] / А.О. Рахимов, З.Х. Рахмонов, Н.Н. Назрублоев // Чебышевский сборник. —2015 г. —Т.16. —В.1(53). —С. 232—247.

[95]. Рахмонов З.Х. Короткие тригонометрические суммы [Текст] / З.Х. Рахмонов // В сборнике: Труды международной летней математической школы-конференции С. Б. Стечкина по теории функций. Таджикистан. Душанбе. 15—25 августа —2016 г. —С. 206—212.

[96]. Фозилова Д.М. Асимптотическая формула в кубической задаче Эстермана с почти равными слагаемыми [Текст] / Д.М. Фозилова // Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Душанбе —2011 г. —ст.63.

[97]. Озодбекова Н.Б. Распределение дробных частей значений многочлена аргумент, которого принимает значения из коротких интервалов [Текст] / Н.Б. Озодбекова // Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Душанбе —2012 г. —ст.70.

[98]. Назрублоев Н.Н. Проблема Варинга с почти равными слагаемыми для пятых степеней [Текст] / Н.Н. Назрублоев // Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Душанбе —2015 г. —ст.72.

[99]. Рахимов А.О. Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми [Текст] / А.О. Рахимов // Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Душанбе —2017 г. —ст.65.

[100]. Рахмонов З.Х. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малых дугах [Текст] / З.Х. Рахмонов, Ф.З Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. —2017 г. —Т.59. —№ 7-8. —С. 273—277.

[101]. Назрублоев Н.Н. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в малых дугах [Текст] / А.З. Азамов, З.Х. Рахмонов, Н.Н. Назрублоев // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. —2018 г. —Т.61. —№ 7-8. —С. 609—614.

[102]. Шокамолова Дж.А. Асимтотическая формула в задаче Эстермана с почти равными слагаемыми [Текст] / Дж.А. Шокамолова // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. —2010 г. —Т.53. —№ 5. —С. 325—332.

[103]. Рахмонов З.Х. Короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числамиn [Текст] / З.Х. Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. —2000 г. —Т.43. —№ 3. —С. 27—40.

[104]. Фозилова Д.М. Об одной тернарной задаче с почти равными слагаемыми [Текст] / З.Х. Рахмонов, Д.М. Фозилова // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. —2012 г. —Т.55. —№ 6. —С. 433—440.

[105]. Рахимов А.О. Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми [Текст] / А.О. Рахимов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. —2015 г. —Т.58. —№ 9. —С. 769—771.

[106]. Рахимов А.О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми [Текст] / А.О. Рахимов, Ф.З. Рахмонов // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Издательство: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского —ISSN: 1810—4134. —2016 г. —№ 8. —С. 87—89.

[107]. Рахмонов З.Х. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми [Текст] / К.И. Мирзоабдугафуров, З.Х. Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. —2008 г. —Т.51. —№ 2. —С. 83—86.

[108]. Рахмонов З.Х. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми [Текст] / З.Х. Рахмонов // Тезисы докладов международной конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященную 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего. Москва. Россия. —30 марта —2 апреля —2009 г. —С. 432.

[109]. Азамов А.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми [Текст] / А.З. Азамов, З.Х. Рахмонов. // Доклады АН РТ. —2011 г. —Т.54. —№ 3. —С. 165—172.

[110]. Назрублоев Н.Н. Проблема Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми [Текст] / Н.Н. Назрублоев, З.Х. Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. —2014 г. —Т.57. —№ 11-12. —С. 823—830.

[111]. Озодбекова Н.Б. О равномерном распределении по модулю единица значений квадратичного многочлена, аргумент которого принимает значения из короткого интервала [Текст] / Н.Б. Озодбекова // Доклады АН РТ. —2013 г. —Т.56. —№ 4. —С. 261—264.

[112]. Фаткина С.Ю. Об одном обобщении тернарной проблемы Гольдбаха для почти равных слагаемых [Текст] / С.Ю. Фаткина // Вестник Московского Университета. серия 1. математика. механика. —2001 г. —№ 2

[113]. Рахмонов П.З. Короткие суммы с нецелой степенью натурального числа [Текст] / П.З. Рахмонов // Математические заметки. —2014 г. —Т.95. —№ 5. —С. 763—774.

[114]. Рахмонов П.З. Обобщенная тернарная проблема Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми [Текст] / П.З. Рахмонов // Математические заметки. —2016 г. —Т.100. —№ 3. —С. 410—420.

[115]. Линник Ю.В. Избранные труды — Ленинград. [Текст] / Ю.В. Линник // —Наука. —1980.

[116]. Линник Ю.В. О густоте нулей L – рядов [Текст] / Ю.В. Линник // Изв. АН СССР. сер. матем. —1946. —Т. 10. —№ 1. —С. 35—46.

[117]. Balog A., Perelli A. Exponential sums over primes in short intervals [Текст] / A. Balog, A. Perelli // Acta Math. Hung. —1986. —vol. 48. —№ 1–2. —P. 223—228.

[118]. Jutila M. Mean value etstimates for exponential sums with applications to L-functions [Текст] / M. Jutila // Acta Arithmetica. —1991. —V. 57. —Is. 2. —P. 93—114.

[119]. Wright E.M. The Representation of a Number as a Sum of Three or Four Squares [Текст] / E.M. Wright // Proceedings of the London Mathematical Society. Volume s2-42. —Issue 1. —1937. —P.481—500. —doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.481.

[120]. Rane V.V. On the mean square value of Dirichlet L-series [Текст] / V.V. Rane // J. London Math. SoC. —1980. —№ 2. —Vol.21 —P. 203—215.

[121]. Zhan Tao On the Mean Square of Dirichlet L-Functions [Текст] / T. Zhan // Acta Mathematica Sinica. New Series. —1992. —Vol.8. —№ 2. —P. 204—224.

[122]. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел [Текст] / А.А. Карацуба // —М.: —Наука. —1983 г. —2-ое изд.

[123]. Архипов Г.И. Теория кратных тригонометрических сумм. [Текст] / Г.И. Архипов, А.А. Карацуба, В.Н. Чубариков // —М.: —Наука. —1987 г.

[124]. Дэвенпорт Х. Мультипликативная теория чисел [Текст] / Х. Дэвенпорт // —М.: —Наука. —1971 г.

[125]. Прахар К. Распределение простых чисел [Текст] / К. Прахар // —М.: —Мир. —1967 г.

[126]. Виноградов И.М. Основы теории чисел [Текст] / И.М. Виноградов // —М: —Наука. —1981 г. —9-ое изд.

[127]. Weil A. On some exponential sums [Текст] / A. Weil // ProC. Nat. Acad. Sci. USA. —1948. —34. —№ 5. —P. 204—207.

[128]. Huxley M.N. On the differences between consecutive primes [Текст] / M.N. Huxley // Invent. math. —15. —(1972). —P. 164—170.

[129]. Уиттекер Э.Т. Курс современного анализа. ч. 1. Основные операции анализа [Текст] / Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон // Изд. 2–е. Перев. с англ. Физматгиз. —М. —1963 г.

Публикации автора по теме диссертации в рецензируемых изданиях из списка ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-A]. Собиров А.А. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Доклады НАН Таджикистана. —2020 г. —т.63. —№ 5-6. —С. 279—288.

[2-A]. Собиров А.А. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Доклады НАН Таджикистана. —2020 г. —т.63. —№ 7-8. —С. 405—415.

[3-А]. Собиров А.А. Короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числами в окрестности центра больших дуг [Текст] / А.А. Собиров // Доклады НАН Таджикистана. —2021 г. —т.64. —№ 11-12. —С. 611–620.

[4-А]. Собиров А.А. Проблема Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми [Текст] / А.А. Собиров // Доклады НАН Таджикистана. —2022 г. —т.65. —№ 1-2. —С. 5–13.

В других изданиях:

[5-А]. Собиров А.А. Оценка тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах [Текст] / А.А. Собиров // Современные проблемы алгебры и теории чисел, материалы научно-теоретической конференции, посвящённой 90 – летию со дня рождения профессора Бабаева Г.Б. Душанбе. 14—15 декабря —2018 г. —С. 123—131.

[6-А]. Собиров А.А. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Современные проблемы математики, проблемы и их пути решения, Материалы международной научной онлайн конференции г. Термез. Узбекистан. 21—23 октября 2020 г. —С. 18—19.

[7-А]. Собиров А.А. О поведении коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений, материалы международной конференции, посвящённой 70 —летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича. Душанбе.25—26 декабря —2020 г. —С. 254—255.

[8-А]. Собиров А.А. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах за исключением малой окрестности их центров [Текст] / А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Актуальные проблемы современной математики, материалы международной конфренции, посвящённой 80 —летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова. Душанбе. 25—26 июня —2021 г. —С. 224—226.

[9-A]. Собиров А.А. О проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми [Текст] / А.А. Собиров // Современные проблемы теории чисел и математического анализа, материалы международной конференции, посвящённой 80–летию с дня рождения доктора физика–математических наук, профессора Дододжона Исмоилова. Душанбе. 29—30 апреля —2022 г. —С. 213—220.