



«Утверждаю»
Ректор Таджикского национального университета,
доктор экономических наук, профессор
Хушвахтзода К.Х.
февраля 2023 г.

Отзыв ведущей учреждения
на диссертацию Собирова Абдушукура Абдурасуловича «Асимптотическая формула в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Актуальность темы диссертации. Основным предметом исследования диссертационной работы является изучение коротких кубических тригонометрических сумм Вейля с простыми числами вида $S_3(\alpha; x, y)$ и их приложений к обобщению проблемы Эстермана о представлении достаточно большого натурального числа N в виде

$$p_1 + p_2 + p_3^k = N, \quad (1)$$

при $k = 3$ в простых числах p_1, p_2 и p_3 при условии, что слагаемые почти равны, то есть, когда

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left| p_3^3 - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H = N^\theta, \quad \theta < 1, \quad (2)$$

в случае $k = 4$. В круг таких задач также входят решения диофантовых уравнений

$$p_1^s + p_2^s + \dots + p_l^s = N, \quad \left| p_i - \sqrt[s]{\frac{N}{l}} \right| \leq H, \quad H = N^\theta, \quad \theta < \frac{1}{s}, \quad (3)$$

с возможной наименьшей θ . Задача (3) при $s = 1$ и $l = 3$ называется тернарной проблемой Гольдбаха с почти равными слагаемыми, которую при $\theta = \frac{63}{64}$ решил С.Б. Хейзелгроув, результат которого затем улучшили В. Статулявичус, Цзя Чаохуа, Пан Чен-дон и Пан Чен-бяо, Ж. Тао. Наилучший результат в этой задаче с $\theta = \frac{7}{12}$ принадлежит Цзя Чаохуа.

Известные китайские математики Дж.Лю и Ж.Тао в малых и в больших дугах получили нетривиальные оценки коротких квадратичных тригонометрических сумм Вейля с простыми числами вида $S_2(\alpha; x, y)$ при условии $y \geq x^{\frac{11}{16} + \epsilon}$, прилагая которые

- решили обобщение проблемы Эстермана для квадратов простых чисел при условии, что слагаемые почти равны, то есть задачу (1) при $k = 2$ с $\theta = \frac{27}{32} + \epsilon$;

- доказали задачу (3) при $s = 2$ и $l = 5$ с $\theta = \frac{45}{46} + \varepsilon$, то есть обобщение теореме Хуа Ло Гена о представлении большого натурального числа $N \equiv 5 \pmod{24}$, как суммы пяти квадратов простых чисел, при условии, что эти слагаемые почти равны.

Рассматриваемая в работе А.А. Собирова задача (1) – (2) при $k = 3$ по сравнению с упомянутыми выше задачами, является более трудной, так как последовательность $p_1 + p_2 + p_3^3$ является более редкой и сложной по структуре.

Структура и основные результаты диссертации. Диссертация А.А.Собирова состоит из списка обозначений, введения, общей характеристики работы, трёх глав, обсуждения полученных результатов, выводов, рекомендаций по практическому использованию результатов и списка литературы, насчитывающего 138 наименований.

Во введении изложена краткая история исследуемых задач, обосновываются актуальность темы и её степень научной разработанности, а также приведены методы исследования, научная новизна, положения, выносимые на защиту.

В первой главе, состоящей из двух параграфов, даётся обзор изученной литературы по теме диссертационной работы и приведены основные методы исследования.

Вторая глава состоит из четырёх параграфов. В первом параграфе приведены известные леммы, которые применяются в последующих параграфах.

Третий и четвёртый параграфы посвящены коротким линейным и кубическим тригонометрическим суммам с простыми числами. Для этих сумм, то есть для сумм $S_1(\alpha; x, y)$ и $S_3(\alpha; x, y)$ при $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1.5A+0.25b+18}$, $A \geq 0$ и $b \geq 0$ — фиксированные числа, доказаны асимптотические формулы в малой окрестности $\lambda \leq (18\pi xy^2)^{-1}$ центров больших дуг $\mathcal{M}(\mathcal{L}^b)$. Эти результаты являются уточнением результатов китайских математиков Дж.Лю и Ж.Тао для сумм вида $S_k(\alpha; x, y)$ при $k = 1$ и $k = 3$.

Пятый параграф посвящён выводу нетривиальной оценки коротким кубическим тригонометрическим суммам с простыми числами $S_3(\alpha; x, y)$ при $y \geq x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}} \mathcal{L}^{c_3}$, $\eta_3 = \frac{2}{7+4\sqrt{3}}$, $c_3 = c(b_1) > 0$ в больших дугах $\mathcal{M}(\mathcal{L}^b)$ за исключением малой окрестности их центров.

Третья глава посвящена нахождению асимптотической формуле при $k = 3$ для числа решений диофантова уравнения (1)), при $H \geq N^{1-\frac{1}{15+3\eta_3}} \mathcal{L}^{c_3}$ с условиями (2), то есть решена проблема Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми. Доказательство этой теоремы проводится круговым методом Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова с использованием результатов второй главы.

Научная новизна. Полученные в диссертации результаты являются новыми и заключаются в следующем:

1. получена асимптотическая формула с остаточным членом для коротких линейных тригонометрических сумм Германа Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг;
2. получена асимптотическая формула с остаточным членом для коротких кубических тригонометрических сумм Германа Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг;

3. найдена нетривиальная оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах кроме малых окрестностей их центров;
4. получена асимптотическая формула для числа представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы двух простых чисел и куба простого числа, при условии, что они почти равны.

Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов. Основные результаты диссертации носят теоретический характер и они могут быть использованы в научных институтах и организациях, которые проводят исследования в аналитической теории чисел, в том числе в Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН, Институте математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, МГУ им. М.В.Ломоносова, Таджикском национальном университете, Таджикском государственном педагогическом университете им. С.Айни, а также в учебном процессе при чтении спецкурсов по аналитической теории чисел.

Степень достоверности и апробация результатов исследования. Все утверждения теорем и научные положения, сформулированные в диссертации, а также, полученные автором формулы и оценки полностью обоснованы строгими математическими доказательствами с применением современных методов аналитической теории чисел и математического анализа. Достоверность и новизна полученных автором результатов не вызывает сомнений. Результаты диссертационной работы были доложены и получили положительные отзывы на различных международных конференциях и семинарах. Они опубликованы в научной печати, в том числе, в 4 публикациях в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан, в которых материалы диссертации отражены достаточно полно.

Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, и подтверждается исследованиями других авторов.

Соответствие автореферата основному содержанию диссертации. Диссертация и автореферат оформлены в соответствии с существующими требованиями, имеют ясный и понятный научный язык. Содержание диссертации достаточно полно и подробно раскрывает постановку, методы и результаты решения рассмотренных задач. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Замечания по содержанию и оформлению диссертации. В работе имеются некоторые неточности редакционного характера, например

- стр. 53, строки 6 снизу: вместо " \leq " должен быть знак " \ll ";
- стр. 81, строка 8 сверху: вместо "лемме ???" должно быть "лемме 1 ([122], стр. 178)";
- стр. 88, строка 4 снизу вместо второго знака " $=$ " должен быть знак " \ll ",

а также имеются некоторые ошибки в окончаниях, которые не влияют на общую положительную оценку диссертации А.А.Собирова

Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным «Положением о присуждении учёных степеней». На основании вышеизложенного считаем, что диссертационная работа «Асимптотическая формула в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми», представленная на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, является научно-квалификационной работой, в которой исследованы короткие кубические тригонометрические суммы Г.Вейля с простыми числами, и оно приложено к решению обобщения проблемы Эстермана для кубов простых чисел, при условии, что слагаемые почти пропорциональны, соответствует всем требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, а её автор Собиров Абдушукур Абдураулович заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

А.А.Собиров выступил с докладом по материалам диссертации на расширенном заседании кафедры алгебры и теории чисел 10 февраля 2023 г.

Отзыв подготовила доцент кафедры алгебры и теории чисел, кандидат физико-математических наук, Бобоева Рафоат. Отзыв был заслушан, обсуждён и единогласно утверждён на заседании кафедры «Алгебры и теории чисел» 10 февраля 2023 года, протокол №5.

Председатель заседания, декан
механико-математического факультета
кандидат технических наук



Косимов И.Л.

Эксперт, кандидат физико-математических наук
по специальности 01.01.06 – Математическая логика,
алгебра и теория чисел



Бобоева Р.

Секретарь заседания, заведующий кафедрой Алгебры
и теории чисел ТНУ, кандидат физико-математических
наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика,
алгебра и теория чисел



Хокиев Д.Дж.

Сведения об оппонировавшей организации
Таджикский национальный университет
734025, г. Душанбе, проспект Рудаки 17
Тел: +992(37) 2216225; E-mail: info@tnu.tj;
сайт: <http://www.tnu.tj>

Подписи Косимова И.Л., Бобоевой Р. и Хокиева Д.Дж. прилагаются.
Начальник УК и СЧ ТНУ

15.02.2023



Тавкиев Э.Ш.