

Отзыв официального оппонента на диссертацию Собирова Абдушукура Абдурасуловича «Асимптотическая формула в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теории чисел

Актуальность темы диссертации. Основным предметом исследования диссертационной работы является изучение коротких тригонометрических сумм Вейля с простыми числами и их приложений к проблеме Эстермана о представлении достаточно большого натурального числа N , в случае $k = 3$, в виде

$$p_1 + p_2 + p^k = N, \quad (1)$$

в простых числах p_1, p_2 и p_3 при условии, что слагаемые почти равны, то есть

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq N^{1-\theta} \ln^{\eta} N, \quad i = 1, 2, \quad \left| p_3^k - \frac{N}{3} \right| \leq N^{1-\theta} \ln^{\eta} N.$$

И.М. Виноградов в 1937 году создал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами. Пользуясь этим методом, он впервые получил нетривиальную оценку линейной тригонометрической суммы с простыми числами и доказал асимптотическую формулу для числа представлений нечётного N в виде $N = p_1 + p_2 + p_3$, следствием которой является решение тернарной проблемы Гольдбаха о представлении нечётного натурального числа как суммы трёх простых чисел. Воспользовавшись этим методом Эстерман в 1937 г. доказал при $k = 2$ асимптотическую формулу для числа решений диофантова уравнения

$$N = p_1 + p_2 + m^k, \quad (2)$$

в простых числах p_1, p_2 и натурального m , а в 1938 г. Хуа Ло Гси доказал асимптотическую формулу для числа представлений достаточно большого натурального числа N , $N \equiv 5 \pmod{24}$ в виде суммы пяти квадратов простых чисел. Основным моментом при исследовании аддитивных задач с более жёсткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны является оценка коротких тригонометрических сумм вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha n^k), \quad T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e(\alpha m^k).$$

Сумму $S_k(\alpha; x, y)$ впервые исследовал И.М. Виноградов. Он получил нетривиальную оценку $S_1(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln \ln x)^2), \tau = x^{\frac{1}{3}}$ при $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$. Тернарную проблему Гольдбаха с почти равными слагаемыми решил С.Б. Хаселгров, результат которого затем улучшили В. Статулявичус, Jia Chao-hua, Пап Чен-дон и Пап Чен-бяю, Ж.Тао. Асимптотическую формулу в обобщении теоремы Эстермана для почти равных слагаемых в случае $n = 2, 3, 4$ доказали З.Х. Рахмонов и его ученики. Дж.Лю и Т.Жан решили обобщение

проблемы Эстермана для квадратов простых чисел с почти равными слагаемым, то есть задачу (1) при $k = 2$. Они также решили обобщение теоремы Хуа Ло Гена о представимости достаточно большого натурального числа в виде суммы пяти почти равных квадратов простых чисел.

В диссертационной работе А.А. Собирова изучено поведение коротких линейных и кубических тригонометрических сумм Г. Вейля с простыми числами в больших дугах, прилагая которые найдена асимптотическая формула в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми.

Оценка содержания диссертации. Диссертационная работа занимает 128 страниц, и состоит из списка обозначений, введения, общей характеристики работы, трёх глав, обсуждения полученных результатов, выводов, рекомендаций по практическому использованию результатов и списка литературы, насчитывающего 138 наименований.

Во введении обосновываются актуальность темы и её степень научной разработанности. формулируются цель исследования, задачи исследования, а также приведены научная новизна исследования, и положения, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена обзору изученной литературы по теме диссертационной работы. основным методам исследования и состоит из двух параграфов.

Вторая глава состоит из четырёх параграфов. В первом параграфе приведены известные леммы, которые применяются в последующих параграфах.

В третьем и четвёртом параграфах для коротких линейных и кубических тригонометрических сумм с простыми числами, то есть при $k = 1$ и $k = 3$ для сумм вида $S_k(\alpha; x, y)$ при $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1.5A+0.25b+18}$, $A \geq 0$ и $b \geq 0$ — фиксированные числа, доказаны асимптотические формулы в малой окрестности $\lambda \leq (18\pi xy^2)^{-1}$ центров больших дуг

$$\mathfrak{M}(\mathcal{L}^b) = \left\{ \alpha : \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \mathcal{L}^b \right\},$$

которые соответственно являются уточнением и обобщением результатов китайских математиков Дж.Лю и Ж.Тао для сумм вида $S_k(\alpha; x, y)$ при $k = 1$ и $k = 3$.

В пятом параграфе доказана нетривиальная оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами $S_3(\alpha; x, y)$ при

$$y \geq x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}} \mathcal{L}^{c_3}, \quad \eta_3 = \frac{2}{7+4\sqrt{3}}, \quad c_3 = \frac{2A+24+(\sqrt{3}-1)b_1}{4\sqrt{3}-3}.$$

в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathcal{L}^b)$ за исключением малой окрестности их центров.

Доказательство вышечисленных результатов существенно опирается на плотностную теорему для нулей L -функций Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы, являющуюся следствием теоремы о втором моменте L -функций Дирихле в критической прямой

В третьей главе доказана теорема об асимптотической формуле при $k = 3$ для числа решений диофантова уравнения (1), при $H \geq N^{1-\frac{1}{15+3\eta_3}} \mathcal{L}_3^{c_3}$ с условиями (2), то есть решена

проблема Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми. Доказательство этой теоремы проводится круговым методом Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова с использованием результатов второй главы.

Новизна полученных результатов. Основные результаты полученные в работе являются новыми, и состоят в следующем:

- получена асимптотическая формула с остаточным членом для коротких линейных тригонометрических сумм Германа Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг;
- получена асимптотическая формула с остаточным членом для коротких кубических тригонометрических сумм Германа Вейля с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг;
- найдена нетривиальная оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах кроме малых окрестностей их центров;
- получена асимптотическая формула для числа представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы двух простых чисел и куба простого числа, при условии, что они почти равны.

Степень достоверности и апробация результатов исследования. Научные положения, выводы и рекомендации, приведённые в диссертации являются обоснованными, снабжены корректными математическими доказательствами с применением современных методов аналитической теории чисел и математического анализа, что свидетельствует об их достоверности.

Основные результаты диссертации неоднократно обсуждались на международных научных конференциях, проходивших в Республике Таджикистан и в Республике Узбекистан. Они опубликованы в научной печати, в том числе, в 4 публикациях в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан, в которых материалы диссертации отражены достаточно полно.

Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов. Основные результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в научных институтах и организациях, занимающихся аналитической теорией чисел, в том числе в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Институте математики им. А. Джуроева НАН Таджикистана, в МГУ им. М.В.Ломоносова, в Таджикском национальном университете, в Кабардино-Балкарском государственном университете им. Х.М.Бербекова и в других учебных заведениях в учебном процессе при чтении спецкурсов.

Соответствие автореферата основному содержанию диссертации. Автореферат диссертации правильно и полно отражает содержание, актуальность темы исследования,

новизну и значимость полученных результатов, содержит все основные положения и выводы. Диссертация и автореферат оформлены в соответствии с существующими требованиями

Замечания по содержанию и оформлению диссертации. В диссертации имеются отдельные опечатки и стилистические погрешности, например:

- стр. 41, строки 5 и 7 сверху: вместо " \leq " должен быть знак " \ll ";
- стр. 81, строка 8 сверху: вместо "лемме ???" должно быть "лемме 1 ([42], стр. 55)";
- стр. 88, строка 3 вместо второго знака " $=$ " должен быть знак " \ll ";

однако они не влияют на положительную оценку диссертационной работы.

Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным «Положением о присуждении учёных степеней». Диссертационная работа «Асимптотическая формула в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми», представленная на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук является научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для аналитической теории чисел, и полностью соответствует всем требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, а её автор Собиров Абдушукур Абдурасулович заслуживает присуждения ей учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент,

доктор физико-математических наук по специальности
01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел,
профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений
ФГБОУ ВО Кабардино-Балкарского государственного
университета им. Х.М.Бербекова



Пачев У.М.

Адрес: 360004, Кабардино-Балкарская Республика,
г. Нальчик, ул. Чернышевского, д. 173.

E-mail: urusbi@rambler.ru, тел.: +79287070208.

Подпись У.М. Пачева заверяю,
зам. начальника управления кадрового и правового
обеспечения ФГБОУ ВО Кабардино-Балкарского
государственного университета им. Х.М. Бербекова



М.В. Аришшева